Н.М. Махмеджанов

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

оқулық

$$y'+p(x)y=0$$

$$y=ce^{-\int p(x)dx}, \ c=\text{const.}$$

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Н. М. Махмеджанов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі жоғары оқу орындарының performance бейматематика мамандықтарының студенттері үшін оқулық ретінде бекіткен

Алматы
2018

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М31

Пікір жазғандар:
Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-ті іргелі
математика кафедрасының профессоры, ф.-м.ғ.д., профессор
Б.Е. Кангужин
Абай атындағы ҚазҰПУ-ті информатика және ақпараттық
технологиялар кафедрасының профессоры, ф.-м.ғ.д., профессор
А.С. Бердышев
Қазақ-британ техникалық университетінің жоғары математика кафедрасының
профессоры, ф.-м.ғ.д., профессор ***А.С. Сақабеков***
Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-ті дифференциалдық теңдеулер
және басқару теориясы кафедрасының профессоры,
ф.-м.ғ.д., профессор ***А.Б. Тұнғатаров***

Махмеджанов Н.М.
М 31 Жоғары математика. – Алматы, 2018. – 500 бет.
ISBN 978-601-04-3107-2

Оқулық жоғары оқу орындарының жаратылыстану, техника және информатика мамандықтарының студенттеріне арналған. Оқулық кредиттік технология әдісімен білім беруде кредиті көп мамандықтардың бағдарламасына негізделіп жазылған. Сондықтан оқулық технология және экономика мамандықтарының бағдарламасының мазмұнын толық қамтиды. Оқулықтың мазмұны Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі ұсынған 2005, 2008 және 2016 жылдары жарық көрген, Қазақстан Республикасының көптеген жоғары оқу орындарында қолданылып жүрген, автордың «Жоғары математика есептерінің жинағы» оқу құралында қысқаша келтірілген. Оқулықта жоғары математиканың сызықтық алгебра, жоғары алгебра, аналитикалық геометрия, математикалық талдау, дифференциялдық теңдеулер салалары қамтылған.

Студенттердің материалды терең игеруі үшін теориялық тұжырымдардан соң есептер шығарылып көрсетілген.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-601-04-3107-2

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық ретінде ұсынылып отырған бұл кітап автордың соңғы қырық жылдан артық уақыт ішінде Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің жаратылыстану, техника және технология мамандықтарының студенттеріне оқыған дәрістерінің жемісі. Оқулық математика саласында Қазақстан Республикасы жаратылыстану және техника мамандықтарының жоғары білімді мамандары үшін Мемлекеттік жалпы білім беру стандартына сәйкес келеді.

Кітаптың құрылымы көрсетілген мамандықтардың математика бойынша бағдарламасын толық қамтиды.

Кітап кіріспе және он бір тараудан тұрады: сандар және координаталар жүйелері; сызықтық алгебра; векторлық алгебра; аналитикалық геометрия; функция және оның шегі; бір айнымалды функциялардың дифференциалдық қисабы; бір айнымалды функциялардың интегралдық қисабы; бірнеше айнымалды функциялардың дифференциалдық қисабы; бірнеше айнымалды функциялардың интегралдық қисабы; қатарлар; дифференциалдық теңдеулер.

Кітаптың құрылымына ғылыми ұстазым РАН-ның академигі МГУ-дің профессоры В.А. Ильин мен А.В. Куркинаның “Высшая математика” (екі рет РФ Президентінің сыйлығын алған), МГУ-дың профессоры В.С. Шипачевтің “Высшая математика” (РФ Мемлекеттік сыйлығын алған) оқулықтарының және Я.С. Бугров пен С.М. Никольскийдің төрт бөлімнен тұратын “Высшая математика” оқулықтарының (екі дүркін РФ Мемлекеттік сыйлығын алған) әсері болды. Кітап автордың “Жоғары математика есептерінің жинағы” (2008), “Жоғары математикадан тапсырмалар жинағы” (2014) оқу құралдарымен үйлесімді етіп жазылды.

Кітапта тараулар тақырыптарға бөлінді; теоремалар, формулалар және суреттер тарау бойынша нөмірленді; анықтамалар, мысалдар, ескертулер, бөлімшелер және салдарлар тақырып бойынша нөмірленді.

Сілтемелерде тізімдегі әдебиеттің нөмірі, тарауы, параграфы көрсетілген.

