Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина
Высшая школа
экономики
и менеджмента

Е. А. ТРОФИМОВА
С. В. ПЛОТНИКОВ
Д. В. ГИЛЁВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Е. А. Трофимова
С. В. Плотников
Д. В. Гилёв

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлениям подготовки
080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73-1
Т 761

Под общей редакцией
Е. А. Трофимовой

Рецензенты
кафедра прикладной математики и технической графики
Уральской государственной архитектурно-художественной академии
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор С. С. Титов);
М. Ю. Хачай, доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник, заведующий отделом
математического программирования
Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Трофимова, Е. А.

Т 761 Математические методы анализа : [учеб. пособие] / Е. А. Трофимова, С. В. Плотников, Д. В. Гилёв ; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 272 с.

ISBN 978-5-7996-1413-3

Разделы учебного пособия включают блок теоретического материала и задачи, предназначенные как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы. Дается экономическая интерпретация математических понятий.

Для студентов, изучающих дисциплины «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимальных решений».

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73-1

ISBN 978-5-7996-1413-3
© Уральский федеральный университет, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов третьего поколения по экономическим специальностям. Оно соответствует программе дисциплин «Математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимальных решений» и включает такие разделы, как введение в математический анализ, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, ряды, функции нескольких переменных, основы линейной алгебры, основы теории вероятностей и математической статистики.

При написании пособия авторы руководствовались принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов и усиления ее прикладной экономической направленности.

При определении основных понятий отдавалось предпочтение классическому подходу: например, понятие непрерывности функции вводилось после рассмотрения понятия предела, определенный интеграл определялся как предел интегральной суммы. Там, где это возможно, раскрывается экономический смысл математических понятий (например, производная, интеграл), рассматриваются приложения высшей математики в экономике (предельный анализ, эластичность функции). Такие приложения рассчитаны на уровень подготовки студентов начальных курсов и не требуют дополнительной экономической информации.

Каждая глава содержит теоретический материал, даются примеры решения задач и задачи для самостоятельной работы. Эти задачи могут быть эффективно использованы для аудиторных и домашних работ, а также для самоконтроля по вузовскому общему курсу математики.

Такое построение пособия потребовало сделать изложение теоретического материала более кратким, отказаться от громоздких доказательств утверждений.

Для усвоения учебного материала каждой главы рекомендуется вначале изучить теорию и рассмотреть примеры решения задач, затем решить часть задач для самостоятельной работы.

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Элементы теории множеств и математической логики

Понятие множества относится к основным понятиям математики и в силу этого его нельзя определить через какое-то более общее понятие.

Объекты, имеющие какой-либо общий признак и рассматриваемые как единое целое, составляют *множество*; сами объекты по отношению к множеству являются *элементами множества*.

Элементы множества, в свою очередь, также могут быть множествами. Например, учащиеся школы № N образуют множество, каждый ученик (ученица) — элемент этого множества. Это же множество можно организовать иначе: множество учащихся школы № N состоит из классов школы № N, а класс школы № N состоит из учеников (учениц) данного класса.

Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами, элементы множеств — малыми латинскими буквами.

Множества могут быть заданы:

– простым перечислением элементов (элементы заключаются в фигурные скобки): $A = \{1, 2, 3\}$;
– указанием общего признака всех элементов: $X = \{x : 1 < x < 2\}$.

В первом примере множество состоит из 3 чисел: 1, 2 и 3; во втором примере множество состоит из бесконечного количества действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих условию $1 < x < 2$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым*.

Если все элементы множества B являются также элементами множества A, то B называется *подмножеством множества* A.

Пустое множество является подмножеством любого множества, любое непустое множество является подмножеством самого себя (это так называемые *несобственные* подмножества).

Множества A и B *равны*, если одновременно A — подмножество B и B — подмножество A. Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Рассмотрим способы сокращенной записи некоторых утверждений относительно множеств и операций над множествами:

$\varnothing$	пустое множество;
$a \in A$	читается: «a принадлежит множеству A» («a содержится в множестве A», «множество A содержит a», «множество A включает элемент a»);
$a \notin A$	«элемент a не принадлежит множеству A»;
$A \supset B$	«B — подмножество множества A» («A содержит B», «B содержится в A», «A включает B», «B включается в A»);
$A \subset B$	«A — подмножество множества B»;
$A = B$	«A равно B», «A совпадает с B»;
$A \bigcup B$	объединение (сумма) множеств A и B; в объединение входят все элементы, принадлежащие хотя бы одному из этих множеств;
$A \bigcap B$	пересечение (произведение) множеств A и B; в пересечение входят элементы, каждый из которых принадлежит и множеству A, и множеству B.

Рассмотрим способы сокращенной записи некоторых логических операций и стандартных словосочетаний (ниже малыми греческими буквами будут обозначаться некоторые высказывания (утверждения)):

$\alpha \Rightarrow \beta$ *импликация*, логическое *следствие*; читается: «из высказывания α следует высказывание β», «высказывание β является следствием высказывания α»;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ эквивалентность, равносильность; читается: «высказывание α равносильно высказыванию β», «α эквивалентно β», «α и β равносильны»; означает, что $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \alpha$, т. е. высказывания α и β либо оба верны, либо оба неверны;

$\overline{\alpha}$ *отрицание* высказывания α;

$\vee$ *дизъюнкция*, логическое «*или*»; $\alpha \vee \beta$ означает «α или β»;

$\wedge$ *конъюнкция*, логическое «*и*»; $\alpha \wedge \beta$ означает «α и β»;

$\exists$ *квантор существования*, $\exists\, a \in A$ — читается: «существует элемент a, принадлежащий множеству A»;

$\forall$ *квантор всеобщности*, $\forall\, a \in A$ — читается: «для каждого элемента a, принадлежащего множеству A».

: читается: «такой, что», «удовлетворяющий условию», «имеет место».

Кроме того, далее будут использоваться сокращенные способы записи сумм и произведений большого количества элементов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Покажем на нескольких примерах применение символической записи:

1) $\left(x \in A \cup B\right) \Leftrightarrow \left(\left(x \in A\right) \vee \left(x \in B\right)\right)$ — определение объединения;

2) $\left(A=B\right)\Leftrightarrow\left(\left(A\supset B\right)\wedge\left(A\subset B\right)\right)$ — определение равенства множеств;

3) $\left(A\supset B\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in B:\left(\left(x\in B\right)\Rightarrow\left(x\in A\right)\right)\right)$ — определение подмножества.

1.2. Числовые множества

Числа 1, 2, 3, … называются *натуральными* и обозначаются $N = \{n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Числа $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, n, -n\ldots\}$, $n \in Z$, образуют множество *целых чисел*.

Числа вида $Q=\left\{q=\dfrac{m}{n}:m\in Z,n\in N\right\}$ образуют множество рациональных чисел.

Если $|\,m\,| < n$, то рациональная дробь называется *правильной*, если $|\,m\,| \geq n$ — *неправильной*.

Рациональные дроби представляются в виде конечных или бесконечных *периодических* десятичных дробей после деления числителя на знаменатель.

П р и м е р

$$\frac{1}{3}=0,333\ldots=0,(3),\quad \frac{2}{5}=0,4=0,3999\ldots=0,3(9),\quad \frac{7}{99}=0,0707\ldots=0,(07).$$

Числа, выражающиеся бесконечной непериодической десятичной дробью, составляют множество *иррациональных чисел I*. Например,

$$\sqrt{2}=1,41\ldots,\quad \pi=3,14159265359\ldots,\quad e=2,71828\,18284\,59045\ldots$$

Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел $R = Q\bigcup I$.

Между множеством действительных чисел и множеством всех точек прямой существует взаимно-однозначное соответствие.

Примеры числовых множеств

Множество элементов x: $\{x\}$

Элемент множества: $x \in \{x\}$

Отрезок (сегмент): $\{x\} = [a,b] = \{a \le x \le b\}$

Интервал: $\{x\} = (a,b) = \{a < x < b\}$

Полуинтервал (полусегмент): $\begin{cases} \{x\} = (a,\ b]: a < x \le b, \\ \{x\} = [a,\ b): a \le x < b \end{cases}$

Луч: $\begin{cases} \{x\} = [a,\ \infty) : (x \ge a), \\ \{x\} = (-\infty,\ b]: (x \le b) \end{cases}$

Окрестность точки c — это произвольный интервал (a, b), содержащий точку c.

Эпсилон-окрестность точки с представляет собой множество, задаваемое неравенством: $\{x : |x - c| < \varepsilon\}$, т. е. $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$

Ограниченные множества

Множество X называется *ограниченным сверху*, если существует такое число M, что $\forall x \in \{x\} : x \le M$, при этом M называется верхней границей множества X.

Утверждение 1. Ограниченное сверху множество имеет бесконечное число верхних границ.

Наименьшая из всех верхних границ называется *верхней гранью* $\overline{x} = Sup\ X$ (от лат. *supremum* — наивысшее).

Пример

$$\{-1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \overline{x} = 5.$$

Множество X называется *ограниченным снизу*, если существует такое число m, что $\forall x \in X : x \ge m$, при этом m — нижняя граница X.

Утверждение 2. Ограниченное снизу множество имеет бесконечное число нижних границ.

Наибольшая из всех нижних границ называется *нижней гранью* $\underline{x} = Inf\ X$ (от лат. *infimum* — наинизшее).

Множество X называется *ограниченным*, если существует число $M > 0$ такое, что $\forall x \in X : \left|x\right| \le M$. Ограниченное множество является одновременно ограниченным и снизу и сверху.

Множество X называется *неограниченным*, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется элемент $x \in X$, удовлетворяющий неравенству $\left|x\right| \ge M$.

Примеры неограниченных множеств

1) $(-\infty, \infty)$ — неограниченное множество,
2) $(-\infty, 2]$ — неограниченное снизу множество,
3) $[-5, \infty)$ — неограниченное сверху множество.

Замечание. Для того чтобы множество было неограниченным, достаточно, чтобы оно было неограниченным либо сверху, либо снизу.

2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n по определенному закону поставлено в соответствие некоторое число x_n, то множество $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ нумерованных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ называется *числовой последовательностью*. Элементы этого множества называются элементами последовательности.

Числовая последовательность может быть задана:

1) перечислением элементов;

2) формулой общего члена последовательности как функции номера $x_n = f(n)$;

3) в виде *рекуррентных соотношений*; задается несколько первых членов последовательности и правило, по которому вычисляются последующие члены: $x_{n+1} = f(x_n),\ x_1 = \text{const}$ или $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n), x_1 = c_1,\ x_2 = c_2$.

Примеры

1) $\{1, 4, 9, \ldots\} = \{n^2\}$;

2) $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$;

3) $\left\{1, \frac{13}{4}, \frac{11}{3}, \ldots\right\} = \left\{4 - \frac{3}{n^2}\right\} = \left\{\frac{4n^2 - 3}{n^2}\right\}$;

4) $x_{n+1} = 3x_n - 1,\ x_1 = 3 \Rightarrow x_2 = 8,\ x_3 = 23, \ldots$;

5) $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4 \Rightarrow x_3 = 8,\ x_4 = 16, \ldots \Rightarrow x_n = 2^n$.

Если рассмотреть произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел: $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n, \ldots$ и выбрать из последовательности $\{x_n\}$ ее члены с соответствующими номерами $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$, то полученная последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

П р и м е р

Для произвольной последовательности подпоследовательностями являются последовательности четных или нечетных членов.

Свойства ограниченных последовательностей:

1. Сумма двух ограниченных последовательностей является ограниченной последовательностью.

2. Разность двух ограниченных последовательностей является ограниченной последовательностью.

3. Произведение двух ограниченных последовательностей является ограниченной последовательностью.

2.1. Предел числовой последовательности

Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N (зависящее от ε), что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon\right).$$

Последовательность, имеющую конечный предел, называют *сходящейся*, а не имеющую конечного предела — *расходящейся*.

Другими словами, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если члены последовательности отличаются от a сколь угодно мало, начиная с некоторого номера.

П р и м е р

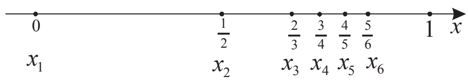
$$\{x_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Доказать по определению предела, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = 1.$

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\cancel{1} - \frac{1}{n} - \cancel{1}\right| < \varepsilon; \frac{1}{n} < \varepsilon, n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если взять $N(\varepsilon)$ — любое целое, большее, чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то неравенство $\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$ будет выполнено: $\forall n>N(\varepsilon)$.

Геометрическая интерпретация примера:



$$-\varepsilon<x_n-1<\varepsilon,\quad 1-\varepsilon<x_n<\varepsilon+1.$$

Например, если

$$\varepsilon=\frac{1}{2},\ N\left(\frac{1}{2}\right)=2;\ \ n>2\Rightarrow\left|x_n-1\right|<\frac{1}{2};$$

$$\varepsilon=\frac{1}{5},\ N\left(\frac{1}{5}\right)=5;\ \ n>5\Rightarrow\left|x_n-1\right|<\frac{1}{5}.$$

П р и м е р

Доказать по определению существование следующего предела:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{n^3+1}=0.$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \left|\frac{5n^2}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{5n^2}{n^3+1}<\varepsilon.$$

Заметим, что

$$n^3+1>n^3\Rightarrow\frac{1}{n^3+1}<\frac{1}{n^3}\Rightarrow\frac{5n^2}{n^3+1}<\frac{5n^2}{n^3}=\frac{5}{n}<\varepsilon,\ n>\frac{5}{\varepsilon}.$$

Если взять $N(\varepsilon)$ — любое целое, большее, чем $\dfrac{5}{\varepsilon}$, то неравенство $\left|\dfrac{5n^2}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon$ будет выполнено $\forall n>N(\varepsilon)$.

З а м е ч а н и е. Последовательность $\left\{(-1)^n\right\}$ не имеет предела, так как нельзя указать номер, после которого *все* элементы последовательности окажутся в сколь угодно малой окрестности какого-либо числа.

2.2. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M можно указать такое натуральное число N (зависящее от M), что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$.

$$\forall M > 0\ \exists N(M) : \forall n > N(M) \Rightarrow |x_n| > M.$$

Если числовая последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая и ее члены сохраняют определенный знак + или −, то последовательность $\{x_n\}$ *имеет предел* $+\infty$ или $-\infty$. Обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Пример

Последовательности $\{n^m\}$, $m > 0$, являются бесконечно большими, так как для любого $M > 0$ из $n^m > M$ следует, что если $n > \sqrt[m]{M}$, то условие определения выполнено.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N (зависящее от ε), что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |x_n| < \varepsilon).$$

Замечание. Из определения предела последовательности следует, что последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

П р и м е р

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $x_n = q^n$, $|q| < 1$, является бесконечно малой последовательностью, так как для любого $\varepsilon > 0$ из неравенства $|q^n| < \varepsilon$ следует, что при $n > \log_{|q|} \varepsilon$ это неравенство выполнено, тогда $N(\varepsilon) = \left[\log_{|q|} \varepsilon\right]$, где квадратные скобки обозначают целую часть заключенного в них числа.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1. Бесконечно малая последовательность ограничена**.**

2. Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

3. Разность двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой последовательностью.

5. Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Справедливость этого утверждения следует из того, что бесконечно малая последовательность всегда ограничена.

П р и м е р ы

1. Последовательность $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$ — бесконечно малая, так как ее элементы являются произведением элементов ограниченной последовательности $\{\cos n\}$ и бесконечно малой последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

2. Последовательность $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^3}\right\}$ — бесконечно малая, так как является суммой бесконечно малых последовательностей $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$.

3. Последовательность $\left\{\dfrac{2^{-n}}{n}\right\}$ — бесконечно малая, так как является произведением бесконечно малой последовательности $\left\{2^{-n}\right\}$ на бесконечно малую последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

Свойства сходящихся последовательностей:

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Обратное утверждение неверно, например, последовательность $x_n = \{\cos \pi n\}$ является ограниченной, но предела не имеет.

3. Сумма, разность, произведение и также частное (при условии, что $\forall n \in N$, $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящейся последовательностью и ее предел равен соответственно сумме, разности, произведению и частному пределов исходных последовательностей.

З а м е ч а н и е. Арифметические операции над сходящимися последовательностями приводят к таким же операциям над их пределами.

4. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \le b$ $(x_n \ge b)$, то и предел этой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ удовлетворяет неравенству $a \le b$ $(a \ge b)$.

5. Если элементы x_n и y_n сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \le y_n$, то их пределы удовлетворяют такому же неравенству: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Другими словами, можно переходить к пределу в неравенстве.

6. Если элементы сходящейся последовательности принадлежат отрезку $[a, b]$, то ее предел также принадлежит этому отрезку.

7. Пусть $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Пусть, начиная с некоторого номера, элементы последовательности $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенствам $x_n \le y_n \le z_n$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

8. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.

2.3. Монотонные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для любого n выполняется неравенство $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1})$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Если вместо нестрогих неравенств $x_n \le x_{n+1}$ и $x_n \ge x_{n+1}$ имеют место строгие неравенства $x_n < x_{n+1}$ или $x_n > x_{n+1}$, то последовательности называются *возрастающей* и *убывающей* соответственно.

Пример

1. Последовательность $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots, n, n, \ldots\}$ — неубывающая.

2. Последовательность $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}, \ldots\right\}$ — невозрастающая.

3. Последовательность $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$ — возрастающая, так как $x_{n+1} > x_n$.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{2n+1}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} > 0.$$

4. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ — убывающая, так как $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$

Признак сходимости монотонной последовательности. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то она сходится.

Пример

$x_n = \left\{\frac{2n-1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots\right\}$. Последовательность возрастающая и ограничена сверху, ее предел равен 2.

Задачи

1. Доказать, используя определение предела:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3}=2$

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{3n}\right)=2$

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}=0$

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2013}{n}=1$

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(n!)}{n}=0$

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin n!}{n+1}=0$

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+3n^3+7n^2+3n+2}{10n^3+5n^2+7n+10}=+\infty$

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3}{n+4}=+\infty$

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^2}{n^3+2n^2-1}=1$

1.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

1.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-3n^3+5n-7}{3n^4+4n^2+8}=\dfrac{2}{3}$

2. Доказать следующие равенства, используя свойства бесконечно малых последовательностей:

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n!)}{5n^2}=0$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\sin n}{3n^3}=0$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)\cos(n!)}{n(n+3)}=0$

3. Привести примеры последовательностей x_n и z_n с указанными свойствами:

3.1. x_n — бесконечно большая, z_n — ограниченная, а $\{x_n\cdot z_n\}$ не является бесконечно большой.

3.2. x_n — ограниченная, не имеющая предел.

4. Выяснить, монотонны ли следующие последовательности:

4.1. $x_n = n^2 + 1$

4.2. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

4.3. $x_n = \frac{n}{2^n}$

4.4. $x_n = \frac{2^n}{n!}$

4.5. $x_n = \frac{n^2}{3^n}$

4.6. $x_n = \frac{1}{\ln n}$

4.7. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

4.8. $x_n = \frac{2n+1}{n+2}$

4.9. $x_n = \frac{3n+1}{5n}$

4.10. $x_n = \sqrt{n}$

3. ФУНКЦИИ, ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Функцией одного аргумента называется закон, по которому каждому числу x из некоторого множества $D \subseteq \mathbb{R}$ ставится в соответствие некоторое единственное число y из множества $Y \subseteq \mathbb{R}$. Этот закон обычно записывают в виде $y = f(x)$.

Множество D называют *областью определения* этой функции, $D(f)$, а Y называют *множеством значений* функции, $E(f)$.

Существует три основных способа задания функций.

1. Аналитически, т. е. в виде формул:

– явно, т. е. задается формулой $y = f(x)$, в которой правая часть не содержит зависимой переменной. Например, функция $y = x^3 + 3x + 7$;

– неявно, т. е. задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y, заданная уравнением $y + \sin\left(x + 3y\right) = 0$;

– параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t — параметр. Например, $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 5\cos t \end{cases}$.

2. Графически, т. е. с помощью изображения на чертеже соответствия между точками D и Y.

3. Таблично, т. е. с помощью перечисления всех возможных значений аргумента рядом с соответствующими значениями функции.

3.1. Свойства функций

Функция называется *четной*, если для любого $x \in D$ выполняется равенство $f\left(-x\right) = f(x)$.

П р и м е р

Функция $y = x^2$ — четная, так как $f\left(-x\right) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция называется *нечетной*, если для любого $x \in D$ выполняется равенство $f\left(-x\right) = -f(x)$.

П р и м е р

Функция $y = x^3$ — нечетная, так как $f\left(-x\right) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

График нечетной степени симметричен относительно начала координат.

Если функция не является ни четной, ни нечетной, то ее *называют функцией общего вида*.

Функция называется *периодической,* если существует $T \neq 0$, что для любого $x \in D$ выполняется $\left(x+T\right) \in D$ и $f\left(x+T\right) = f(x)$ Число T называется периодом функции.

П р и м е р

$y = \sin x$ периодическая функция с $T = 2\pi$.

Функция называется *монотонно возрастающей*, если для любых $x_1 > x_2$ из области определения D верно неравенство $f\left(x_1\right) > f(x_2)$.

Функция называется *монотонно убывающей*, если для любых $x_1 > x_2$ из области определения D верно неравенство $f\left(x_1\right) < f(x_2)$.

Если вместо строгих неравенств имеют место нестрогие неравенства, то функции называются *неубывающей* и *невозрастающей* соответственно.

Функция называется *ограниченной* на множестве $D(f)$, если существует такое число M, что $\left|f\left(x\right)\right| \le M$ для любых x из области определения D.

П р и м е р

Функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ ограниченные, так как $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$.

Основные элементарные функции, их области определения и значений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Функция	Область определения, D	Область значений, Y
Степенные функции		
$y=x^n, n\in\mathbb{N}$, n – нечетное	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
$y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, n – четное	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
$y=\dfrac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$, n – нечетное	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y=\dfrac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$, n – четное	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
$y=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, n — четное	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$
$y=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, n — нечетное	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
Показательные функции		
$y=a^x$, $a>0$, $a\ne 1$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
Логарифмические функции		
$y=\log_a x$, $a>0$, $a\ne 1$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
Тригонометрические функции		
$y=\sin x$, $y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
$y=\operatorname{tg} x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$	$(-\infty,+\infty)$
$y=\operatorname{ctg} x$	$(\pi n, \pi+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$	$(-\infty,+\infty)$
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[-\pi; \pi]$
$y=\operatorname{arctg} x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$
$y=\operatorname{arcctg} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\pi; \pi)$

Пусть функция $y = f(x)$ есть функция независимой переменной x, определенной на множестве $D \subseteq \mathbb{R}$ с областью значений Y. Поставим в соответствии каждому $y \in Y$ единственное значение $x \in D$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве Y с областью значений D, называется *обратной*.

П р и м е р

Для функции $y = e^x$ обратной будет функция $x = \ln y$.

Заметим, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. линии $y = x$.

Пусть функция $f = f(u)$ есть функция переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u, в свою очередь, является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией (или суперпозицией функций, композицией функций).

П р и м е р

$y = \sqrt{\cos x}$ – сложная функция, так как она представима в виде $y = \sqrt{u}$, где $u = \cos x$.

3.2. Преобразования графиков функций

Преобразования графиков функций — это линейные преобразования функции $y = f(x)$ или ее аргумента x к виду $y = af(kx + b) + m$.

В табл. 2 представлены все преобразования графиков функций и приведены их графические интерпретации.

Построение графика функций $y = af(kx + b) + m$ с помощью преобразований происходит в три этапа:

1. Построение исходной элементарной функции $y = f(x)$.

2. Выполнение преобразований, связанных с аргументом функции, которые происходят справа налево, т. е. сначала строится $y = f(x + b)$, затем $y = f(kx + b)$.

3. Выполнение преобразований самой функции, которые происходят слева направо, т. е. сначала строится $y = af(\ldots)$, затем $y = af(\ldots) + m$.

Таблица 2

Общий вид функции	**Преобразования**
$y = f(x + b)$	***Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на*** $\lvert b \rvert$ ***единиц***: – вправо, если $b < 0$; – влево, если $b > 0$.
$y = f(x) + m$	***Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на*** $\lvert m \rvert$ ***единиц***: – вверх, если $m > 0$, – вниз, если $m < 0$.
Отражение графика	
$y = f(-x)$	Симметричное отражение графика относительно оси ***ординат.***
$y = -f(x)$	Симметричное отражение графика относительно оси ***абсцисс.***
Сжатие и растяжение графика	
$y = f(kx)$	– При $k > 1$ — сжатие графика к оси ординат в k раз (т. е. абсцисса каждой точки графика делится на k, а ордината не изменяется). – При $0 < k < 1$ — растяжение графика от оси ординат в k раз (т. е. абсцисса каждой точки графика делится на k, а ордината не изменяется).
$y = kf(x)$	– При $k > 1$ — растяжение графика от оси абсцисс в k раз (т. е. ордината каждой точки графика умножается на k, а абсцисса не изменяется). – При $0 < k < 1$ — сжатие графика к оси абсцисс в k раз (т. е. ордината каждой точки графика умножается на k, а абсцисса не изменяется).
Преобразования графика с модулем	
$y = \lvert f(x) \rvert$	– При $f(x) \geq 0$ — график остается без изменений. – При $f(x) < 0$ — график симметрично отражается относительно оси абсцисс.
$y = f(\lvert x \rvert)$	– При $x \geq 0$ — график остается без изменений. – При $x < 0$ — график симметрично отражается относительно оси ординат.

П р и м е р 1

Построим график функции $y=\dfrac{x}{1-x}$ с помощью преобразований графиков элементарных функций. Сначала приведем функцию к виду $y=af\left(kx+b\right)+m.$

$$y=\frac{x}{1-x}=\frac{x}{-(x-1)}=-\frac{\left(x-1+1\right)}{x-1}=-\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{1}{x-1}-1.$$

Первый этап. Исходной элементарной функцией является гипербола $y=\dfrac{1}{x}$. Строим ее, обозначая (1) на рис. 1.

Второй этап. Выполняем преобразования аргумента. Сдвинем вправо график функции $y=\dfrac{1}{x}$ на 1 единицу, получим график функции $y=\dfrac{1}{x-1}$, обозначенный (2) на рис. 2.

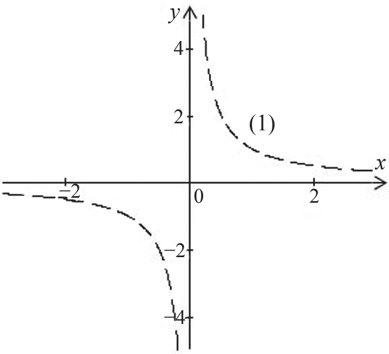


Рис. 1

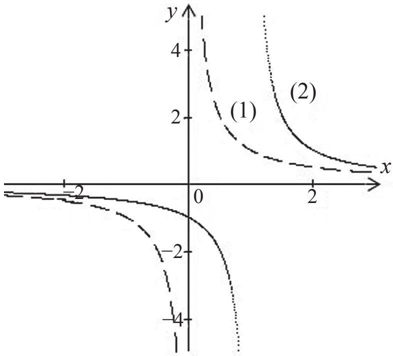


Рис. 2

Третий этап. Выполняем преобразования самой функции. Обращаем внимание, что преобразования функции происходят слева направо, т. е. вначале строим график $y=-\dfrac{1}{x-1}$, а затем $y=-\dfrac{1}{x-1}-1.$ График функции $y=-\dfrac{1}{x-1}$ строим путем отображения графика функций $y=\dfrac{1}{x-1}$ симметрично относительно оси абсцисс; обозначаем его (3) на рис. 3. График функции $y=-\dfrac{1}{x-1}-1$ (4) строим на рис. 4 с помощью сдвига графика функции $y=-\dfrac{1}{x-1}$ вдоль оси у на единицу вниз.

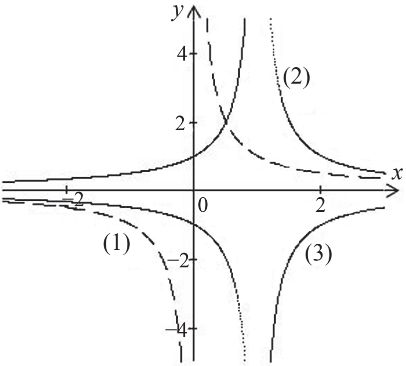


Рис. 3

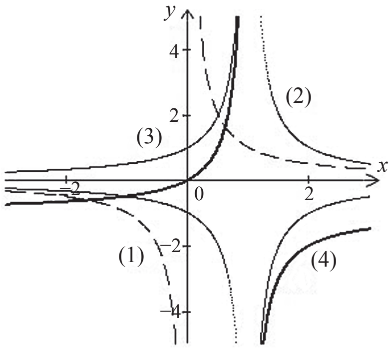


Рис. 4

П р и м е р 2

Построим график функции $y = |\, x^2 - 4x + 2 \,|$ с помощью преобразований графиков элементарных функций. Сначала приведем функцию к виду $y = af\left(kx + b\right) + m$. Для этого выделим полный квадрат:

$$y = \left|x^2 - 4x + 2\right| = \left|x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 2\right| = \left|\left(x-2\right)^2 - 2\,\right|.$$

Первый этап. Исходной элементарной функцией является парабола $y = x^2$. График ее изображен на рис. 5 и обозначен (1).

Второй этап. Выполняем преобразования аргумента. Сдвинем вправо график функции $y = x^2$ на 2 единицы вдоль оси x, получим график функции $y = (x-2)^2$, обозначенный (2) на рис. 6.

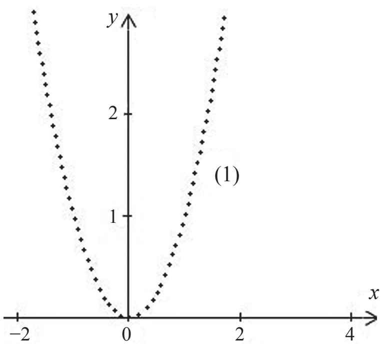


Рис. 5

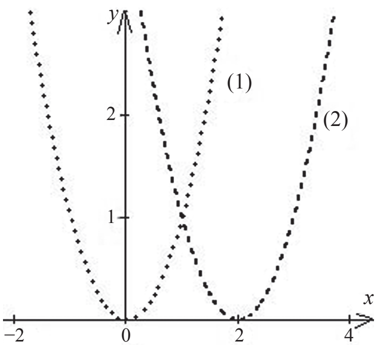


Рис. 6

Третий этап. Выполняем преобразования самой функции. Вначале строим график $y=(x-2)^2-2$, а затем $y=|(x-2)^2-2|$. График функции $y=(x-2)^2-2$ строим с помощью сдвига графика функций $y=(x-2)^2$ на 2 единицы вниз по оси y; обозначаем его (3) на рис. 7.

График функции $y=|(x-2)^2-2|$ (4) строим, оставляя часть графика функции $y=(x-2)^2-2$, находящуюся выше оси абсцисс, без изменений, а часть графика, которая ниже, — симметрично отражая относительно оси абсцисс. Нужный нам график изображен на рис. 8.

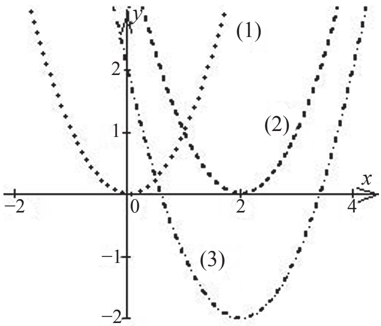


Рис. 7

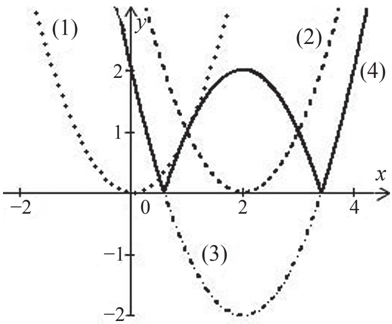


Рис. 8

П р и м е р 3

Построим график функции $y=3e^{2x-1}$ с помощью преобразований графиков элементарных функций.

Первый этап. Исходной элементарной функцией является экспонента $y=e^x$. Строим ее, обозначая (1) на рис. 9.

Второй этап. Выполняем преобразования аргумента. Обращаем внимание, что преобразования аргумента происходят справа налево, т. е. вначале строим график $y=e^{x-1}$, а затем $y=e^{2x-1}$. График функции $y=e^{x-1}$ строим путем сдвига графика функций $y=e^x$ вправо на 1 единицу по оси x; обозначаем его (2) на рис. 10.

Строим график функции $y=e^{2x-1}$ с помощью сжатия графика функции $y=e^{x-1}$ к оси ординат в 2 раза. Этот график обозначаем (3) на рис. 11.

Третий этап. Выполняем преобразования самой функции. Строим график $y=3e^{2x-1}$ с помощью растяжения графика функций $y=e^{2x-1}$ от оси абсцисс в 3 раза. Обозначаем его (4). Это и есть нужный нам график, изображенный на рис. 12.

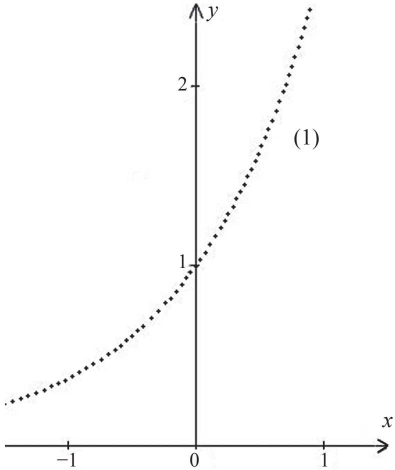


Рис. 9

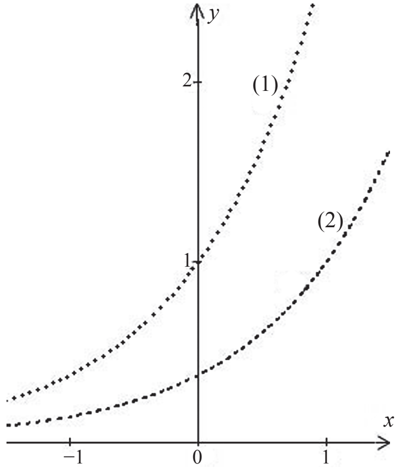


Рис. 10

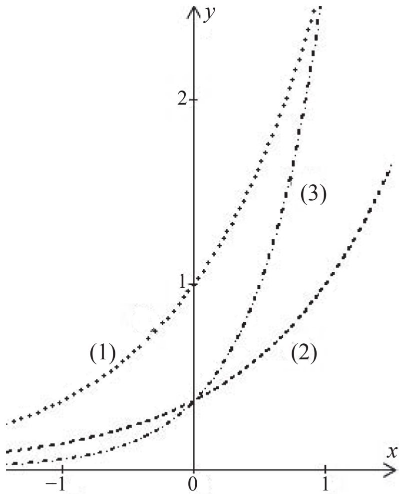


Рис. 11

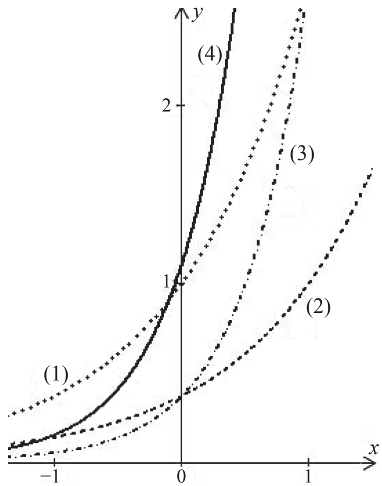


Рис. 12

П р и м е р 4

Построим график функции $y = |\,2\log_2 |3x+1||$ с помощью преобразований графиков элементарных функций.

Первый этап. Исходной элементарной функцией является $y = \log_2 x$. Строим график логарифма, обозначая (1) на рис. 13.

Второй этап. Выполняем преобразования аргумента. Обращаем внимание, что преобразования аргумента происходят справа налево, т. е. вначале строим график $y = \log_2 |x|$, далее $y = \log_2 |x+1|$, затем $y = \log_2 \left|3x+1\right|$. График функции $y = \log_2 |x|$ строим, учитывая, что при всех неотрицательных x он совпадает с графиком $y = \log_2 x$, а при отрицательных x график функции $y = \log_2 x$ симметрично отображается относительно оси ординат. Обозначаем новый график (2) на рис. 14. Таким образом, график (2) состоит из двух ветвей, одна из которых полностью совпадает с графиком (1).

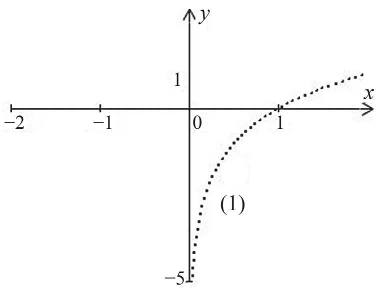


Рис. 13

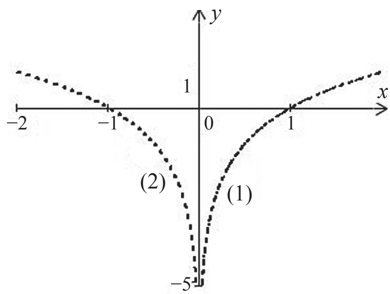


Рис. 14

График функции $y = \log_2 |x+1|$ строим путем сдвига графика $y = \log_2 |x|$ на единицу влево по оси x. Обозначаем его (3) на рис. 15. Строим график $y = \log_2 \left|3x+1\right|$ с помощью сжатия графика $y = \log_2 \left|x+1\right|$ к оси ординат в 3 раза. Обозначаем его (4) на рис. 16.

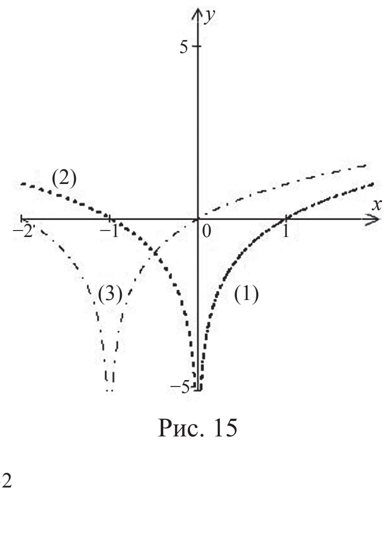


Рис. 15

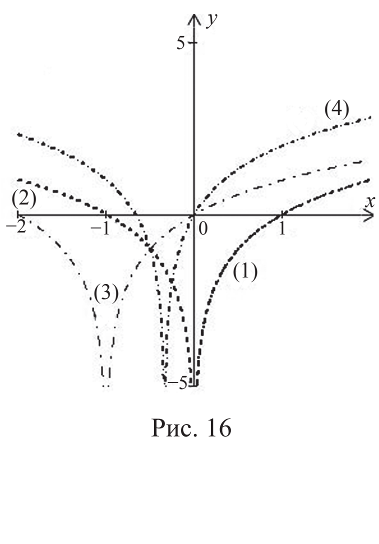


Рис. 16

Третий этап. Выполняем преобразования самой функции. Строим $y = 2\log_2 |3x+1|$ с помощью растяжения графика функций $y = \log_2 |3x+1|$ от оси абсцисс в 2 раза. Обозначаем его (5) на рис. 17. График функции $y = \left|2\log_2 |3x+1|\right|$ (6) строим, оставляя часть графика функции $y = 2\log_2 |3x+1|$, находящуюся выше оси абсцисс, без изменений, а часть графика, которая ниже, — симметрично отражая относительно оси абсцисс. Это и есть требуемый график, изображенный на рис. 18.