Осы оқулықтың шығуына демеуші болған мектептесім, көп балалы ана Бибіжамал Мәліққызына ризашылық пен көптен-көп алғысымды білдіремін.

Оқулыққа жанашыр болып, жарыққа шығуына тікелей көмек көрсеткені үшін ҚҒА-ның академигі Қалимолдаев Мақсат Нұрәділұлына ерекше алғысымды айтамын.

Кітаптың сапасын арттыру мақсатында берілетін әрбір кеңес пен ұсынысты үлкен ризашылықпен қабылдаймын.

Автор

КІРІСПЕ

Математика – нақты дүниенің кеңістіктік пішіндері мен сандық қатынастары туралы ғылым. Математика атауы гректің *mathema* – білім деген сөзінен шыққан. Уақыт өткен сайын математика үйренетін кеңістіктік пішіндер мен сандық қатынастар үзіліссіз кеңеюде, сондықтан берілген анықтаманы кең мағынада түсіну керек. Кеңістіктік пішіндері негізінен геометрия (грек тілінен аударғанда гео – жер, метрия – өлшеу) ғылымы, ал сандық қатынастарды арифметика, алгебра (арабтың "аль-джабр" – теңдіктің теріс мүшелерін бір бөлігінен басқа бөлігіне өткізу), математикалық талдау, есептеу математикасы және соңғы кезде пайда болған көптеген салалар зерттейді.

Математиканың дамуын шартты түрде төрт кезеңге бөлуге болады: алғашқы ұғымдардың пайда болуы (сан, қарапайым геометриялық пішіндер) және көптеген деректердің жиынтығының қалыптасуы; элементар математика; айнымал шамалардың математикасы; есептеу математикасы мен есептеу техникасына негізделген қазіргі заман математикасы.

Адамзаттың іс-тәжірибе қызметінде және шаруашылық мәселелері негізінде жинақталған *деректер* математиканың өзінше ерекше ғылым екендігін түсінуге әсер етті. Бұл элементар математиканың бастапқы кезеңі еді және ежелгі Грекияда жаңа эраға дейін VI–V ғасырларда қалыптасты. Уақыт өте математика ғылым ретінде сапалы түрде жетіле түсті. Элементар математика дәуірі басталды.

Әдетте элементар математика деп элементар арифметика, ежелгі Грекияның ұлы геометрі Евклидтің еңбектерінде толық қамтылған элементар геометрия, Индия, Аравия, Орта Азия (Әл-Хорезми, Әл-Фараби) математиктерінің жетістіктерін ары қарай жалғастырып дамытқан Еуропа математиктерінің еңбектерінде, XVI ғасырда негізінен аяқталған элементар алгебра түсініледі. Элементар математика негізінен тек тұрақты шамаларды зерттейді.

Демек элементар математика үнемі өзгерістегі материалдық дүниенің күрделі заңдарын, бір-бірімен өзара алуан түрлі және жан-жақты байланыста өтіп жататын құбылыстарын зерттеудің қуатты құралы бола алмайды.

XVII ғасырда жаратылыстану мен техника талаптары қозғалысты математикалық тұрғыдан айнымал шамалардың өзгеру процесін, геометриялық фигураларды түрлендіруді үйрену мақсатында жаңа әдістер құруға алып келді. Әмбебап Декарт координаталар әдісі негізінде аналитикалық геометрияның пайда болуы, геометриялық мәселелерді алгебра және математикалық талдау тіліне көшіруге және, керісінше, алгебра және аналитикалық деректерді геометриялық тұрғыдан түсіндіруге мүмкіндік берді.

Айнымал шамаларды аналитикалық геометрияда қолдану, дифференциалдық және интегралдық қисаптардың құрылуымен айнымал шамалардың математикасының кезеңі басталды. Бұл кезеңде бұрынғы тұрақты шамалар мен сандар орнына негізгі ұғым ретінде функция ұғымы алынды. Функцияны үйрену математикалық талдаудың негізгі ұғымдарына алып келді: шек, туынды, дифференциал және интеграл.

Математиканың өзінің іштей дамуы, ғылым мен техниканың әртүрлі салаларын "математикаландыру", математикалық әдістердің көптеген іс-тәжрибе жұмыстарына енуі және есептеуші математика мен дискреттік математика негізінде жүзеге келген есептеуші техниканың дамуы қазіргі заман математикасының іргетасы болып табылады.

Бұлар негізінде жаңа математикалық пәндер – операцияларды зерттеу, ойындар теориясы, математикалық экономика және т.б. дүниеге келді.

Математикада жаңа теориялар тек жаратылыстану, техника және экономиканың қажеттілігінен ғана емес, математиканың өзінің ішкі қажеттілігінен де пайда болады. Мысалы, Лобачевский геометриясы.

Жалпы әлем екі құрылымнан тұрады: макроәлем, микроәлем. Макроәлемнің негізінде үзіліссіздік принципі жатады. Яғни макроәлемдік нәрсе үзіліссіз қозғалыста болады және оның орнын, жылдамдығын дәл анықтауға болады. Микроәлем негізінде анықталмағандық принципі жатады, яғни элементар бөлікше қозғалыста болғанда оның орны белгілі болса, жылдамдығы белгісіз, ал жылдамдығы белгілі болса, орны белгісіз болады. Сондықтан микроәлемдегі құбылыстар жалпыланған функция ұғымы негізінде зерттеледі.

Математикалық теорияны құрудың негізінде аксиоматикалық әдіс жатады. Мұнда теорияның іргесіне ақиқат ретінде бастапқы ережелер жүйесі – аксиомалар дәлелсіз қабылданады. Ал теорияның тұжырымдары осы аксиомалардың логикалық нәтижесі ретінде алынады. Мысалы, Евклид геометриясында теорияның негізгі мазмұны ақиқаттығы айқын бірнеше аксиомалардың негізінде дедуктивтік жолмен алынған.

Математикада ой қортындылаудың екі түрі бар: дедукция, индукция.

Дедукцияда жалпы тұжырым негізінде нақты дербес жағдай үшін ой қортындыланады, ал индукцияда дербес жағдайлардан жалпы ой тұжырымдалады. Соңғы жағдайда математикалық индукция принципі қолданылады: егер $A(1)$ дұрыс болып, кезкелген $n \in N$ үшін $A(n)$ тұжырымның дұрыстығынан $A(n+1)$ тұжырым да дұрыс болса, онда $A(n)$ тұжырымның дұрыстығы дәлелденген болады.

Математикалық зерттеудің негізгі әдісі – математикалық дәлелдеу, яғни формальдық логиканың заңдарына сүйеніп, қатаң логикалық тұжырымдау.

Математикалық тұжырымдарды дәлелдегенде қажетті және жеткілікті шарттар кеңінен қолданылады. Қажетті шарттар орындалмаса, қарастырылатын T тұжырым дұрыс емес, ал жеткілікті шарттар орындалса T тұжырым дұрыс. Демек, жеткілікті шарттар қажетті шарттардың бөлігі.

Математикада құбылыстардың математикалық модельдері зерттеледі. Бір математикалық модель әртүрлі құбылыстарды бейнелеуі мүмкін. Өйткені математикада қарастырылатын құбылыстардың табиғаты емес, олардың құраушыларының арасындағы қатынастар маңызды. Мысалы, бүкіл әлемдік тартылыс заңы мен Кулон заңы бірдей математикалық өрнекпен өрнектеледі.

Математиканы оқытудың мақсатттары: белгілі бір деңгейде білім алу; үйренген математикалық әдістерді қолдана білу; математикалық ойлау жүйесі интуицияны дамыту; математикалық мәдениетті тәрбиелеу.

Қазіргі ғылыми-техникалық революция дәуірі – ғылым, техника, экономика және басқаруды математикаландыру дәуірі.

Қазіргі заманғы ғылыми қызметкер, инженер немесе экономист математиканың негіздерін біліп қана қоймай, ол өз саласында қолданылатын зерттеудің математикалық әдістерін терең игеруі керек.

Әрбір ғылым өзінің шыңына математиканы қолданғанда ғана жете алады.

I тарау. ЖИЫНДАР, САНДАР ЖӘНЕ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕЛЕРІ

§ 1. Жиындар және оларға қолданылатын амалдар.

1.1. Жиын ұғымы басқа жай ұғымдар арқылы анықтауға келмейтін математикалық ең алғашқы қарапайым ұғымдарының бірі. Сондықтан оған анықтама берілмейді.

Жиын деп белгілі қасиеттері бойынша дәл анықталған, табиғаты әртүрлі нәрселер (объектілер) топтамасы түсініледі. Жиынды құрайтын нәрселер (объектілер) жиынның элементтері немесе нүктелері деп аталады. Жиын латын алфавитінің бас әріптерімен $A, B, C, X, Y, ...,$ ал элементтері жазба әріптерімен $a, b, c, x, y, ...$ белгіленді.