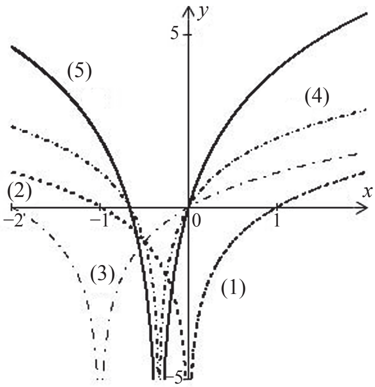


Рис. 17

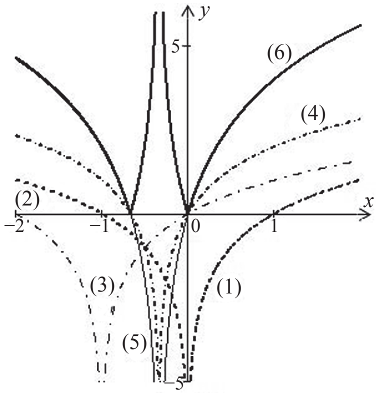


Рис. 18

П р и м е р 5

Построим график функции $y = \left|\sin\left|x - \frac{\pi}{4}\right|\right|$ с помощью преобразований графиков элементарных функций.

Первый этап. Исходной элементарной функцией является $y = \sin x$. Строим график и обозначаем его (1) на рис. 19.

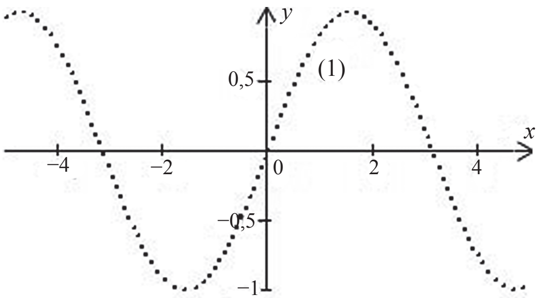


Рис. 19

Второй этап. Выполняем преобразования аргумента. Вначале строим график $y = \sin|x|$, затем $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$. График $y = \sin|x|$ строим, учитывая, что при всех неотрицательных x он совпадает с графиком $y = \sin x$, а при отрицательных x график функции $y = \sin x$ симметрично отображается относительно оси ординат. Обозначаем график (2) на рис. 20.

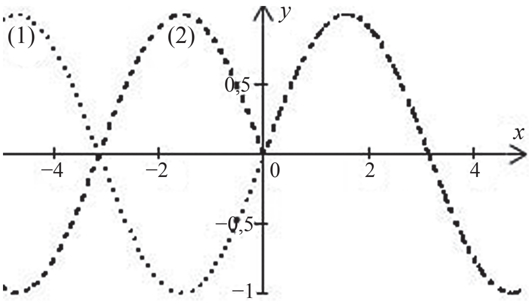


Рис. 20

График функции $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$ строим путем сдвига графика $y = \sin|x|$ на $\frac{\pi}{4}$ вправо по оси x. Обозначаем его (3) на рис. 21.

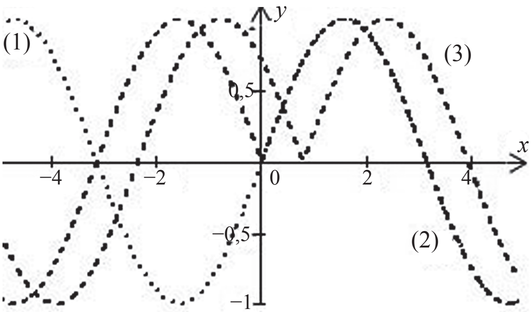


Рис. 21

Третий этап. Выполняем преобразования самой функции. График функции $y = \left|\sin\left|x - \frac{\pi}{4}\right|\right|$ (4) строим, оставляя часть графика функции $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$, находящуюся выше оси абсцисс, без изменения, а часть графика, которая ниже оси Ox, симметрично отображаем относительно оси абсцисс. Это и есть требуемый график, изображенный на рис. 22.

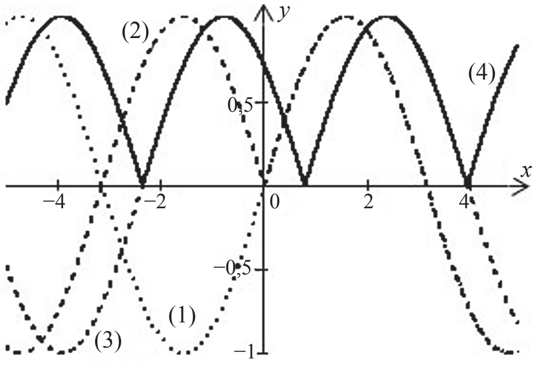


Рис. 22

Задачи

5. Найти область определения следующих функций:

5.1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x+4}$

5.2. $f\left(x\right)=\dfrac{\ln(9-x^2)}{\sqrt{x+1}}$

5.3. $f\left(x\right)=\sqrt{\log_{0,1}(x^2-4)}$

5.4. $f\left(x\right)=\sqrt{\log_{0,5}(6-5x)}$

5.5. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x-0,5}{\operatorname{tg} x}$

5.6. $f(x)=\dfrac{x+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{25-x^2}}$

5.7. $f\left(x\right)=\sqrt{x+2}-\ln(4-x)$

5.8. $f\left(x\right)=\sqrt{x+5}\cdot\arccos(x+5)$

5.9. $f\left(x\right)=\arcsin(x^2-1)$

5.10. $f\left(x\right)=3^{\sqrt{6-10x}}-\sin\dfrac{1}{x}$

5.11. $f\left(x\right)=\dfrac{\ln(9-x^2)}{(x-4)\,(x-1)\,(x+4)\,(x+5)}$

6. С помощью преобразований построить графики следующих функций:

6.1. $y=(x-1)^2-3$

6.2. $y=\left|4-x^2\right|$

6.3. $y=\left|x^2-5x+6\right|$

6.4. $y=\dfrac{(x-3)^3}{5}$

6.5. $y=\dfrac{1}{x+2}-3$

6.6. $y=\dfrac{x-3}{x+1}$

6.7. $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$

6.8. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$

6.9. $y=\mathrm{e}^{2x}$

6.10. $y=\mathrm{e}^{|x|}+1$

6.11. $y=2^{3x+1}$

6.12. $y=-2^{(1-2x)}+3$

6.13. $y=\sqrt{-x}$

6.14. $y=\sqrt{8-4x}$

6.15. $y=\sqrt{|x|-1}$

6.16. $y=\left|2-3\sqrt{\left|\dfrac{x}{2}+2\right|}\right|$

6.17. $y=\ln|x|$

6.18. $y=\ln(1+4x)$

6.19. $y=3-\ln(1-2x)$

6.20. $y=\dfrac{1}{4}\ln\left(-\dfrac{x}{2}\right)+2$

6.21. $y=3\log_2(x-2)-1$

6.22. $y=\left|\log_2|3x+4|\right|$

6.23. $y=\sin 2x$

6.24. $y=\cos\dfrac{x}{2}$

6.25. $y=5|\cos x|$

6.26. $y=6\,\mathrm{tg}\,2x-1$

6.27. $y=\left|\mathrm{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

6.28. $y=\dfrac{3}{2}\cos(2-2x)+1$

6.29. $y=2\sin\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

6.30. $y=2\cos|x|-1$

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

4.1. Предел функции в точке

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 23).

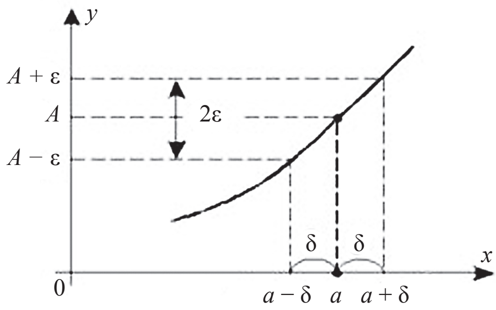


Рис. 23

Таким образом, для любой ε-окрестности точки A можно найти δ-окрестность точки a, такую, что все значения функции для x из δ-окрестности точки a попадут в ε-окрестность точки A.

Смысл этого утверждения заключается в том, что чем ближе точка x расположена к точке a, тем ближе значение $f(x)$ к числу A.

4.2. Предел функции в бесконечности

Если область определения функции не ограничена сверху (снизу), то можно говорить о поведении функции при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Число A называется пределом $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) : \forall x : x > M \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) : \forall x : x < -M \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon).$$

4.3. Односторонние пределы

Число A называется правым пределом функции $y = f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x - a < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Обозначение правого предела: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.

Число A называется левым пределом функции $y = f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < a - x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Обозначение левого предела: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$.

П р и м е р

$y = sgn\,x$, $\lim\limits_{x \to 0+} sgn\,x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} sgn\,x = -1$. График изображен на рис. 24.

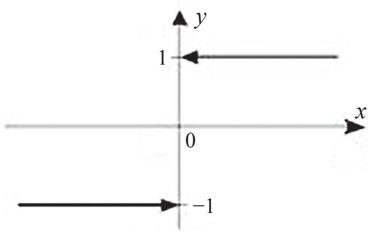


Рис. 24

Утверждение. Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$ тогда и только тогда, когда существуют и равны пределы $f(x)$ слева и справа при $x \to a$: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

4.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* в точке *a*, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Аналогично определяется функция, бесконечно малая при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

П р и м е р ы

1) $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}\underset{x\to\infty}{\to}0;$

2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\underset{x\to+\infty}{\to}0;$

3) $f(x)=\cos x\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\to}0.$

4.4.1. Свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая.

П р и м е р

$\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$, так как x^2 — бесконечно малая функция в точке $x=0$; $\sin\dfrac{1}{x}$ — ограниченная функция.

3. Произведение бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке *a*, если $\forall M>0\ \exists\delta(M)>0:\forall x:0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M$.

Записывается это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Если же функция при $x \to a$ не только возрастает по абсолютной величине, но и сохраняет определенный знак, это обозначают:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M;$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

П р и м е р ы

1) $f(x) = \sqrt{3x-11} \underset{x\to\infty}{\to} +\infty;$

2) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty;$

3) $f(x) = \mathrm{tg}x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\to} +\infty.$

Аналогично определяются функции, бесконечно большие при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Связь между функциями бесконечно большими и бесконечно малыми при $x \to a$ подтверждается следующим фактом.

Утверждение. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \to a$. И наоборот, если $\alpha(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a$.

4.4.2. Свойства бесконечно больших функций

1. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

З а м е ч а н и е. Сумма бесконечно больших функций может не быть бесконечно большой функцией.

П р и м е р ы

1) $f(x)=x, g(x)=1-x, f(x)+g(x)=1$. $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x\to\infty$ функции, а $f(x)+g(x)$ не является бесконечно большой;

2) $f(x)=x,\ g(x)=1-x^2,\ f(x)+g(x)=1+x-x^2$. Все функции, $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$, — бесконечно большие при $x\to\infty$.

2. Произведение бесконечно большой функции на ограниченную функцию, не равную нулю, есть функция бесконечно большая.

3. Произведение бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая.

4. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.

4.5. Свойства функций, имеющих предел

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеют одну область определения D.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\right)=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, где $\varphi(x)\neq\alpha(x)$.

П р и м е р

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

Значение функции $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$ определено в точке $x_0=2$, $f(2)=\dfrac{2^2+5}{2^2-3}=9$, поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}=9$. Если функция $f(x)$ определена в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$.

Подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной не всегда может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют *неопределенностями*. К ним относятся неопределенности видов $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [0\cdot\infty], [\infty-\infty], \left[1^{\infty}\right], \left[\infty^{0}\right], \left[0^{0}\right]$. Устранить неопределенность удается с помощью алгебраических преобразований.

Рассмотрим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, где в общем случае в числителе и знаменателе дроби — сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и знаменателе дроби x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби, в случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

П р и м е р

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+8}{7+4x^3-10x^4}$.

Вынесем за скобку в числителе и знаменателе дроби наивысшую степень x, т. е. x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+8}{7+4x^3-10x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^4}}{\frac{7}{x^4}+\frac{4}{x}-10}=-\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. Неопределенность устраняется после сокращения дроби.

П р и м е р

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{2}}.$$

Непосредственно подставляя число $x_0=1$ в функцию, получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Используя формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, умножим числитель и знаменатель на выражение $\left(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2}\right)$, а в числителе разложим на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2}\right)}{x^2+2x-3}.$$

Далее разложим на множители знаменатель: $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.

Следовательно, имеем $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2}\right)}{x+3}=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{4}=\sqrt{2}.$

Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $[\infty-\infty]$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится к типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ после приведения дробей к общему знаменателю. Если функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность или устраняется, или приводится к типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ путем домножения и деления функции на одно и то же сопряженное выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

П р и м е р

Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+4}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3x+4}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3x+4}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3x+4}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+4}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+3x+4}+2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Имеем неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Выносим x в старшей степени за скобки, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+3x+4}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+2x}.$$

Учитывая, что $|x|$ при $x\to+\infty$ равен x, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+2\right)}=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}.$$

Утверждение 1. Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ имеют одну область определения D и $\forall x\in D$ выполняется неравенство $f(x)\le\varphi(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Утверждение 2. Если $\forall x\in D$ выполняется $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

4.6. Замечательные пределы

В теории пределов большую роль играют два предела, которые, в силу их важности, получили названия замечательных пределов.

4.6.1. Первый замечательный предел

Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ имеет предел, равный 1:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

В первом замечательном пределе имеет место неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

П р и м е р 1

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

Если $x\to 0$, то и $2x\to 0$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

П р и м е р 2

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$$

4.6.2. Второй замечательный предел

Функция $y(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ имеет предел, равный числу e.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

Во втором замечательном пределе имеет место неопределенность $\left[1^\infty\right]$.

П р и м е р

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=e^{5}.$$

Функция $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ $\left(f(x)>0\right)$ называется *степенно-показательной* или *сложно-показательной* функцией.

Утверждение. Предел степенно-показательной функции $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ при $x\to x_0$ вычисляется по формуле

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

П р и м е р

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{7x+1}$.

Вычислим пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left(7x+1\right)=\infty,$$

получим, что функция

$$y=\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{7x+1}$$

дает неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$ при $x\to\infty$.

Преобразуем:

$$\frac{2x-3}{2x+5}=\frac{2x-3+5-5}{2x+5}=\frac{2x+5-8}{2x+5}=1+\frac{-8}{2x+5}=1+\frac{1}{\frac{2x+5}{-8}};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{7x+1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+5}{-8}}\right)^{7x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+5}{-8}}\right)^{\frac{2x+5}{-8}}\right]^{\frac{-8(7x+1)}{2x+5}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-56x-8}{2x+5}}=e^{-28},$$

поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-56x-8}{2x+5}=-28.$

4.7. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to x_0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A$, возможно несколько ситуаций:

1. Если $A<\infty$, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*.

2. Если $A=1$, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *эквивалентными*. Обозначают так: $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1.$

3. Если $A=0$, то функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем $\alpha_2(x)$.

Обозначают так: $\alpha_1(x)=o\big(\alpha_2(x)\big)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0.$

Утверждение. Если $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\alpha_4(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to x_0$ и при этом $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)\sim\alpha_4(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_4(x)}.$

Если $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\alpha_1(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\alpha_2(x)\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{f(x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(\alpha_1(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(\alpha_2(x)\right)$.

Утверждение. Если $x \to 0$, то выполняются следующие эквивалентности:

$\sin x \sim x$	$\operatorname{arctg} x \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$	$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$
$a^x - 1 \sim x\cdot\ln a$	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
$\arcsin x \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Указанные эквивалентности являются следствиями соответствующих предельных соотношений.

П р и м е р ы

1. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 2x}{3x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c} x\to0 \\ 2x\to0 \\ \sin 2x\sim 2x \\ \sin^3 2x\sim(2x)^3 \end{array}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(2x)^3}{3x^3}=\lim_{x\to0}\frac{8x^3}{3x^3}=\frac{8}{3}.$$

2. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{\operatorname{tg}^3 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c} x\to0 \\ 2x\to0 \\ \operatorname{arctg} 2x\sim 2x \\ \operatorname{arctg}^2 2x\sim(2x)^2 \\ \operatorname{tg}^3 x\sim x^3 \end{array}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(2x)^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4}{x}=\infty.$$

3. $$\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c} x\to0 \\ 2x\to0 \\ 3^{2x}-1\sim 2x\ln3 \end{array}\right]=\lim_{x\to0}\frac{2x\ln3}{5x}=\frac{2}{5}\ln3.$$

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

5.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть точка $x_0 \in D$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняются три условия:

1) функция определена в точке x_0;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

При нарушении любого из трех условий функция терпит разрыв в точке x_0. Поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, поэтому определение непрерывности может быть записано в виде $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0}(x)\right)$, т. е. операция вычисления непрерывной в точке x_0 функции $y = f(x)$ и операция вычисления предела перестановочны.

5.2. Непрерывность функции на множестве

Функция, непрерывная в любой точке множества D, называется *непрерывной на множестве D.*

Непрерывность основных элементарных функций

Основные элементарные функции:

$$y = x^{\alpha},\ y = a^x,\ y = \log_a x,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,$$
$$y = \operatorname{ctg} x,\ y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$$

Утверждение. Основные элементарные функции непрерывны в каждой точке их области определения.

Свойства непрерывных функций

Утверждение. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве D и непрерывны в точке $x_0 \in D$, то функции

$$f(x)+\varphi(x),\ k\cdot f(x),\ f(x)\cdot\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

непрерывны в точке x_0, причем частное требует условия $\varphi(x_0) \neq 0$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Утверждение 1. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке (существуют m и M: $m \le f(x) \le M\ \forall x \in [a,b]$).

Утверждение 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на нем своих точных верхней и нижней граней.

Утверждение 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Утверждение 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, имеет на концах отрезка значения $f(a) = A$, $f(b) = B$ и число C расположено между числами A и B: $A < C < B$, то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = C$.

Замечание. Утверждение применяется для отыскания корней уравнения вида $F(x) = 0$ методом половинного деления отрезка.

Пример 1

Имеет ли корень уравнение $e^x + x - 1 = 0$?

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x + x - 1$, которая непрерывна на всей числовой оси, поскольку является суммой непрерывных функций.

$f(-1) = \dfrac{1}{e} - 2 < 0$, $f(1) = e > 0$. Следовательно, внутри отрезка $[-1, 1]$ имеется, по крайней мере, один корень исходного уравнения.

П р и м е р 2

Принимает ли функция $f(x) = x^2 + 10\ln x$ значение 2 внутри отрезка $[1, e]$?

Функция является непрерывной на $[1, e]$. На концах отрезка функция принимает числовые значения $f(1) = 1$, $f(e) = e^2 + 10$. Так как $1 < 2 < e^2 + 10$, то найдется $c \in (1, e)$ такая, что $f(c) = 2$.

5.3. Точки разрыва и их классификация

Точка x_0, в которой функция $y = f(x)$ обладает свойством непрерывности, называется *точкой непрерывности* функции, в противоположном случае точка x_0 называется *точкой разрыва* функции.

Если односторонние пределы существуют, равны между собой, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, а функция $y = f(x)$ не определена в точке x_0 или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Устранимый разрыв можно устранить, вводя функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0. \end{cases}$$

П р и м е р 1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3, \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$

Точка $x_0 = 3$ — точка устранимого разрыва, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, $f(3) = 5 \neq 6$.

Устраним разрыв:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3, \\ 6, & x = 3. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ непрерывна всюду.

Если x_0 — точка разрыва $f(x)$, существуют конечные пределы справа и слева, которые не равны между собой, $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода.

П р и м е р 2

$y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x = 0$ — точка разрыва функции.

График функции представлен на рис. 25.

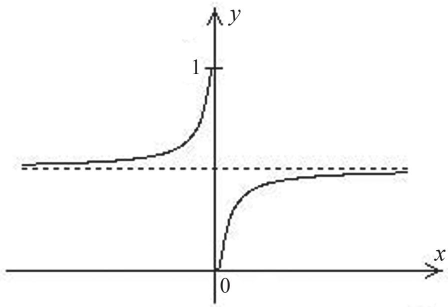


Рис. 25

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \left[\begin{array}{l} x \to 0+, \\ \dfrac{1}{x} \to +\infty, \\ e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \end{array}\right] = 0, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \left[\begin{array}{l} x \to 0-, \\ \dfrac{1}{x} \to -\infty, \\ e^{\frac{1}{x}} \to 0 \end{array}\right] = 1.$$

$x = 0$ — точка разрыва функции первого рода.

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

П р и м е р 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$ — точка разрыва второго рода (рис. 26);

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$.

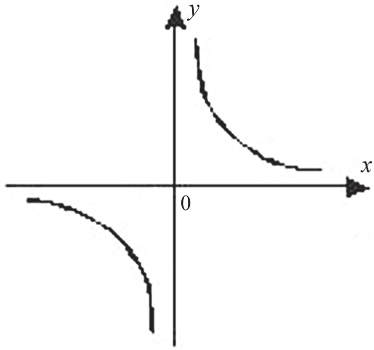


Рис. 26

Задачи

7. Найти пределы:

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3x^2}{5x^3+9}$

7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-3x}-3x^2}{\sqrt[3]{27x^6+2}+2x-5}$

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{4x+1}$

7.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+2^x}{1-3^x}$

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}$

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+2x}{x^3-x^4}$

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x^3-15}{x^2-16}$

7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+2}{3^{x+1}-1}$

7.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x+3^{x+1}}{4^{x+1}+3^x}$

7.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$

7.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!n!}{(n+1)!}$

7.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!n!}{(n+1)!}$

7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2+5)(n-1)!}{(n+1)!}$

7.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$

7.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot 4^{x-1}+6\cdot 3^{x+2}}{2\cdot 3^{x-1}-5\cdot 2^{x+1}}$

7.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{64x^3+1}+2}$

7.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[8]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$

7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-9}-2x}{2-\sqrt[3]{x^3+5}}$

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{20}}{3x^{20}+100}$

7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4-3x^4+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}+7x^3-2x^4}$

7.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

7.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$

7.23. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$

7.24. $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

7.25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

7.26. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$

7.27. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

7.28. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

7.29. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$

7.30. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

7.31. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

7.32. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$

7.33. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{x-1}+12\cdot4^{x+1}}{7\cdot3^x-13\cdot5^{x-1}}$

7.34. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-3x-14}{x^3+8}$

7.35. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}$

7.36. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

7.37. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{3x}$

7.38. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$

7.39. $\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+3x-2}$

7.40. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

7.41. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}\,(a>b)$

7.42. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$

7.43. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$

7.44. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}}{x^2-4}$

7.45. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x+8}{x^3-8}\right)$

7.46. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)$

7.47. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

7.48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^4}{x^2+x+2}-4x^2\right)$

7.49. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+10}-\sqrt{x+20}\right)$

7.50. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

7.51. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

7.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$

7.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}-\sqrt{9x^2-x}\right)$

7.54. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt[3]{x^2+3x}\right)$

7.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x}\right)$

7.56. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^m}{x^n-1}-\dfrac{1}{x^n-1}\right)\ (m,n\in\mathbb{N})$

7.57. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$

7.58. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$

7.59. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{2x^2-x}-x\right)$

7.60. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3}{5x-1}-7x\right)$

7.61. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

7.62. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{x^4+2x^3-x}\right)$

7.63. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$

7.64. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

7.65. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3\left(x^2-3x+2\right)}\right)$

7.66. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$

7.67. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)^{\frac{3}{x}}$

7.68. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}$

7.69. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln\left(x+3\right)-\ln3}{5x}\right)$

7.70. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x}$

7.71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+2}{4x^2-1}\right)^{5x^2}$

7.72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{7x}$

7.73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-4}\right)^{3x}$

7.74. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+5}\right)^{-2x}$

7.75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$

7.76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-2x+3}\right)^{5x^2}$

7.77. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+3x}{1+x}\right)^{\frac{5}{x}}$

7.78. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-2x^2}{3+3x^2}\right)^{-\frac{4}{x}}$

7.79. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(3-x)-\ln 3}{5x}\right)$

7.80. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}\right)$

7.81. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{9x^2+1}{9x^2+3}\right)^{7x^3}$

7.82. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$

7.83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

7.84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$

7.85. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

7.86. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

7.87. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$

7.88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^3 4x}{10x^3}$

7.89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{3x^2}$

7.90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x^2}$

7.91. $\lim\limits_{x\to 0}(3x\cdot \mathrm{ctg}2x)$

7.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3}{\sin^3 2x}$

7.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, 8x}{7x}$

7.94. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

7.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}$

7.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 9x}$

7.97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2x^2}$

7.98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$

7.99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 10x}$

7.100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{\mathrm{tg}^2 3x}$

7.101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{\sin x^3}$

7.102. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^3 2x}{\arcsin^3 3x}$

7.103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$

7.104. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$

7.105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 7x}{\sin 5x}$

7.106. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$

7.107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x\cdot\sin 2x}{1-\cos^2 4x}$

7.108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,2x}{\sin\left(2\pi(x+10)\right)}$

7.109. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

8. Исследовать следующие функции на непрерывность. В случае разрыва функции, определить характер каждой точки разрыва.

8.1. $y=\begin{cases} x-2, & x<2 \\ x+2, & x\ge 2\end{cases}$

8.2. $y=\begin{cases} 3x+1, & x\le 0 \\ 1-4x, & x>0\end{cases}$

8.3. $y=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^2-2, & x>0\end{cases}$

8.4. $y=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ (x-1)^2, & 1\le x\le 2 \\ 3-x, & x>2\end{cases}$

8.5. $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\end{cases}$

8.6. $y=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ 2, & x=1 \\ x-1, & x>1\end{cases}$

8.7. $y=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

8.8. $y=\dfrac{(x-4)(x+1)}{x^3+3x^2+2x}$

8.9. $y=\dfrac{\ln(x-3)}{x^2-8x+7}$

8.10. $y=4^{\frac{1}{3x+6}}+1$

8.11. $y=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

8.12. $y=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x^2-4}}-2}$

8.13. $y=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x^2-4}}-3}$

8.14. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Пусть $y = f(x)$ определена на (a, b) и $x \in (a, b)$ — некоторая фиксированная точка, Δx — приращение аргумента x, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — соответствующее приращение функции, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — отношение приращений (зависит от Δx, значение x фиксировано).

Производной функции $f(x)$ в точке x называется конечный предел приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении приращения независимой переменной к нулю, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ при условии, что предел существует.

Обозначение: $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если производная функции существует.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале* (a, b), если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

П р и м е р

Вычислить производную элементарной функции $y = \sin x$, используя определение производной.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = \cos x, \quad \text{так как} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1.$$

$(\sin x)' = \cos x$.

6.1. Производная первого порядка

6.1.1. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции

Рассмотрим две точки графика функции $f(x)$: $M(x, f(x))$ и $P(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. MP — секущая (рис. 27).

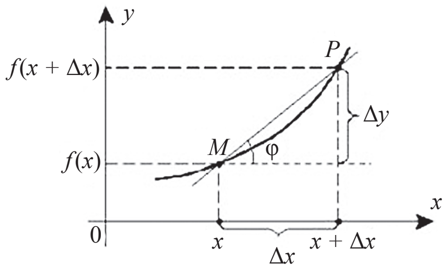


Рис. 27

При стремлении Δx к нулю (т. е. при стремлении точки P к точке M) эта секущая будет поворачиваться относительно точки M.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$ называется *предельное положение секущей* при $\Delta x \to 0$ ($P \to M$).

Нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$ называется перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания.

Утверждение. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, то график функции в точке $M(x, f(x))$ имеет касательную с угловым коэффициентом $f'(x)$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \left(x - x_0\right).$$

Условие перпендикулярности двух прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$, тогда *уравнение нормали* имеет вид:

$$y = f\left(x_0\right) + \frac{-1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).$$

П р и м е р

Составить уравнения касательной и нормали к графику функций $y = x^3 - 3x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Вычислим значение функции $y(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Производная функции $y' = 3x^2 - 6x$. Значение производной $y'(1) = 3 - 6 = -3$. Тогда уравнение касательной имеет вид: $y = -3(x-1) = -3x + 3$, а уравнение нормали: $y = \frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

6.1.2. Механический смысл производной

Рассмотрим движение точки по прямой. $S = f(t)$ — перемещение точки в момент времени t, $v = f'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ — мгновенная скорость в момент времени t.

6.1.3. Правила дифференцирования

1. $(c)' = 0, \quad c = \text{const};$

2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x);$

3. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x);$

4. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x);$

5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

6.1.4. Таблица производных

Таблица получена, исходя из определения производной и правил дифференцирования.

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$

2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \;\; (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow \left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x.$

3. $\left(\log_a x\right)' = \log_a e \cdot \dfrac{1}{x} \;\; (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

4. $(\sin x)' = \cos x.$

5. $(\cos x)' = -\sin x.$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

6.1.5. Производная обратной функции

Если $y = f(x)$ — дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке X, то функция, обратная к данной — $x = \varphi(y)$, также дифференцируема и ее производная определяется отношением:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad y'_x \neq 0.$$

П р и м е р

Пользуясь этой формулой, найдем производную функции $y = \arcsin x$. Выразим x через y.

$x = \sin y,$

$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \;\; \left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

6.1.6. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y' = f'(u) \cdot u'$.

Пример

$$y = e^{\sin x},\ y = e^u,\ u = \sin x.\ \text{Найти } y'_x.$$

$$y'_u = e^u,\ u'_x = \cos x,\ y'_x = e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

6.1.7. Логарифмическая производная

При вычислении производной некоторого выражения полезно провести предварительное логарифмирование этого выражения.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Нужно найти y'.

$\ln y = \ln f(x)$, $\left[\ln y\right]'_x = \dfrac{1}{y} y'$; $\dfrac{y'}{y}$ — называется логарифмической производной.

Получаем $y' = y \cdot \left[\ln y\right]'$.

Пример 1

$$y = (\cos x)^{x^3}.\ \text{Найти } y'.$$

$$\ln y = x^3 \ln(\cos x),$$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\cos x) + x^3 \frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

$$y' = (3x^2 \ln(\cos x) - x^3 \operatorname{tg} x)(\cos x)^{x^3}.$$

В общем случае для степенно-показательных выражений

$$y = f(x)^{\varphi(x)} \Rightarrow \ln y = \varphi(x) \ln f(x).$$

$$y' = f(x)^{\varphi(x)} \cdot \left(\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Логарифмическая производная применяется для вычисления производной произведения большого числа сомножителей.

П р и м е р 2

1. $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot e^x$. Найти y'.

$\ln y = \ln x^2 + \ln \operatorname{tg} x + \ln e^x$.

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \cdot 2x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \Rightarrow y' = x^2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot e^x \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{\sin 2x} + 1 \right).$$

2. $y = \sqrt[4]{\dfrac{(x-10)^2 (x+3)^5}{x+12}}$. Найти y'.

$$\ln y = \frac{1}{4}\big(2 \cdot \ln(x-10) + 5 \cdot \ln(x+3) - \ln(x+12)\big);$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x-10} + \frac{5}{x+3} - \frac{1}{x+12} \right);$$

$$y' = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x-10} + \frac{5}{x+3} - \frac{1}{x+12} \right) \cdot \sqrt[4]{\frac{(x-10)^2 (x+3)^5}{x+12}}.$$

6.1.8. Производная неявной функции

Пусть уравнение $F(x, y(x)) = 0$ задает неявно функцию $y = y(x)$.

Для вычисления $y'(x)$ нужно продифференцировать тождество $F(x, y) = 0$ по переменной x, рассматривая функцию $F(x, y(x))$ как сложную функцию аргумента x, а затем полученное уравнение $F_1\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0$ разрешить относительно $y'(x)$.

П р и м е р

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Найти $y'(x)$, если $y > 0$.

Продифференцируем выражение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ по переменной x: $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y}{b^2} y' = 0$, откуда $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$.

Выражение для производной $y'(x)$ может зависеть как от x, так и от y.

6.1.9. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

П р и м е р

$x = a\cos t,\ y = a\sin t.$ Найти $y'_x(x)$.

$x'_t = -a\sin t,\ y'_t = a\cos t,\ y'_x = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$

6.2. Производные высших порядков

Производной второго порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной. Обозначение: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная первого порядка от производной $(n-1)$-го порядка.

$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. Используют обозначение $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

П р и м е р ы

1. $y = \sin x,\ y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x.$
2. $y = x^n,\ y' = nx^{n-1},\ y'' = n(n-1)x^{n-2}, \ldots,\ y^{(n)} = n!,\ y^{(n+1)} = 0.$

6.2.1. Вторая производная от параметрически заданной функции

Рассмотрим функцию, заданную параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$.

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

6.2.2. Механический смысл второй производной

Пусть $S = f(t)$ — путь тела, движущегося поступательно. Скорость тела $v(t)$ в данный момент времени: $v(t) = f'(t)$. Если движение неравномерно, то для приращения времени Δt приращение скорости составляет Δv.

Тогда $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ — среднее ускорение тела за промежуток времени Δt. При $\Delta t \to 0$ получим ускорение в данный момент времени t:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Таким образом, $a(t) = f''(t)$ — ускорение прямолинейного движения равно второй производной от перемещения по времени.

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Приращение Δy дифференцируемой функции $y = f(x)$ может быть представлено в виде $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x) = 0$.

Главная, линейная по Δx часть приращения функции называется *дифференциалом* функции в точке x и обозначается $dy = f'(x)\cdot\Delta x$.

7.1. Дифференциал и его свойства

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной, $dx = \Delta x$.

В общем случае $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

Производная может быть записана как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной (обозначение Лейбница): $f'\left(x\right) = \dfrac{dy}{dx}$.

Свойства дифференциалов:

1. $d(c) = 0$;
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$; $d(u \pm c) = du$;
3. $d(uv) = udv + vdu$; $d(cu) = cdu$;
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

7.2. Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Обозначения, приведенные на рис. 28, соответствуют $M(x, y)$, $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $\Delta y = NM'$, MT — касательная в точке M.

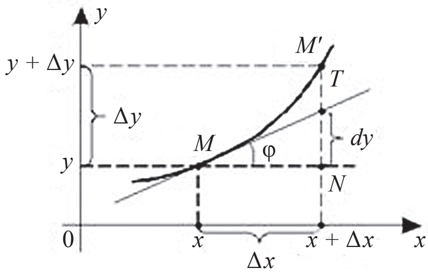


Рис. 28

Рассмотрим ΔMNT:

$MN = \Delta x$, $NT = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\varphi$, $NT = \Delta x \cdot f'(x)$, $dy = NT$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x есть приращение ординаты касательной к графику функции в точке x.

7.3. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Метод основан на замене приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ дифференциалом этой функции: $\Delta y \cong dy = f'(x)dx$.

$$x = x_0 + \Delta x, f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Геометрический смысл: исходная функция на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ заменяется линейной функцией, график которой — касательная в точке $(x_0, f(x_0))$.

П р и м е р ы

1. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{31{,}9}$.

Пусть $y = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 32$.

Тогда $y(32) = \sqrt[5]{32} = 2$; $\Delta x = 31{,}9 - 32 = -0{,}1$; $y'(x) = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}$;

$y'(32) = \frac{1}{5} \cdot 32^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot 16} = \frac{1}{80}$.

Тогда $y(31{,}9)\approx 2+\frac{1}{80}\cdot(-0{,}1)=2-0{,}00125=1{,}99875.$

2. Вычислить приближенно $\cos 61°$.

Пусть $y=\cos x,\ x_0=60°=\frac{\pi}{3}.$

Тогда $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$

$\Delta x=61°-60°=1°=1°\cdot\frac{\pi}{180};$

$y'(x)=(\cos x)'=-\sin x;$

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{2}.$

Тогда $y(61°)\approx\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx\frac{1}{2}-0{,}015=0{,}485.$

7.4. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка (или *вторым дифференциалом*) функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции при фиксированном dx.

$$d^2f(x)=d\big(df(x)\big)=d\big(f'(x)dx\big)=dx\cdot d\big(f'(x)\big)=$$
$$=dx\cdot f''(x)dx=f''(x)\cdot(dx)^2=f''(x)dx^2;$$

$$d^2f(x)=f''(x)dx^2.$$

Дифференциалом n-го порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n–1)$-го порядка этой функции при фиксированном dx.

$$d^nf(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right).$$

$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n,\quad dx^n=(dx)^n.$$

Задачи

9. Найти производные:

9.1. $y = 2\sqrt{x} - 4\cos x + 2\sin x + \log_3 x - \ln 5$

9.2. $y = x^7 - 2x^5 + 5 - \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{5}{6}x\sqrt[5]{x}$

9.3. $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$

9.4. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

9.5. $y = \dfrac{\cos x}{2 - 3\sin x}$

9.6. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

9.7. $y = \sqrt{2 - 3x^4}$

9.8. $y = \ln \operatorname{tg} 2x$

9.9. $y = \ln \ln x$

9.10. $y = 2^x \cdot x$

9.11. $y = x^{\sqrt{\ln x}}$

9.12. $y = \operatorname{tg} 2x + \dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 2x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 2x$

9.13. $y = x^{\frac{1}{x}}$

9.14. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

9.15. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

9.16. $y = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

9.17. $y = x \cdot \arccos\dfrac{x}{3} - \sqrt{9 - x^2}$

9.18. $y = 50\cos 10^{2x-1}$

9.19. $y = \cos^2 \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

9.20. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

9.21. $y = \ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$

9.22. $y = \sqrt{\dfrac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$

9.23. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

10. Найти производные x'_y от обратных функций:

10.1. $y = x - \cos x$

10.2. $y = x^2 - 3\cos 2x$

10.3. $y = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{4x}}$

10.4. $y = 2x + x^3$

10.5. $y = 2^x \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$

10.6. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1}$

10.7. $y = \dfrac{x-1}{x+5}$

10.8. $y = x + 2^{2x}$

11. Найти производные y'_x от неявных функций:

11.1. $2x+y-4=0$

11.2. $x\cos y-y\sin x=0$

11.3. $xy-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=0$

11.4. $\ln y+\frac{x}{y}-3=0$

11.5. $x\ln y+y\ln x=3$

11.6. $\operatorname{arctg}(x+y)=x$

11.7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-2=0$

11.8. $x^y+y^x=5$

11.9. $\sin y=xy^2+5$

11.10. $\operatorname{tg}(y+3)=\ln\frac{x}{y}$

12. Найти производные функций, заданных параметрически:

12.1. $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t^3 \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

12.4. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$

12.5. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^2-1 \end{cases}$

12.6. $\begin{cases} x=t^2+\ln 2t \\ y=2t^3+3t \end{cases}$

12.7. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\dfrac{t}{t+1} \end{cases}$

12.8. $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{\ln t+1} \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\sin 2t}} \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

13. Найти производные второго порядка:

13.1. $y=x^3-4x^2+5x-1$

13.2. $y=\operatorname{ctg}(3x+1)$

13.3. $y=x\ln(x+1)$

13.4. $y=2^{3x}\operatorname{tg}(x+1)$

13.5. $y=\sin^2 3x$

13.6. $y=x^2\sqrt{1-x^2}$

13.7. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{4}$

13.8. $y=\frac{x+1}{2x+3}$

13.9. $y=3^{x^2}$

13.10. $y=e^{2x}\cos x$

13.11. $y=\dfrac{\cos x+1}{x+\ln x}$

13.12. $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t} \\ y=\sqrt{t-t^2} \end{cases}$

13.13. $\begin{cases} x=at\cos t \\ y=at\sin t \end{cases}$

13.14. $\begin{cases} x=1-\ln t \\ y=t^3+2t \end{cases}$

14. Найти производные n-го порядка:

14.1. $y=5^x$

14.2. $y=xe^x$

14.3. $y=(x+1)2^x$

14.4. $y=\ln x$

14.5. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

14.6. $y=\dfrac{1}{3x+5}$

14.7. $\begin{cases} x=\ln x \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}$

14.8. $y=\sin x$

15. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)$. Найти скорость и ускорение в момент времени t_0:

15.1. $s(t)=\dfrac{t^3}{3}+t^2+15t+2,\ t_0=0$

15.2. $s(t)=\dfrac{5t^3}{6}+3t+2,\ t_0=1$

15.3. $s(t)=\dfrac{2t+1}{t+3},\ t_0=7$

15.4. $s(t)=\dfrac{t+2}{3t+1},\ t_0=2$

16. Составить уравнение касательной к кривым в указанных точках:

16.1. $y=2x^3-4x^2+5x,\ x_0=2$

16.2. $\begin{cases} x=t+3 \\ y=\sqrt{t-1} \end{cases},\ M_0\ (5;1)$

16.3. $y=\ln(1+x),\ x_0=0$

16.4. $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases},\ t=\dfrac{\pi}{2}$

16.5. $y=\dfrac{2x+3}{2x-1},\ x_0=0$

17. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции, проведенная в указанной точке:

17.1. $y = x^2 - 5x + 8,\ x_0 = 3$

17.2. $y = \ln\left(1 - x\right),\ x_0 = 0$

18. Найти дифференциал функции:

18.1. $y = \mathrm{ctg}(6x + 2)$

18.2. $y = \cos 5x \cdot \ln x$

18.3. $y = \arcsin(3x^3 + 2x + 1)$

18.4. $y = \mathrm{e}^{3x+7}$

18.5. $y = \sqrt{x^2 - 5}$

18.6. $y = \log_3(3 + 2\sqrt{x})$

18.7. $y = \mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+1}}$

18.8. $y = \dfrac{4x}{2x + 3}$

18.9. $y = 1 - 3^{5x} + x$

18.10. $y = \mathrm{e}^{2x} \cos x$

19. Найти дифференциал функции второго порядка:

19.1. $y = 3^{2x}$

19.2. $y = \ln(2x^2 + 5)$

19.3. $y = \cos(3 - 4x)$

19.4. $y = \mathrm{tg}(7x - 2)$

20. Найти приближенное значение функции $f(x)$ при x_0, вычисленное с использованием дифференциала первого порядка:

20.1. $f\left(x\right) = \sqrt[4]{x^2 - x + 1},\ x_0 = 3{,}16$

20.2. $f\left(x\right) = \sqrt[5]{x^2 - 2x + 8},\ x_0 = 5{,}86$

20.3. $f\left(x\right) = 1{,}03^x,\ x_0 = 5$

20.4. $f\left(x\right) = 10^x,\ x_0 = \dfrac{1}{3}$

20.5. $f\left(x\right) = \arcsin x,\ x_0 = 0{,}51$

20.6. $f\left(x\right) = \mathrm{arctg} x,\ x_0 = 1{,}05$

20.7. $f\left(x\right) = \sin x,\ x_0 = 29$

20.8. $f\left(x\right) = \lg x,\ x_0 = 11$

8. ПРЕДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Предельные величины. Применение производной в экономике позволяет получать так называемые предельные характеристики экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход, продукт и др.) характеризуют не состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Издержки производства. Если издержки производства y рассматривать как функцию выпускаемой продукции x, т. е. $y = C(x)$, то $y' = C'(x)$ будет выражать предельные издержки производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. Средние издержки являются издержками на единицу выпуска продукции: $y_1 = \dfrac{C(x)}{x}$.

Производительность труда. Пусть функция $u(t)$ выражает объем произведенной продукции за время t. Тогда производная объема произведенной продукции по времени $u'(t_0)$ есть производительность труда в момент t_0.

Функция потребления и сбережения. Если x — национальный доход, $C(x)$ — функция потребления (часть дохода, которая тратится), а $S(x)$ — функция сбережения, то

$$x = C(x) + S(x).$$

Дифференцируя, получим, что

$$\frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dx}=1,$$

где $\dfrac{dC}{dx}$ — предельная склонность к потреблению;

$\dfrac{dS}{dx}$ — предельная склонность к сбережению.

Эластичность. Это мера реагирования одной переменной величины на изменение другой. Эластичность функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1 %.

Эластичность функции определяется с помощью соотношения

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'_x \quad \text{или} \quad E_x(y)=x\cdot T_y,$$

где $T_y(x)=(\ln y)'=\dfrac{1}{y}y'_x$ — относительная скорость изменения (темп) функции.

Эластичность функции применяется при анализе изменения спроса и предложения от изменения цены (ценовая эластичность). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1 %.

Если эластичность спроса $\left|E_x(y)\right|>1$, то спрос считается эластичным, если $\left|E_x(y)\right|=1$ — нейтральным (с единичной эластичностью), а если $\left|E_x(y)\right|<1$ — неэластичным относительно цены.

П р и м е р 1

Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y(x)=0,2x^3-x^2+5x+3000$ (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение при $x = 50$.

Найдем производную $y'(x)$ и ее значение $y'(50)$. Предельные издержки производства:

$$y'(x)=0,6x^2-2x+5;\ \ y'(50)=1500-100+5=1405.$$

Средние издержки:

$$y_1(x) = \frac{0,2x^3 - x^2 + 5x + 3000}{x} = 0,2x^2 - x + 5 + \frac{3000}{x};$$

$$y_1(50) = 500 - 50 + 5 + 60 = 515.$$

Это означает, что при данном уровне производства (количестве выпускаемой продукции) средние затраты на производство одной единицы продукции составляют 515 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приближенно в 1405 ден. ед.

Пример 2

Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$$C(x) = 10 + 0,64x + 0,12x^{\frac{5}{4}},$$

где x — совокупный национальный доход (ден. ед.). Найти:

1) предельную склонность к потреблению;

2) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 16 ден. ед.

Предельная склонность к потреблению:

$$C'(x) = 0,64 + 0,12 \cdot 1,25 \cdot x^{1/4};\; C'(16) = 0,64 + 0,12 \cdot 1,25 \cdot \sqrt[4]{16} = 0,94.$$

Предельная склонность к сбережению:

$$S'(x) = 1 - C'(x);\; S'(16) = 1 - 0,94 = 0,06.$$

Пример 3

Объем производства зимней обуви u, выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением

$$u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 4t + 1000\,(\text{ед.}),$$

где t — календарный месяц года.

Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения в первом месяце ($t = 1$) и в конце года ($t = 12$).

Производительность труда выражается производной

$$z(t) = u'(t) = t^2 - 5t - 4 \text{ (ед/мес.)},$$

а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t)=\left[\ln z(t)\right]'$:

$$z'(t)=2t-5\left(\text{ед/мес.}^2\right),\ T_z(t)=\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{2t-5}{t^2-5t-4}\ (\text{ед/мес.}).$$

В первом месяце значения будут следующими: $z(1)=-8$; $z'(1)=-3$; $T_z(1)=0{,}375$, а в конце года: $z(12)=80$; $z'(12)=19$; $T_z(12)=0{,}2375$.

Задачи

21. Некоторый товар реализуется по фиксированной за единицу цене p. Определите оптимальное для производителя значение выпуска x_0, если известен вид функции издержек $C(x)$:

21.1. $p=10,\ C(x)=9+4x+x^3$	21.2. $p=2,\ C(x)=9+8x-x^2$
21.3. $p=3,\ C(x)=12+7x-x^{\frac{4}{3}}$	21.4. $p=4,\ C(x)=15-7x-x^{\frac{3}{2}}$
21.5. $p=\frac{3}{2},\ C(x)=6+\frac{x}{2}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$	21.6. $p=\frac{13}{2},\ C(x)=8+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}$

22. Некоторый товар реализуется по фиксированной за единицу цене p. Определите максимальную прибыль, которую может получить производитель, если известен вид функции издержек $C(x)$:

22.1. $p=6,\ C(x)=7+5x+x^3$	22.2. $p=3,\ C(x)=8+11x-x^4$
22.3. $p=13,\ C(x)=12+3x-x^{\frac{5}{3}}$	22.4. $p=1,\ C(x)=6-x-x^{\frac{3}{2}}$
22.5. $p=\frac{1}{2},\ C(x)=5+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{4}$	22.6. $p=\frac{1}{4},\ C(x)=4+\frac{x}{4}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$

23. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y=f(x)$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции x единиц:

23.1. $f(x)=30x-0{,}03x^2,\ x=10$	23.2. $f(x)=15x-0{,}23x^3,\ x=5$
23.3. $f(x)=10x-0{,}04x^3,\ x=5$	23.4. $f(x)=x-0{,}01x^4,\ x=400$

23.5. $f\left(x\right)=3x-0{,}01x^3,\ x=500$

23.6. $f\left(x\right)=10x-\dfrac{0{,}03}{x},\ x=300$

24. Найти равновесную цену и эластичность спроса и предложения для этой цены, если известны функции спроса $q = q(p)$ и предложения $s(p)$, где p — цена:

24.1. $q=1-p,\ s=5-3p$

24.2. $q=12-6p,\ s=5+8p$

24.3. $q=\dfrac{p+5}{p+1},\ s=p+2$

24.4. $q=\dfrac{p+3}{p-12},\ s=p+3$

24.5. $q=\dfrac{p+5}{p-12},\ s=\dfrac{p-4}{p-3}$

24.6. $q=\dfrac{p-15}{p+15},\ s=\dfrac{p-9}{p+1}$

25. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения на момент работы t_0, если объем продукции описан уравнением $u(t), 1 \le t \le 8$:

25.1. $u\left(t\right)=121+30t-2t^2,\ t_0=7$

25.2. $u\left(t\right)=-t^3+2t^2+12,\ t_0=3$

25.3. $u\left(t\right)=-\dfrac{7}{6}t^3+3t^2+20t,\ t_0=3$

25.4. $u\left(t\right)=\dfrac{5}{6}t^3+\dfrac{3}{2}t^2+t,\ t_0=5$

25.5. $u\left(t\right)=-\dfrac{10}{3}t^3+12t^2+120t+240,\ t_0=1$

25.6. $u\left(t\right)=-\dfrac{9}{8}t^4+\dfrac{5}{6}t^3+10t+32,\ t_0=1$

9. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ АНАЛИЗА. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

9.1. Основные теоремы анализа

Теорема Ролля (о нуле производной)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и на концах отрезка значения функции совпадают, $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если функция удовлетворяет условию теоремы Ролля, то в некоторой точке отрезка касательная к графику параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа (теорема о конечных приращениях)

Если $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

$\dfrac{CB}{AC} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — угловой коэффициент секущей AB.

$f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = c$. На кривой AB найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB (рис. 29).

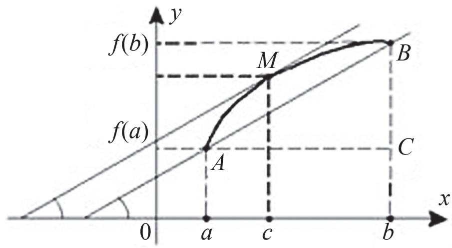


Рис. 29

9.2. Правило Лопиталя

Это правило помогает раскрытию неопределенностей типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ методами дифференциального исчисления.

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения их производных, если последний существует:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Предел отношения двух бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Применение правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей

Примеры

1. $\left[\frac{0}{0}\right]$

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2}{1}=2;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin x}=\infty.$

2. $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a}{1}=\infty;$$

$$б)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(x+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=0.$$

$$3.\ \left[0\cdot\infty\right]=\left[\begin{matrix}\left[\frac{0}{0}\right]\\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\end{matrix}\right].f(x)\underset{x\to a}{\to}0,\ \varphi(x)\underset{x\to a}{\to}\infty.$$

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\cdot\ln x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x}\right)=0.$$

4. $\left[0^0\right],\left[\infty^0\right],\left[1^\infty\right]$. Применяется предварительное логарифмирование, откуда следует неопределенность $[0\cdot\infty]$.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}x^x$. Для этого обозначим $y=x^x$. Логарифмируем $\ln y=x\cdot\ln x$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=0,\quad \ln\lim_{x\to 0}y=0,\quad \lim_{x\to 0}y=1,\quad \lim_{x\to 0}x^x=1.$$

9.3. Формула Тейлора

Если $f(x)$ дифференцируема $(n + 1)$ раз в окрестности точки x_0, то для любого x из указанной окрестности справедлива формула Тейлора порядка n:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1};\ 0 < \theta < 1.$

$R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора порядка n позволяет представить функцию $y = f(x)$ в виде суммы *многочлена* n-й степени и остаточного члена.

Частные случаи формулы Тейлора

1. При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1};\ 0 < \theta < 1.$$

2. Рассмотрим $f(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ — многочлен порядка n.

Поскольку $\forall x\ f^{(n+1)}(x) = 0$, то $\forall x\ R_{n+1}(x) = 0$ и

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n.$$

По формуле Тейлора любой многочлен порядка n можно представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$.

П р и м е р

Многочлен $2x^3-3x^2+5x+1$ разложить по степеням (x + 1).

$f(x)=2x^3-3x^2+5x+1;\quad x_0=-1;\quad f(-1)=-9.$

Найдем коэффициенты формулы Тейлора:

$f'(x)=6x^2-6x+5\Rightarrow f'(-1)=17;$

$f''(x)=12x-6\Rightarrow f''(-1)=-18;$

$f'''(x)=12\Rightarrow f'''(-1)=12;$

$f^{IV}(x)=0$

…

$f^{(n)}(x)=0;$

$$f(x)=-9+\frac{17}{1!}(x+1)-\frac{18}{2!}(x+1)^2+\frac{12}{3!}(x+1)^3.$$

Учитывая, что $1!=1,\ 2!=1\cdot 2,\ 3!=1\cdot 2\cdot 3,$ получим

$$2x^3-3x^2+5x+1=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3.$$

Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

1. $f(x)=e^x,\qquad f(0)=1,$

$f'(x)=e^x,\qquad f'(0)=1,$

$f''(x)=e^x,\qquad f''(0)=1,$

....,

$f^{(n)}(x)=e^x,\qquad f^{(n)}(0)=1.$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

2. $f(x)=\sin x;\ f(0)=0,$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);\ f'(0)=1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right); \; f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right); \; f'''(0) = -1,$$

....,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ — четное,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x).$$

Нечетная функция $\sin x$ разложена по нечетным степеням x.

3. $f(x) = \cos x, \; f(0) = 1,$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ — нечетное,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ — четное.} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

Четная функция $\cos x$ разложена по четным степеням x.

4. $f(x) = \ln(1+x),$ $\qquad f(0) = 0,$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = 1 \cdot 2,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, где α — любое вещественное число.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\mathrm{n}+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

Частный случай для $\alpha = n$:

$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n$ — формула бинома Ньютона.

Формулы Маклорена для элементарных функций:

1. $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x};\ 0 < \theta < 1.$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \sin(\theta x + \frac{2n+2}{2}\pi);\ 0 < \theta < 1.$$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$

$+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \cos(\theta x + \frac{2n+1}{2}\pi);\ 0 < \theta < 1.$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n!} +$

$+ \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)\cdot(1+\theta x)^n};\ 0 < \theta < 1.$

Оценка остаточного члена

Пусть $f(x)$ такова, что для любого n и для любого x из окрестности точки x_0 $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$. Рассмотрим остаток

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$$\left|R_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \cdot \left|x - x_0\right|^{n+1} \le M \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\forall \left|x - x_0\right| \text{ при } n \to \infty \quad \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

и остаточный член может быть сделан сколь угодно малым путем увеличения n.

Итак, если $f(x)$ обладает указанным выше свойством, то формулу Тейлора можно использовать для приближенных вычислений с любой наперед заданной точностью.

Приложения формул Тейлора и Маклорена

1. Для вычисления приближенных значений функций.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Погрешность (ошибка) вычисления находится по оценке остаточного члена. $\left|R_{n+1}(x)\right| \le \varepsilon$, где ε — погрешность.

П р и м е р 1

Вычислить e с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Рассмотрим e^x, $x = 1$, $x_0 = 0$.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1),\ \ R_{n+1}(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\ \ 0 < \theta < 1.$$

$$\left|R_{n+1}(1)\right| < \frac{e}{(n+1)!},\ \ e < 3 \Rightarrow \left|R_{n+1}(1)\right| < \frac{3}{(n+1)!} \le \varepsilon.$$

Найдем наименьшее n, удовлетворяющее условию $\dfrac{3}{(n+1)!} \le 0{,}001 : n = 6$.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} = 2{,}714.$$

2. Для вычисления пределов функций.

П р и м е р 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\left\{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots\right\} - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{3!} + \ldots}{x^3} = -\frac{1}{3!}.$$

Задачи

26. Определить два различных промежутка, каждому из которых принадлежит либо больший, либо меньший корень производной следующей функции:

26.1. $f(x) = (x-3)(2x^2 + x - 3)$

26.2. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 2x - 35)$

26.3. $f(x) = (x-2)(x-1)x(x+3)(x^2 + 16)$

27. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

27.1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)}$

27.2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$

27.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\ln(1+x)}{x}$

27.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

27.5. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{\sin(x+1)}+\ln(1+x)\right)$

27.6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

27.7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{e^x-e}\right)$

27.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\ln\left(e^{x^2}+1\right)}$

27.9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-14}{x^3-8}$

27.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sqrt{1+x}-1}$

27.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)\operatorname{ctg}x$

27.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x+\sqrt{x}\right)^x$

27.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln^2x-\sqrt{1+x+x^2}\right)$

27.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}$

28. Разложить функции $y=f(x)$ по указанным степеням:

28.1. $y=-\dfrac{1}{5}x^5+x^4-2x^3+x+1;\ \ (x+1)$

28.2. $y=x^4-2x^3-1;\ \ (x+2)$

28.3. $y=\sqrt{x^3};\ \ (x-4)$

28.4. $y=\ln\left(2-2x\right);\ \ x$

28.5. $y=\sin 2x;\ \ \left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

29. Разложить следующие функции в ряд Маклорена:

29.1. $y=\dfrac{1}{(x+1)^3}$

29.2. $y=\dfrac{3}{4-x}$

29.3. $y=\operatorname{arctg}3x$

29.4. $y=\cos^2x$

10. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

10.1. Экстремумы функции и интервалы монотонности

Локальный экстремум функции

Если $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) во всех точках промежутка, то функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на этом промежутке. Интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$ являются интервалами монотонности функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, включая и саму точку x_0. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, для всех точек x которой выполняется неравенство $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0$ ($\Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0$).

Значение функции $f(x)$ в точке максимума называется *локальным максимумом*, а значение функции $f(x)$ в точке минимума — *локальным минимумом* данной функции.

Локальные максимум и минимум называются *локальными экстремумами*.

Термин *локальный* вводится потому, что понятие экстремума связано с окрестностью данной точки в области определения функции, а не со всей этой областью. В дальнейшем слово «локальный» будем для краткости опускать.

Необходимые условия экстремума

Функция $f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, в которых ее производная $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для функции $f(x)$, называются *критическими точками* этой функции. Они определяются как корни уравнения $f'(x)=0$ и как точки, где $f'(x)$ не существует.

Первое достаточное условие экстремума

Если в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, а производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, тогда точка x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, а производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, тогда точка x_0 — точка минимума функции.

Если при переходе через точку $x=x_0$ производная не меняет знак, то в точке $x=x_0$ экстремума нет.

Второе достаточное условие экстремума

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные, причем $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$. Тогда точка x_0 — точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0)<0$, и точка минимума функции, если $f''(x_0)>0$.

Правило отыскания экстремумов функции

Чтобы найти точки максимума и минимума функции $f(x)$, надо:

1) найти производную $f'(x)$;

2) найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует;

3) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции;

4) найти экстремальные значения функции.

Пример

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - x^2 - x$.

Найдем $y' = 3x^2 - 2x - 1$, приравняем функцию к нулю, получим уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$, решаем его, получаем $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ — критические точки. Знаки производной имеют вид (рис. 30):

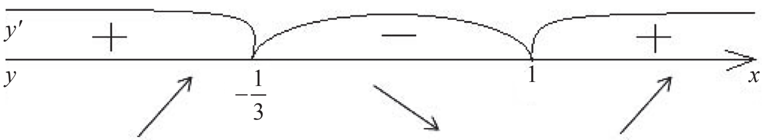


Рис. 30

На интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$ производная $y' > 0$ и функция возрастает, а на интервале $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ $y' < 0$ и функция убывает; $x = -\frac{1}{3}$ — точка максимума, $y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$ — максимум функции; $x = 1$ — точка минимума, $y(1) = -1$ — минимум функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения (глобальный максимум и минимум функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$), нужно выбрать наибольшее (наименьшее) из значений функции в критических точках, находящихся в интервале (a, b), и на концах отрезка в точках a и b.

Пример

Найти наименьшее и наибольшее значение функции $y = x^3 e^{-x}$ на отрезке [–1, 1].

Найдем $y' = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3 - x)$, приравняем функцию к нулю, получим уравнение $x^2 e^{-x}(3 - x) = 0$, решаем его, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Обратим внимание, что $x = 3$ не принадлежит данному отрезку $[-1,1]$, поэтому найдем значение функции в точке $x = 0$ и на концах отрезка: $y(-1) = -e$, $y(0) = 0$, $y(1) = e^{-1}$. Таким образом, $-e$ — наименьшее, а e^{-1} — наибольшее значение функции на данном отрезке.

10.2. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба

Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на промежутке, если для любых двух значений x_1, x_2 из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$ и пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$, т. е. в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует касательная к данной кривой, не параллельная оси Oy.

Если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что все точки данной кривой, абсциссы которых содержатся в этой окрестности, расположены выше касательной к кривой в точке M_0, то говорят, что данная кривая в точке x_0 *выпукла вниз* (рис. 31).

Если все точки кривой с абсциссами из некоторой окрестности точки x_0 находятся ниже касательной к этой кривой в точке M_0, то говорят, что данная кривая в данной точке *выпукла вверх* (рис. 32).

Утверждение. Если вторая производная функции $f(x)$ отрицательна (положительна) на промежутке, то функция является выпуклой вверх (выпуклой вниз) на этом промежутке.

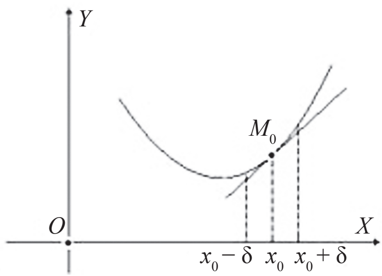


Рис. 31

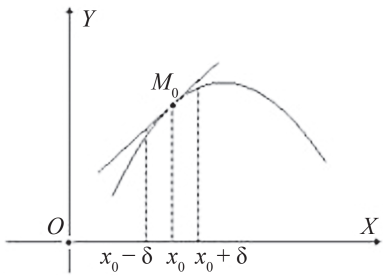


Рис. 32

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются точками перегиба.

Необходимое условие перегиба

Если точка x_0 — точка перегиба функции $y = f(x)$ и $f''(x_0)$ существует, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие перегиба

Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, непрерывную в точке x_0. Если $f''(x_0) = 0$ и вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 — точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба

1. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

П р и м е р

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3$.

Найдем $y' = x^3 - \frac{1}{2}x^2$, $y'' = 3x^2 - x$, приравняем вторую производную к нулю, получим уравнение $3x^2 - x = 0$, решаем его, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Знаки второй производной имеют вид (рис. 33):

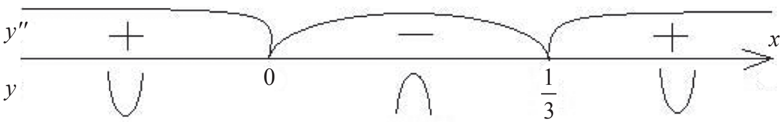


Рис. 33

На интервалах $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ $y'' > 0$ и функция выпукла вниз, а на интервале $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ $y'' < 0$ и функция выпукла вверх; $x = \frac{1}{3}$ и $x = 0$ — точки перегиба, так как при переходе через них вторая производная меняет свой знак.

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{324}.$$

10.3. Асимптоты графика функции

Если расстояние от точки, лежащей на кривой, до некоторой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

10.3.1. Вертикальные асимптоты

Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

П р и м е р 1

График функции $y=\dfrac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

Для отыскания вертикальных асимптот кривой $y=f(x)$ необходимо:

1) найти точки разрыва функции $f(x)$;
2) выбрать те из них, в которых хотя бы один из пределов функции $f(x)$ (слева или справа) равен $+\infty$ или $-\infty$. Пусть это будут точки $x_1, x_2, ..., x_m$, тогда прямые $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_m$ будут вертикальными асимптотами графика функции $y=f(x)$.

П р и м е р 2

Для кривой $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ вертикальными асимптотами будут прямые $x=-1$ и $x=1$.

З а м е ч а н и е. Вертикальная прямая $x=x_0$ может оказаться асимптотой графика функции $y=f(x)$ и в том случае, когда точка x_0 является граничной точкой области определения.

П р и м е р 3

Функция $y=\ln x$ определена в интервале $0<x<+\infty$, и для нее $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$, так что прямая $x=0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика функции $y=\ln x$.

10.3.2. Горизонтальные асимптоты

Прямая $y=b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Прямая $y=b$ называется *правосторонней горизонтальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

Прямая $y=b$ называется *левосторонней горизонтальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

10.3.3. Наклонные асимптоты

Если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$, то прямая $y=kx+b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y=f\left(x\right)$.

Пример

Найти наклонную асимптоту графика функций

$$y=\frac{x^3+x^2+2}{x^2-4}.$$

Для определения параметров уравнения асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+2}{(x^2-4)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2+2}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+2}{x^2-4}=1.$$

Таким образом, $y=x+1$ — наклонная асимптота.

10.4. Общая схема исследования функции и построения графика

1. Найти область определения функции; найти область значений функции; найти точки пересечения графика с осями координат.
2. Исследовать функцию на четность — нечетность.
3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Построить график функции.

Примеры исследования функций

Исследовать методами дифференциального исчисления функции и построить их графики:

1. $y = \frac{1}{4}\left(x^3 + 9x^2 + 15x - 9\right).$

Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, т. е. $D(y) = \{x | x \in \mathbb{R}\}$, а это значит, что функция непрерывна на всей числовой прямой и ее график не имеет вертикальных асимптот.

Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулой

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \; b = \lim_{x \to \infty}\left(f(x) - kx\right).$$

Имеем

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{4}\left(x^3 + 9x^2 + 15x - 9\right)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{4}\left(x^2 + 9x + 15 - \frac{9}{x}\right) = \infty.$$

Таким образом, у графика заданной функции наклонных асимптот нет.

Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = \frac{1}{4}\left(3x^2 + 18x + 15\right); \; x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод, что функция имеет две критических точки: $x_1 = -5, \; x_2 = -1.$ Знаки производной имеют вид (рис. 34):

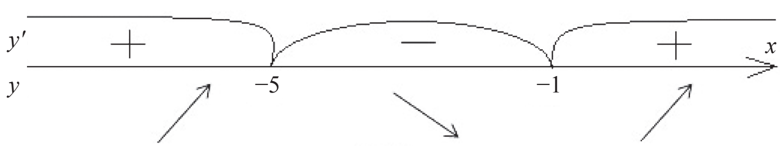


Рис. 34

Получаем, что $(-\infty; -5)$ и $(-1; +\infty)$ — промежутки возрастания функции, а $(-5; -1)$ — промежуток убывания; $x = -5$ — точка максимума, $y(-5) = 4$ — максимум функции; $x = -1$ — точка минимума, $y(-1) = -4$ — минимум функции.

Определим точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости. Для этого найдем вторую производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y'' = \frac{1}{4}(6x+18); \;\; x+3=0, \;\; x=-3.$$

Знаки второй производной имеют вид (рис. 35):

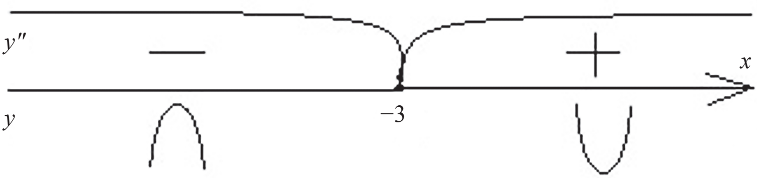


Рис. 35

Получаем, что $(-\infty;-3)$ — промежуток выпуклости вверх функции, а $(-3;+\infty)$ — промежуток выпуклости вниз; $x=-3$ — абсцисса точки перегиба функции, а ордината этой точки $y(-3)=\frac{1}{4}\left((-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9\right)=0.$

Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точки максимума A_1 $(-5;4)$, минимума $A_2(-1;4)$, перегиба $A_3(-3;0)$ и точку пересечения графика с осью Oy $A_4(0;-\frac{9}{4})$. С учетом результатов предыдущих исследований построим кривую.

График представлен на рис. 36.

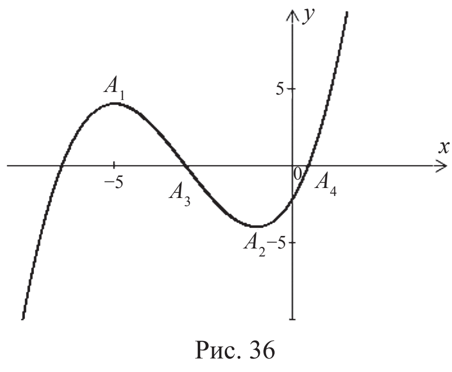


Рис. 36

2. $y = \dfrac{x^2 + 20}{x - 4}$.

Область определения $D(y) = \{x | x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)\}$.

Исследуем на непрерывность и выясним тип точки разрыва. Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 4$. Вычислим ее односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x \to 4-0} f(x) = \lim_{x \to 4-0} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \to 4+0} f(x) = \lim_{x \to 4+0} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = +\infty.$$

Таким образом, точка $x = 4$ является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 4$ — вертикальной асимптотой графика функции.

Исследование функции на наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 20}{x^2 - 4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{20}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2 + 20}{x - 4} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x + 20}{x - 4} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ — наклонная асимптота графика.

Исследование на экстремум и промежутки монотонности (рис. 37):

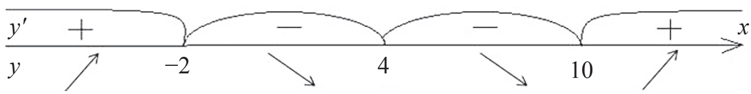


Рис. 37

$$y' = \frac{2x(x - 4) - (x^2 + 20)}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2}; \quad \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2} = 0;$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0; \ x_1 = -2, x_2 = 10.$$

$$y(-2) = -4 \text{ — максимум}; \ y(10) = 20 \text{ — минимум}.$$

Исследование функции на выпуклость, точки перегиба:

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)(x^2-8x-20)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2(x-4)\left[(x-4)^2 - (x^2-8x-20)\right]}{(x-4)^4} = \frac{72}{(x-4)^3}.$$

Так как $y'' \neq 0$, то график заданной функции точек перегиба не имеет. Остается выяснить вопрос об интервалах его выпуклости (рис. 38):

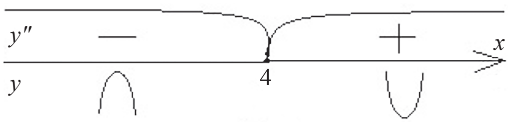


Рис. 38

Построение графика: график заданной функции пересекает ось Oy в точке (0; –5) и на основе обобщения результатов всех предыдущих исследований имеет вид, представленный на рис. 39.

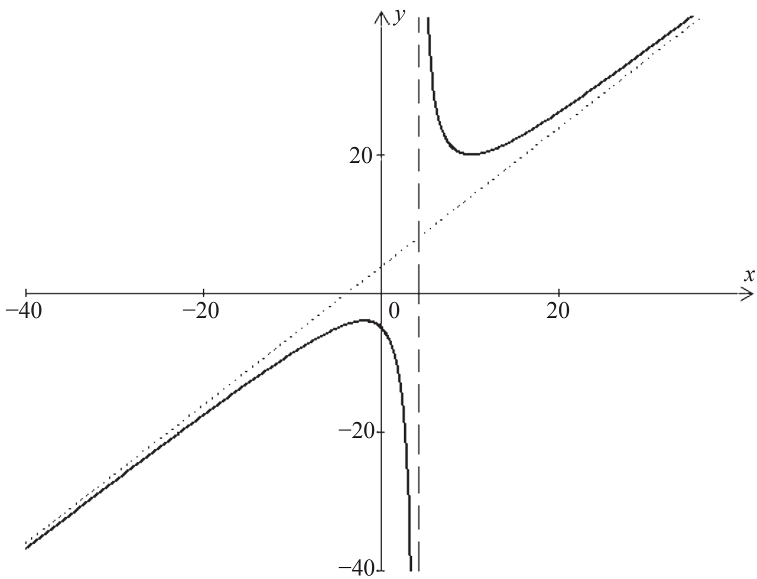


Рис. 39

Задачи

30. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции:

30.1. $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2$

30.2. $y=\frac{x}{\ln x}$

30.3. $y=\frac{e^{2x}}{1+x}$

30.4. $y=\frac{x^2}{\ln x}$

30.5. $y=x\ln x-3x$

30.6. $y=\cos(\ln x)$

30.7. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{3+x}$

30.8. $y=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}$

30.9. $y=\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x}$

30.10. $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-x^3$

30.11. $y=\sqrt[4]{x^4-4x^3}$

30.12. $y=x^3e^{-\frac{3x^2}{2}}$

30.13. $y=\ln(1+2\cos x)$

30.14. $y=5-x^2$

31. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

31.1. $y=x^3-3x^2;\ [-1;4]$

31.2. $y=x\ln x;\ [0,1]$

31.3. $y=x^3e^{x+1};\ [-4;-1]$

31.4. $y=2\sin 2x+3\cos 2x;\ \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

31.5. $y=\frac{x+1}{e^x};\ [-1;1]$

31.6. $y=\frac{x}{2+x^3};\ [0;3]$

31.7. $y=\frac{2x}{1+x^4};\ [-2;0,5]$

31.8. $y=\frac{1}{1+x^2};\ [2;3]$

32. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости:

32.1. $y=\frac{1}{6}x^3\left(x^2-5\right)$

32.2. $y=\frac{4}{3}x^3-12x^2+x-5$

32.3. $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2+5$

32.4. $y=\ln(2x^2+5)$

32.5. $y=\left(x+1\right)\operatorname{arctg}x$

32.6. $y=x^2e^{\frac{2}{x}}$

32.7. $y=x^3\ln x+1$

32.8. $y=\sqrt[3]{x^2-2}$

33. Найти горизонтальные асимптоты:

33.1. $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+4}{5-4x-3x^3}$

33.2. $f(x)=\dfrac{3-4x-2x^2}{3x^2+x+5}$

33.3. $f(x)=\dfrac{5x^2-3x+2}{4+x-2x^2}$

33.4. $f(x)=\ln\left|\dfrac{(2-3x)}{(x-2)}\right|$

33.5. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x^2}{1+3x^2}$

33.6. $f(x)=\cos\dfrac{\pi x^3}{1+6x^3}$

34. Найти вертикальные асимптоты:

34.1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-6x+5}$

34.2. $f(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+3x-4}}$

34.3. $f(x)=\dfrac{\arccos x}{x^2-\dfrac{\pi}{4}}$

34.4. $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$

35. Найти наклонные асимптоты:

35.1. $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2+2x+5}$

35.2. $f(x)=\dfrac{4-3x^3}{2x^2+x+1}$

35.3. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

35.4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

36. Исследовать функции и построить их графики:

36.1. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}$

36.2. $y=\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$

36.3. $y=\dfrac{2x}{2+x^3}$

36.4. $y=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

36.5. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

36.6. $y=\dfrac{x}{x^2+x-2}$

36.7. $y=\dfrac{x+1}{x(x-3)}$

36.8. $y=\dfrac{x^2-3}{x+5}$

36.9. $y=\sqrt[3]{1-\ln x}$

36.10. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

11. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. Основные понятия

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F(x)$ дифференцируема на промежутке X и $F'(x) = f(x)$.

П р и м е р

$$F(x) = x^2 \quad f(x) = 2x, \ (-\infty, \infty),$$

$$F(x) = \sin x \quad f(x) = \cos(x), \quad (-\infty, \infty),$$

$$F(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ (0, \infty).$$

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, где $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение.

Нахождение неопределенного интеграла от некоторой функции называется интегрированием этой функции. Операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны.

Утверждение. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.

Свойства неопределенного интеграла

Из определения следует, что неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $dF(x) = f(x)dx$;

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int Cf(x)dx = C\int f\left(x\right)dx,$ где C — постоянная;

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f\left(x\right)dx \pm \int g\left(x\right)dx;$

5) если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Таблица основных интегралов

$$\int 0dx = C, \int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\forall\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \mathrm{e}^{x}dx = \mathrm{e}^{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\left(a \neq 0\right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

11.2. Методы интегрирования

11.2.1. Непосредственное интегрирование

Отыскание неопределенных интегралов с помощью свойств интегралов, таблицы интегралов и алгебраических преобразований подынтегральной функции называется непосредственным интегрированием.

П р и м е р

$$\int\left(14x^6+4\sqrt[3]{x}+2^{2x}\mathrm{e}^x\right)dx=14\int x^6dx+4\int x^{\frac{1}{3}}dx+\int(4\mathrm{e})^x\,dx=\frac{14x^7}{7}+$$

$$+\frac{4\cdot 3x^{\frac{4}{3}}}{4}+\frac{(4\mathrm{e})^x}{\ln(4e)}+c=2x^7+3x^{\frac{4}{3}}+\frac{2^{2x}\mathrm{e}^x}{\ln(4e)}+C.$$

11.2.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть $x=\varphi(t)$ — функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt=F\left(\varphi(t)\right)+C.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

П р и м е р 1

Пусть $\int f(t)dt=F(t)+C.$

$$\int f(ax)dx=\left\{t=ax, x=\frac{t}{a},\ dx=\frac{1}{a}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax)+C,$$

$$\int f(x+b)dx=\left\{\begin{array}{l}t=x+b,\\ x=t-b,\\ dx=dt\end{array}\right\}=\int f(t)dt=F(t)+C=F(x+b)+C,$$

$$\int f(ax+b)dx=\left\{\begin{array}{l}t=ax+b,\\ x=\dfrac{t}{a}-\dfrac{b}{a},\\ dx=\dfrac{1}{a}dt\end{array}\right\}=\int f(t)\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

П р и м е р 2

$$1)\ \int e^{5x+3}dx=\begin{bmatrix} t=5x+3 \\ dt=5dx \\ dx=\dfrac{dt}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int e^{t}dt=\frac{1}{5}e^{t}+c=\frac{1}{5}e^{5x+3}+C;$$

$$2)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}=\begin{bmatrix} t=1+x^3 \\ dt=3x^2dx \\ x^2dx=\dfrac{dt}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}\sqrt{t}+c=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C;$$

$$3)\ \int \frac{\cos^2 2x-1}{\sin 2x}dx=\begin{bmatrix} \cos^2 2x+\sin^2 2x=1\Rightarrow \\ \Rightarrow \cos^2 2x-1=-\sin^2 2x\end{bmatrix}=\int\frac{-\sin^2 2x}{\sin 2x}dx=$$

$$=-\int \sin 2x dx=\begin{bmatrix} t=2x \\ dt=2dx \\ dx=\dfrac{dt}{2}\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int \sin t dt=\frac{1}{2}\cos t+c=\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

11.2.3 Интегрирование по частям

$(uv)'=u'v+uv'$. Умножим обе части равенства на dx, получим $d(uv)=vdu+udv$. Интегрируя, приходим к формуле интегрирования по частям: $\int udv=uv-\int vdu$.