Жиындар екі негізгі тәсілмен беріледі:

а) A жиынының барлық элементтері тізімделеді де, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ түрінде жазылады.

Мысалы, 1-ден 5-ке дейінгі натурал сандар жиыны $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

б) A жиыны негізгі жиын X-тің $\alpha(x)$ қасиетке ие болушы элементтерімен анықталады да,

$A = \{\, x \in X \mid \alpha(x)\}$ түрінде жазылады.

Мысалдар: 1) аудиториядағы студенттер жиыны; 2) университеттегі қызметкерлер жиыны; 3) N натурал сандар жиыны, 4) Z бүтін сандар жиыны; 5) $x^2 + 1 = 0$ теңдеуінің натурал шешімдерінің жиыны.

Жиындар элементтерінің санына қарай ақырлы, ақырсыз және бос жиындар болып үш түрге бөлінеді.

1) және 2) жиындар – ақырлы, 3) және 4) жиындар – ақырсыз; 5) бос жиын.

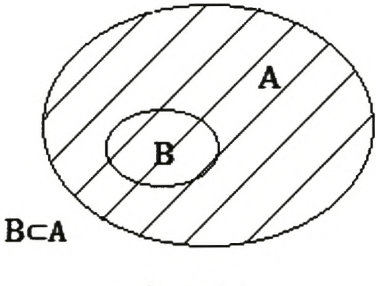
Егер x элементі A жиынның элементі болса, оны A жиынына жатады (тиісті) деп, $x \in A$ түрінде жазады; ал у элементі A жиында жатпаса, $y \notin A$ немесе $y \overline{\in} A$ деп жазады.

Мысалы, $A = \{x \in N | 1 < x < 3\} = \{2\}$.

Бірде-бір элементі жоқ жиынды бос (құр) жиын деп атайды және $\emptyset$ таңбасымен белгілейді.

A және B жиындары берілсін.

Анықтама 1.1. Егер A жиынының әрбір элементі B жиынының да элементі болса, онда A жиыны B жиынының ішжиыны деп аталады да $A \subset B$ немесе $B \supset A$ деп жазылады. $\emptyset$ бос жиын кез келген жиынның ішжиыны болады, ал A жиыны өзінің ішжиыны болады (сурет 1.1).



Сурет 1.1

Мысал 1.1. $A = \{a_1; a_2; a_3\}$ жиынының барлық ішжиындарын жазыңыз.

Шешуі. Алдымен бір элементті ішжиындарды, содан соң екі элементті ішжиындарды, әрі бос жиын мен А жиынының өзін жазамыз: $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}$, $\{a_1; a_2\}$, $\{a_1, a_3\}, \{a_2; a_3\}$, $\emptyset$, $\{a_1; a_2; a_3\}$.

Анықтама 1.2. A және B жиындарының арасында $A \subset B, B \subset A$ ара қатыстары орындалса, бұл жиындарды өзара тең жиындар деп атайды және $A = B$ деп жазады.

Мысалы $A = \{x \in N | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ мен $B = \{x \in N | x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$ жиындары өзара тең, себебі $A = B = \{1; 2\}$.

Анықтама 1.3. A және B жиындарының кемінде біреуінде жататын элементтерден құралған жиынды олардың бірігуі (қосындысы) деп атайды және $A \cup B$ таңбасымен белгілейді (сурет 1.2).

Мысалы 1.2. $A = \{a; b; c\}$, $B = \{b; c; x\}$ және $C = \{b;\ x;\ y\}$ болса, онда $A \cup B = \{a; b; c; x\}, A \cup C = \{a; b; c; x; y\}, B \cup C = \{b; c; x; y\}$.

Анықтама 1.4. A мен B жиындарының ортақ элементтерінен құралған жиынды олардың қиылысуы (көбейтіндісі) деп атайды және $A \cap B$ таңбасымен белгілейді (сурет 1.3).

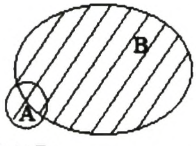
Мысалы 1.3. $A = \{a; b; c\}, B = \{b; c; x\}$ және $C = \{x; y; z\}$ болса, онда $A \cap B = \{b; c\}, A \cap C = \{\emptyset\}, B \cap C = \{x\}$.

Ескерту 1.1. 1.3 және 1.4 анықтамаларды саны екіден көп жиындарға да қолдануға болады.