1. В интегралах вида $\int P_k(x)e^x dx$; $\int P_k(x)\sin x\,dx$; $\int P_k(x)\cos x\,dx$. В качестве u возьмем многочлен степени k — $P_k(x)$.

П р и м е р 1

$$\int xe^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x;\ dv=e^{-x}dx \\ du=dx;\ v=-e^{-x}\end{bmatrix}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C.$$

Формулу интегрирования по частям можно применять повторно.

П р и м е р 2

$$\int x^2 \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2;\, dv = \sin x dx \\ du = 2xdx;\, v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x;\, dv = \cos x dx \\ du = dx; v = \sin x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x dx = -x^2\cos x +$$

$$+2x\sin x + 2\cos x + C.$$

2. В интегралах вида $\int P_k(x)\ln x\,dx$, $\int P_k(x)\arcsin x\,dx$, $\int P_k(x)\arccos x\,dx$, $\int P_k(x)\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P_k(x)\mathrm{arcctg}\,x\,dx$. В качестве u возьмем логарифм или обратную тригонометрическую функцию.

П р и м е р

$$\int \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x};\, v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int \frac{xdx}{x} = x\ln x - x + C.$$

11.2.4. Возвратное интегрирование

Так называемое *возвратное интегрирование* применяется при вычислении интегралов вида: $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,dx$, $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,dx$, $\int \cos(\ln x)dx$, $\int \sin(\ln x)dx$ и подобных.

П р и м е р

$\int \mathrm{e}^x \cos x\,dx$; обозначим этот интеграл I.

$$I = \int \mathrm{e}^x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^x;\, dv = \cos x dx \\ du = \mathrm{e}^x dx;\, v = \sin x \end{bmatrix} = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^x;\, dv = \sin x dx \\ du = \mathrm{e}^x dx;\, v = -\cos x \end{bmatrix} = \mathrm{e}^x\sin x + \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,dx =$$

$$= \mathrm{e}^x\left(\sin x + \cos x\right) - I + C.$$

Таким образом, получили

$$I = \mathrm{e}^x \left(\sin x + \cos x \right) + C - I.$$

Откуда, выражая I, получаем

$$I = \frac{1}{2} \mathrm{e}^x \left(\sin x + \cos x \right) + C.$$

11.2.5. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется отношение двух алгебраических многочленов

$$\frac{P_m(x)}{R_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}.$$

Интегрирование простейших дробей

Правильные дроби четырех типов называют *простейшими дробями*:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{\left(x-a\right)^k}$, где k — целое положительное число, $k > 1$;

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

4) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, где k — целое положительное число, $k > 1$,

и $x^2 + px + q$ — квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$.

Методы интегрирования простейших дробей

1. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d\left(x-a\right)}{x-a} = A\ln\left|x-a\right| + C.$

2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$

$= \frac{A}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$

3. Для вычисления интеграла $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ разобьем его на два интеграла, первый из которых I_a в числителе содержит дифференциал знаменателя, а второй I_b не содержит x в числителе.

Обозначим $u = x^2 + px + q \Rightarrow du = (2x+p)dx.$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \underbrace{\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx}_{I_a} + \underbrace{\int \frac{B-Ap/2}{x^2+px+q}dx}_{I_b};$$

$$I_a = \frac{A}{2}\ln|u| + C = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + C,$$

$$I_b = \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Здесь мы выделили полный квадрат в знаменателе и учли, что $q - \frac{p^2}{4} > 0.$

Сделаем замену переменной $\left\{\begin{array}{c} t = x + p/2, \\ dt = dx, \\ a = \sqrt{q - p^2/4}. \end{array}\right\},$

тогда

$$I_b = \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{B-Ap/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

4. Рассмотрим интеграл $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx.$

Аналогично тому, как это было сделано для интеграла 3, заменим

$$u = x^2 + px + q \Rightarrow du = \left(2x+p\right)dx.$$

Разобьем интеграл на два интеграла:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \underbrace{\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx}_{I_a} + \underbrace{\int \frac{\left(B-Ap/2\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx}_{I_b}.$$

$$I_a = \frac{A}{2}\int \frac{du}{u^k} = \frac{A}{2}\cdot\frac{u^{-k+1}}{\left(1-k\right)} + C = -\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\left(k-1\right)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + C.$$

$$I_b = \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \left\{\begin{array}{c} t = x + p/2, \\ a = \sqrt{q - p^2/4} \end{array}\right\} =$$

$$= \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \left(B - \frac{Ap}{2}\right)I_k, \text{ где } I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Вычислим

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{1}{(t^2+a^2)^k}; \quad dv = dt \\ du = \dfrac{-k2tdt}{(t^2+a^2)^{k+1}}; \ v = t \end{array}\right\} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} +$$

$$+2k\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}}.$$

Имеем

$$I_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1},$$

$$I_{k+1} = \frac{t}{2ka^2(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k .$$

Получена рекуррентная (возвратная) формула, выражающая значение интеграла от (k + 1)-й степени через значение интеграла от k-й степени. Зная $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$, по формуле можно найти I_2, затем, используя I_2, найти I_3 и т. д.

П р и м е р

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Подынтегральная дробь — правильная, разложим ее на простейшие:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)},$$

откуда получаем

$$x = A\left(x^2+1\right) + \left(Bx+C\right)\left(x-1\right) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x: $0 = A + B$, $1 = -B + C$, $0 = A - C$, откуда получаем $A = C = 0{,}5$; $B = -0{,}5$.
Тогда имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$

Общая схема интегрирования рациональной дроби

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$$

1. Если дробь $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ неправильная ($m \geq n$), то путем деления числителя на знаменатель получают многочлен и правильную рациональную дробь:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q_l(x) + \frac{R_p(x)}{P_n(x)},$$

где $Q_l(x)$, $R_p(x)$ — многочлены степени l и p соответственно; $Q_l(x)$ — частное (целая часть дроби); $l \leq m$, $l + n = m, R_p(x)$ — остаток ($p < n$).

2. Находят корни знаменателя правильной рациональной дроби и раскладывают знаменатель на квадратичные и (либо) линейные множители с вещественными коэффициентами.

3. Записывают разложение полученной правильной дроби на простейшие.

4. Интегрируют каждую простейшую дробь.

Интеграл от рациональной дроби выражается через элементарные функции: рациональные дроби, $\operatorname{arctg}(x)$ и $\ln(x)$.

11.2.6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Интегралы, содержащие произведение тригонометрических функций вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

1. Пусть m и n — четные, неотрицательные числа: $m = 2k$, $m = 2k$, $n = 2l$, k, $l \in N$. В подынтегральной функции степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

П р и м е р

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

2. Пусть хотя бы одно из чисел n и m — нечетное положительное.

От нечетной степени отщепляется один сомножитель и заносится под знак дифференциала d, а оставшаяся подынтегральная функция выражается через функцию, стоящую под знаком дифференциала, по формуле $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

П р и м е р

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos x (1-\sin^2 x) dx = \int \sin^4 x (1-\sin^2 x) d(\sin x) =$$

$$= \int (\sin^4 x - \sin^6 x) d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

3. Пусть n и m таковы, что $m + n = -2k$, где $k \in \mathrm{N}$, т. е. сумма $m + n$ является четным отрицательным целым. Применяем подстановку $\mathrm{tg} x = t$ с использованием формулы $1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

П р и м е р

Очевидно,

$$\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^5 x} = \int \sin^3 x \cos^{-5} x dx.$$

Сумма степеней синуса и косинуса равна −2, значит, можем сделать замену $\mathrm{tg}x = t$, преобразуем:

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^5 x} = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x \cos^2 x} dx = \int \mathrm{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix} t = \mathrm{tg}x \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} + C.$$

Интегралы вида $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$; $\int \cos\alpha x \sin\beta x dx$; $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$.

Для вычисления следует перейти к сумме функций и сумме интегралов:

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right].$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x) = R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных, $u = \sin x$, $v = \cos x$, вычисляются с помощью так называемой *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Подстановка $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ сводит указанный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции от одной переменной t.

Формулы универсальной тригонометрической подстановки имеют вид:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \mathrm{tg}x = \frac{2t}{1-t^2};\ x = 2\mathrm{arctg}t.$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1

$$\int \frac{dx}{1+2\sin x} = \left[\begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+2\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2+4t} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-3} = \left[\begin{array}{c} z = t+2 \\ dz = dt \end{array}\right] = 2\int \frac{dz}{z^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{3}}{t+2+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является четной функцией $\sin x$, $\cos x$, то более эффективной, чем подстановка $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, будет подстановка $t = \mathrm{tg}\,x$.

Пример 2

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x - 2)} = \left[\begin{array}{c} t = tgx \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2-2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}x-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}x+\sqrt{2}}\right| + C.$$

11.2.7. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ находятся с помощью подстановок $x = a\sin t$, $x = a\,\mathrm{tg}t$, $x = \dfrac{a}{\cos t}$, после чего подынтегральная функция сводится к тригонометрической.

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$ рационализируется с помощью замены $t = \sqrt[n]{x}$. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, ..., \sqrt[n_l]{x^{m_l}})dx$ являются частным случаем $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$, где n — наименьшее общее кратное чисел $n_1, ..., n_l$. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $ad \neq bc$ рационализируется с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Задачи

37. Найти интегралы:

37.1. $\int x^5 dx$

37.2. $\int x^{\sqrt{3}} dx$

37.3. $\int \dfrac{dx}{x^4}$

37.4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

37.5. $\int \sqrt[3]{x} dx$

37.6. $\int 2^x dx$

37.7. $\int \sqrt[3]{x} dx$

37.8. $\int \dfrac{x^5}{x\sqrt{x}} dx$

37.9. $\int \dfrac{dx}{3^x}$

37.10. $\int 2^{3x-1} dx$

37.11. $\int \dfrac{dx}{9x^2 - 1}$

37.12. $\int \dfrac{dx}{4x^2 + 25}$

37.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$

37.14. $\int (2\sin x - 3^{x+2} + 5)dx$

37.15. $\int \frac{7x^2+5x+3}{x}dx$

37.16. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

37.17. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

37.18. $\int (2x^8 + \mathrm{e}^x 2^x)dx$

37.19. $\int \frac{dx}{9x^2+1}$

37.20. $\int \frac{dx}{9-4x^2}$

37.21. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$

37.22. $\int \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^4}}dx$

37.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

37.24. $\int (2x^3 - 3x^2 + 4^{2x+1})dx$

37.25. $\int \left(2x^2+1\right)(2+3x^3)dx$

37.26. $\int \frac{2x^4+3x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$

37.27. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+8}{\sqrt[4]{x}+2}dx$

37.28. $\int \frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^3}{x\sqrt{x}}dx$

37.29. $\int \frac{\sin x}{2\cos\frac{x}{2}}dx$

37.30. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$

37.31. $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+1}dx$

37.32. $\int \frac{x^3-x+2}{x^2-1}dx$

37.33. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

37.34. $\int \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}dx$

37.35. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$

37.36. $\int \frac{3x^4-x^2-1}{x^2(x^2-1)}dx$

37.37. $\int \cos(3x+2)dx$

37.38. $\int \sqrt[3]{3-x}dx$

37.39. $\int \frac{dx}{4x+3}$

37.40. $\int e^{-2x+7}dx$

37.41. $\int x e^{-x^2}dx$

37.42. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$

37.43. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

37.44. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

37.45. $\int x^2 e^{3+5x^3}dx$

37.46. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

37.47. $\int \operatorname{tg} x\,dx$

37.48. $\int \frac{x^2+1}{x+2}dx$

37.49. $\int x e^{-3x^2+4}dx$

37.50. $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$

37.51. $\int \sqrt[5]{3x+2}\,dx$

37.52. $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$

37.53. $\int \frac{dx}{3x+1}$

37.54. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$

37.55. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$

37.56. $\int \frac{x^2dx}{2x^3+5}$

37.57. $\int \sqrt[3]{2+\cos 3x}\,\sin 3x\,dx$

37.58. $\int \frac{dx}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}dx, t=-\frac{1}{x}$

37.59. $\int \cos\frac{2x+1}{5}dx$

37.60. $\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}dx,\ t=\cos\frac{x}{3}$

37.61. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$

37.62. $\int \frac{dx}{2x+3\ln x}$

37.63. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

37.64. $\int \left(x+{}^1\!/_4\right)\sin\left(2x^2+x\right)dx$

37.65. $\int e^{-\sqrt{2x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

37.66. $\int e^x\sqrt{2+5e^x}\,dx$

37.67. $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx$

37.68. $\int \frac{\cos \ln x}{2x} dx$

37.69. $\int x\,e^{-2x} dx$

37.70. $\int (2+3x)e^{x/3} dx$

37.71. $\int x \ln x\, dx$

37.72. $\int x^2 \sin x\, dx$

37.73. $\int \ln^2(2x+3)\, dx$

37.74. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

37.75. $\int x^2 e^{-x+1} dx$

37.76. $\int x \ln^2 x\, dx$

37.77. $\int x \arcsin x\, dx$

37.78. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$

37.79. $\int x\,e^{5x} dx$

37.80. $\int \ln(1-x) dx$

37.81. $\int x^2 \ln^2 x\, dx$

37.82. $\int x \sin 3x\, dx$

37.83. $\int x \cos^2 x\, dx$

37.84. $\int x^3 e^{2x} dx$

37.85. $\int (x^2-3x) \ln x\, dx$

37.86. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

37.87. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx$

37.88. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$

37.89. $\int \frac{x+1}{4x^2+4x+3} dx$

37.90. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} dx$

37.91. $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x-1)}$

37.92. $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$

37.93. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$

37.94. $\int \frac{dx}{x\,(x+1)^2}$

37.95. $\int \frac{x\,dx}{x^2+3x-4}$

37.96. $\int \frac{x^2}{(1-x)^3}dx$

37.97. $\int \frac{dx}{x^3+x}$

37.98. $\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)(x+2)}$

37.99. $\int \frac{\left(x^2+2\right)dx}{\left(x+1\right)^2(x-1)}$

37.100. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

37.101. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

37.102. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$

37.103. $\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx$

37.104. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$

37.105. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

37.106. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$

37.107. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

37.108. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$

37.109. $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx$

37.110. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

37.111. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x+2}$

37.112. $\int \frac{x^2-x+14}{\left(x-4\right)^3(x-2)}dx$

37.113. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$

37.114. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

37.115. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{1+x}$

37.116. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

37.117. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$

37.118. $\int \frac{dx}{\mathrm{e}^5\sqrt{x^2-1}}$

37.119. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

37.120. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

37.121. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

37.122. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$

37.123. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$

37.124. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{2\sqrt{x}+3}$

37.125. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}$

37.126. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

37.127. $\int \sin^3 x \, dx$

37.128. $\int \cos^7 x \, dx$

37.129. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

37.130. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

37.131. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$

37.132. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$

37.133. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

37.134. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$

37.135. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

37.136. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$

12. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть на $[a,\ b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Разобьем $[a,\ b]$ на n частей точками деления $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

В каждом из отрезков $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ возьмем по точке $\xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$. Геометрически это алгебраическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_i и высоты $f(\xi_i)$. Интегральная сумма зависит от способа разбиения $[a,\ b]$ на отрезки $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ и от выбора точек ξ_i внутри $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Каждому разбиению соответствует своя интегральная сумма S_n (рис. 40).

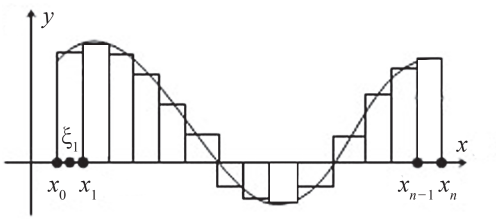


Рис. 40

Таким образом, получается последовательность $\{S_n\}$. Обозначим $\max \Delta x_i$ — наибольшую из длин отрезков разбиения и устремим $\max \Delta x_i \to 0$.

Если при *любых* разбиениях $[a,\ b]$ таких, что $\Delta x_i \to 0$, и при *любом* выборе точек ξ_i S_n стремится к одному пределу S, то этот предел называется *определенным* интегралом от $f(x)$ на

$[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$; a называется *нижним пределом* интеграла, b — *верхним пределом*.

Если существует $\int\limits_a^b f(x)dx$, то $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Геометрически определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, причем площади, расположенные выше оси Ox, входят со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси Ox, — со знаком минус.

Достаточное условие интегрируемости

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.

12.1. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx \pm \beta \int\limits_a^b g(x)dx$, где α, β — некоторые числа.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

4. Для любых трех чисел a, b, c, справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. **Сохранение интегралом знака функции**. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ для любых $x \in [a, b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. **Интегрирование неравенств**. Пусть $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ для любых $x \in [a, b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

7. **Теорема об оценке**. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, тогда $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

8. **Теорема о среднем**. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется $c \in [a, b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

9. Если функция $y = f(x)$ — четная, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Если функция $y = f(x)$ — нечетная, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

10. **Формула Ньютона — Лейбница**. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Пример

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \,|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2.$$

12.2. Методы интегрирования

12.2.1. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $x = g(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ ($[a, b]$ — область значений $g(t)$ при изменении $t \in [\alpha, \beta]$); $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$ — формула замены переменной под знаком определенного интеграла.

Пример

$$\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 - 1;\ dt = 2xdx \\ x = 1 \to t = 0;\ x = 0 \to t = -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 \mathrm{e}^t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\,|_{-1}^0 = \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-1}\right) = \frac{e-1}{2e}$$

12.2.2. Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют на $[a, b]$ непрерывные производные, тогда $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

Пример

$$\int\limits_1^2 \ln 2xdx = \begin{bmatrix} u = \ln 2x;\ dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x}dx;\ v = x \end{bmatrix} = x\ln 2x\,|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x}{x}dx =$$

$$= 2\ln 4 - \ln 2 - \int\limits_1^2 dx = 4\ln 2 - \ln 2 - x\,|_1^2 = 3\ln 2 - 2 + 1 = \ln 8 - 1.$$

12.3. Геометрические приложения определенного интеграла

12.3.1. Вычисление площадей плоских фигур

1. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке, $S = \int_a^b f(x)dx$ (рис. 41).

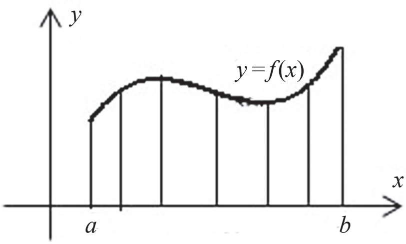


Рис. 41

2. Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a, b]$, то площадь S над кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке, взятому со знаком минус, $S = -\int_a^b f(x)dx$ (рис. 42).

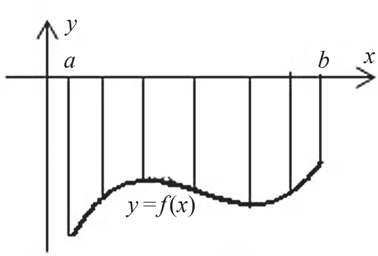


Рис. 42

3. Если $f_1(x) \geq f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми на $[a, b]$, определяется формулой $S = \int\limits_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx$ (рис. 43).

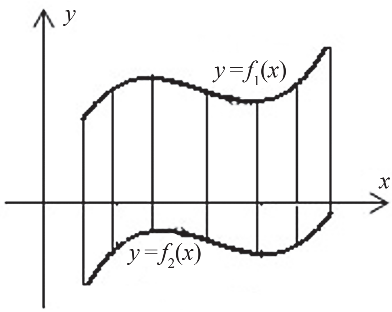


Рис. 43

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной двумя параболами: $y = -x^2 + 9$ и $y = x^2 + 1$ (рис. 44).

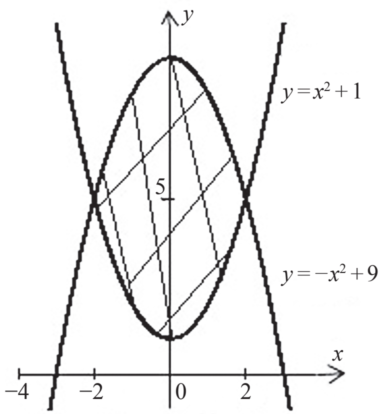


Рис. 44

Найдем абсциссы точек пересечения:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 9 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 9 \Rightarrow x = \pm 2.$$

$$S = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 9 - x^2 - 1\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(-2x^2 + 8\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{2x^3}{3} + 8x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = -\frac{16}{3} + 16 - \left(\frac{16}{3} - 16\right) = \frac{64}{3}.$$

12.3.2. Вычисление длины плоской кривой в прямоугольных координатах

Длина l дуги кривой, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx.$$

П р и м е р

Вычислите длину дуги кривой

$$y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,\ 0 \le x \le \frac{8}{9}.$$

Найдем производную:

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Определим длину дуги кривой:

$$l = \int_0^{\frac{8}{9}} \sqrt{1 + \frac{(x+1)^2}{1 - x^2}} = \int_0^{\frac{8}{9}} \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2 + 2x + 1}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{8}{9}} \sqrt{\frac{2 + 2x}{1 - x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{8}{9}} \sqrt{\frac{2(1+x)}{(1-x)(1+x)}}\, dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{8}{9}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = -2\sqrt{2}\sqrt{1 - x}\,\Bigg|_0^{8/9} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

12.3.3. Вычисление объемов тел вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = f(y)$, $c \le y \le d$, вращается вокруг оси Oy, то $V_y = \pi \int_c^d f^2(y)dy$.

П р и м е р

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x - 1)^3$ и прямой $x = 2$.

$$V_x = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3 dx = \frac{\pi}{4}.$$

Задачи

38. Вычислить определенные интегралы:

38.1. $\int_1^8 \frac{x - 3\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}$

38.2. $\int_4^5 x\sqrt{x^2 - 16}dx$

38.3. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$

38.4. $\int_1^2 \frac{4x+2}{2x-1}dx$

38.5. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

38.6. $\int_e^{e^2} \frac{2\ln x + 1}{x}dx$

38.7. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

38.8. $\int_{-2}^1 e^2\sqrt{1-x^2}dx$

38.9. $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$

38.10. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}$

38.11. $\int_1^e x\ln x dx$

38.12. $\int_1^e \ln^2 x dx$

38.13. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} x dx$

38.14. $\int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \sin x dx$

38.15. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$

38.16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx$

38.17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin x dx$

38.18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

38.19. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$

38.20. $\int\limits_{-\frac{2}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} x^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx$

38.21. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x dx$

38.22. $\int\limits_{-7}^{7} \frac{x^4 \sin x}{x^6+2} dx$

38.23. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} dx$

38.24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

38.25. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

38.26. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

38.27. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

38.28. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+2x}$

39. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

39.1. $y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}},\ y = e^2$

39.2. $y = x^4 - 2x^2,\ y = 0$

39.3. $y = x^3 + 3,\ xy = 4,\ y = 2,\ x = 0$

39.4. $y = 3 + 2x + x^2,\ y = x + 1$

39.5. $y = x^3,\ y = -2x^2 + 3x$ (фигура расположена в первой четверти)

39.6. $y = 2 - x^4,\ y = x^2$

39.7. $y = \sqrt{1-x},\ y = x + 1,\ y = 0$

39.8. $xy = 1,\ y = x^2,\ x = 3,\ y = 0$

39.9. $y = \arcsin 2x,\ x = 0,\ y = -\frac{\pi}{2}$

39.10. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1$

39.11. $y=\cos 2x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$

39.12. $y=x^2+1,\ x=y^2,\ 3x+2y-16=0,\ x=0$

39.13. $y=\frac{1}{2}x^2+2,\ x+2y-4=0,\ y=0$ (фигура расположена в первой четверти)

39.14. $x=0,\ y=4x-x^2$ и касательной к графику этой функции с абсциссой в точке $x=3$

39.15. $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ t\in[0;\,2\pi]$

39.16. $x=\cos t,\ y=2\sin t,\ t\in[0;\,2\pi]$

40. Найти длины дуг следующих кривых:

40.1. $y=x^{\frac{1}{4}},\ 0\le x\le\frac{4}{3}$

40.2. $y=\ln\sin x,\ \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$

40.3. $y=\ln\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{6}$

40.4. $y=2\sqrt{x},\ 0\le x\le 1$

40.5. $y=x^2,\ 1\le x\le 2$

40.6. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

40.7. $y=\arcsin \mathrm{e}^{-x},\ 0\le x\le 1$

40.8. $y=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right),\ 0\le x\le 1$

41. Найти площади поверхностей вращения, полученных при вращении вокруг оси Ox следующих кривых:

41.1. $y=x^3$ при $x\in\left[0;\,\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right]$

41.2. $9y^2=x(3-x)^2$ при $x\in[0;\,3]$

41.3. $x^2+y^2=9$ при $x\in[-2;\,1]$

41.4. $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ t\in\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$

42. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первой четверти и ограниченной параболой, прямой и осью Oy:

42.1. $y=2x^2,\ y=-3x+14$

42.2. $y=3x^2,\ y=-3x+6$

42.3. $y=x^2,\ y=-2x+5$

42.4. $y=\frac{x^2}{3},\ y=-x+6$

42.5. $y=3x^2,\ y=-2x+5$

42.6. $y=4x^2,\ y=-2x+2$

43. Найти объемы тел, образованных при вращении вокруг осей Ox и Oy плоских фигур, ограниченных линиями:

43.1. $y=\frac{4}{x},\ x=1,\ x=4,\ y=0$

43.2. $y=\frac{1}{2}x^2-2x,\ y=0$

43.3. $y=\sin x,\ \ y=0$ при $0\le x\le \pi$

43.4. $y=x^2,\ xy=8,\ y=0,\ x=4$

43.5. $y=\ln x,\ y=0,\ x=e$

43.6. $x=\sqrt{y-1},\ x=0,\ y=5$

43.7. $y=\sqrt{6x},\ y=\sqrt{16-x^2}$

43.8. $y=-x^2+4,\ y=x^2,\ x=0$

43.9. $y=x^2+1,\ x=y^2+1,\ y=0,\ x=0,\ x=2$

44. Функция $u(t)$ задает изменение производительности производства с течением времени t. Найти объем продукции за указанный период $t_1\le t\le t_2$:

44.1. $u(t)=-0{,}00625t^2-0{,}005t+0{,}5;\ 0\le t\le 8$

44.2. $u(t)=3t^2-2t+4;\ 1\le t\le 3$

44.3. $u(t)=t^2-t+1;\ 0\le t\le 12$

44.4. $u(t)=32-2^{-0{,}5t+5};\ 0\le t\le 1$

44.5. $u(t)=10-3^{-0{,}3t};\ 0\le t\le 3$

45. Найти среднее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$:

45.1. $y=\frac{1}{1+x^2};\ \left[1;\sqrt{3}\right]$

45.2. $y=xe^x;\ \left[0;1\right]$

45.3. $y=\sin 3x;\ \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

45.4. $y=\cos 2x;\ \left[0;\frac{\pi}{12}\right]$

46. Определить промежуток, которому принадлежит значение определенного интеграла:

46.1. $\int\limits_{-1}^{3} e^{2x-x^2}dx$

46.2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$

13. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

13.1. Несобственные интегралы первого рода (по бесконечному промежутку)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, \infty)$. Тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, где $b > a$, и существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx.$ *Несобственным интегралом первого рода* называется предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)dx.$ Таким образом, $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что *несобственный интеграл сходится*. Если же этот предел не существует или бесконечен, то говорят, что *несобственный интеграл расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл и для промежутка $(-\infty, b]$ $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$ если этот предел существует и конечен.

Для функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(-\infty, +\infty)$, несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется равенством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$ где c — любое число. Несобственный интеграл в левой части называется *сходящимся*, если сходится каждый несобственный интеграл в правой части.

П р и м е р 1

Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

При $p \neq 1$

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right)_a^b = \frac{1}{-p+1} \lim_{b\to\infty} b^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} a^{-p+1}.$$

Пусть $p > 1$, тогда $-p+1<0$ и $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{-p+1} = 0$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{-p+1} a^{-p+1}$, значит, при $p > 1$ интеграл сходится.

Пусть $p < 1$, тогда $-p+1>0$ и $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{-p+1} = \infty$, т. е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ при $p < 1$ расходится.

При $p = 1$: $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to\infty} (\ln x)\Big|_a^b = \lim\limits_{b\to\infty} (\ln b - \ln a) = \infty$. Интеграл расходится.

П р и м е р 2

Вычислить несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Воспользуемся обобщенной формулой Ньютона — Лейбница:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = -(0-1) = 1$ (интеграл сходится);

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ (интеграл расходится);

3) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$. Этот предел не существует, поэтому $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ расходится;

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^{0} = e^0 - \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 1 - 0 = 1$ (интеграл сходится);

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ (интеграл сходится).

Выясним геометрический смысл несобственного интеграла первого рода.

Пусть $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, +\infty)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади фигуры (рис. 45), ограниченной снизу отрезком $[a, b]$ оси Ox, сверху — линией $y = f(x)$, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$. При возрастании b прямая $x = b$, ограничивающая эту фигуру, двигается вправо, а интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ стремится к интегралу $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Поэтому величину $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ естественно принять за площадь бесконечной фигуры, ограниченной снизу осью Ox, сверху — графиком функции $y = f(x)$, слева — прямой $x = a$.

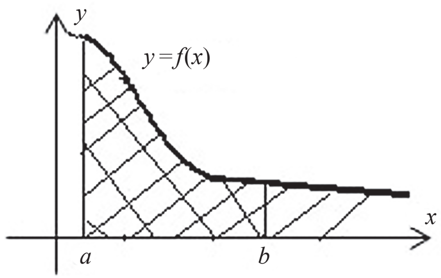


Рис. 45

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ для случая $f(x) \geq 0$ численно равен площади бесконечной фигуры (рис. 46), ограниченной снизу осью Ox, сверху — кривой $y = f(x)$, справа — прямой $x = b$.

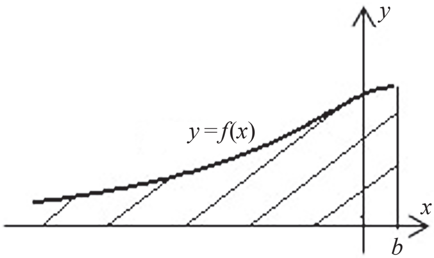


Рис. 46

Пример

Вычислить площади бесконечных фигур, ограниченных осью Ox, кривой $y = f(x)$, прямой $x = a$, если:

а) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x};\ a=1,\ x\geq 1;$

б) $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x};\ a=0,\ x\leq 0;$

в) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{2}+1},\ x\in(-\infty,+\infty);$

г) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{2}},\ a=1,\ x\geq 1.$

Построим фигуры, ограниченные данными линиями (рис. 47–50).

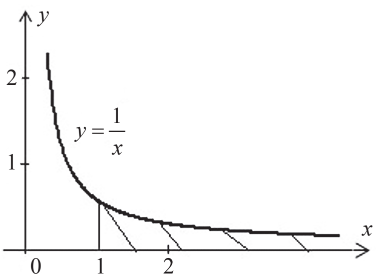


Рис. 47

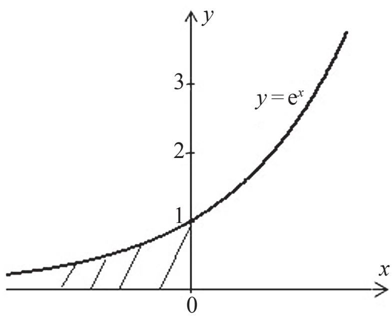


Рис. 48

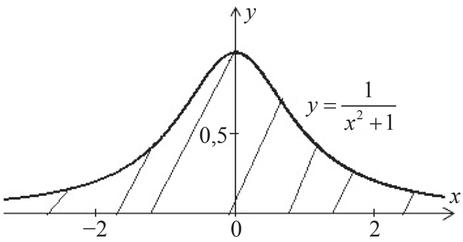


Рис. 49

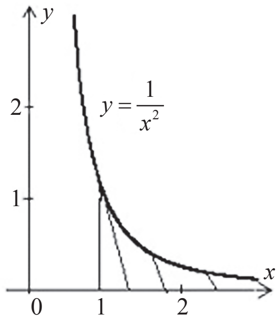


Рис. 50

О т в е т ы:

$$\text{а) } S = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty; \quad \text{б) } S = \int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1; \quad \text{в) } S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi; \quad \text{г) } S = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами. Признаки сравнения

1. Пусть при $a \le x < +\infty$, $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} g(x)dx$. Если расходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

2. Если при $a \le x < +\infty$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Абсолютная и условная сходимость

Если сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$. В этом случае $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

Если $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся*.

Пример 1

Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}dx$.

Имеем $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} \mathrm{e}^{-3x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\right)\Bigg|_0^b = \frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(1-e^{-3b}\right) = \frac{1}{3}$.

Несобственный интеграл сходится.

Пример 2

Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_a^{-1} = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right) = 1$, т. е. предел существует. Следовательно, искомый несобственный интеграл сходится.

Пример 3

Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_2^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b = \frac{1}{\ln 2}$, т. е. несобственный интеграл сходится.

Пример 4

Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^3}}dx$.

Имеем $\frac{(x+1)}{\sqrt{x^3}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^{1/2}}$ расходится (здесь $p = \frac{1}{2} < 1$). Следовательно, по признаку сравнения расходится и исходный интеграл.

13.2. Несобственные интегралы второго рода (от неограниченных функций)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$ и неограниченна вблизи b. Тогда функция непрерывна на любом отрезке $[a, b_1]$, где $a \leq b_1 < b$, и, следовательно, существует интеграл $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx.$

Рассмотрим $\lim\limits_{b_1 \to b-0} \int\limits_a^{b_1} f(x)dx$. Этот предел называется *несобственным интегралом второго рода* и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} \int\limits_a^{b_1} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае несобственный интеграл называется *расходящимся* (рис. 51).

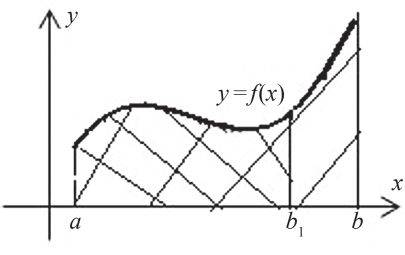


Рис. 51

Аналогично для функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(a, b]$ и неограниченной вблизи a, несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Если этот правосторонний предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся* (рис. 52).

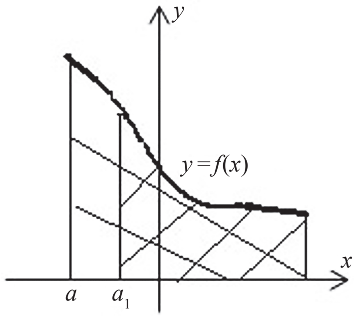


Рис. 52

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ всюду, кроме некоторой точки c ($a < c < b$), и не ограничена вблизи c.

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется равенством:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если каждый из интегралов в правой части равенства сходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

П р и м е р 1

Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ не ограничена при $x=2$, поэтому интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ является несобственным. Применим формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\int\limits_0^2 \frac{d(2-x)}{\sqrt{2-x}} = -2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^{2-0} = -(0-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

П р и м е р 2

Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

Подынтегральная функция $f(x)\frac{1}{x}$ не ограничена вблизи $x = 0$. Поэтому, по определению, $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^{0-0} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0+0}^{1} \frac{dx}{x}$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{0} = \infty$. Этот интеграл расходится, поэтому и интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ расходится.

Отметим, что если бы мы стали вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции в точке $x = 0$, то получили бы неверный результат.

Рассмотрим геометрический смысл несобственного интеграла второго рода. Пусть $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и не ограничена вблизи b. Тогда $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$ $(b_1 < b)$ равен площади фигуры, ограниченной снизу отрезком $[a, b_1]$ оси Ox, сверху — линией $y = f(x)$, слева и справа — прямыми $x = a$, $x = b_1$. При стремлении b_1 к b прямая $x = b_1$ стремится к прямой $x = b$. Поэтому

$\lim\limits_{b_1 \to b-0} \int\limits_a^{b_1} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$ естественно принять за площадь бесконечной фигуры, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$ оси Ox, сверху — линией $y = f(x)$, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$.

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам сходимости интегралов с бесконечными пределами. Эталоном сравнения служит интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\beta}}$, $\beta > 0$, который сходится при $\beta < 1$ и расходится при $\beta \geq 1$.

Пример

Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

При $x \to 1$ функции $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{(x-1)}$ эквивалентны, так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1}{\ln x}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\ln x} = \left(\begin{array}{c}\text{по}\\ \text{правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(1/x\right)} = 1,$$

интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)}$ расходится ($\beta = 1$), следовательно, и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ расходится.

Примеры решения задач

Пример 1

Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)}}dx$.

Подынтегральная функция неограниченно возрастает при $x \to 1$, представим подынтегральную функцию в виде

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}.$$

Первый сомножитель особенности при $x \to 1$ не дает, а сравнение с $\dfrac{1}{(x-1)}$ при $x \to 1$ дает $\alpha = \dfrac{1}{3} < 1$. Следовательно, интеграл сходится.

Пример 2

Вычислить (или установить расходимость) $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \cos x dx$.

По определению,

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \cos x dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{\pi/2}^{B} \cos x dx = \lim_{B\to+\infty} \left(\sin x \Big|_{\pi/2}^{B} \right) = \lim_{B\to+\infty} (\sin B - 1) = -1 + \lim_{B\to+\infty} \sin B.$$

Так как $\lim\limits_{B\to+\infty} \sin B$ не существует, то исследуемый несобственный интеграл расходится.

Пример 3

Исследовать на сходимость $\int\limits_{3}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3 + 2x + 2}$.

Рассмотрим $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2x + 2}$. Наибольшая степень многочлена в знаменателе равна 3. Поэтому для сравнения возьмем функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$, тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3 + 2x + 2} = 1 \neq 0$ и по предельному признаку сравнения исследуемый несобственный интеграл и интеграл $\int\limits_{3}^{+\infty} g(x)\, dx = \int\limits_{3}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ сходятся или расходятся одновременно. Последний интеграл сходится ($p > 1$), следовательно, исследуемый интеграл тоже сходится.

Пример 4

Исследовать на абсолютную сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos\ 2x dx}{1 + x^2}$.

Здесь $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{1 + x^2}$; $|f(x)| = \left| \dfrac{\cos\ 2x}{1 + x^2} \right| = \dfrac{|\cos\ 2x|}{1 + x^2}$, так как для любых x $|\cos 2x| \le 1$, то $|f(x)| \le \dfrac{1}{1 + x^2} = g(x)$.

Рассмотрим

$$\int\limits_{1}^{+\infty} g(x) dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_{1}^{b} \right) = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

следовательно, $\int\limits_{1}^{+\infty} g(x) dx$ сходится.

Тогда по признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$, а исследуемый интеграл сходится абсолютно.

Пример 5

Вычислить (или установить расходимость) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна для $x \in [0, 1)$ и $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = +\infty$.

Тогда

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\arcsin(1-\varepsilon) \right] - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

т. е. интеграл сходится.

Задачи

47. Вычислить интегралы (если они сходятся):

47.1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^4}$

47.2. $\int\limits_{-1}^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

47.3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$

47.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

47.5. $\int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x dx$

47.6. $\int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{arctg} x dx$

47.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{2x} dx$

47.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} dx$

47.9. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

47.10. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$

47.11. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2}$

47.12. $\int\limits_{1}^{0} \ln x dx$

47.13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

47.14. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

47.15. $\int\limits_{0}^{-\infty} \frac{dx}{(2x-3)^2}$

47.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1-\ln x}{x^2} dx$

47.17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{6-2x-2x^2}{(x^2+3)^2} dx$

47.18. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+3x+2}$

14. РЯДЫ

14.1. Числовые ряды

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, где $\{u_n\}$ — заданная бесконечная числовая последовательность, называется *числовым рядом*, а числа u_n — *членами ряда*.

Конечные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2, \ldots$, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ называются *частичными суммами ряда*.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда*. В противном случае ряд *расходится* и суммы не имеет.

Отбрасывание конечного числа *начальных* членов ряда не влияет на его сходимость (но влияет на сумму).

Если члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ умножить на одно и то же число C, то его сходимость не нарушится, а сумма умножится на это число $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = CS$.

Два сходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ можно почленно складывать (вычитать) так, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится и его сумма равна $A \pm B$.

Необходимый признак сходимости числового ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то общий член сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Это условие не является достаточным.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится, несмотря на то, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

14.1.1. Ряды с положительными членами

Признаки сравнения рядов с положительными членами

Пусть есть два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0\ \ (1)\quad \text{и}\quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ v_n \geq 0\ \ (2).$$

1. Если хотя бы начиная с некоторого n выполняется неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

2. Если существует конечный предел отношения общих членов рядов (1) и (2), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, $v_n \neq 0$, $0 < k < \infty$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Приведем полученные данные о сходимости некоторых рядов, которые могут быть использованы для сравнения:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left[\begin{array}{l} \text{сходится, если } \alpha > 1, \\ \text{расходится, если } \alpha \leq 1. \end{array} \right.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \left[\begin{array}{l} \text{сходится, если } |a| < 1, \\ \text{расходится, если } |a| \geq 1. \end{array} \right.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n \left[\begin{array}{l}\text{сходится при } |q|<1,\\ \text{расходится при } |q|\ge 1.\end{array}\right.$

Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Признак Даламбера. Если $u_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \left[\begin{array}{l}\text{сходится, если } l<1,\\ \text{расходится, если } l>1,\\ \text{признак не дает ответа, если } l=1.\end{array}\right.$$

Признак Коши. Если $u_n \ge 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \left[\begin{array}{l}\text{сходится, если } l<1,\\ \text{расходится, если } l>1,\\ \text{признак не дает ответа, если } l=1.\end{array}\right.$$

Интегральный признак сходимости. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и пусть $f(x)$ такая, что $f(n) = u_n$, непрерывна и не возрастает при $f(n)=u_n$, $x \ge 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

14.1.2. Знакопеременные ряды

Если для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится. *Обратное утверждение неверно.*

Сходящийся ряд, для которого ряд, составленный из абсолютных величин его членов, также сходится, называется *абсолютно сходящимся.*

Заметим, что этот признак сходимости *достаточен, но не является необходимым.* Существуют знакопеременные ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Сходящийся ряд, для которого ряд из абсолютных величин его членов расходится, называется *условно сходящимся.*

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Ряд называется знакочередующимся, если его члены являются (поочередно) положительными и отрицательными. Такой ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \text{ где } u_n > 0 \text{ для любого } n.$$

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, т. е. $u_1 > u_2 > \ldots > u_{\mathrm{n}} > \ldots > 0$, и предел модуля его общего члена равен нулю, т. е. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма положительна, $S > 0$, и не превосходит первого члена ряда, т. е. $S \le u_1$.

Признак Лейбница используется для приближенного вычисления суммы знакочередующегося ряда с определенной точностью. Сумма отброшенных членов знакочередующегося ряда Лейбница по абсолютной величине не превосходит модуля первого отброшенного члена.

14.2. Степенные ряды

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$ называется *степенным по степеням* $(x-x_0)$, $a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots$ — *коэффициенты* ряда. При $x_0 = 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ является степенным по степеням x.

Область сходимости степенного ряда

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_0 $(x_0 \neq 0)$, то он абсолютно сходится для $\forall x : |x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится в точке x_0 $(x_0 \neq 0)$, то он расходится и для всех x таких, что $|x| > |x_0|$. Областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является симметричный интервал с центром в точке 0.

Число R такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ — расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $x \in (-R, R)$ — *интервалом сходимости*.

В граничных точках $x = \pm R$ поведение ряда требует дополнительного исследования.

Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ с центром в точке x_0.

Вычисление радиуса сходимости

Степенные ряды в области сходимости сходятся абсолютно и можно использовать признаки сходимости рядов с положительными членами.

1. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} <1, & \text{сходится,} \\ >1, & \text{расходится.} \end{cases}$$

Ряд сходится, если

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|};\ \ R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

2. По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n\left(x\right)\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\ \begin{cases} <1, \text{ сходится}, \\ >1, \text{ расходится}. \end{cases}$$

Ряд сходится, если

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}};\ \ R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Задачи

48. Найти частичную сумму ряда S_n. В случае сходимости ряда найти его сумму:

48.1. $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\ldots$

48.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

48.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}$

48.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)$

49. Для данных рядов найти

$$\lim_{n\to\infty}u_n\ \left(\lim_{n\to\infty}|u_n|\right).$$

В тех случаях, где этого достаточно для установления сходимости или расходимости ряда, сделать вывод о поведении ряда:

49.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{4n+7}$

49.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{3n^4+11}$

49.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$ 49.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{n^2+1}$

49.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{2n-1}$ 49.6. $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{3n}{3n-1}$

50. С помощью признаков сравнения исследуйте данные ряды на сходимость:

50.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{2n^3-n-25}$ 50.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3\ln(n+2)}}$

50.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\sqrt{n^7+3}}{n^4+\sqrt[3]{n^5}+10}$ 50.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}\ln(n+2)}$

50.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)$ 50.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n+1}$

51. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

51.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 51.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{n!}$

51.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$ 51.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

51.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+7}$ 51.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{5^n+12}$

51.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n(n+1)}$ 51.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-5}$

51.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$ 51.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n+n^2}$

51.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n$ 51.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n^2}$

51.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{3^n}$

51.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^n$

51.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi\cdot 3^n}{4^n+\mathrm{e}^n}$

51.16. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{1}{3^n}\right)$

52. С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

52.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$

52.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^5 n}}$

52.3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

53. Исследовать сходимость рядов:

53.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{5^n}$

53.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n+7}}{3n^2-15}$

53.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4^n n^2}$

53.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+12n}{\sqrt[5]{n^8+n^3+2}}$

53.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{12^n+n^2}$

53.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{50}}{3^n}$

53.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^n+1}{(3n+1)^n}$

53.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2^n}$

53.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{4^n}{n(4^n+1)}\right)$

53.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{3n}$

54. Исследовать сходимость рядов с помощью предельного признака сравнения. В качестве эталонного ряда рассмотреть ряд с общим членом $v_n = 1/n^{\alpha}$. В ответе указать также подходящее значение α.

54.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-10}$

54.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-7n+10}{3n^5+10n-12}$

54.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^5+11}}{n^3-7n-1}$

54.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+7}}{\sqrt{4n^2+11n}}$

54.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n+n^2+1}{3^n n^5-12}$

54.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n^3+\sqrt{n^8+10}}{35\sqrt{n^4+1}+n^5}$

54.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3n+1}$

54.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{4}{n^3+7}\right)$

54.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{3^n+1}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$

54.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$

55. Исследовать данные ряды на сходимость:

55.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^2-5}$

55.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+7}{3n^3+11}$

55.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+7}}{n^2+12}$

55.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+3)}$

55.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+3)}{n^2}$

55.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}\ln(n+1)}$

55.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}\ln(n+1)}$

55.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{4^n}{5^n+n}$

55.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2^n}{2^n+n}$

55.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)$

56. Для сходящихся рядов определить, сходятся они абсолютно или условно:

56.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$

56.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^3+10}$

56.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$

56.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{4^n+7}$

56.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\cdot 2^n}{n^3+1}$

56.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n+7}$

56.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{10-n\cdot 3^n}$

56.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n^3+7)}{3n^4+12\sqrt{n+5}}$

56.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{\sqrt{n^8+7}+\sqrt{n^6-1}}$

56.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n+5}{4n-15}\right)^n$

56.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+4}{3n-7}\right)^n$

56.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\frac{n^2}{n^2+1}$

57. Определить, сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001:

57.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+5}$

57.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

57.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

57.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{5^n\cdot n!}$

58. Найти сумму ряда с точностью до 0,00001. В ответе также указать, сколько членов ряда надо взять, чтобы гарантировать требуемую точность:

58.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n\cdot n!}$

58.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\cdot 2^n}$

59. Найти области сходимости степенных рядов:

59.1. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}+\ldots$

59.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$

59.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

59.4. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$

59.5. $\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{8^2\cdot 5}+\frac{x^9}{8^3\cdot 9}+\frac{x^{12}}{8^4\cdot 13}+\cdots$

59.6. $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$

59.7. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$

59.8. $5x+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\frac{5^4x^4}{4!}+\ldots$

59.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

59.10. $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{x^n}{n\left(n+2\right)}+\ldots$

59.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$

59.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{5^n\sqrt{n+1}}$

59.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$

59.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$

59.15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}$

59.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{3^{n^2}}(x-1)^n$

59.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$

59.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+2}}$

59.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}(x-1)^n$

59.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}(x+3)^n$

60. Разложить в степенной ряд:

60.1. $y=e^{-2x}$

60.2. $y=x^3\cos x$

60.3. $y=\sin\frac{x}{2}$

60.4. $y=\ln(1+5x)$

60.5. $y=\ln(5+2x)$

60.6. $y=\sqrt{1+x^2}$

60.7. $y=\frac{3}{4-x}$

60.8. $y=\frac{1}{1+x^4}$

60.9. $y=x\operatorname{arctg}x$

60.10. $y=x^2e^{-2x}$

60.11. $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$

60.12. $y=e^x\ln\sqrt{1-x^2}$

60.13. $y=\left(1+x\right)\ln(1+x)$

60.14. $y=\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

60.15. $y=e^{-x}\sin x$

60.16. $y=(\operatorname{arctg}x)^2$

61. Разложить в степенной ряд функции:

61.1. $y = x^4 + x^2$ по степеням $(x - 1)$

61.2. $y = e^x$ по степеням $(x - 2)$

61.3. $y = \ln x$ по степеням $(x - 1)$

61.4. $y = (x - 4)^{-1}$ по степеням $(x + 2)$

62. Применяя почленное интегрирование или дифференцирование рядов, найти их суммы:

62.1. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \left(x \in (-1; 1)\right)$

62.2. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^6}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots \left(x \in [-1; 1]\right)$

62.3. $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \ldots \left(x \in (-1; 1)\right)$

15. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе условимся через R^n обозначать множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел. Более того, будем трактовать эти наборы как векторы-столбцы, над которыми определены обычные линейные операции сложения и умножения на число. Каждый такой вектор-столбец будем обозначать одной буквой $x = (x_1, ..., x_n)^T$ и называть точкой, а число x_i — i-й координатой этой точки. Продолжая геометрическую аналогию, введем *расстояние* между точками $x = (x_1, ..., x_n)^T$ и $y = (y_1, ..., y_n)^T$ формулой

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Окрестностью радиуса $\delta > 0$ точки $a \in R^n$ будем называть открытый шар

$$U_\delta(a) = \left\{x \in R^n : |x - a| < \delta\right\}.$$

Множество $X \subset R^n$ называется *открытым* в R^n, если для каждой точки $x \in X$ найдется $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(x) \subset X$.

П р и м е р

Областью определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ является внешность круга радиуса 1 с центром в (0; 0) без точек границы (рис. 53). Она является открытым множеством в R^2.

Множество $X \subset R^n$ называется *замкнутым* в R^n, если его дополнение $R^n \setminus X$ является открытым в R^n.

Точка $a \in R^n$ называется *предельной точкой* множества $X \subset R^n$, если в каждой *выколотой окрестности*

$$\dot{U}_\delta(a) = \left\{ x \in R^n : 0 < \left| x - a \right| < \delta \right\}$$

точки a содержатся точки из X.

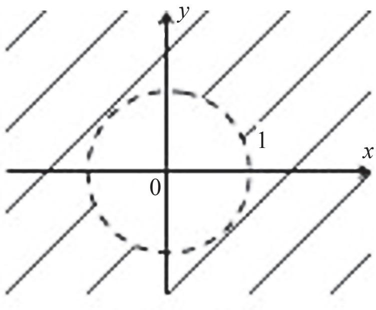


Рис. 53

Утверждение. Множество $X \subset R^n$ является замкнутым в R^n тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Множество $X \subset R^n$ называется *ограниченным*, если существует окрестность нуля фиксированного радиуса $r > 0$, содержащая множество X.

Компактным множеством, или *компактом*, будем называть каждое ограниченное замкнутое множество в R^n.

Рассмотрим *числовую функцию* $f : X \to R$ переменных $x_1, ..., x_n$, определенную на множестве $X \subset R^n$ со значениями в R^n.

Графиком этой функции называется множество точек пространства R^{n+1} вида $\left\{ (x, t) \in R^{n+1} : \ t = f(x), x \in X \right\}$. График функции двух переменных представляет собой поверхность в трехмерном пространстве.

Поверхностью (линией) *уровня* функции $f : X \to R$ называется множество всех точек $x \in X$, в которых значение функции одно и то же. Другими словами, поверхностью уровня со значением C называется множество всех решений $x \in X$ уравнения $f(x) = C$.

П р и м е р 1

График функции $z = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, изображен на рис. 54.

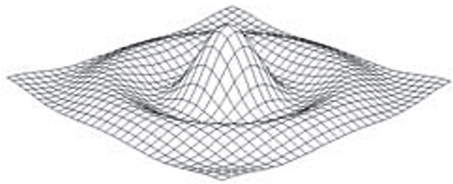


Рис. 54

П р и м е р 2

Рассмотрим функцию трех переменных $f(x, y, z) = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - z$. Ее поверхностью уровня $f = 0$ является поверхность, изображенная на рис. 54.

15.1. Предел и непрерывность

Число A называется *пределом функции* $f : X \to R$ при стремлении x к a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ будет $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$. Этот факт записывается так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Предел функции нескольких переменных обладает теми же основными свойствами, что и предел функции действительного переменного. Отметим следующий факт, удобный при решении задач на предел функции двух переменных.

Утверждение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{r\to 0} f(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)=A.$$

Здесь $x=r\cos\alpha,\ \ y=r\sin\alpha$ — формулы перехода к полярной системе координат.

Пример

Предел функции $f=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке (0;0) не существует, так как $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)=\sin 2\alpha$ и принимает разные значения при различных значениях α.

Функция $f:X\to R$ называется *непрерывной в предельной точке* $x\in X$, если

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x).$$

Локальные и глобальные свойства непрерывных функций $f:X\to R,\ X\subset R^n$ во многом совпадают с аналогичными свойствами непрерывных функций действительного переменного. Выделим здесь глобальные свойства непрерывных функций нескольких переменных, наиболее часто используемые в приложениях.

Множество $Y\subset R^n$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывным путем. Примером связного множества может служить множество на рис. 53.

Утверждение 1. Если функция $f:X\to R$ непрерывна на связном множестве X, принимает в точках $a,b\in X$ значения $A=f(a)$ и $B=f(b)$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка $c\in X$, в которой $f(c)=C$.

Утверждение 2. ***Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции.*** Если функция $f:X\to R$ непрерывна на компактном множестве $X\subset R^n$, то она ограничена на X и достигает на нем своих экстремальных значений, т. е. принимает в некоторых точках множества X минимальное и максимальное из своих значений на множестве X.

15.2. Дифференциал и частные производные

Пусть функция f определена в окрестности точки $x \in X$, $X \subset R^n$. Обозначим через $h = (h_1, ..., h_n)^T$ и $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ *приращение* векторного аргумента и функции. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x, если в некоторой окрестности $U(x)$ точки x справедливо равенство

$$\Delta f(x) = A_1 h_1 + ... + A_n h_n + r(h),$$

где $r(h) = o(|h|)$ при $h \to 0$.

Здесь $A_1, ..., A_n$ — константы, значения которых зависят только от выбора точки x. При этом линейная относительно $h = (h_1, ..., h_n)^T$ функция $z = A_1 h_1 + ... + A_n h_n$ называется *дифференциалом* функции f в точке x и обозначается $df(x)$. Постоянные $A_1, ..., A_n$ называются *частными производными* функции f в точке x по переменным $x_1, ..., x_n$ соответственно и обозначаются $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ или $f'_{x_1}(x), ..., f'_{x_n}(x)$.

Непосредственно из определения дифференцируемости функции f в точке x следует, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_k + h_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_k, ..., x_n)}{h_k}.$$

Из сравнения этих формул с аналогичной для производной функции действительного переменного следует, что техника вычисления частных производных не отличается от техники вычисления производной функции действительного переменного.

Таким образом,

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) h_n.$$

Приближенное равенство (с точностью до бесконечно малых порядка $|h|$)

$$f(x+h) \approx f(x) + df(x)$$

используется в вычислениях. Переменные приращений $h_1,\ldots,h_n$ часто обозначают символами $dx_1,\ldots,dx_n$.

Пример 1

Составить дифференциал функции $z = xy\ln x + 2y^2$.

$$z'_x = y\ln x + y; \;\; z'_y = x\ln x + 4y.$$

Таким образом, $dz = (y\ln x + y)dx + (x\ln x + 4y)dy$.

Пример 2

Найдите дифференциал функции $z = x^y$. Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x,$$

то

$$dz = (yx^{y-1})h_1 + (x^y \ln x)h_2.$$

Пример 3

Вычислить приближенно значение $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ при $x = 8{,}25$; $y = 5{,}75$. В качестве базовой точки возьмем (8; 6). Тогда $h_1 = 0{,}25$, $h_2 = -0{,}25$. Равенство

$$f(x+h) \approx f(x) + df(x)$$

дает $f(8{,}25;\,5{,}75) \approx f(8;\,6) + df(8;\,6) = f(8;\,6) + f'_x(8;\,6)\cdot 0{,}25 + f'_y(8;\,6)\cdot(-0{,}25)$.

Вычислим частные производные:

$$f'_x(x;y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \;\; f'_y(x;y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$f(8;6) = 10; \;\; f'_x(8;6) = \frac{4}{5}; \;\; f'_x(8;6) = \frac{3}{5};$$

$$f(8{,}25;\,5{,}75) \approx 10 + \frac{4}{5}\cdot 0{,}25 - \frac{3}{5}\cdot 0{,}25 = 10{,}05.$$

Утверждение. Если функция $f: X \to R$ дифференцируема в некоторой точке $x \in X$, то она непрерывна в этой точке.

Частные производные сложной функции

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^T$, а каждая из переменных $x_1, \ldots, x_n$, в свою очередь, является дифференцируемой функцией $x_i = g_i(y_1, \ldots, y_m)$ переменных $y_1, \ldots, y_m$ в точке $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)^T$, причем $g_i(y^0) = x_i^0$. Тогда сложная функция $F = f\left(g_1(y), \ldots, g_n(y)\right)$ является дифференцируемой в точке y^0 и ее частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial y_k}$ равны

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(y^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial g_n}{\partial y_k} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

П р и м е р 1

Вычислить частные производные первого порядка сложной функции $F(x, y) = f\left(g_1(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y)\right)$, если известно, что $f(u, v, w) = \dfrac{u}{v} + vw - u^2$, $g_1 = xy^2$, $g_2 = \dfrac{y}{x}$, $g_3 = x^2 y$.

Р е ш е н и е

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x} = \left(\frac{1}{v} - 2u\right) y^2 + \left(-\frac{u}{v^2} + w\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + v(2xy) =$$

$$= \left(\frac{1}{y/x} - 2xy^2\right) y^2 + \left(-\frac{xy^2}{(y/x)^2} + x^2 y\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y}{x}(2xy) = 2xy + y^2 - 2xy^4;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y} = \left(\frac{1}{v} - 2u\right) 2xy + \left(-\frac{u}{v^2} + w\right)\left(\frac{1}{x}\right) + v(x^2) =$$

$$= \left(\frac{1}{y/x} - 2xy^2\right) 2xy + \left(-\frac{xy^2}{\left(y/x\right)^2} + x^2 y\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{y}{x}(x^2) = x^2 - 4x^2y^3 + 2xy.$$

Пример 2

Вычислить частные производные первого порядка сложной функции $F(x,y,z) = f\left(g_1(x,y,z),\ g_2(x,y,z)\right)$ для случая произвольной дифференцируемой функции $f = f(u,v)$, если $g_1 = xy^2z,\ g_2 = x^3 - zy.$

Решение

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x} = f'_u \cdot y^2z + f'_v \cdot 3x^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial y} = f'_u \cdot 2xyz + f'_v(-z);$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial z} = f'_u \cdot xy^2 + f'_v(-y).$$

15.3. Градиент и производная по направлению

Пусть функция $f : X \to R$ дифференцируема в точке $x \in X$, ее производные в этой точке равны $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x).$

Вектор $\nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$, составленный из частных производных, называется *градиентом* функции f в точке x.

Значение градиента огромно. Его многочисленные применения основаны на следующем свойстве.

Утверждение. Градиент, вычисленный в данной точке, перпендикулярен поверхности уровня функции, проходящей через эту точку, и показывает направление наискорейшего возрастания значений функции.

С градиентом может быть связано вычисление производной по направлению.

Производной функции f по направлению единичного вектора $s = (s_1, \ldots, s_n)^T$, $|s| = 1$, называется число $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(x+ts) - f(x)}{t}.$

Следующая формула является полезной при вычислении производной по направлению. Пусть функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x) = \langle \nabla f(x), s \rangle$, где через $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ обозначено скалярное произведение векторов a и b.

С понятием градиента неразрывно связаны уравнения касательной плоскости к поверхности (линии) уровня и уравнение нормали. А именно пусть $f(x) = c$ — уравнение некоторой поверхности, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — некоторая точка этой поверхности. Тогда *уравнение касательной плоскости* (прямой) можно записать в виде $\langle \nabla f(\mathrm{x}^0), x - x^0 \rangle = 0$. Уравнение нормали к этой поверхности: $x = x^0 + t \cdot \nabla f(x^0)$.

В частном случае функции двух переменных эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right) \cdot \left(x_1 - x_1^0\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x^0\right) \cdot \left(x_2 - x_2^0\right) = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right) \\ x_2 = x_2^0 + t \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\left(x^0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{x_1 - x_1^0}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)} = \frac{x_2 - x_2^0}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\left(x^0\right)}.$$

Пример 1

Вычислить градиент и производную $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ по направлению вектора $\vec{l}\,(-4; 3)$ функции $f = \mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$ в точке $M(-1; 0)$. Построить уравнение линии уровня этой функции, проходящей через данную точку.

Решение

Вычислим частные производные.

$$f'_x = \mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad f'_y = \mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2+y^2}} \cdot \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

В точке $M(-1;0)$ их значения равны $f'_x = -2e^{-2}$; $f'_y = 0$. Градиент равен $\nabla f(M) = (-2e^{-2};0)^T$. Вычислим производную по направлению вектора $\vec{l}\,(-4;5)$. Нормируем вектор: $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$, поэтому единичный вектор этого направления равен $\vec{l}_0\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M) = \left\langle \nabla f, \vec{l}_0 \right\rangle = -2e^{-2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + 0\cdot\frac{3}{5} = \frac{8}{5}e^{-2} > 0,$$

так что функция возрастает в этом направлении. Построим уравнение линии уровня.

В точке $M(-1;0)$ значение функции равно e^{-2}, поэтому уравнением линии будет уравнение $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}} = e^{-2}$. Отсюда получаем $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ — уравнение окружности с центром в точке $N\left(-\frac{1}{2};0\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$.

П р и м е р 2

Исходя из условий предыдущей задачи найти уравнение касательной прямой и нормали к линии уровня в заданной точке M.

Р е ш е н и е

Так как $\nabla f(M) = (-2e^{-2};0)^T$, $M(-1;0)$, то уравнение касательной будет следующим: $-2e^{-2}\cdot(x+1) + 0\cdot(y-0) = 0$, т. е. $x = -1$. Уравнение нормали: $\frac{x+1}{-2e^{-2}} = \frac{y-0}{0}$, т. е. $y = 0$.

15.4. Частные производные высших порядков

Частные производные первого порядка являются вновь функциями переменного $x \in X$ и, в свою очередь, могут иметь частные производные.

Частной производной второго порядка по переменным x_{i_1}, x_{i_2} называется функция $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)$. Для функции $f: X \to R$, $X \subset R^n$, квадратная матрица из частных производных

$$H_f(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

называется матрицей Гессе функции f в точке x. Эта матрица играет важную роль в задачах оптимизации.

Если функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки x, то матрица Гессе симметрична, т. е. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.

Частной производной k-го порядка по переменным $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ называется функция $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}=\dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{k-1}}}\right)$.

Аналогично если все частные производные k-го порядка являются непрерывными, то результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Формула Тейлора

Для исследования поведения многих функций достаточно знать их представление по формуле Тейлора, использующей производные не выше второго порядка. Рассмотрим формулу Тейлора для функции $f: X \to R$, $X \subset R^n$ в следующих двух формах.

Утверждение. *Формула Тейлора.* Пусть частные производные второго порядка функции f являются непрерывными функциями в окрестности точки $x \in X$. Тогда справедливы следующие формулы:

$$1)\ \ f(x+h)=f(x)+\langle \nabla f(x), h\rangle+\frac{1}{2}h^T\cdot H_f(x)\cdot h+o\left(|h|^2\right)$$

при $h \to 0$ — формула Тейлора второго порядка с остатком в форме Пеано.

2) $f(x+h)=f(x)+\langle\nabla f(x),h\rangle+\dfrac{1}{2}h^{T}\cdot H_{f}(x+\alpha h)\cdot h,\ 0<\alpha<1$ — формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Этим формулам можно придать симметричный вид, используя понятие дифференциалов первого и второго порядка. Например,

$$f(x+h)=f(x)+df(x)+\frac{1}{2}d^{2}f(x)+o\left(|h|^{2}\right).$$

П р и м е р

Составить формулу Тейлора второго порядка в форме Пеано в окрестности точки $M(-1;\ 1)$ для функции $f(x,y)=x^{3}-y^{3}+2xy$.

Р е ш е н и е

Так как $f'_{x}=3x^{2}+2y;\ f'_{y}=-3y^{2}+2x;\ f''_{xx}=6x;\ f''_{xy}=f''_{yx}=2;\ f''_{yy}=-6y$, то

$$f(-1+h_{1};1+h_{2})=f(-1;1)+f'_{x}(-1;1)\cdot h_{1}+f'_{y}(-1;1)\cdot h_{2}+\frac{1}{2}(h_{1},h_{2})\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_{1}\\ h_{2}\end{pmatrix}+$$

$$+o\left(\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}}\right)=-4+5h_{1}-5h_{2}+\frac{1}{2}(h_{1};h_{2})\cdot\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_{1}\\ h_{2}\end{pmatrix}+o\left(\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}}\right).$$

Окончательно получаем:

$$f\left(-1+h_{1};1+h_{2}\right)=-4+5h_{1}-5h_{2}-3h_{1}^{2}-3h_{2}^{2}+2h_{1}h_{2}+o\left(\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}}\right).$$

З а м е ч а н и е. В дальнейшем функции, являющиеся непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка, будем называть непрерывно дифференцируемыми, а функции, непрерывные вместе со своими частными производными второго порядка, будем называть дважды непрерывно дифференцируемыми.

15.5. Локальные экстремумы функции нескольких переменных

Функция $f: X \to R$, определенная на множестве $X \subset R^n$, имеет *локальный максимум* (локальный *минимум*) во внутренней точке $x^0 \in X$, если найдется окрестность точки x^0, целиком принадлежащая X, такая, что при всех x из этой окрестности $f(x) \le f(x^0)$ (соответственно, $f(x) \ge f(x^0)$) (рис. 55, 56).

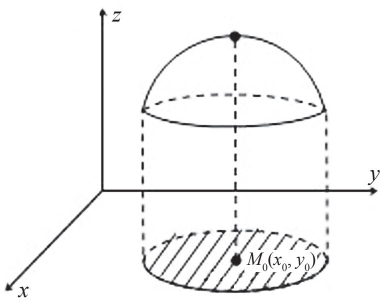


Рис. 55

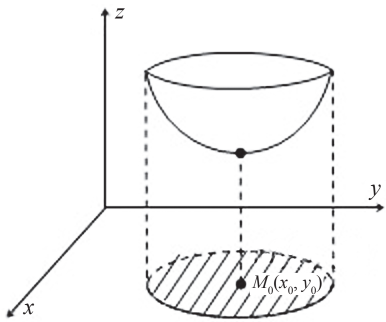


Рис. 56

Если при этом для всех $x \ne x^0$ из этой окрестности выполнено строгое неравенство $f(x) < f(x^0)$ (соответственно, $f(x) > f(x^0)$), то x^0 называется точкой строгого максимума (соответственно, строгого минимума).

Утверждение. ***Необходимое условие экстремума.*** Если функция дифференцируема в точке экстремума, то ее градиент в этой точке (все частные производные первого порядка) равен нулю.

Равенство нулю частных производных первого порядка дает только необходимое условие, но не достаточное для того, чтобы точка оказалась точкой экстремума.

Пример

В точке (0; 0) выполнены необходимые условия локального экстремума для функции $z = x^2 - y^2$, однако эта точка является седловой.

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума, будем называть *критическими*, или *стационарными*, точками. Для анализа критических точек используются критерии знакоопределенности квадратичных форм.

Критерием положительной определенности квадратичной формы с матрицей A является положительность всех главных угловых миноров этой матрицы: $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

Критерием отрицательной определенности квадратичной формы с матрицей A является чередование знаков главных угловых миноров этой матрицы: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \cdot \Delta_n > 0$. Если оба критерия нарушаются со строго противоположным знаком, например, $\Delta_2 < 0$, то квадратичная форма будет знакопеременной.

Утверждение. ***Достаточные условия безусловного экстремума.*** Пусть $f : X \to R$ определена и дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $x^0 \in X$, x^0 — критическая точка этой функции. Пусть $d^2 f(x^0) = h^T \cdot H_f(x^0) \cdot h$ — второй дифференциал функции f в критической точке x^0. Тогда:

1) если $d^2 f(x^0)$ положительна определена, то x^0 — точка строгого минимума;

2) если $d^2 f(x^0)$ отрицательна определена, то x^0 — точка строгого максимума;

3) если $d^2 f(x^0)$ знакопеременная, то x^0 не является точкой экстремума.

Более тонкие достаточные условия можно получить с помощью понятия полуопределенности $d^2 f$ в окрестности исследуемой критической точки x^0.

15.6. Теорема о неявной функции

Пусть имеется соотношение $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Уточним условия, при которых это уравнение позволяет рассматривать переменную y как функцию остальных переменных в окрестности заданной точки.

Утверждение. ***Теорема о неявной функции.*** Если функция $F: U \to R$, определенная и непрерывно дифференцируема в окрестности $U \subset R^{n+1}$ точки (x^0, y^0), такова, что

1) $F(x_1^0, \dots x_n^0, y^0) = 0$;

2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$,

то существуют окрестность $V \subset R^n$ точки x^0, окрестность $W \subset R$ числа y^0 и функция $f: V \to W$ такие, что для любых $x \in V$ и $y \in W$ соотношение $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$. эквивалентно уравнению $y = f(x_1, \dots, x_n)$, причем частные производные функции f могут быть вычислены по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}\left(x, f(x)\right)}{F'_y\left(x, f(x)\right)}.$$

Пример

Найдем точки экстремума функций $z(x, y)$, неявно заданных следующим уравнением, и определим их характер: $2z^3 + 2xz + y^2 + x^2 - 1 = 0$.

Решение

Обозначим $F(x, y, z) = 2z^3 + 2xz + y^2 + x^2 - 1$. Неявная функция $z(x, y)$ определена в окрестностях тех точек, где $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 6z^2 + 2x \neq 0$. При этом

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)} = -\frac{2z + 2x}{6z^2 + 2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)} = -\frac{2y}{6z^2 + 2x}.$$

Необходимые условия экстремума первого порядка требуют выполнения следующих соотношений в экстремальных точках на поверхности $2z^3 + 2xz + y^2 + x^2 - 1 = 0$:

$$2z + 2x = 0, \; 2y = 0, \; 6z^2 + 2x \neq 0.$$

Отсюда находим единственную стационарную точку $M(-1; 0; 1)$. Для определения характера точки вычислим в ней значения вторых частных производных неявной функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\left(2\frac{\partial z}{\partial x}+2\right)(6z^2+2x)-\left(12z\frac{\partial z}{\partial x}+2\right)(2z+2x)}{(6z^2+2x)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2(6z^2+2x)-\left(12z\frac{\partial z}{\partial y}\right)(2y)}{(6z^2+2x)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$ Формируем матрицу Гессе вторых производных в точке M:

$$\mathrm{H}=\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку она является отрицательно определенной, анализируемая точка является точкой максимума.

15.7. Выпуклые и вогнутые функции

Пусть $f : X \to R,\ X \subset R^n$ — некоторая функция, определенная на выпуклом множестве X. Множество X называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками содержит и весь отрезок, их соединяющий.

Функция f называется *выпуклой* на X, если для любых $x, y \in X$ и всех $\alpha \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Соответственно, функция f называется *вогнутой* на X, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Геометрически эти соотношения означают, что надграфик

$$epi\, f = \left\{(x,t) \in R^{n+1} :\ t \ge f(x),\ x \in X\right\}$$

выпуклой функции является выпуклым множеством, тогда как подграфик

$$hypo\, f = \left\{ (x,t) \in R^{n+1} : t \le f(x),\ x \in X \right\}$$

вогнутой функции будет выпуклым множеством.

Очевидно, что f — выпукла $\Leftrightarrow -f$ — вогнута.

Выпуклые и вогнутые функции играют ведущую роль в экономическом анализе. Достаточно напомнить, что производственные функции и функции полезности в экономической теории предполагаются вогнутыми функциями.

Приведем критерий выпуклости (вогнутости) для случая, когда функция $f : X \to R$ является дважды непрерывно дифференцируема.

Утверждение. ***Критерий выпуклости.*** Пусть функция $f : X \to R$ определена на открытом выпуклом множестве $X \subset R^n$ и дважды непрерывно дифференцируема. Для того чтобы f была выпуклой (вогнутой) на X, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $d^2 f = h^T H_f(x) h$ была неотрицательно определенной (неположительно определенной) для всех $x \in X$.

П р и м е р

Определить, при каких положительных значениях α, β производственная функция $f = x^{\alpha} y^{\beta}$ будет вогнутой на положительном квадранте $x > 0, y > 0$.

Р е ш е н и е

Составим матрицу Гессе вторых производных. Так как $f''_{xx} = -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2}y^{\beta}$; $f''_{xy} = f''_{yx} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$; $f''_{yy} = -\beta(1-\beta)x^{\alpha}y^{\beta-2}$, то

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)y^2 & \alpha\beta xy \\ \alpha\beta xy & \beta(\beta-1)x^2 \end{pmatrix} \cdot x^{\alpha-2} y^{\beta-2}.$$

Для вогнутости функции все главные миноры нечетной степени должны быть неположительными, а все главные миноры четной степени — неотрицательными. Тогда

$$\alpha(\alpha-1) \le 0,\ \beta(\beta-1) \le 0,\ \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2 \ge 0,$$

откуда получаем окончательные условия:

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta \le 1 \\ &\alpha > 0, \beta > 0. \end{aligned}$$

15.8. Условные экстремумы функции нескольких переменных

Рассмотрим классическую задачу на условный экстремум:

$$
\begin{aligned}
&f(x) \to extr \\
&g_1(x) = 0 \\
&\ldots \qquad\qquad (*) \\
&g_m(x) = 0,
\end{aligned}
$$

в которой будем предполагать, что целевая функция $f: X \to R$ и функции ограничений $g_1, \ldots, g_m$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $X \subset R^n$, включающем в себя множество S решений системы уравнений и при этом $m < n$.

$$
\begin{aligned}
&g_1(x) = 0 \\
&\ldots \\
&g_m(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Точка $x^* \in S$ называется точкой *условного локального минимума* (*максимума*) функции f на S, если для всех x из некоторой окрестности $U_\delta(x^*) \cap S$ этой точки выполняется неравенство $f(x^*) \le f(x)$ (соответственно, $f(x^*) \ge f(x)$).

Утверждение. *Принцип множителей Лагранжа.* Пусть x^* — точка условного локального экстремума функции f на S. Если при этом градиенты $\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ функций ограничений в точке x^*линейно независимы, то найдутся такие числа $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$, что точка $(x^*, \lambda^*) = (x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots \lambda_m^*)$ будет критической точкой функции Лагранжа $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 \; (i = 1, \ldots n),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \Leftrightarrow g_j = 0 \; (j = 1, \ldots, m)$$

при $x = x^*, \lambda = \lambda^*$.

Числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ называются множителями Лагранжа. С их помощью исходная задача превращается в задачу поиска безусловных экстремумов. Принцип множителей Лагранжа представляет собой необходимые условия условного экстремума. Для того чтобы определить характер полученных стационарных точек, рассмотрим достаточные условия.

В следующем утверждении предполагаются выполненными все условия принципа множителей Лагранжа. Кроме того, будем предполагать все функции $f, g_1,\ldots,g_m$ дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве X.

Утверждение. ***Достаточные условия условного экстремума.*** Пусть в функции Лагранжа $L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(x)$ множители $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ выбраны в соответствии с принципом Лагранжа в точке $x^*\in S: L(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^* g_j(x)$.

Для того чтобы точка x^* была точкой экстремума функции f на S, достаточно, чтобы квадратичная форма $d^2L(x^*)=h^T\cdot H_L(x^*)\cdot h$ была знакоопределенной для векторов h, являющихся решениями однородной системы линейных уравнений $\langle\nabla g_j(x^*),h\rangle=0$ $(j=1,\ldots,m)$. При этом если квадратичная форма положительно определена, то x^* — точка строгого локального условного минимума, если форма отрицательно определена, то x^* — точка строгого локального условного максимума. Для того чтобы точка x^* не была точкой экстремума, достаточно, чтобы квадратичная форма принимала на решениях этой системы значения разных знаков.

П р и м е р

Найдем условные экстремумы функции f при заданном уравнении связи и определим их характер:

$$f=8x+4y-1,$$
$$8x^2-y^2+8=0.$$

Р е ш е н и е

Составим функцию Лагранжа $L = 8x + 4y - 1 + \lambda(8x^2 - y^2 + 8)$. Необходимые условия экстремума первого порядка требуют выполнения равенств $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ в экстремальных точках на линии $8x^2 - y^2 + 8 = 0$.

Отсюда получаем $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 8 + 16\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4 - 2\lambda y = 0 \\ 8x^2 - y^2 + 8 = 0 \end{cases}$.

Находим две стационарные точки $M_1(-1;\ 4)$ и $M_2(1;\ -4)$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\lambda = -\frac{1}{2}$ соответственно. Исследуем их характер с помощью достаточных условий второго порядка.

Так как $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 16\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, то матрица Гессе имеет вид $H = \begin{pmatrix} 16\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$. Она не является знакоопределенной и требуется составить уравнение касательного многообразия к ограничению $g(x; y) = 8x^2 - y^2 + 8 = 0$ в исследуемых точках $M_1(-1;\ 4)$ и $M_2(1;\ -4)$. *Касательное многообразие* определяется уравнением

$$\frac{\partial g}{\partial x} h_1 + \frac{\partial g}{\partial y} h_2 = 0.$$

В точке $M_1(-1;\ 4)$ оно принимает форму уравнения $-16h_1 - 8h_2 = 0$; в точке $M_2(1;\ -4)$ получаем $16h_1 + 8h_2 = 0$, что приводит к одному и тому же соотношению $h_2 = -2h_1$. Обозначим $h = (h_1; h_2)^T$. Квадратичная форма $h^T H\, h = 16\lambda h_1^2 - 2\lambda h_2^2$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ и $h_2 = -2h_1$ принимает вид $h^T H h = 4h_1^2$ и является положительно определенной на многообразии, тогда как при $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $h_2 = -2h_1$ она равна $-4h_1^2$ и будет отрицательно определенной. Таким образом, точка $M_1(-1;\ 4)$ является точкой локального минимума, а точка $M_2(1;\ -4)$ — точкой локального максимума в исходной задаче.

15.9. Зависимость экстремумов от параметров

В экономических задачах зачастую необходимо анализировать поведение экстремальных значений функций в зависимости от различных параметров (цен, запасов сырья и т. п.). Для решения этих задач рассмотрим теоремы об огибающей.

Случай безусловного экстремума. Рассмотрим функцию $f(x, a)$, зависящую от векторного параметра $a = (a_1, \ldots, a_m)^T \in R^m$. Пусть x^0 — локальный экстремум этой функции при фиксированном значении параметра $a^0 = (a_1^0, \ldots, a_m^0)^T$, при этом будем предполагать выполненными в точке x^0 достаточные условия экстремума, в частности, знакоопределенность матрицы Гессе вторых частных производных функции $f(x, a)$ по группе переменных x. Кроме того, будем считать функцию $f(x, a)$ дважды непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных (x, a) в окрестности точки (x^0, a^0). Для определенности будем считать точку x^0 локальным максимумом функции $f(x, a)$ при $a = a^0$. При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение.

Утверждение. ***Первая теорема об огибающей.*** Существуют такие окрестность $U_\delta(x^0)$ точки x^0 и окрестность $V_\varepsilon(a^0)$ точки a^0, что при каждом $a \in V_\varepsilon(a^0)$ задача на безусловный максимум $f(x, a) \to \max\limits_{x \in U_\delta(x^0)}$ имеет единственное решение $x(a)$ и при этом функция оптимальных значений $\varphi(a) = \max\left\{ f(x, a) : x \in U_\delta(x^0) \right\}$ является непрерывно дифференцируемой, причем $\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_k} = \dfrac{\partial f}{\partial a_k}$ при $x = x(a)$.

Это утверждение позволяет вычислить производную маргинальной функции $\varphi(a)$ без знания явного выражения $x = x(a)$ экстремума через параметр a. Нужно выполнить всего два шага:

а) найти точку экстремума x^0 функции $f(x, a^0)$;

б) вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial a_k}$ в точке (x^0, a^0).

Пример

Обозначим через $\varphi(a)$ минимальное значение функции в следующей задаче при фиксированном значении параметра a. Следует решить задачу при значении параметра $a = 1$ и найти производную $\varphi'(1)$ функции $\varphi(a)$ оптимальных значений.

$$f = ax^2 + xy + \frac{1}{a} y^2 - 12ax - (2 + a^2) y \to \min$$

Решение

Найдем экстремум при $a = 1$ и убедимся, что это именно минимум.

При $a = 1$

$$f'_x = 2x + y - 12;\ \ f'_y = x + 2y - 3.$$

Приравнивая первые производные нулю, получаем единственную критическую точку $M(7; -2)$. Так как матрица Гессе $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ положительно определена, то эта точка — строгий минимум. В ней значение функции равно (-39). Все условия теоремы об огибающей выполнены. Пусть

$$\varphi(a) = \min\left\{ ax^2 + xy + \frac{1}{a}y^2 - 12ax - (2 + a^2)y \right\}.$$

Найдем $f'_a = x^2 - \dfrac{1}{a^2}y^2 - 12x - 2ay$. Тогда, в силу теоремы об огибающей,

$$\varphi'(1) = f'_a(7;-2) = 7^2 - \frac{1}{1^2}(-2)^2 - 12 \cdot 7 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -35 < 0,$$

так что с ростом значений a минимальное значение функции будет убывать.

Случай условного экстремума. Пусть в задаче на *условный экстремум* целевая функция и ограничения зависят от векторного параметра $a = (a_1, \ldots, a_m)^T \in R^m$. Предположим, что при конкретном значении этого векторного параметра $a^0 = (a_1^0, \ldots, a_m^0)^T$ найден локальный экстремум x^0 в задаче

$$\begin{aligned} & f(x, a^0) \to extr \\ & g_1(x, a^0) = 0 \\ & \ldots \\ & g_m(x, a^0) = 0, \end{aligned}$$

так что в некоторой окрестности $U_\delta(x^0)$ получено экстремальное (для определенности — максимальное) значение целевой функции:

$$\varphi(a^0) = \max\left\{ f(x, a^0) : g_1(x, a^0) = 0, \ldots, g_m(x, a^0) = 0, x \in U_\delta(x^0) \right\}.$$

Рассмотрим вопрос о характере зависимости маргинальной функции $\varphi(a)=\max\left\{f(x,a):g_1(x,a)=0,\ldots,g_m(x,a)=0, x\in U_\delta(x^0)\right\}$ (если таковая вообще существует) и условиях ее дифференцируемости по параметру.

Пусть в точке x^0 при фиксированном a^0 выполнены достаточные условия условного максимума. Пусть все функции $f(x,a), g_1(x,a),\ldots, g_m(x,a)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми по совокупности переменных в окрестности точки $(x^0,a^0)\in \mathrm{R}^{n+m}$. Пусть $\lambda^0\in R^m$ — вектор множителей Лагранжа из достаточных условий экстремума. При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Вторая теорема об огибающей.* Существуют такие окрестность $U_\delta(x^0)$ точки x^0 и окрестность $V_\varepsilon(a^0)$ параметра a^0, что при каждом $a\in V_\varepsilon(a^0)$ задача на условный максимум

$$\begin{aligned}&f(x,a)\to\max\\&g_1(x,a)=0\\&\ldots\\&g_m(x,a)=0,\\&x\in U_\delta(x^0)\end{aligned}$$

имеет единственное решение $x=x(a), \lambda=\lambda(a)$ и при этом функция оптимальных значений

$$\varphi(a)=\max\left\{f(x,a):g_1(x,a)=0,\ldots,g_m(x,a)=0, x\in U_\delta(x^0)\right\}$$

является непрерывно дифференцируемой, причем $\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_k}=\dfrac{\partial L}{\partial a_k}$ при $x=x(a), \lambda=\lambda(a)$.

П р и м е р

Пусть $\varphi(a)$ — максимальное значение в следующей параметрической задаче на условный экстремум. При значении параметра $a=1$ получить ее решение и найти производную $\varphi'(a)$.

$$ax + \frac{1}{a} y \to \max$$
$$x^2 + (ay)^2 = 8a.$$

Решение

Найдем подходящий условный экстремум при $a = 1$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda; a) = ax + \frac{1}{a} y + \lambda(x^2 + a^2 y^2 - 8a).$$

При $a = 1$

$$L(x, y, \lambda; 1) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 8).$$

Составим необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Отсюда находим $\lambda_1 = -1/4$, $M_1(2;2)$ и $\lambda_2 = 1/4$, $M_2(-2;-2)$. Квадратичная форма, соответствующая матрице вторых производных $\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$, в первом случае будет отрицательно определенной и, следовательно, точка $M_1(2;2)$ будет искомой точкой локального максимума. Вторая точка — точка локального минимума. На самом деле, в силу теоремы Вейерштрасса, точка M_1 будет глобальным максимумом в задаче при $a = 1$.

Обозначим

$$\varphi(a) = \max\left\{ ax + \frac{1}{a} y : x^2 + a^2 y^2 = 8a \right\}.$$

Найдем $L'_a = x - \dfrac{1}{a^2} y + 2\lambda a y^2 - 8\lambda$. Тогда, в силу теоремы об огибающей,

$$\varphi'(1) = L'_a(-2, -2, 1/4; 1) = -2 - \frac{1}{1^2}(-2) + 2 \cdot 1/4 \cdot 1 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot 1/4 = 0.$$

Задачи

63. Найти области определения следующих функций:

63.1. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^4}$

63.2. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^3}$

63.3. $z = \sqrt{1 - x^2 + y}$

63.4. $z = \sqrt[7]{1 - x^2 + y}$

63.5. $z = \ln(x + y)$

63.6. $z = \ln(x^2 + y^2)$

64. Вычислить частные производные первого и второго порядков и полный дифференциал от заданных функций:

64.1. $z = xy - x^2 + xy^2 + 15$

64.2. $z = y + y^2 + 6xy^2 + 10xy + 3$

64.3. $z = 6\sqrt{x^2 + y^2} - 3xy^3 + 7y$

64.4. $z = \sqrt{x + 2y} + 3x^4 y - 6x + 13$

64.5. $z = 3\cos(xy) - 5x - 12x^4 y$

64.6. $z = x\sin(xy) + 12x^2 y^2 - 5x$

64.7. $z = 3\sin\left(x^3 - y^2\right) - 5x^3 y - 7$

64.8. $z = 2^{2x + y^2} - 7x^2 y^2 + 5y$

64.9. $z = 2e^{x^3 + y} - 9x^3 y - 5x + 6$

64.10. $z = 8\ln(xy) + 10xy^2 - 8x$

64.11. $z = 0{,}5\ln\left(x^2 + y^2\right) - 18x^2 y^3 + 12x - 5$

65. Исследовать на экстремум следующие функции:

65.1. $z = x^y - xy$

65.2. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$

65.3. $z = xy(1 - x - y)$

65.4. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y$

65.5. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$

65.6. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$

65.7. $z = 3x^2 + y^2 + 3xy - 6x - 2y + 1$

65.8. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x + 6y - 1$

65.9. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x - 7y + 5$

65.10. $z = 3xy + x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$

66. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в областях, задаваемых неравенствами:

66.1. $z = x - 2y + 5,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1$

66.2. $z = x^2 + 4x - y^2 - 6y - 2y,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ y = 4 - x$

66.3. $z = x^3 + y^2,\ \ x^2 + y^2 \leq 1$

67. Исследовать на условный экстремум следующие функции:

67.1. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$

67.2. $z = x - y$ при $x^2 + y^2 = 1$

67.3. $z = xy^2$ при $x + 2y = 4$

67.4. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$

68. Найти градиент функции u и его модуль для функций в указанной точке A:

68.1. $u = 7 - x^2 - y^2;\ A(1;\ 2)$

68.2. $u = 2xy - yz + 3z;\ A(1;\ 0;1)$

68.3. $u = 3x^3 + 2xy - z;\ A(1;\ -3;\ 3)$

68.4. $u = 2x - 3y^3 + yz;\ A(1;\ -1;\ -2)$

69. Найти производную по направлению l функции z в точке A:

69.1. $l = (1,2);\ z = x^2 + xy;\ A(3;\ -1)$

69.2. $l = (-3,4);\ z = x^2 - y^3;\ A(2;\ -1)$

69.3. $l = (-1,2);\ z = x^2 + y^2;\ A(1;\ 3)$

16. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе напомним действия над векторами и понятия аффинной системы координат на плоскости и в пространстве, а также основные виды уравнений прямых и плоскостей. Этот материал является не только необходимым в приложениях, но и служит удобной иллюстрацией фактов линейной алгебры.

16.1. Векторная алгебра

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок прямой.

Другими словами, вектор $\vec{a}$ (или $\overrightarrow{AB}$, если заданы его начало и конец) определяется *направлением* и *длиной* $\left\|\vec{a}\right\|$ (рис. 57).

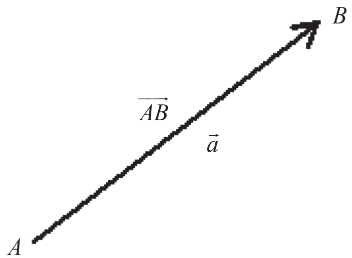


Рис. 57

Нулевым вектором называется вектор с нулевой длиной, *единичным* — каждый вектор с длиной, равной единице. Векторы называются *равными*, если их можно совместить при параллельном переносе. Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным (а также перпендикулярным!) любому вектору. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в параллельных плоскостях. Таким образом, два вектора *равны*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и направление. Например, $\vec{a}=\vec{b}$ на рис. 58.

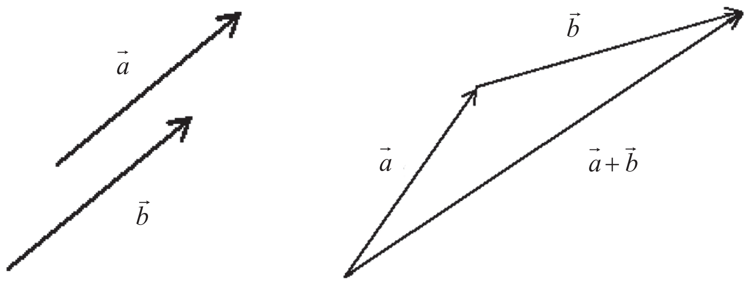


Рис. 58

Линейные операции над векторами

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*).

Отметим следующие свойства операции сложения векторов:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность);

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (ассоциативность);

3) существует нулевой вектор $\vec{0}$, такой, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого $\vec{a}$;

4) для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $(-\vec{a})$, такой, что $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Вычитание векторов определяется через сложение: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к общему началу, то разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет вектор $\vec{a}-\vec{b}$, идущий из конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$.

Произведением $k\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вещественное число k называется вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|k|\cdot\|\vec{a}\|$ и направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ в случае

$k > 0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ в случае $k < 0$. Вектор $0 \cdot \vec{a}$ считается нулевым.

Отметим свойства операции умножения вектора на число:

5) $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность по сложению векторов);

6) $\left(\alpha + \beta\right)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность по сложению чисел);

7) $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$ (ассоциативность по умножению на числа);

8) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Скалярным произведением $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Отметим свойства скалярного произведения векторов как операции, линейной по каждому из аргументов (*билинейной*):

9) $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$ (коммутативность);

10) $\left\langle k\vec{a}, \vec{b} \right\rangle = k\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ (ассоциативность);

11) $\left\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle$ (дистрибутивность);

12) $\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle \geq 0$. $\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\| \vec{a} \right\| = 0$.

Необходимым и достаточным *условием перпендикулярности* двух векторов (ортогональности) является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0.$$

Кроме того, из определения скалярного произведения следует, что

$$\left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle} \text{ и } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\|}.$$

16.2. Системы аффинных координат на плоскости и в пространстве

Назначение любой системы координат — возможность однозначной идентификации каждого объекта по его координатным характеристикам. Этим требованием и определяется способ введения и свойства системы аффинных координат на плоскости и в пространстве.

Аффинной системой координат на плоскости называется каждая упорядоченная тройка информации $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ с условием неколлинеарности векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, в которой фиксированная точка плоскости O будет называться *началом* (центром) системы координат, вектор $\vec{e}_1$ назовем первым базисным вектором, а вектор $\vec{e}_2$ — вторым базисным вектором.

Координатами (x, y) точки M в такой системе называются коэффициенты разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$:

$$M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2.$$

При этом упорядоченная пара чисел (x, y) будет называться также и координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ (и любого равного ему вектора). Неколлинеарность базисных векторов обеспечивает взаимную однозначность между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар чисел (x, y). При этом такое соответствие сохраняет линейные операции над векторами: если $\vec{a}(a_1, a_2), \vec{b}(b_1, b_2)$, то координатами векторов $k\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ будут, соответственно, упорядоченные пары чисел $(ka_1,\ ka_2)$ и $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$. В силу этой изоморфности между векторами плоскости и парами чисел (x, y) будем называть последние также векторами (в координатной форме).

Длина прямолинейного отрезка с концами в точках $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ принимает простейший вид

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

в том случае, когда базисные векторы *ортогональны* и являются *единичными*, т. е. когда система координат декартова. В этом случае и скалярное произведение произвольных векторов $\vec{a}(a_1, a_2), \vec{b}(b_1, b_2)$ имеет простейшую форму:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Аффинной системой координат в пространстве называется каждая упорядоченная четверка информации $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ с условием некомпланарности векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, в которой фиксированная точка пространства O будет называться началом (центром) системы координат, вектор $\vec{e}_1$ назовем первым базисным вектором, вектор $\vec{e}_2$ — вторым базисным вектором, а вектор $\vec{e}_3$ — третьим.

Координатами (x, y, z) точки M в такой системе называются коэффициенты разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$M(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3.$$

При этом упорядоченная тройка чисел (x, y, z) будет называться также и координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ (и любого равного ему вектора). Некомпланарность векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ здесь обеспечивает изоморфность между векторами пространства и упорядоченными тройками чисел (x, y, z).

В случае, когда система координат декартова, формулы расстояния между двумя точками пространства и скалярного произведения векторов аналогичны таковым на плоскости.

16.3. Уравнения прямой в аффинной плоскости

Пусть $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — произвольная аффинная система координат в плоскости. Пусть прямая a, лежащая в этой плоскости, определяется принадлежащей ей точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\vec{s}(l, m)$ (произвольным ненулевым вектором, параллельным прямой a).

Тогда чрезвычайно удобное в приложениях *параметрическое уравнение прямой a* имеет вид:

$$M = M_0 + t \cdot \vec{s} \ \left(\textit{векторная форма}\right).$$

Соответственно, *координатная форма* параметрического уравнения прямой будет такой:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \end{cases}.$$

Заметим, что параметрическое уравнение прямой является, по сути, результатом введения на прямой a внутренней (барицентрической) системы координат с центром M_0 и единственным базисным вектором $\vec{s}$. А число t при этом будет координатой точки $M \in a$.

Каноническое уравнение прямой а получим, если выразим t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Это уравнение является выражением того факта, что вектор $\overrightarrow{M_0 M}$ параллелен направляющему вектору $\vec{s}$.

Общим уравнением прямой называется каждое уравнение вида

$$Ax + By + C = 0$$

при добавочном условии $A^2 + B^2 \neq 0$. Коэффициенты общего уравнения имеют замечательную геометрическую иллюстрацию в том случае, когда система координат декартова. Тогда вектор $\vec{n}(A, B)$ будет перпендикулярен прямой b с уравнением $Ax + By + C = 0$ и показывает сторону положительной полуплоскости $\Gamma_+ = \{M(x, y) : Ax + By + C > 0\}$. Кроме того, общее уравнение прямой на плоскости удобно для нахождения расстояния от данной точки до этой прямой. А именно пусть дана точка $N(x_N; y_N)$. Тогда

$$d(N, b) = \frac{|Ax_N + By_N + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

16.4. Уравнения плоскостей и прямых в пространстве

Пусть $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — произвольная аффинная система координат в пространстве. Пусть некоторая плоскость π пространства определяется принадлежащей ей точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и двумя параллельными этой плоскости векторами $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ (при этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ предполагаются неколлинеарными!). Тогда *параметрическое уравнение плоскости* π имеет вид:

$$M = M_0 + t\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b} \ \ (\textit{векторная форма}).$$

Соответственно, *координатная форма* параметрического уравнения плоскости π будет такой:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot a_1 + s\cdot b_1 \\ y = y_0 + t\cdot a_2 + s\cdot b_2 \\ z = z_0 + t\cdot a_3 + s\cdot b_3 \end{cases}.$$

Снова отметим аналогию между параметрическим уравнением плоскости и результатом введения в плоскости π внутренней (барицентрической) системы координат с центром M_0 и базисными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пара чисел t, s при этом будут координатами точки $M \in \pi$.

Общим уравнением плоскости называется каждое уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

при добавочном условии $A^2 + B^2 + D^2 \neq 0$. Коэффициенты общего уравнения имеют и здесь замечательную геометрическую иллюстрацию в том случае, когда система координат декартова, т. е. когда векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ попарно перпендикулярны и нормированы (их длины равны единице). Тогда вектор $\vec{n}\,(A, B, C)$ будет перпендикулярен плоскости β с уравнением $Ax + By + C = 0$ и показывает сторону положительного полупространства $H_+ = \{M(x, y, z) : Ax + By + Cz + D > 0\}$. В декартовой системе координат общее уравнение плоскости удобно для нахождения расстояния от данной точки до этой плоскости. А именно пусть дана точка $N(x_N; y_N; z_N)$. Тогда

$$d(N,\beta)=\frac{|Ax_N+By_N+Cz_N+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Параметрическое уравнение прямой в пространстве, как и каноническое уравнение прямой в пространстве, отличаются от соответствующих уравнений прямых на плоскости только присутствием третьей координаты. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cdot l \\ y=y_0+t\cdot m \\ z=z_0+t\cdot n \end{cases} \text{(координатная форма параметрического уравнения)},$$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\ \text{(каноническое уравнение)}.$$

Говорят, что прямая c в пространстве задана общим уравнением, если ее понимают как линию пересечения $c=\alpha\cap\beta$ двух непараллельных плоскостей α и β:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Оставляя в стороне частные случаи всех рассмотренных уравнений в тех обстоятельствах, когда начальная информация об объектах подана в другой форме, отметим вытекающую, по сути, из параметрического уравнения прямой следующую формулу деления отрезка в данном отношении.

Пусть $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$ — координаты концов отрезка. Тогда все точки этого отрезка описываются формулой $\lambda\cdot A+(1-\lambda)\cdot B, 0\le\lambda\le 1$ с параметром λ. При этом если точка $C(x_C; y_C; z_C)$ этого отрезка такова, что $\dfrac{d(B,C)}{d(A,B)} = \alpha,$ то $C = \alpha \cdot A + (1-\alpha) \cdot B.$ В координатной форме:

$$\begin{cases} x_C = \alpha \cdot x_A + (1-\alpha) \cdot x_B \\ y_C = \alpha \cdot y_A + (1-\alpha) \cdot y_B \\ z_C = \alpha \cdot z_A + (1-\alpha) \cdot z_B \end{cases}.$$

17. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

17.1. Линейная зависимость векторов и метод Гаусса

В этой части объектом внимания будут базовые свойства систем элементов из абстрактных линейных пространств, действия над которыми подчиняются тем же законам 1–8 (см. 16.1), что и действия над векторами (геометрическими или координатными) в предыдущем параграфе. Поэтому для простоты восприятия всегда можно предполагать, что мы продолжаем изучать пространства векторов и способы их описания с помощью систем координат, с тем отличием, что не ограничиваем априори множество векторов плоскостью или трехмерным пространством.

Линейные пространства и примеры

Пусть дано множество L, над элементами которого определены операции сложения и умножения их на действительные числа. Это означает, что любой паре элементов $a, b \in L$ ставится в соответствие элемент из L, обозначаемый $a + b$ и называемый суммой a и b, а каждому $a \in L$ и любому числу $k \in R$ ставится в соответствие элемент из L, обозначаемый ka и называемый результатом умножения элемента $a \in L$ на число k. Если при этом выполняются условия 1–8 предыдущего параграфа, то множество L называется *линейным* (или векторным) *пространством*.

Кратко линейное пространство можно определить как множество элементов, замкнутое (не выводящее за его пределы) относительно операций сложения элементов и умножения на число.

Типовыми примерами линейных пространств являются:

- множество всех геометрических векторов, параллельных данной плоскости;
- множество всех геометрических векторов трехмерного пространства;
- множество R_n всех n-мерных числовых строк $(a_1,...,a_n)$;
- множество R^m всех m-мерных числовых столбцов $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$;
- множество всех решений $x=(x_1,...,x_n)$ однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases};$$

- множество всех многочленов переменной x степени не выше k.

Линейной оболочкой $lin\{a_1,...,a_k\}$ элементов $a_1,...,a_k$ из L назовем множество всех линейных комбинаций $\alpha_1 \cdot a_1 + ... + \alpha_k \cdot a_k$ этих элементов:

$$lin\{a_1,...,a_k\} = \{\alpha_1 \cdot a_1 + ... + \alpha_k \cdot a_k : \alpha_1,...,\alpha_k \in R\}.$$

Линейная оболочка элементов из L является важным конструктивным примером линейного пространства. Так как при этом линейная оболочка — часть исходного линейного пространства L, то она является примером *линейного подпространства L*.

Рассмотрим общую неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (*)$$

Обозначим столбцы коэффициентов при неизвестных $x_1,...,x_n$ через $A_1,...,A_n$. Они, очевидно, принадлежат арифметическому пространству столбцов R^m. Кроме того, обозначим через b столбец правых частей, также принадлежащий R^m. Тогда система (*) может быть записана в векторной форме:

$$A_1x_1 + ... + A_nx_n = b.$$

Вопрос о совместности (существовании решений) системы уравнений (*) сводится к следующему: является ли вектор b линейной комбинацией векторов $A_1,...,A_n$? Или, иначе, принадлежит ли вектор b линейной оболочке векторов $A_1,...,A_n$? Вскоре мы получим конструктивный способ проверки этого свойства.

Линейная зависимость

Система элементов $a_1,...,a_k$ из L называется *линейно независимой*, если ни один из ее элементов не является линейной комбинацией остальных (говорят: не выражается линейно через остальные).

В противном случае систему элементов $a_1,...,a_k$ называют *линейно зависимой*.

Полезно понимать следующее. Если система состоит из единственного вектора, то она будет линейно независимой в том и только том случае, если этот вектор ненулевой. Когда система состоит из двух векторов, она будет линейно независимой в том и только том случае, если эти векторы неколлинеарны. Система из трех векторов является линейно независимой в том и только том случае, когда эти векторы некомпланарны.

Сформулируем *критерий линейной независимости*, который зачастую берется в качестве определения линейной независимости.

Утверждение. ***Критерий линейной независимости.*** Система элементов $a_1,...,a_k$ линейно независима в том и только том случае, когда нулевой элемент линейного пространства L единственным образом выражается линейно через элементы $a_1,...,a_k$. Другими словами, когда уравнение $x_1 \cdot a_1 + ... + x_k \cdot a_k = 0$ имеет единственное решение: $x_1 = ... = x_k = 0$.

Приведем простейшие свойства систем, вытекающие из определения линейной независимости:

1. Любая непустая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.
2. Любая система, содержащая линейно зависимую подсистему, является линейно зависимой.
3. Если система $a_1,...,a_k$ линейно независима, а расширенная система $a_1,...,a_k, a_{k+1}$ линейно зависима, то элемент a_{k+1} линейно выражается через $a_1,...,a_k$ (принадлежит линейной оболочке элементов $a_1,...,a_k$).

Ступенчатой системой векторов — столбцов из пространства R^n будем называть каждую систему векторов следующего вида:

$$\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\right\},$$

в которой все диагональные элементы $a_{11}, a_{22},...,a_{nn}$ ненулевые. Выбор остальных элементов ниже диагонали может быть произвольным.

Утверждение. Ступенчатая система векторов линейно независима.

Это свойство является прямым следствием применения критерия линейной независимости к ступенчатой системе. Тогда по свойству 1 линейно независимой является и каждая непустая подсистема ступенчатой системы векторов.

17.2. Преобразования метода Гаусса

Метод Гаусса является одним из основных методов решения разнообразных задач линейной алгебры. Рассмотрим базовые действия метода в применении к системам элементов (векторов) линейного пространства L и к системам линейных уравнений (*).

Пусть дана система векторов $S = \{a_1, ..., a_k\}$ из L. К элементарным преобразованиям метода Гаусса отнесем следующие:

– вектор a_i заменить вектором $a_i + ka_j$ $(i \neq j)$ (к вектору $a_i \in S$ прибавить другой вектор $a_j \in S$, предварительно умноженный на произвольное число);
– поменять местами в системе S произвольные векторы $a_i \in S$ и $a_j \in S$;
– вектор $a_i \in S$ заменить вектором ka_i, $k \neq 0$ (вектор a_i умножить на произвольное ненулевое число).

Основное свойство преобразований метода Гаусса, необходимое нам здесь, выражается следующим утверждением.

Утверждение. Пусть S' — система, полученная из S конечным числом преобразований метода Гаусса. Тогда $lin\,S' = lin\,S$, т. е. преобразования метода Гаусса не меняют подпространства $lin\,S$.

Следствие. S линейно независима $\Leftrightarrow$ S' линейно независима.

Рассмотрим сейчас систему линейных уравнений (*). В применении к ней элементарные преобразования метода Гаусса выглядят так:

– к уравнению с номером i прибавить другое уравнение j, предварительно умноженное на произвольное число;
– поменять местами уравнения с номерами i и j;
– уравнение с номером i умножить на произвольное ненулевое число.

Необходимое здесь свойство преобразований Гаусса состоит в том, что после конечного числа преобразований система уравнений будет иметь то же самое множество решений, что и исходная система.

П р и м е р 1

Определить, является ли система S векторов линейно независимой:

$$S = \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Р е ш е н и е

Расположим векторы a_1, a_2, a_3 в строках и применим к ним метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & a_2 \\ -2 & 3 & 1 & a_1 \\ -1 & 0 & 8 & a_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & a_2 \\ 0 & -1 & 5 & a_1+2a_2 \\ 0 & -2 & 10 & a_3+a_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & a_2 \\ 0 & -1 & 5 & a_1+2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3+a_1-2(a_1+2a_2) \end{array}\right).$$

Линейные оболочки исходных векторов и конечных совпадают. Присутствие в последней системе нулевого вектора обнаруживает ее линейную зависимость. Характер этой зависимости читаем в последней, нулевой строке: $a_3-4a_2-a_1=0$. Первые два вектора ступенчатые и образуют линейно независимую систему.

П р и м е р 2

При каких значениях t вектор $b(7;-2;t)$ линейно зависит от системы векторов $a_1(1;-6;1)$, $a_2(2;3;5)$, $a_3(3;7;8)$?

Р е ш е н и е

Снова удобен путь, не требующий введения новых переменных. Расположим в строках векторы a_1, a_2, a_3, а вслед за ними и вектор b и применим метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 1 & a_1 \\ 2 & 3 & 5 & a_2 \\ 3 & 7 & 8 & a_3 \\ 7 & -2 & t & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 1 & a_1 \\ 0 & 15 & 3 & a_2-2a_1 \\ 0 & 25 & 5 & a_3-3a_1 \\ 0 & 40 & t-7 & b-7a_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 1 & a_1 \\ 0 & 5 & 1 & \frac{1}{3}(a_2-2a_1) \\ 0 & 5 & 1 & \frac{1}{5}(a_3-3a_1) \\ 0 & 40 & t-7 & b-7a_1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 1 & a_1 \\ 0 & 5 & 1 & \frac{1}{3}(a_2-2a_1) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}(a_3-3a_1)-\frac{1}{3}(a_2-2a_1) \\ 0 & 0 & t-15 & b-7a_1-8\cdot\frac{1}{3}(a_2-2a_1) \end{array}\right).$$

Во-первых, векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы, характер зависимости показывает третья строка: $\frac{1}{5}(a_3-3a_1)-\frac{1}{3}(a_2-2a_1)=0 \Leftrightarrow a_1-5a_2+3a_3=0$. Из четвертой строки находим, что вектор b будет линейно зависеть от a_1, a_2, a_3 только в случае $t = 15$, при этом будет $b=\frac{5}{3}a_1+\frac{8}{3}a_2$.

17.3. Базис и размерность линейного пространства

Свойство линейной независимости будет определяющим при построении базиса произвольного линейного пространства L. Здесь и в дальнейшем будем считать, что рассматриваемое пространство L будет *конечномерным*, т. е. совпадает с линейной оболочкой некоторого конечного множества своих элементов: $L = lin\{a_1, ..., a_k\}$.

Система элементов $\{e_1, ..., e_n\}$ из L называется *базисом* линейного пространства L, если каждый элемент $a \in L$ единственным образом может быть выражен в виде линейной комбинации элементов $\{e_1, ..., e_n\}$:

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

В этом случае числовые коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_n$ называются *координатами* элемента $a \in L$ относительно базиса $\{e_1, ..., e_n\}$.

Утверждение. Пусть $a_1, ..., a_k \in L$. Тогда $\{a_1, ..., a_k\}$ — базис L в том и только том случае, если $L = lin\{a_1, ..., a_n\}$ и система $\{a_1, ..., a_k\}$ линейно независима.

Различные базисы одного и того же пространства L содержат одинаковое число элементов. Число элементов базиса будем называть *размерностью* линейного пространства: $\dim L = n$.

Упорядоченные по базису $B = \{e_1, ..., e_n\}$ координаты элемента $a \in L$ будем записывать в виде строки $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ из арифметического пространства строк R_n или (как правило!) столбца $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ из арифметического пространства столбцов R^n. В последнем случае для краткости столбец будем записывать в форме строки со специальным символом T транспонирования:

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n)^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Как и в случае векторов плоскости и векторов пространства, линейное пространство L будет изоморфно арифметическому пространству R^n (и любому другому линейному пространству с базисом, содержащим ровно n элементов!). Поэтому все свойства R^n, основанные исключительно на линейных операциях сложения и умножения на число, будут характерными и для L.

В случае произвольной конечной системы элементов $\{b_1,...,b_s\}$ из L ее *рангом* будем называть размерность подпространства L_1, являющегося линейной оболочкой $L_1 = lin\{b_1,...,b_s\}$ этих элементов, а *базисом* системы $\{b_1,...,b_s\}$ будем называть базис подпространства L_1, составленный из элементов этой системы.

Пример

Найти базис и ранг системы векторов

$$S = \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение этого примера, по существу, было дано в первом примере главы. Базис составляют, например, векторы a_1, a_2, $rang\, S = 2$.

17.4. Системы линейных уравнений и метод Гаусса

В этом параграфе мы исследуем структуру множества решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

и рассмотрим способ нахождения общего решения (так называем формулу, содержащую все решения системы), использующий элементарные преобразования Гаусса.

Наряду с системой (*) нам понадобятся соответствующая ей однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \qquad (**)$$

а также основная матрица A коэффициентов системы и расширенная матрица $\overline{A}$ системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим столбцы матрицы A через $A_1,\ldots,A_n \in R^m$, столбец правых частей системы (*) — через $b \in R^m$. Строки матрицы A обозначаем через $a_1,\ldots,a_m \in R_n$. Вектор-столбец неизвестных $(x_1,\ldots,x_n)^T$ обозначим $x \in R^n$.

Первым базовым фактом, подчеркивающим связь между решениями неоднородной системы (*) и решениями соответствующей ей однородной (**), является следующий.

Утверждение 1. Пусть $x^{\text{частное}}$ — какое-нибудь фиксированное решение неоднородной системы (*), а x^0 — произвольное решение однородной системы (**). Тогда $x = x^0 + x^{\text{частное}}$ является решением неоднородной системы. И наоборот, если x' — произвольное решение неоднородной системы, то $x'' = x' - x^{\text{частное}}$ является решением соответствующей однородной системы.

Этот факт кратко записывают следующим образом. Пусть L — множество всех решений однородной системы (**), а M — множество всех решений неоднородной (*). Тогда $M = L + x^{\text{частное}}$.

Следующий базовый факт подчеркивает особенности структуры информации, представленной в матричном виде.

Утверждение 2. Пусть A — произвольная матрица со столбцами $A_1,...,A_n \in R^m$ и строками $a_1,...,a_m \in R_n$. Тогда $rang\{A_1,...,A_n\} = rang\{a_1,...,a_m\}$.

Доказательство. Элементарными преобразованиями Гаусса над строками приведем матрицу A к верхнетреугольному ступенчатому виду A':

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a'_{1i_1} & \cdots & a'_{1i_2} & \cdots & a'_{1i_r} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a'_{2i_2} & \cdots & a'_{2i_r} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a'_{ri_r} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Выступающие в первых r строках элементы $a'_{1i_1}, a'_{2i_2},..., a'_{ri_r}$ предполагаем ненулевыми и будем называть *ведущими* (или *базисными*). При этом ранг системы строк останется прежним. Совпадают и множества решений однородных систем уравнений с матрицами A и A' (свойства преобразований Гаусса). Поскольку в матрице A' первые r строк составляют ступенчатую систему векторов, а остальные строки нулевые, то ранг системы строк матриц A и A' равен числу r. Покажем, что ранг системы столбцов матриц A и A' также равен r. Последние $m-r$ координат всех столбцов матрицы A' нулевые, поэтому ранг столбцов матрицы A' равен рангу столбцов урезанной матрицы A'', получаемой из A' вычеркиванием последних $m-r$ строк. В матрице A'' столбцы, соответствующие ведущим элементам, составляют ступенчатую систему из r векторов, которая линейно независима и образует базис в пространстве столбцов R^r. Рассмотрим столбцы матрицы A с теми же номерами, что и столбцы в A', соответствующие ненулевым ведущим элементам. Они образуют базис в пространстве столбцов матрицы A по той причине, что преобразования Гаусса сохраняют неизменным множество решений системы уравнений. А именно для любого набора столбцов с номерами $j_1,..., j_k$ в матрицах A и A'

$$A_{j_1}z_1 + ... + A_{j_k}z_k = 0 \Leftrightarrow A'_{j_1}z_1 + ... + A'_{j_k}z_k = 0,$$

и критерий линейной независимости позволяет заключить, что системы столбцов с одинаковыми номерами в этих матрицах одновременно линейно независимы или линейно зависимы.

Рангом матрицы назовем число, равное рангу системы ее строк и одновременно — рангу системы ее столбцов. Обозначаем как $r(A)$. Заметим, что ранг матрицы оказался равен числу r ненулевых ведущих элементов в методе Гаусса.

Следующим фактом будет теорема Кронекера — Капелли, устанавливающая условие совместности неоднородной системы в терминах рангов.

Утверждение. Неоднородная система (*) совместна в том и только том случае, когда $r(A) = r(\overline{A})$.

Это утверждение является другим выражением критерия совместности системы: $b \in lin\{A_1,..., A_n\}$.

Обозначим через $\ker A$ множество всех решений однородной системы линейных уравнений с матрицей A. На основании предыдущих фактов для нахождения общего решения системы (*) нам достаточно найти частное решение этой системы и базис $\ker A$. Покажем на примере, как с помощью метода Гаусса можно найти эту информацию.

П р и м е р

Найдем общее решение системы

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы и последовательно приведем ее к ступенчатому виду. Вычисления оформим в таблицах:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -4 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ненулевые ведущие элементы (-1) и 3 соответствуют переменным x_1 и x_2, которые объявляем *базисными* (главными), остальные переменные x_3, x_4 называем *небазисными* (свободными, параметрами). Ранг основной матрицы и расширенной матрицы равен 2, числу ненулевых ведущих элементов (и базисных переменных). Следующий этап состоит в том, что мы выразим базисные переменные x_1, x_2 через небазисные x_3, x_4, которые играют роль параметров в общем решении. Для этого перенесем небазисные переменные в правую часть последней системы:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = x_4 - 1 \\ 3x_2 = x_3 + 2x_4 - 5 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 - \dfrac{7}{3} \\ x_2 = \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{2}{3}x_4 - \dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Найдем общее решение в векторной форме и дадим ему интерпретацию:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{3} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_3 + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_4.$$

Для удобства интерпретации запишем формулу общего решения в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s.$$

Здесь векторы $e_1 = \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1,\ 0\right)^T$ и $e_2 = \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 0,\ 1\right)^T$, называют *фундаментальными решениями* (базисными) соответствующей однородной системы уравнений. Они линейно независимы, поскольку всегда образуют ступенчатую (с точностью до перестановки координат) систему векторов. А $M_0 = (-7/3, -5/3, 0, 0)^T$ представляет собой частное решение исходной системы. Так что формула общего решения будет такой:

$$M = M_0 + t \cdot e_1 + s \cdot e_2,\ t,\ s \in R.$$

Очевидно, что это множество представляет собой плоскость в R^4, проходящую через точку M_0 и параллельную векторам e_1 и e_2.

Размерность ядра $\ker A$ оказалась равна двум, его базис составляют фундаментальные решения $e_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right)^T$ и $e_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1\right)^T$, что подтверждается и общей формулой $\dim \ker A = n - r(A)$.

17.5. Матричная алгебра

Матричная алгебра позволяет кратко и наглядно описывать свойства прямоугольных массивов информации.

Матрицей A размерами $m \times n$ будем называть каждый массив данных, представленный в виде следующей прямоугольной таблицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Первый индекс элемента a_{ij} матрицы A всегда фиксирует номер строки, а второй — номер столбца, в которых находится этот элемент. Зачастую матрицу обозначают кратко и так: $A = (a_{ij})_{m,n}$.

Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов.

Две матрицы называются *равными*, если их размеры совпадают и на одинаковых местах находятся равные элементы. Здесь мы будем рассматривать только числовые матрицы.

Суммой $A + B$ двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица $C = A + B$ того же размера, для которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением матрицы A на число $k \in R$ называется матрица $D = k \cdot A$ того же размера, что и A, элементами которой являются числа $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, элементы которой вычисляются следующим образом: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Как видим, для самой возможности умножения матрицы на матрицу их размеры должны быть согласованы, число столбцов матрицы A должно быть равным числу строк матрицы B. Кроме того, даже для квадратных матриц одинаковых размеров, как правило, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить $C = A \cdot B$ и $D = B \cdot A$.

Решение

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 3 + 4\cdot 2 & 3\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot 1 + 4\cdot 0 \\ 5\cdot 3 + 6\cdot 2 & 5\cdot 2 + 6\cdot 1 & 5\cdot 1 + 6\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 17 & 10 & 3 \\ 27 & 16 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 5 & 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1\cdot 6 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 5 & 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + 0\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Транспонированием матрицы A называется операция, при которой строки и столбцы с одинаковыми номерами меняются местами:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Линейные операции сложения матриц и умножения на число обладают обычными свойствами, относящими матрицы одного и того же размера $m \times n$ к линейным пространствам размерности $m \cdot n$, в котором базис составляют, например, элементарные матрицы с единственным ненулевым элементом каждая.

Операции умножения матриц и транспонирования обладают следующими свойствами:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$;

3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Отдельно рассмотрим квадратные матрицы, для которых вводится понятие единичной матрицы и обратной матрицы.

В пространстве квадратных матриц порядка n (т. е. размером $n \times n$) единичной матрицей называется такая матрица E того же порядка n, что для любой матрицы A выполняется

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Такая матрица в классе матриц порядка n единственна и представляет собой диагональную матрицу с единицами на главной диагонали:

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Понятие единичной матрицы позволяет определить обратную к квадратной матрице A матрицу. А именно матрица B называется *обратной к матрице A*, если

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Обратная к A матрица обозначается A^{-1}. Обратная матрица A^{-1} единственна (если она существует!), и существует в том и только том случае, если ранг матрицы A полный, т. е. равен ее порядку.

Отметим простейшие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

4) $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} \cdot A^{-1}$.

Построение обратной матрицы будем выполнять двумя способами: применяя элементарные преобразования Гаусса или с помощью определителей (детерминантов). Второй способ предпочтительнее для матриц небольших размеров, он будет освоен в следующем разделе. В настоящем параграфе рассмотрим **метод исключений Жордана — Гаусса** для нахождения обратной матрицы A^{-1}.

Схема метода:

1. Составить расширенную матрицу размера $n \times 2n$ вида $(A|E)$.
2. Элементарными преобразованиями Гаусса над строками этой матрицы привести ее к виду $(E|D)$.
3. Тогда $D = A^{-1}$.

В случае неудачи, когда в процессе работы получаем нулевую строку или нулевой столбец на месте массива матрицы A, обратной матрицы не существует. Очевидно, когда число ведущих элементов в методе Гаусса равно порядку матрицы, процесс завершается нахождением обратной матрицы.

Продемонстрируем этот метод в задаче нахождения решения матричного уравнения.

П р и м е р

Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = D$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

Вначале преобразуем уравнение. Ранг матриц A и B полный (ранги строк этих матриц равны соответственно двум и трем), поэтому существуют обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}. Умножим уравнение слева на матрицу A^{-1} и справа на B^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot D\cdot B^{-1}.$$

Получим уравнение

$$X = A^{-1}\cdot D\cdot B^{-1}.$$

Вычислим обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (E|A^{-1}),\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(B|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right) =$$

$$= (E|B^{-1}),\ B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}\cdot D\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

17.6. Определители и их применение

Определители (детерминанты) матриц являются одной из важнейших числовых характеристик квадратных матриц. В начале прошлого века даже считали, что техника, основанная на вычислении определителей, является ключом к решению почти всех задач линейной алгебры и ее приложений. Появление большого количества многоразмерных задач развеяло эти представления, но определители остаются мощным теоретическим инструментом и вполне пригодны для решения задач небольшой размерности.

Для обозначения определителя квадратной матрицы A используют обозначение $|A|$ или $\det A$. Приведем индуктивное определение $|A|$ по порядку матрицы A:

1) определитель матрицы $A=(a_{11})$ порядка 1 равен числу a_{11};

2) определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ порядка 2 равен числу $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$;

… … … … … …

n) определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ порядка n равен числу $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$, где символом A_{ij} обозначено алгебраическое дополнение элемента матрицы A, стоящего на месте (i, j), а именно $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Символ M_{ij} здесь означает определитель матрицы, получаемой из A вычеркиванием строки i и столбца j (*минор* элемента (i, j)).

Приведенный здесь способ называется вычислением определителя разложением по первой строке. Аналогичным образом можно вычислять определитель разложением по любой другой строке или столбцу.

Как видим, нахождение $|A|$ прямым применением определения даже при небольших размерах матрицы является чрезвычайно громоздкой процедурой. Следующие основные свойства определителя помогают существенно упростить эту процедуру.

Простейшие свойства определителей:

1. $|A^T| = |A|$.
2. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
3. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

4. Если в матрице поменять местами две строки (два столбца), то определитель сменит знак.
5. Если все элементы строки (или столбца) матрицы умножить на один и тот же множитель k, то и определитель умножится на k.
6. Если к строке матрицы прибавить другую строку, предварительно умноженную на произвольное число, то определитель останется прежним. Это же верно и для столбцов.
7. Определитель равен нулю в том и только том случае, когда ранг матрицы неполный (меньше порядка матрицы).

Свойства 4–6 определителей, связанные с элементарными преобразованиями Гаусса, позволяют сократить процедуру вычисления определителя, добиваясь более удобной структуры матрицы и понижая ее порядок.

Матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

П р и м е р

Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 9 & 10 & 11 & 14 \\ 13 & 14 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

Вычтем из четвертого столбца третий, из третьего столбца — второй, а затем из второго столбца — первый:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 9 & 10 & 11 & 14 \\ 13 & 14 & 16 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 & 3 \\ 13 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Сейчас вычтем из четвертого столбца третий, а затем из третьего — второй и разложим определитель по третьему столбцу с единственным ненулевым элементом:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 & 3 \\ 13 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 2 \\ 13 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первого столбца второй и разложим по первой строке:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Простейшие применения определителей

1. *Вычисление обратной матрицы через алгебраические дополнения.* Следующая формула является удобной при вычислении обратной матрицы, если размер исходной матрицы небольшой.

Пусть $\left|A\right| \neq 0$. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\left|A\right|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

2. *Формулы Крамера*. Пусть дана система линейных уравнений $A \cdot x = b$ с квадратной матрицей A порядка n и $\left|A\right| \neq 0$. Формулы Крамера являются прямым следствием формулы матричного решения $x = A^{-1}b$ и формулы предыдущего пункта. Они удобны, когда нужно найти значения отдельных переменных:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\left|A\right|}, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Здесь Δ_j — определитель матрицы, полученной из A заменой столбца с номером j столбцом правых частей b.

П р и м е р

Вычислить значение x_2:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

Р е ш е н и е

По формулам Крамера

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 60.$$

Тогда $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\left|A\right|} = 3$.

3. *Вычисление ранга матрицы*. Зачастую ранг матрицы определяется как порядок наибольшей по размеру невырожденной

квадратной подматрицы. Разумеется, это определение равносильно прежнему в силу последнего свойства 7 определителей, но требует нередко большого числа вычислений.

В следующей теореме подытожим факты, связанные с квадратными матрицами.

Теорема. Пусть дана квадратная матрица A порядка n. Следующие утверждения эквивалентны:

1) ранг матрицы A равен n;

2) обратная матрица A^{-1} существует;

3) определитель матрицы A отличен от нуля;

4) система однородных уравнений $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$;

5) при любой правой части b система неоднородных уравнений $Ax = b$ имеет единственное решение.

17.7. Некоторые задачи линейной алгебры

В этом параграфе рассмотрим две темы, которые особенно часто встречаются в прикладных задачах экономики.

Задача о собственных значениях

Эта постановка характерна для задач анализа многомерных данных в экономических исследованиях, необходима при анализе устойчивости динамических систем в макроэкономике, является основным инструментом анализа технологического роста экономики и во многих других задачах.

Пусть дана квадратная матрица A порядка n. Требуется найти такие ненулевой вектор z и соответствующее ему число λ, что

$$A \cdot z = \lambda z.$$

Схема решения задачи:

1) составить матрицу $A - \lambda E$;

2) решить характеристическое уравнение $\left|A - \lambda E\right| = 0$, вычислив его корни — собственные значения матрицы A;

3) для каждого собственного значения λ найти отвечающие ему собственные векторы z_λ, они составляют базис линейного подпространства $\ker(A-\lambda E)$ решений однородной системы уравнений $(A-\lambda E)z=0$.

П р и м е р

Решить задачу о собственных значениях матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

Составим характеристическое уравнение для определения собственных значений матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ -4 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0.$$

Получаем два собственных значения — $\lambda = 1$(кратности 2) и $\lambda = 4$. Найдем соответствующие им собственные векторы.

Пусть $\lambda = 1$. Решая методом Гаусса систему однородных уравнений с матрицей $A-1\cdot E$, находим общее решение в форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Эта формула (за исключением нулевого вектора) дает множество собственных векторов, соответствующих значению $\lambda = 1$. Здесь базис корневого подпространства $\ker(A-1\cdot E)$ составляют векторы $z_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Множество всех собственных векторов, отвечающих $\lambda = 1$, является плоскостью, проходящей через начало координат (эта точка выколота!) и параллельной векторам $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Пусть $\lambda = 4$. Решая методом Гаусса систему однородных уравнений с матрицей $A-4E$, находим общее решение в форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которое (за исключением нулевого вектора) дает множество собственных векторов, соответствующих значению $\lambda = 4$. Здесь базис корневого подпространства $\ker(A-4\cdot E)$ составляет вектор $z_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Множество всех собственных векторов, отвечающих $\lambda = 4$, является прямой, проходящей через начало координат (эта точка выколота!) и параллельной вектору $z_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знакоопределенность квадратичных форм

Вопросы, связанные с проверкой знакоопределенности квадратичной формы, необходимы в задачах анализа характера экстремумов, а также в задачах выпуклого анализа, являющегося технической базой экономической теории.

Квадратичной формой n переменных называется каждая функция $Q: R^n \to R$ следующего вида:

$$Q(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

которую удобно представить в матричной форме $Q = x^T Ax$ (матрица A квадратичной формы должна быть симметричной относительно главной диагонали!). Например,

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_3 = (x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма $Q(x)$ называется *положительно определенной*, если $Q(x) > 0$ для всех ненулевых векторов $x \in R^n$.

Соответственно, квадратичная форма $Q(x)$ называется *отрицательно определенной*, если $Q(x) < 0$ для всех ненулевых векторов $x \in R^n$.

Квадратичная форма $Q(x)$ называется *неотрицательно определенной* (по-другому: положительно полуопределенной), если $Q(x) \geq 0$ для всех векторов $x \in R^n$.

Соответственно, квадратичная форма $Q(x)$ называется *неположительно определенной* (или: отрицательно полуопределенной), если $Q(x) \leq 0$ для всех $x \in R^n$.

Здесь приведем критерии знакоопределенности квадратичной формы, основанные на анализе знаков миноров матрицы A квадратичной формы.

Главными минорами квадратной матрицы A будем называть определители всех тех подматриц матрицы A, которые являются результатом удаления из матрицы A некоторых строк и столбцов с одним и тем же множеством номеров.

Главными угловыми минорами Δ_k $(k = 1, ..., n)$ квадратной матрицы $A_{n\times n}$ будем называть главные миноры следующего вида:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

П р и м е р

Главными минорами матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

являются семь чисел:

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |a_{22}|, |a_{33}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Первые три числа являются главными угловыми минорами.

Критерий Сильвестра

Квадратичная форма с матрицей $A_{n\times n}$ положительно определена в том и только том случае, если все главные угловые миноры строго положительны: $\Delta_1 > 0,\dots,\Delta_n > 0$.

Квадратичная форма с матрицей $A_{n\times n}$ отрицательно определена в том и только том случае, если все главные угловые миноры четного порядка строго положительны, а все главные угловые миноры нечетного порядка строго отрицательны: $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0\dots,\ (-1)^n\Delta_n > 0$.

Квадратичная форма с матрицей $A_{n\times n}$ неотрицательно определена в том и только том случае, если все главные миноры неотрицательны.

Квадратичная форма с матрицей $A_{n\times n}$ неположительно определена в том и только том случае, если все главные миноры четного порядка неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка неположительны.

П р и м е р

Найти все значения t, при которых квадратичная форма Q с матрицей $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ будет положительно определенной.

Р е ш е н и е

Так как $\Delta_1 = |t| = t,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} t & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = t-1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} t & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = t-2,$ то, по критерию Сильвестра, должны выполняться условия $\begin{cases} t>0\\ t-1>0\\ t-2>0\end{cases}$. Поэтому $t > 2$.

Задачи

70. Найти сумму матриц:

70.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 6\\ 0 & -5\\ 6 & -7\end{pmatrix}$

70.2. $\begin{pmatrix} 12 & -6 & 3\\ 13 & 0 & 2\\ 15 & 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & 0 & -5\end{pmatrix}$

70.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 7 & 0 & 12 & 5 \\ 13 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 & -7 \\ -6 & -2 & 1 & -6 \\ 7 & 5 & 6 & -9 \end{pmatrix}$

70.4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & -5 \\ 7 & 8 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

71. Найти произведение матрицы на число:

71.1. $3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{9} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

71.2. $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 20 \\ 15 & 0 & 35 \\ 15 & 25 & 60 \end{pmatrix} \cdot 0,2$

71.3. $-\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot 9$

71.4. $3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 9 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2$

72. Найти произведение матриц:

72.1. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$

72.2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

72.3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

72.4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 9 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ 4 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

72.5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

72.6. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 7 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

72.7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -9 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

72.8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

72.9. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 8 & 0 \\ 7 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

72.10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

73. Транспонировать матрицы:

73.1. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 & 9 \\ 4 & 0 & 15 & -1 \\ 5 & 1 & 21 & -6 \\ 6 & 2 & 36 & -8 \end{pmatrix}$

73.2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ -2 & -1 & 2 & 9 \\ -3 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

73.3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 2 \\ 9 & 3 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$

73.4. $\begin{pmatrix} -5 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 11 \\ 1 & 7 & 22 \\ 9 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

74. Вычислить выражения:

74.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 1,5 \\ -0,5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

74.2. $5 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

74.3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$

74.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

75. Вычислить определители непосредственно:

75.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

75.2. $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

75.3. $\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

75.4. $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

75.5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

75.6. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

75.7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 75.8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

75.9. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 75.10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

76. Вычислить определители разложением по строке (столбцу):

76.1. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 76.2. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

76.3. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 76.4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

76.5. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 76.6. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

76.7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 76.8. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

76.9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 76.10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

77. Вычислить определители путем приведения их к треугольному виду:

77.1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 77.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

77.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

77.4. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

77.5. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

77.6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

77.7. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

77.8. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

77.9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

77.10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

78. Найти обратные матрицы:

78.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

78.2. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

78.3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

78.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

78.5. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

78.6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

78.7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

78.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

78.9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

78.10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

79. При помощи обратных матриц решить матричные уравнения:

79.1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

79.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

79.3. $X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 24 & 14 & 11 \end{pmatrix}$

79.4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

80. Решить систему методом Крамера:

80.1. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

80.2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 6x_3 = 1 \end{cases}$

80.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$

80.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

80.5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

80.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

80.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

80.8. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

80.9. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$

80.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

81. Решить систему методом Гаусса:

81.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

81.2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

81.3. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

81.4. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

81.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$

81.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

81.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

81.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

81.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_2 - x_3 - 6x_5 = 0 \end{cases}$

81.10. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

81.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

81.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

81.13. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 6 \\ 4x_2 - x_3 - 6x_5 = 6 \end{cases}$

81.14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

81.15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

81.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_3 - x_5 = 5 \end{cases}$

81.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

81.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \end{cases}$

81.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

81.20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 9 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

18. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задача любой науки, в том числе и экономической, состоит в выявлении и исследовании закономерностей, которым подчиняются реальные процессы. Найденные закономерности, относящиеся к экономике, имеют не только теоретическую ценность — они широко применяются на практике.

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности случайных событий.

Случайное событие — всякий факт, который может произойти, а может и не произойти при совокупности определенных условий.

П р и м е р ы

1) при бросании монеты выпадет орел;
2) при бросании игральной кости выпадет 3;
3) при троекратном бросании монеты выпадет два герба и решка;
4) выиграли в лотерею автомобиль.

Совокупность определенных условий, в которых может осуществиться или не осуществиться рассматриваемое событие, называется *испытанием* или экспериментом.

Например, бросание монеты — испытание, выпал орел — событие.

Многократное повторение комплекса условий — *серия опытов или испытаний*. В каждом испытании можно наблюдать различные события. Событие, наблюдаемое при серии опытов или испытаний, — массовое событие. Теория вероятностей занимается изучением вероятностных закономерностей массовых однородных событий.

Математическая статистика — раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдения с целью выявления статистических закономерностей.

Рассматривая события, мы видим, что каждое из них обладает какой-то степенью возможности возникновения, одни большей, другие меньшей. Чтобы количественно сравнивать события по степени их возможности, с каждым событием связывают число — вероятность события. Обозначим A — событие, $P(A)$ — вероятность события:

1) $0 \le P(A) \le 1$;

2) $P(A)$ тем больше, чем больше вероятность события;

3) $P(A) = 1$, если событие A в результате испытания обязательно произойдет при любых условиях (*достоверное событие*);

4) $P(A) = 0$, если событие А в результате испытания точно не произойдет ни при каких условиях (*невозможное событие*).

18.1. Случайные величины

Начнем с изучения случайных величин и их характеристик. При анализе тех или иных экономических ситуаций приходится изучать поведение некоторых величин, которые чаще всего оказываются случайными. Ранее был приведен пример события, состоящего в появлении того или иного числа. При бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Заранее определить, какое число очков выпадет при очередном бросании, невозможно — это зависит от очень многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков — величина случайная, 1, …, 6 — возможные значения этой случайной величины.

Случайная величина — величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Примеры случайных величин

1. Число родившихся мальчиков из 100 новорожденных — случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2,…, 100.

2. Курс доллара Центрального банка — принимает значения из некоторого интервала. Перечислить все возможные значения трудно.

3. Номер билета на экзамене.

4. Время ожидания автобуса на остановке.

Случайные величины в зависимости от возможных значений, которые они могут принимать, подразделяются на дискретные и непрерывные.

Дискретная случайная величина — случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные значения с определенными возможностями. Число возможных значений случайной величины может быть конечно или бесконечно.

Закон распределения дискретной случайной величины — соответствия между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Его можно изобразить в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Любое число также можно рассматривать как случайную величину, которая принимает одно единственное значение с вероятностью 1:

C	C
p	1

Две случайные величины X и Y называются *независимыми*, если вероятность того, что случайная величина примет в испытании то или иное значение, не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина. Несколько случайных величин называют *взаимно независимыми*, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли другие.

Пусть у нас есть две случайные величины X и Y со следующими законами распределения:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m
p	q_1	q_2	$\dots$	q_m

.

Тогда можно определить сумму и произведение двух случайных величин следующим образом.

Суммой двух случайных величин называется случайная величина со следующим законом распределения:

$X+Y$	x_1+y_1	...	x_1+y_m	x_2+y_1	...	x_2+y_m	...	x_n+y_1	...	x_n+y_m
p	p_{11}		p_{1m}	p_{21}		p_{2m}		p_{n1}		p_{nm}

,

где $p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P\Big(Y = y_j \,|\, \big(X = x_i\big)\Big)$ для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i q_j$.

Произведением двух случайных величин называется случайная величина со следующим законом распределения:

XY	x_1y_1	...	x_1y_m	x_2y_1	...	x_2y_m	...	x_ny_1	...	x_ny_m
p	p_{11}		p_{1m}	p_{21}		p_{2m}		p_{n1}		p_{nm}

,

где $p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P\Big(Y = y_j \,|\, \big(X = x_i\big)\Big)$ для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i q_j$.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, но иногда для решения прикладных задач нам вовсе не обязательно знать его целиком. Иногда выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно, для того чтобы иметь возможность сравнивать две случайные величины. К числу возможных числовых характеристик случайной величины относится математическое ожидание — средневзвешенное значение величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины — сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$M(X) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$. Эта величина уже не случайная — детерминированная. Мы знаем, какое значение примет математическое ожидание конкретной случайной величины, если точно знаем закон распределения случайной величины.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$.
2. $M(CX) = C\mathrm{M}(X)$.
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.
4. Пусть X и Y — независимые случайные величины, тогда $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Пример 1

Фермер ежегодно продает на рынке 5, 8, 10 и 12 телят, причем вероятности отдельных значений проданных телят таковы:

Число телят	5	8	10	12
Вероятности	0,1	0,2	0,4	0,3

Цена одного теленка в разные годы может равняться 80 и 100 долл., причем вероятности этих цен равны соответственно 0,8 и 0,2. Какова средняя годовая выручка фермера от продажи телят?

Для ответа на вопрос задачи необходимо найти математическое ожидание случайной величины Z (выручка фермера), равной произведению двух случайных величин X (число проданных телят) и Y (цена одного теленка). Законы распределения величин X и Y:

X	5	8	10	12
p	0,1	0,2	0,4	0,3

Y	80	100
p	0,8	0,2

Способ 1. Составим закон распределения случайной величины Z.

Пусть у нас есть две случайные величины X и Y со следующими законами распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
p	q_1	q_2	$\ldots$	q_m

.

Произведением двух случайных величин называется случайная величина со следующим законом распределения:

XY	x_1y_1	...	x_1y_m	x_2y_1	...	x_2y_m	...	x_ny_1	...	x_ny_m
p	p_{11}		p_{1m}	p_{21}		p_{2m}		p_{n1}		p_{nm}

,

где $p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P\left(Y = y_j \mid \left(X = x_i\right)\right)$ для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i q_j$.

Выручка Z	$5 \cdot 80$	$8 \cdot 80$	$10 \cdot 80$	$12 \cdot 80$	$5 \cdot 100$	$8 \cdot 100$	$10 \cdot 100$	$12 \cdot 100$
Вероятности	$0{,}1 \cdot 0{,}8$	$0{,}2 \cdot 0{,}8$	$0{,}4 \cdot 0{,}8$	$0{,}3 \cdot 0{,}8$	$0{,}1 \cdot 0{,}2$	$0{,}2 \cdot 0{,}2$	$0{,}4 \cdot 0{,}2$	$0{,}3 \cdot 0{,}2$

Получим:

Выручка Z	400	640	800	960	500	800	1000	1200
Вероятности	0,08	0,16	0,32	0,24	0,02	0,04	0,08	0,06

$MZ = 400 \cdot 0{,}08 + 640 \cdot 0{,}16 + 800 \cdot 0{,}32 + 960 \cdot 0{,}24 + 500 \cdot 0{,}02 + 800 \cdot 0{,}04 + 1000 \cdot 0{,}08 + 1200 \cdot 0{,}06 = 814{,}8$.

Способ 2. Поскольку случайные величины X и Y независимы, то $M(XY) = M(X)M(Y)$,

$MX = 5 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}4 + 12 \cdot 0{,}3 = 9{,}7$.

$MY = 80 \cdot 0{,}8 + 100 \cdot 0{,}2 = 84$.

$MZ = MXMY = 9{,}7 \cdot 84 = 814{,}8$.

Таким образом, среднегодовая выручка фермера составит 814,8 долл.

Математическое ожидание в полной степени не характеризует случайную величину, мало знать только среднее значение случайной величины.

П р и м е р 2

X	0,01	−0,01
p	0,5	0,5

Y	100	−100
p	0,5	0,5

$M(X) = M(Y) = 0$.

Математическое ожидание одинаковое, а возможные значения различные. Смысл различия в том, что X имеет возможные значения, не только близкие к математическому ожиданию, но и далекие. Поэтому неплохо бы иметь некую характеристику, которая бы отражала степень разброса возможных значений вокруг математического ожидания (среднего).

Попытаемся построить такую характеристику. Для этого рассмотрим новую случайную величину — *отклонение* заданной случайной величины от своего среднего:

X	x_1	…	x_n
p	p_1	…	p_n

$X - MX$	$x_1 - MX$	…	$x_n - MX$
p	p_1	…	p_n

.

Тогда $M(X–MX)$ — среднее отклонение случайной величины от своего математического ожидания. Однако по свойствам математического ожидания эта величина равняется 0. Поэтому вводят другую величину, характеризующую степень разброса значений вокруг математического ожидания. Эта величина называется дисперсией.

Дисперсия случайной величины вычисляется по формуле $M(X - MX)^2$.

X	x_1	…	x_n
p	p_1	…	p_n

$(X - MX)^2$	$(x_1 - MX)^2$	…	$(x_n - MX)^2$
p	p_1	…	p_n

$$DX = (x_1 - MX)^2 p_1 + \ldots + (x_n - MX)^2 p_n.$$

Пример 3

X	1	2	4
p	0,2	0,5	0,3

$MX = 2{,}4$; $DX = 1{,}24$.

Утверждение. $DX = M(X^2) - (MX)^2$.

Дисперсия случайной величины, как и математическое ожидание, уже не является случайной величиной — эта величина детерминированная.

Свойства дисперсии случайной величины:

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. Если X и Y — независимые случайные величины, то $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$. Это свойство обобщается для случая нескольких взаимно независимых случайных величин.

4. Если X и Y — независимые случайные величины, то $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Кроме дисперсии нам понадобится еще одна числовая характеристика — *среднеквадратическое отклонение* случайной величины.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Утверждение. Если $X_1, \ldots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины, то $\sigma(X_1+\ldots+X_n)=\sqrt{\sigma^2\left(X_1\right)+\ldots+\sigma^2\left(X_n\right)}$.

Итак, числовые характеристики дискретной случайной величины находятся по закону распределения случайной величины, следовательно, если две случайные величины имеют одинаковые законы распределения (одинаково распределены), то их числовые характеристики совпадают.

Ранее мы рассматривали случайные величины, которые принимают изолированные или дискретные значения. Кроме таких случайных величин встречаются и другие случайные величины, например, которые принимают значения из некоторого интервала. Для описания таких случайных величин вводят понятие функции распределения случайной величины.

Пусть X — некоторая случайная величина, тогда $F_X(x_0)=P(x<x_0)$ — *функция распределения* вероятностей случайной величины. В дальнейшем если понятно, о какой функции распределения идет речь, мы будем обозначать эту функцию $F(x)$. Функция распределения содержит всю вероятностную информацию о случайной величине.

Свойства функции распределения случайной величины X:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. если $x_2 \ge x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Покажем это. Пусть $x_2 > x_1$, тогда

$$P(x < x_2) = P(x < x_1) + P(x_1 \le x < x_2),$$

$$P(x < x_2) - P(x < x_1) = P(x_1 \le x < x_2),$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le x < x_2) \ge 0.$$

С л е д с т в и е. Вероятность того, что случайная величина примет значения из промежутка $[a, b)$, равна $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$.

П р и м е р

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le -1; \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}, -1 < x \le 3; \\ 1, x > 3. \end{cases}$$

Тогда $P(0 \le x < 2) = F(2) - F(0) = 0{,}5.$

3. $F(x) \to 0$, если $x \to -\infty$,
   $F(x) \to 1$, если $x \to +\infty$.

Если случайная величина может принимать значения только из интервала (a, b), то $F(X) = 0$, если $x < a$, и $F(x) = 1$, если $x > b$.

X — непрерывная случайная величина, если ее функция распределения кусочно-дифференцируема.

Утверждение. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет определенное значение, равна нулю.

Действительно, $P(x_1 \le x \le x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$, $\Delta x \to 0$, тогда, поскольку X — непрерывная случайная величина, то $P(X = x_1) = F(x_1) - F(x_1) = 0.$

Для непрерывных случайных величин можно ввести, кроме функции распределения случайной величины, еще и плотность распределения.

Плотность распределения случайной величины X — функция $f_X(x) = F'_X(x)$.

Если в дальнейшем будет понятно, о какой случайной величине идет речь, мы будем обозначать плотность распределения случайной величины X просто $f(x)$.

Утверждение.

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

П р и м е р

Зная плотность распределения случайной величины, можно найти функцию распределения.

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx, \text{ так как } F(x_0) = P(x - x_0) = P(-\infty < x - x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx.$$

Свойства дифференциальной функции распределения:

1. $f(x) \ge 0$; следует из того факта, что функция распределения неубывающая.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$ Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(-\infty < x < +\infty) = 1.$ Если случайная величина принимает значения только из интервала (a, b), то $\int_a^b f(x)dx = 1.$

Плотность распределения называют еще законом распределения непрерывной случайной величины, по аналогии с дискретными случайными величинами.

Так же, как и в случае дискретных случайных величин, полезно рассматривать некоторые характеристики случайной величины, которые описывают ее случайную величину «в среднем».

Случайная величина определена на всей числовой оси (интегралы сходятся абсолютно)	Случайная величина принимает значения только из некоторого интервала (a, b)
$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$	$M(X)=\int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$ $D(X)=\int\limits_{a}^{b}[x-M(X)]^2 f(x)dx=$ $=\int\limits_{a}^{b}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$

Все свойства, которые мы рассматривали для дискретных случайных величин, остаются в силе.

П р и м е р 1

Дана плотность вероятности $y = f(x)$ некоторой случайной величины X. Требуется:

1) определить, чему равен параметр a;
2) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение X;
3) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал [−0,5; 0,5];
4) построить функцию распределения X;
5) построить графики функции и плотности распределения.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1\\ ax^4,\ -1\le x\le 1\\ 0,\ x\ge 1\end{cases}$$

1. Параметр a найдем из условия, которому должна удовлетворять любая плотность распределения: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1} ax^4dx=a\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}=a\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=a\frac{2}{5}=1.\ \text{Откуда}\ \ a=\frac{5}{2}.$$

2. $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ — математическое ожидание,

$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$ — дисперсия,

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ — среднеквадратическое отклонение.

$$M(X)=\int\limits_{-1}^{1} x\frac{5}{2}x^4dx=\frac{5}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^5dx=\frac{5}{2}\frac{x^6}{6}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=0.$$

$$D(X)=\int\limits_{-1}^{1} x^2\frac{5}{2}x^4dx-(0)=\frac{5}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^6dx=\frac{5}{2}\frac{x^7}{7}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{7}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{5/7}.$$

3. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал найдем по формуле $P(a\le x\le b)=\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$P(-0{,}5\le x\le 0{,}5)=\int\limits_{-0,5}^{0,5}\frac{5}{2}x^4dx=\frac{5}{2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-0,5}^{0,5}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{5\cdot 32}+\frac{1}{5\cdot 32}\right)=\frac{1}{32}.$$

4. Найдем функцию распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1\\ \frac{5}{2}x^4,\ -1\le x\le 1\\ 0,\ x\ge 1\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1\\ \int\limits_{-1}^{x}\frac{5}{2}x^4,\ -1<x\le 1\\ 1,\ x>1\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1\\ \frac{x^5}{2}+\frac{1}{2},\ -1<x\le 1\\ 1,\ x>1\end{cases}$$

5. Построим графики функции и плотности распределения случайной величины X.

График плотности распределения X изображен на рис. 59. График функции распределения X показан на рис. 60.

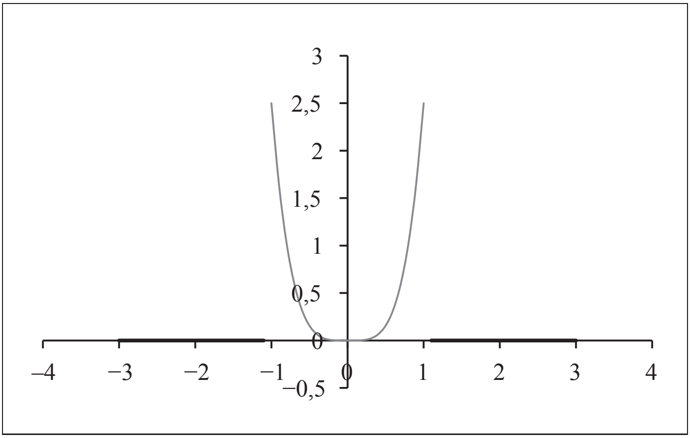


Рис. 59

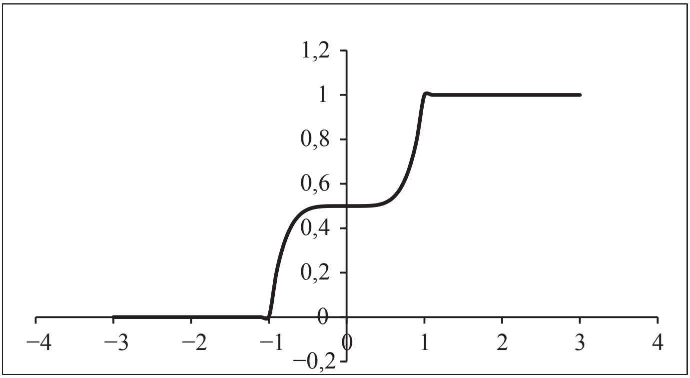


Рис. 60

П р и м е р 2

Известно, что в партии из 20 телефонных аппаратов 5 недействующих. Случайным образом из этой партии взято 4 аппарата. Построить закон распределения случайной величины X — числа недействующих аппаратов из отобранных. Найти дисперсию этой величины. В каких единицах она измеряется? Построить интегральную функцию распределения случайной величины X, многоугольник распределения.

Случайная величина X — число недействующих аппаратов из отобранных четырех. Данная случайная величина — дискретная, принимающая следующие возможные значения:

$x_1 = 0$ — среди отобранных аппаратов все работающие;

$x_2 = 1$ — среди отобранных аппаратов только один недействующий;

$x_3 = 2$ — среди отобранных аппаратов ровно два недействующих;

$x_4 = 3$ — среди отобранных аппаратов ровно три недействующих;

$x_5 = 4$ — все четыре отобранных аппарата недействующие.

Найдем вероятности, с которыми случайная величина X принимает свои значения, для чего воспользуемся классическим определением вероятности.

Для всех пяти случаев элементарными исходами являются любые комбинации четырех телефонов из 20. Число элементарных исходов: $n = C_{20}^4 = 4845.$

Благоприятные исходы:

1) набор из четырех работающих телефонов: $m_1 = C_{15}^4 = 1365;$

2) набор из трех работающих телефонов и одного неработающего: $m_2 = C_{15}^3 C_5^1 = 2275;$

3) набор из двух работающих телефонов и двух неработающих: $m_3 = C_{15}^2 C_5^2 = 1050;$

4) набор из одного работающего телефонов и трех неработающих: $m_4 = C_{15}^1 C_5^3 = 150;$

5) набор из четырех неработающих телефонов: $m_5 = C_5^4 = 5;$

Итак,

$$p_1 = P(X = x_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{1365}{4845} = 0,2817;$$

$$p_2 = P(X = x_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{2275}{4845} = 0,4696;$$

$$p_3 = P(X = x_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{1050}{4845} = 0,2167;$$

$$p_4 = P(X = x_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{150}{4845} = 0,031;$$

$$p_5 = P(X = x_5) = \frac{m_5}{n} = \frac{5}{4845} = 0,001.$$

Закон распределения случайной величины — перечень возможных значений случайной величины с соответствующими вероятностями.

Закон распределения случайной величины X — числа неработающих телефонных аппаратов из отобранных четырех:

X	0	1	2	3	4
p	0,2817	0,4696	0,2167	0,031	0,001

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Найдем математическое ожидание случайной величины:

$$M(X) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0 \cdot 0{,}2817 + 1 \cdot 0{,}4696 + 2 \cdot 0{,}2167 + 3 \cdot 0{,}031 + 4 \cdot 0{,}001 = 1.$$

Найдем дисперсию случайной величины, воспользовавшись следующей формулой:

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = p_1 x_1^2 + \ldots + p_n x_n^2 - (MX)^2 = 0 \cdot 0{,}2817 + 1 \cdot 0{,}4696 + $$
$$+ 4 \cdot 0{,}2167 + 9 \cdot 0{,}031 + 16 \cdot 0{,}001 - 1 = 0{,}63 \text{ шт.}^2$$

Найдем интегральную функцию распределения случайной величины.

$F_X(x_\mathbf{0}) = P(x < x_\mathbf{0})$ — функция распределения случайной величины X.

$$F_X = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ P(X=0), \ 0 < x \le 1; \\ P(X=0) + P(X=1), \ 1 < x \le 2; \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2), \ 2 < x \le 3; \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3), \ 3 < x \le 4; \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1, \ x > 4. \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ 0{,}2817, \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}7513, \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}968, \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}999; \ 3 < x \le 4; \\ 1, \ x > 4. \end{cases}$$

Многоугольник распределения — ломаная линия, соединяющая точки с координатами (x_i, p_i) (рис. 61).

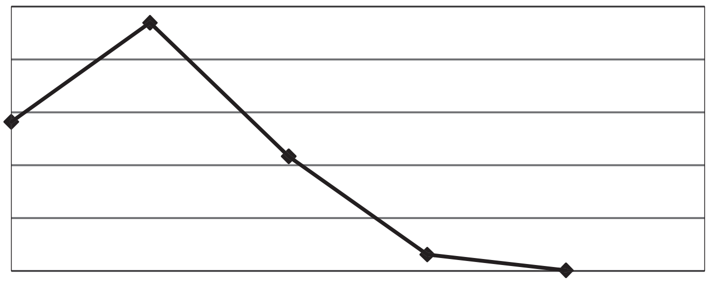


Рис. 61

Теперь рассмотрим некоторые специальные распределения, которые пригодятся нам в дальнейшем.

18.2. Распределение случайных величин

1. **Равномерно распределенная случайная величина.** Плотность распределения равномерно распределенной случайной величины:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\notin(a,b);\\ \dfrac{1}{b-a},\ x\in(a,b).\end{cases}$$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ x\in(a,b)\\ 1,\ x>b\end{cases}$$

Математическое ожидание: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$. Дисперсия: $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

2. **Нормальное распределение.** Случайная величина X называется нормально распределенной случайной величиной с параметрами m и σ, если плотность ее распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание: $M(X) = m$.

Дисперсия: $D(X) = \sigma^2$.

Среднеквадратичное отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma$.

При изменении m график плотности нормального распределения не меняет формы, сдвигаясь вправо или влево. С уменьшением σ кривая становится круче, с увеличением σ кривая выглаживается.

Нормированное нормальное распределение — нормальное распределение с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$, имеет очень важное значение в теории вероятностей и, главным образом, в статистике.

Плотность распределения имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Эта функция затабулирована, т. е. имеются таблицы.

Функция нормированного нормального распределения:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Таблицы для этой функции также имеются.

Утверждение. Пусть у нас имеется нормально распределенная случайная величина X с параметрами m и σ. Тогда случайная величина $\dfrac{x-m}{\sigma}$ имеет нормированное нормальное распределение.

Функция Лапласа.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Эта функция нечетная, т. е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Таблицы этой функции имеются во всех учебниках по теории вероятностей и математической статистики.

Вероятность того, что нормированная нормальная случайная величина примет значения из интервала $(0, x_0)$, где $x_0 > 0$, равна

$$P(0\le x\le x_0)=\int_0^{x_0}\varphi(x)dx=\Phi(x_0).$$

З а м е ч а н и е. Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$ и так как $\varphi(x)$ — симметрична относительно нуля, то $\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx=1/2$, тогда $F_0(x)=0,5+\Phi(x)$.

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Пусть X — нормально распределенная случайная величина с параметрами m и σ.

$$P(A<X<B)=\int_A^B f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_A^B e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[z=\frac{x-m}{\sigma}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-m}{\sigma}}^{\frac{B-m}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{B-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right).$$

Вычисление вероятности заданного отклонения

Пусть X — нормально распределенная случайная величина с параметрами m и σ. Посчитаем вероятность того, что отклонение этой величины по абсолютному значению будет меньше заданного положительного числа δ.

$$P(|x-m|<\delta)=P(m-\delta<x<m+\delta)=$$

$$=\Phi\left(\frac{m+\delta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{m-\delta-m}{\sigma}\right)=2\Phi\frac{\delta}{\sigma},$$

поскольку функция Лапласа — нечетная функция. Это выражение нам понадобится для построения доверительных интервалов.

П р и м е р

Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение (математическое ожидание — 56, среднеквадратическое отклонение — 4). Найти вероятность того, что значение случайной величины попадет в интервал (55; 58).

Случайная величина X называется нормально распределенной случайной величиной с параметрами m и σ, если плотность ее распределения имеет следующий вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание: $M(X) = m$.

Дисперсия: $D(X) = \sigma^2$.

Среднеквадратичное отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sigma$.

В нашей задаче $m = 56$, $\sigma = 4$.

Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал определяется по следующей формуле:

$$P(A<X<B)=\Phi\left(\frac{B-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ — функция Лапласа (значения этой функции находятся по таблице).

$$P(55 < X < 58) = \Phi\left(\frac{58-56}{4}\right) - \Phi\left(\frac{55-56}{4}\right) = \Phi(0,5) + \Phi(0,25) =$$

$$= \Phi(0,5) + \Phi(0,25) = 0,1915 + 0,0987 = 0,2902.$$

При вычислениях мы воспользовались нечетностью функции Лапласа.

Правило трех сигм

$\delta = \sigma t$

$P(|x-m| < \sigma t) = 2\Phi(t)$

$t = 3: P(|x-m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0,49865 = 0,9973.$

$P(|x-m| > 3\sigma) = 0,027,$ т. е. практически невозможное событие.

На практике если распределение случайной величины неизвестно, но правило трех сигм выполняется, то считают, что распределение нормальное, если не выполняется, то распределение нормальным не является.

3. **Распределение χ^2.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — нормированные нормальные случайные величины, тогда $\chi^2 = \sum_{i-1}^{n} X_i^2$ распределена по закону χ^2 с n степенями свободы. Если выполняется соотношение $X_n = X_1 + \ldots + X_{n-1}$, то число степеней свободы равно $n - 1$.

Плотность распределения:

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \ \ x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-1} dt$ — гамма-функция.

4. **Распределение Стьюдента.** Пусть Z — нормированная нормальная случайная величина, $\chi^2(k)$ — независимая от Z случайная величина, распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы.

Тогда случайная величина $T\dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(k)}{k}}}=t(k)$ имеет t-распределение или распределение Стьюдента с k степенями свободы. С возрастанием k распределение Стьюдента быстро приближается к нормированному нормальному распределению. Уже для $k = 30$ распределение Стьюдента становится почти нормированным нормальным. Плотность распределения Стьюдента с k степенями свободы:

$$f_{t(k)}(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}{\sqrt{\pi(k-1)}\cdot\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}k},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$M\big(t(k)\big)=0,\ D\big(t(k)\big)=\frac{k}{k-2}.$$

5. **Распределение Фишера.** Пусть $\chi_1^2(k_1)$ и $\chi_2^2(k_2)$ — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 с числом степеней свободы k_1 и k_2 соответственно. Тогда случайная величина $f(k_1,k_2)=\dfrac{\chi_1^2(k_1)/k_1}{\chi_2^2(k_2)/k_2}$ распределена по закону Фишера с числом степеней свободы числителя k_1 и знаменателя k_2.

Плотность распределения Фишера:

$$f_F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ C_0\dfrac{x^{\frac{k_1-1}{2}}}{(k_2+k_1x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\end{cases},\ x>0,\ \text{где}\ C_0=\frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}.$$

Одинаково распределенные взаимно-независимые случайные величины

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — взаимно-независимые одинаково распределенные случайные величины, значит, их математические ожидания и дисперсии совпадают. Обозначим $MX_i = a, \; DX_i = \sigma^2$.

Рассмотрим следующую случайную величину — среднее арифметическое рассматриваемых случайных величин:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

Найдем ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение:

1. $M\overline{X} = a$.

2. $D\overline{X} = \dfrac{\sigma^2}{n}$, т. е. дисперсия среднего арифметического в n раз меньше, чем у каждого слагаемого.

3. $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Свойства имеют важное практическое значение. Если мы наблюдаем некоторую физическую величину n раз, тогда можно показать, что среднее арифметическое дает результат более надежный, чем отдельные измерения. С ростом числа наблюдений растет надежность результата. С ростом n дисперсия среднего арифметического становится сколь угодно малой, т. е. ведет себя почти как неслучайная. Теорема Чебышева устанавливает в точной количественной формулировке это свойство среднего арифметического.

18.3. Центральная предельная теорема и законы больших чисел

Под законом больших чисел в широком смысле понимают общий принцип, согласно которому совокупное действие большого числа случайных факторов приводит при выполнении некоторых условий к результату, почти не зависящему от случая. Иными словами, при рассмотрении большого числа случайных величин их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

Под законом больших чисел в узком смысле понимают ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных совокупностей условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа испытаний к некоторым определенным постоянным.

Утверждение 1. ***Неравенство Маркова (лемма Чебышева).***

Если среди возможных значений случайной величины нет отрицательных, т. е. $x_i \geq 0\ \forall i$, то $P(X > A) \leq \dfrac{MX}{A}$, где A — произвольное число больше 0.

Предположим для начала, что X — дискретная случайная величина:

X	x_1	x_2	…	x_n	— упорядоченные числа.
p	p_1	p_2	…	p_n	$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

Возьмем произвольное положительное число A. Первые несколько x_i будут меньше A, пусть их будет k штук. Тогда последние $(n - k)$ x_i будут больше A $(0 \leq k \leq n)$.

$$MX = \underbrace{p_1 x_1 + \ldots + p_k x_k}_{x_i \leq A} + \underbrace{p_{k+1} x_{k+1} + \ldots + p_n x_n}_{x_i > A},$$

$MX \geq p_{k+1} x_{k+1} + \ldots + p_n x_n$, где все x_i больше A.

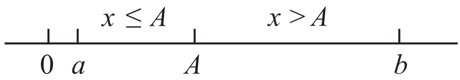
$MX \geq p_{k+1} A + \ldots + p_n A,$

$MX \geq (p_{k+1} + \ldots + p_n) A.$

Отсюда следует требуемое неравенство:

$$\frac{MX}{A} \geq p_{k+1} + \ldots + p_n = P(X > A).$$

Теперь предположим, что X — непрерывная случайная величина.



$$MX = \int_a^b x f_X(x)dx = \int_a^A x f_X(x)dx + \int_A^b x f_X(x)dx \geq$$

$$\geq \int_A^b x f_X(x)dx \geq A\int_A^b f_X(x)dx \geq AP(X > A).$$

Откуда следует требуемое неравенство.

Другая форма неравенства Маркова:

$$P(X \leq A) \geq 1 - \frac{MX}{A}.$$

Утверждение 2. ***Неравенство Чебышева.***

Для любой случайной величины, имеющей математическое ожидание и дисперсию, имеет место следующее неравенство (Чебышева):

$$P\left(\left|X - MX\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Образуем новую случайную величину $(X - MX)^2$. Эта величина принимает только неотрицательные значения, т. е. удовлетворяет условиям леммы Чебышева.

$$P\left((X - MX)^2 \leq A\right) \geq 1 - \frac{DX}{A}.$$

В качестве A возьмем ε^2.

$$P\left((X - MX)^2 \leq \varepsilon^2\right) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Перепишем неравенство в равносильной форме:

$$P\left(\left|X - MX\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

В приведенном утверждении дается оценка вероятности того, что отклонение случайной величины от своего математического ожидания не превысит по абсолютному значению положительную величину ε. Если ε достаточно мало, то мы таким образом оценили вероятность того, что случайная величина X примет значения, достаточно близкие к математическому ожиданию. Для практики это неравенство имеет ограниченное значение, поскольку эта оценка груба. Однако велико теоретическое значение неравенства Чебышева. Оно используется для доказательства следующего утверждения, именуемого теоремой Чебышева.

Утверждение 3. *Теорема Чебышева.*

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями, т. е. $D(X_i) \le C \ \ \forall i$. Тогда при неограниченном увеличении n средняя арифметическая случайных величин сходится по вероятности к средней арифметической их математических ожиданий, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{MX_1 + \ldots + MX_n}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Поясним смысл формулировки «сходимость по вероятности». Мы знаем, что такое просто предел последовательности. Понятие предела подразумевает, что, начиная с некоторого номера, вся последовательность находится в ε — полосе предела, пусть даже ε мало, т. е. выполняется неравенство $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$. В формулировке утверждения содержится подобное выражение:

$$\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{MX_1 + \ldots + MX_n}{n}\right| \le \varepsilon.$$

Из сходимости по вероятности вовсе не следует, что это неравенство будет выполняться всегда, начиная с некоторого номера.

Поскольку $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ — случайная величина, возможно, что в отдельных случаях неравенство выполняться не будет. Однако с ростом n вероятность выполнения этого неравенства стремится к 1, т. е. при большом n выполнение этого неравенства является событием практически достоверным, а невыполнение — практически невозможным. Таким образом, стремление, сформулированное теоремой, понимается не как категорическое утверждение, а как утверждение, верность которого гарантируется с вероятностью сколь угодно близкой к 1 при росте n. Это и отражено в формулировке «сходимость по вероятности».

Поясним смысл утверждения. В нем говорится, что при большом числе случайных величин их среднее, являющееся случайной величиной, практически достоверно как угодно мало отличается от неслучайной величины, т. е. практически перестает быть случайной.

Утверждение 4. Если независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют одинаковые математические ожидания, равные a, и выполняются другие условия теоремы Чебышева, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}-a\right|\le\varepsilon\right)=1.$

Утверждение 5. Если p — вероятность наступления события A постоянна в серии из n независимых испытаний и n велико, то $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\delta$, где k — число появления события A в серии из n испытаний.

Сформулированное утверждение дает теоретическое обоснование замены неизвестной вероятности события его частотой или статистической вероятностью, полученной в n повторных независимых испытаниях, проводимых при одном и том же комплексе условий. Так, например, если вероятность рождения мальчика нам неизвестна, то в качестве ее значения мы можем принять статистическую вероятность этого события, которая, по многолетним статистическим данным, составляет приближенно 0,515.

Утверждение 6. Частота события A в серии из n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностями $p_1, \dots, p_n$ соответственно при неограниченном увеличении числа n, сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятности события в отдельных испытаниях, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1.$

Закон больших чисел устанавливает факт приближения среднего большого числа независимых случайных величин к некоторой детерминированной величине. Однако закономерности, возникающие при суммарном воздействии большого числа случайных величин, на этом не ограничиваются. Оказывается, что при совокупности некоторых достаточно общих условий совокупное действие случайных величин приводит к определенному, а именно нормальному распределению.

Утверждение 7. ***Центральная предельная теорема.***

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, у каждой из которых существует математическое ожидание $MX_i = a_i$, дисперсия $DX_i = \sigma_i^2$ и абсолютный центральный момент третьего порядка: $M\left(\left|X_i - a_i\right|^3\right) = \mu_i$. Если выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0$, то закон распределения суммы $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$ при $n \to \infty$ сходится по распределению к нормальному распределению. Смысл условия состоит в том, чтобы среди величин, образующих сумму, не было слагаемых, влияние которых на рассеяние Y подавляюще велико по сравнению с влиянием остальных слагаемых. То есть удельный вес каждого слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых.

Пример

Потребление энергии многоквартирного дома можно представить как сумму потреблении каждой квартиры. Если потребление электроэнергии в каждой квартире не выделяется среди остальных, то можно считать, что потребление энергии всего дома будет случайной величиной, имеющей приближенно нормальное распределение. Но если в одной из квартир расположено энергоемкое производство и уровень потребления электроэнергии несравнимо выше, чем в остальных квартирах, то вывод о приближенно нормальном распределении потребления электроэнергии всего дома будет неправомерен, поскольку есть слагаемое, играющее превалирующую роль.

Задачи

82. Три стрелка с вероятностями попадания в цель при одном выстреле 0,7; 0,8 и 0,9 соответственно делают по одному выстрелу. Найти распределение вероятностей для общего числа попаданий. Найти математическое ожидание и дисперсию. Найти функцию распределения и построить ее график.

83. Вероятность того, что лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0,1. Покупатель купил 5 билетов. Найти распределение вероятностей для числа выигрышей у владельца этих 5 билетов. Найти математическое ожидание и дисперсию. Найти функцию распределения и построить ее график.

84. Сдача экзамена по математике производится до получения положительного результата. Шансы сдать экзамен остаются неизменными и составляют 20 %. Найти математическое ожидание числа попыток сдачи экзамена.

85. Стрелок стреляет по движущейся мишени до первого попадания в нее, причем успевает сделать не более 4 выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию числа сделанных выстрелов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6.

86. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \sin x, \ 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

87. Непрерывная случайная величина X в интервале $(0, \infty)$ задана плотностью распределения $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \ (\alpha > 0)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1, 2).

88. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \sin x, \ 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения непрерывной случайной величины $F(x)$.

89. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ равна $f(x) = C \sin 2x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

90. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале (0, 1); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

91. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

92. Закон равномерного распределения задан плотностью вероятности $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ в интервале (a, b); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти функцию распределения $F(x)$.

93. Найдите математическое ожидание показательного распределения $f(x) = p_2 \mathrm{e}^{-p_2 x}$ при $x \ge 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$.

94. Найдите дисперсию и среднеквадратическое отклонение показательного распределения $f(x) = p_1 e^{-p_1 x}$ при $x \ge 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$.

95. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с p_2 степенями свободы.

96. Постройте функцию плотности вероятности «хи-квадрат» распределения для числа степеней свободы равному p_1.

19. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

19.1. Выборочный метод математической статистики

Изучение закономерностей объектов достаточно большой совокупности методами математической статистики основано на использовании статистических данных для некоторой конечной части рассматриваемых объектов.

Допустим, у нас есть некоторая совокупность однородных объектов и нас интересует некоторый количественный или качественный признак, характеризующий эти объекты, например, размер деталей или вес расфасованных продуктов. Данный признак мы будем интерпретировать как случайную величину, значение которой меняется от объекта к объекту. Иногда проводят сплошное обследование: обследуют каждый объект совокупности относительно признака, которым интересуются. Но не всегда это возможно. Обычно из всей совокупности объектов *случайным образом* отбирают ограниченное число объектов, которые и подвергают изучению.

1. Вся подлежащая изучению совокупность объектов называется *генеральной совокупностью*.

2. Часть объектов, которая попала на исследование, называется *выборочной совокупностью* или *выборкой*.

3. Число объектов в генеральной совокупности и выборке называется их *объемом*. Например, на заводе произвели 1000 деталей и отобрали 100 на проверку качества. Тогда 1000 — объем генеральной совокупности, 100 — объем выборки.

Выборки бывают различными — повторными (после испытания объект возвращается в генеральную совокупность и может снова быть извлечен для исследования) или бесповторными (отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается). Основное требование к выборке — репрезентативность, т. е. ни одна единица не обладает преимуществом попасть в отбираемую совокупность по сравнению с другими. Например, вы заказали провести опрос некоторых людей на предмет выяснения их предпочтений в еде, отдыхе и т. д., т. е. заказали некоторое маркетинговое исследование рынка некоторому человеку, а он опросил только своих знакомых, друзей, родственников. Такая выборка не будет репрезентативной и выводы, основанные на анализе этой выборки, будут неверными.

Важнейшей задачей выборочного метода является оценка параметров (характеристик) генеральной совокупности по данным выборки. Теоретическая основа выборочного метода — теорема Чебышева, т. е. мы по характеристикам выборочной совокупности судим о характеристиках генеральной совокупности.

Оценка неизвестных параметров переменной происходит на основании анализа материала наблюдения. Однако прежде чем приступить к оцениванию, производят предварительную обработку материала наблюдения — составляют вариационный ряд и рассчитывают некоторые описательные статистики этого ряда, которые будут анализироваться дальше.

19.2. Вариационные ряды и их характеристики

Установление статистических закономерностей, присущих массовым случайным явлениям, основано на изучении статистических данных — сведений о том, какие значения принял в результате наблюдений интересующий нас признак X.

Рассмотрим X — числовую характеристику совокупности объектов.

П р и м е р

Необходимо изучить распределение размера обуви, проданной в интересующем магазине, с целью обеспечить нужное количество обуви каждого размера. Получены следующие данные о размере проданной в магазине за сутки обуви (женской): 35, 35, 36, 36, …, 42, 42. Всего продано 100 штук.

Рассмотрение и осмысление данных, представленных в таком виде, практически невозможно из-за обилия числовой информации. Поэтому проводят группировку совокупности чисел.

Различные значения признака X, наблюдавшиеся у объектов, называются *вариантами*, а их количество — *частотами*.

Сгруппированный ряд представляют в виде таблицы.

П р и м е р

За смену продано 100 пар обуви.

x_i-варианты	36	37	38	39	40	41	42
n_i-частоты	2	6	13	20	25	21	13
m_i-частости	0,02	0,06	0,13	0,2	0,25	0,21	0,13

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = 1;\ \sum_{i=1}^{N} n_i = N;\ m_i = \frac{n_i}{N},\ N = 100.$$

Частоты показывают, сколько раз встречаются наблюдения, у которых значение признака X равно данной варианте.

Вариационным рядом называется ранжированный в порядке возрастания или убывания ряд вариант с соответствующими весами (частотами или частностями).

Вариационный ряд можно определить для дискретных и непрерывных величин X. В последнем случае проводят интервальную группировку ряда. Число интервалов рекомендуется брать по формуле Стерджеса: $n = 1 + 3{,}322\lg N$, $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}3221 \cdot \lg N}$, где $x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значением признака. За начало первого интервала рекомендуют брать величину $x_{\text{нач}} = x_{\min} - h/2$. Частота показывает число членов совокупности, у которых признак X принимает значения в границах интервалов.

П р и м е р

Урожайность, ц/га	(8–12)	(12–16)	(16–20)	(20–25)	(25–40)
Количество хозяйств	10	14	30	26	20
Частости	0,1	0,14	0,3	0,26	0,2

$N = 100$.

В этом случае n_i — плотность распределения, а m_i — относительная плотность распределения вариационного ряда.

Полученный вариационный ряд позволяет выявить закономерности изменчивости признака: закономерности распределения обуви по размеру проданных пар и участков — по урожайности, что сделать по первичным, несгруппированным данным оказалось затруднительно.

Наряду с понятием частот и относительных частот для описания вариационного ряда используются накопленные частоты и накопленные относительные частоты.

19.2.1. Графическое представление вариационных рядов

Представление вариационного ряда в виде таблицы не всегда удобно. Поэтому используют различные способы графического представления вариационных рядов:

- полигон частот — ломаная, соединяющая точки (x_i, n_i);
- полигон относительных частот — ломаная, соединяющая точки (x_i, m_i).

В случае непрерывного признака X целесообразно строить различные гистограммы.

Гистограмма частот содержит столбики с основанием — интервалом, высотой — плотностью вариационного ряда, деленной на величину соответствующего интервала. Площадь столбиков — число наблюдений N.

Гистограмма относительных частот содержит столбики с основанием — интервалом, высотой — относительной плотностью вариационного ряда, деленной на величину соответствующего интервала. Площадь столбиков — 1.

Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения называется функция $F_N(x)$, выражающая для каждого x долю значений параметра общего объема N, для которых рассматриваемый признак меньше x.

$$F_N(x) = \frac{n(x)}{N}, \text{ где } n(x) = \sum_{x_0 < x} n_i.$$

Вариационный ряд является статистическим аналогом (реализацией) распределения признака (случайной величины X). В этом смысле полигон или гистограмма аналогичны кривой распределения, а эмпирическая функция распределения — функции распределения случайной величины X.

Вариационный ряд содержит достаточно полную информацию об изменчивости признака X.

Средние величины характеризуют значения признака, вокруг которого концентрируются наблюдения. Наиболее распространенной среди средних величин является средняя арифметическая.

19.2.2. Средняя арифметическая вариационного ряда и ее свойства

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$

где x_i — i-я варианта, если признак X — дискретный, и середина i-го интервала, если X — непрерывный признак.

Свойства:

1. $\overline{x \pm c} = \overline{x} \pm c;$

2. $\overline{cx} = c\overline{x};$

3. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})}{N} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \overline{x}) = 0;$

4. $\overline{(x \pm y)} = \overline{x} \pm \overline{y};$

5. Если признак X разбит на группы, то тогда есть групповая и общая средние:

Середина интервала	Q_1	…	Q_j	…	Q_m
x_1 … x_i … x_n	s_{11} s_{i1} s_{n1}		s_{1j} s_{ij} s_{nj}		s_{1m} s_{im} s_{nm}
Итого	N_1		N_j		N_m
	$\overline{x}_1$		$\overline{x}_j$		$\overline{x}_m$

Здесь: s_{ij} — частота появления i-го наблюдения в j-й группе;

$N_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}$ — число наблюдений в j-й группе ($\sum_{j=1}^{m} N_j = N$);

$\overline{x}_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_i}{N_j}$ — средняя j-й группы;

$\overline{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} N_j \overline{x}_j}{N}$ — общая средняя.

Кроме средней арифметической также вычисляют моду и медиану.

Медианой вариационного ряда называется значение признака, приходящегося на середину ранжированного ряда наблюдений.

На медиану не влияют изменения крайних членов вариационного ряда. Медиана, как показатель среднего, предпочтительнее средней арифметической для ряда, у которого крайние варианты по сравнению с большими оказались чрезмерно большими или малыми.

Модой вариационного ряда называется варианта, которой соответствует наибольшая частота (модальный интервал).

Особенность моды как показателя среднего заключается в том, что она не изменяется при изменении крайних членов ряда, т. е. обладает устойчивостью к вариации признака.

Кроме средних величин для вариационного ряда рассчитывают еще показатели вариации.

19.2.3. Выборочная дисперсия и ее свойства

Дисперсией вариационного ряда называется величина

$$D_{\text{В}}(x)=\sigma^2(X)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} n_i(x_i-\overline{x})^2}{N}=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-\overline{x})^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{N}-\overline{x}^2,$$

где у нас по-прежнему x_i — i-я варианта, если признак X — дискретный, и середина i-го интервала, если X — непрерывный признак.

$\sigma_{\text{В}}(X)=\sqrt{D_{\text{В}}(X)}$ — среднеквадратичное отклонение вариационного ряда.

Свойства:

1. $D_{\text{В}}(CX)=C^2 D_{\text{В}}(X)$;

2. $D_{\text{В}}(X\pm C)=D_{\text{В}}(X)$.

Понятие групповой, межгрупповой, внутригрупповой и общей дисперсии

Допустим, что все значения признака X разбиты на ряд групп:

Середина интервала	Q_1	…	Q_j	…	Q_m
x_1	s_{11}		s_{1j}		s_{1m}
…					
x_i	s_{i1}		s_{ij}		s_{im}
…					
x_n	s_{n1}		s_{nj}		s_{nm}
Итого	N_1		N_j		N_m
	$\overline{x}_1$		$\overline{x}_j$		$\overline{x}_m$
	D_1		D_j		D_m

Здесь s_{ij} — частота появления i-го наблюдения в j-й группе;

$N_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}$ — число наблюдений в j-й группе ($\sum_{j=1}^{m} N_j = N$);

$\overline{x}_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_i}{N_j}$ — средняя j-й группы;

$D_j = \dfrac{\sum s_{ij} (x_i - \overline{x}_j)^2}{N_j}$ — групповая дисперсия, характеризует рассеяние признака X внутри j-й группы;

$D_{\text{ВГ}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} N_j D_j}{N}$ — среднеарифметическое групповых дисперсий, взвешенных по объему группы, — внутригрупповая дисперсия;

$D_{\text{МГ}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} N_j (\overline{x}_j - \overline{x})^2}{N}$ — межгрупповая дисперсия, характеризует рассеяние групповых средних вокруг общей средней;

$D_{\text{ОБЩ}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} (x_i - \overline{x})^2}{N}$ — общая дисперсия, характеризует рассеяние всей совокупности вокруг общей средней.

Утверждение. $D_{\text{ОБЩ}} = D_{\text{ВГ}} + D_{\text{МГ}}$.

Для вариационного ряда рассчитывают начальные и центральные моменты, частными случаями которых являются средняя арифметическая и дисперсия. В число таких показателей входят асимметрия и эксцесс.

19.3. Статистическое оценивание неизвестных параметров

Описательные статистики, введенные выше, являются статистическими оценками неизвестных параметров распределения Y — математического ожидания, дисперсии и т. д.

В общем случае пусть θ — какая-то характеристика генеральной совокупности, которая нас интересует (средний размер детали, средний доход семьи и др.). Значение этой характеристики мы не знаем и никогда точно не узнаем, если только не будем производить сплошное исследование. Интересующее значение этой характеристики мы можем оценить, используя имеющуюся в наличии информацию о генеральной совокупности, т. е. выборку.

Когда говорят о статистическом распределении выборки, имеют в виду вариационный ряд:

$X : x_1, \ldots, x_N$;

$n_i : n_1, \ldots, n_N$ — частоты;

$m_i : m_1, \ldots, m_N$ — частости.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = 1;\ \sum_{i=1}^{N} n_i = N;\ m_i = \frac{n_i}{N}.$$

Оценка может быть точечной или интервальной. Точечная оценка — это некоторое число. При выборке малого объема точечная оценка может довольно сильно отличаться от истинного значения параметра. По этой причине рассматривают еще и интервальные оценки. Интервальная оценка — естественно, некоторый интервал, который содержит истинное значение интересующего параметра θ с некоторой вероятностью, называемой *уровнем надежности*. Интервальные оценки определяются двумя числами — концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок (смысл этих понятий — ниже). Вначале мы рассмотрим точечные оценки, а затем интервальные.

Пусть $\hat{\theta}$ — оценка интересующего нас параметра по выборочной совокупности, т. е. по $x_1, \ldots, x_N$. Если мы повторим опыт, т. е. попробуем еще раз собрать выборку того же самого объема, то мы получим на самом деле уже другие возможные значения $x_1, \ldots, x_N$. Следовательно, построенная по новой выборке таким же образом оценка $\hat{\theta}$ будет отличаться от предыдущей оценки $\hat{\theta}$, построенной по прежней выборке. Поскольку мы не знаем, какие именно x_i попадут в текущую выборку (элементы попадают в выборку случайно — это основной принцип получения выборки), то мы не можем предсказать до получения выборки значение $\hat{\theta}$. Следовательно, мы можем интерпретировать $\hat{\theta}$ как случайную величину. Значит, у оценки $\hat{\theta}$ есть все атрибуты случайной величины — закон распределения, математическое ожидание и дисперсия.

Примеры оценок

Характеристики генеральной совокупности	Оценки характеристик генеральной совокупности
Математическое ожидание	$\hat{\theta}_1 = \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$; $\hat{\theta}_2 = \dfrac{\max\limits_{i=1,N} x_i + \min\limits_{i=1,N} x_i}{2}$
Дисперсия	Выборочная дисперсия и исправленная выборочная дисперсия
Стандартное отклонение	$\sigma = \sqrt{D}$

$\hat{\theta}$ тем точнее определяет параметр θ, чем меньше абсолютная величина разности $\left|\theta - \hat{\theta}\right|$. То есть если $\delta > 0$ и $\left|\theta - \hat{\theta}\right| > \delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценивания.

Как мы видим, по имеющейся выборке мы можем построить несколько оценок одного и того же параметра. Нас будут интересовать не все возможные оценки, а лишь оценки, обладающие определенными свойствами. Вот эти свойства.

1. **Несмещенность.** Несмещенной называют статистическую оценку $\hat{\theta}$, математическое ожидание которой равно истинному значению оцениваемого параметра, т. е. $M(\hat{\theta}) = \theta$. Оценку, которая не удовлетворяет этому свойству, называют смещенной. Смещенность оценки означает присутствие в оценке систематических ошибок (ошибок одного знака), т. е. смещенная оценка завышает или занижает истинное значение параметра.

2. **Эффективность.** Эффективной называют оценку, которая при заданном объеме выборки N имеет наименьшую возможную дисперсию. Теперь вспомним, что такое дисперсия. Эта мера разброса случайной величины вокруг среднего значения. Следовательно, у эффективной оценки разброс вокруг среднего значения

самый небольшой, т. е. возможные значения эффективной оценки в среднем лежат ближе к своему среднему значению, а если оценка не смещена — то к истинному значению оцениваемого параметра. Таким образом, эффективная несмещенная оценка обеспечивает наилучшую точность оценивания.

3. **Состоятельность.** Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если при увеличении объема выборки значения оценки стремятся по вероятности к истинному значению оцениваемого параметра.

Утверждение. Выборочное среднее $\overline{x}$ является несмещенной, эффективной и состоятельной оценкой математического ожидания исследуемого признака генеральной совокупности.

Точность оценки. Доверительный интервал. Доверительная вероятность

Как мы уже сказали выше, если $\delta > 0$ и $\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее, таким образом, положительное число δ характеризует точность оценивания. Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка $\hat{\theta}$ удовлетворяет неравенству $\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \delta$. Мы можем говорить только о вероятности, с которой данное неравенство осуществляется.

Число γ, такое, что $\gamma = P\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \delta\right)$, называется *надежностью* или *доверительной вероятностью*. Как правило, γ задается заранее из интервала (0,9; 0,99).

Пусть вероятность того, что $\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \delta$, равняется γ.

$\gamma = P\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \delta\right)$. Заменим неравенство с модулем равносильным ему двойным неравенством: $-\delta < \theta - \hat{\theta} < \delta$, или $\hat{\theta} - \delta < \theta < \hat{\theta} + \delta$, тогда $P\left(\hat{\theta} - \delta < \theta < \hat{\theta} + \delta\right) = \gamma$.

Интервал $\left(\hat{\theta} - \delta;\ \hat{\theta} + \delta\right)$ называют *доверительным интервалом* для параметра θ с уровнем надежности γ. Это интервальная оценка для параметра θ. Доверительный интервал имеет случайные концы.

Смысл следующий: вероятность того, что интервал $\left(\hat{\theta}-\delta;\ \hat{\theta}+\delta\right)$ содержит в себе (покрывает) истинное значение θ, равна γ.

Пример построения доверительных интервалов

Получение доверительного интервала для математического ожидания нормального распределения

Пусть мы рассматриваем некоторый количественный признак X генеральной совокупности, который имеет нормальное распределение с параметрами (m, σ). Требуется оценить неизвестное математическое ожидание m. Возможны два случая:

1. σ — известно.

$$X \sim N(m, \sigma),\ \text{тогда}\ \overline{x} \sim N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right).$$

Задано число γ. Необходимо найти δ.

$$\gamma = P\left(\left|\overline{x}-m\right|<\delta\right) = P\left(\overline{x}-\delta<m<\overline{x}+\delta\right) = \Phi\left(\frac{m+\delta-m}{\sigma_{\overline{x}}}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{m-\delta-m}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{\sigma}\right).$$

Заменим $u_{\text{кр}} = \dfrac{\delta\sqrt{N}}{\sigma}$, тогда $\delta = \dfrac{u_{\text{кр}}\sigma}{\sqrt{N}}$.

$$2\Phi(u_{\text{кр}}) = \gamma,\ \Phi(u_{\text{кр}}) = {}^{\gamma}\!/_{2}.$$

По заданному γ найдем $u_{\text{кр}}$ и найдем доверительный интервал:

$$\left(\overline{x}-\frac{u_{\text{кр}}\sigma}{\sqrt{N}};\ \overline{x}+\frac{u_{\text{кр}}\sigma}{\sqrt{N}}\right).$$

2. σ — неизвестно.

$x_1, \ldots, x_N$ — выборка, по этой выборке мы найдем $\overline{x}$ и s_x.

Величина $t(N-1)=\dfrac{(\overline{x}-m)\sqrt{N}}{s_X}$ распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы $N-1$. Тогда

$$\gamma = P\left(\left|\overline{x}-m\right|<\delta\right)=P\left(\left|\frac{(\overline{x}-m)\sqrt{N}}{s_X}\right|<\delta\frac{\sqrt{N}}{s_X}\right)=2\int_0^{t_\gamma}S\left(t,N\right)dt.$$

$t_\gamma=\delta\dfrac{\sqrt{N}}{s_X}$, тогда $\delta=\dfrac{t_\gamma s_X}{\sqrt{N}}$. Величину t_γ находим из таблиц распределения Стьюдента с числом степеней свободы $N-1$.

Доверительный интервал для параметра m в этом случае будет выглядеть так:

$$\left(\overline{x}-t_\gamma\frac{s_X}{\sqrt{N}};\ \overline{x}+t_\gamma\frac{s_X}{\sqrt{N}}\right).$$

Если $\gamma = 0{,}95$, $N = 15$, то $t_\gamma = 2{,}13$.

Задачи

97. В таблицах представлены результаты наблюдений.

Найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение, моду, медиану, асимметрию, эксцесс.

97.1. Урожайность зерновых культур в России в 1992–2001 гг.

Год	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Урожайность, ц/га	18,0	17,1	15,3	13,1	14,9	17,8	12,9	14,4	15,6	19,4

97.2. Число сделок на фондовой бирже за квартал, N = 400 (инвесторов).

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

97.3. Месячный доход жителя региона, руб., $N = 1000$ жителей.

x_i	Менее 500	500–1000	1000–1500	1500–2000	2000–2500	Свыше 2500
n_i	58	96	239	328	147	132

98. В таблице представлены данные о годовых доходах и расходах на личное потребление (в долларах) для 10 семей. Найти выборочную ковариацию.

Годовой доход	Расходы на личное потребление
2508	2406
2572	2464
2408	2336
2522	2281
2700	2641
2531	2385
2390	2297
2595	2416
2524	2460
2685	2448

99. Имеется монетка. Мы предполагаем, что монетка «жульническая» и «орел» выпадает в три раза чаще, чем «решка». Для проверки этой гипотезы предложена следующая процедура: бросаем монетку 3 раза и считаем, что монетка жульническая, если орел выпал 3 раза. Найти вероятность ошибок первого и второго рода.

100. Имеется равномерное распределение с неизвестным параметром k:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, x \in [0; k] \\ 0 \; x \notin [0; k] \end{cases}.$$

Нужно проверить нулевую гипотезу $H_0 : k = 1$ при альтернативной гипотезе $H_а : k = 2$.

Для проверки имеется лишь одно наблюдение x_1. Предложены два способа:

а) H_0 отвергается при $x_1 \geq \frac{1}{2}$;

б) H_0 отвергается при $1 \leq x_1 \leq 2$.

Найти вероятность ошибок первого и второго рода.

101. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

Варианта x_i	−0,5	−0,4	−0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
Частота n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание m нормально распределенного признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала. Решить задачу для надежности 0,9 и 0,99.

102. За последние 5 лет годовой рост цены актива A составлял в среднем 20 % со средним квадратическим отклонением (исправленным) 5 %. Построить доверительный интервал с вероятностью 95 % для цены актива в конце следующего года, если в начале года она равна 100 ден. ед.

103. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

Варианта x_i	−2	1	2	3	4	5
Частота n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание m нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочному среднему при помощи доверительного интервала.

104. За последние 9 лет годовой рост цены актива A составлял в среднем 22 % со средним квадратическим отклонением (исправленным) 6 %. Построить доверительный интервал с вероятностью 90 % для средней цены актива в конце следующего года, если в начале она была равна 200 ден. ед.

105. Для отрасли, включающей 1200 фирм, составлена случайная выборка из 19 фирм. По выборке оказалось, что в фирме в среднем работают $\overline{x}$ = 77,5 человека при среднем квадратичном отклонении S_x = 25 человек. Пользуясь 95 %-ным доверительным интервалом, оценить среднее число работающих в фирме по всей отрасли и общее число работающих в отрасли. Предполагается, что количество работников фирмы имеет нормальное распределение.

106. Бухгалтер компании решил предпринять выборочную проверку и выбрал 18 из 1200 компонент, продававшихся в прошлом месяце. Стоимость отобранных компонент: 82; 30; 98; 116; 80; 150; 200; 88; 70; 90; 160; 100; 86; 76; 90; 140; 76; 68 (ден. ед.). Найти оценку средней стоимости всех компонент и построить для нее доверительный интервал с надежностью 0,95.

Учебное издание

Трофимова Елена Александровна
Плотников Сергей Васильевич
Гилёв Денис Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Учебное пособие

Зав. редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Н. В. Чапаева*
Корректор *Н. В. Чапаева*
Компьютерная верстка *Н. Ю. Михайлов*

План выпуска 2015 г. Подписано в печать 05.05.2015.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 12,3. Усл. печ. л. 15,8. Тираж 100 экз. Заказ № 57.

Издательство Уральского университета
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ.
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13.
Факс: +7 (343) 358-93-06.
E-mail: press-urfu@mail.ru