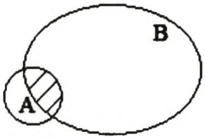
Анықтама 1.5. A жиынының B жиынында жатпайтын элементтерінен құралған жиынды A мен B жиындарының айырмасы деп атайды да $A \backslash B$ (немесе A-B) түрінде жазады (сурет 1.4а). Осы сияқты $B \backslash A$ жиын да анықталады (сурет 1.4б).

Мысалы, $A = \{a; b; c; d\}$. $B = \{c; d; e\}$ болса, онда $A \backslash B = \{a; b\}$, $B \backslash A = \{e\}$.

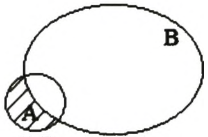
Анықтама 1.6. A жиынының S жиынына сәйкес, $A \subset S$, толықтырушы жиыны деп $\bar{A} = S \backslash A$ жиынды айтады (сурет 1.5).



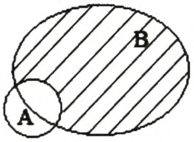
$A \cup B$ Сурет 1.2



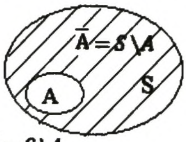
$A \cap B$ Сурет 1.3



$A \backslash B$ Сурет 1.4а



$B \backslash A$ Сурет 1.4б



$\bar{A} = S \backslash A$

Сурет 1.5

Анықтама 1.7. Егер A жиынының кез келген элементіне B жиынының бір ғана элементін және, керісінше, B жиынының әр элементіне A жиынының бір ғана элементін сәйкестендіру мүмкін болса, онда A мен B жиындарының арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнатылған дейді.

Осындай сәйкестік орнатылған ережені немесе заңды өзара бір мәнді сәйкестік деп атайды.

Ақырлы жиынның қуаты деп оның элементтерінің санын айтады.

Анықтама 1.8. Егер A мен B жиындарының арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнату мүмкін болса, онда A және B жиындарын эквивалент немесе қуаттас (қуаттары бірдей) жиындар деп атайды және $A \sim B$ түрінде белгілейді.

Мысал 1.4. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ қуаттары 3-ке тең эквивалент жиындар $a_1 \to b_1, a_2 \leftrightarrow b_2, a_3 \leftrightarrow b_3$.

1.2. Логикалық таңбалар

Математикадағы жиі кездесетін кейбір сөздер мен сөз тіркестерін квантор, деп аталатын таңбалармен белгілеу өте ыңғайлы және тиімді.

1) "Кез келген", "барлық", "әрбір" қандайда болмасын" деген сөз тіркестері математикада бір мағынада қолданылады да $\forall$ (жалпылық) таңбасымен белгіленеді;

2) "табылады", "белгілі бір", "әрқашанда бар" сөз тіркестерін бір мағынада қолданады да, $\exists$ (бар болу) таңбасымен белгілейді;

3) "шығады", "болады", "орындалады" деген сөздерді $\Rightarrow$ таңбасымен белгілейді;

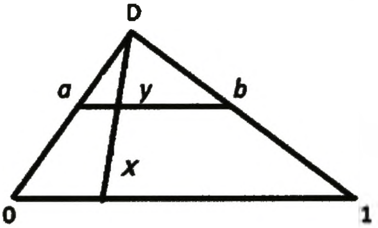
4) экваваленттi немесе пара-пар деген сөздерді $\Leftrightarrow$ не $\sim$ таңбаларымен белгілейді.

Осы логикалық таңбалар арқылы математикалық сөйлемдерді ықшамдап жазуға болады. Мысалы $(\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall\, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$ жазуы былайша оқылады: кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, x -тің x_0-ге тең емес, $|x - x_0| < \delta$ теңсіздікті қанағаттандырушы барлық мәндері үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

Анықтама 1.9. Элементтер саны ақырсыз болған жиын ақырсыз жиын деп аталады.

Мысал 1.5. а) $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ натурал сандар жиыны, б) $X=[a; b]$ кесіндінің нүктелер жиыны ақырсыз жиындар.

Ақырсыз жиынның ерекше қасиеті, ол өзінің кейбір ішжиынына эквивалент (қуаттас) болады.



Сурет 1.6

Мысал 1.6. $X = [0; 1]$ мен $Y = [a; b]$ жиындары эквивалент екендігі $y = a + (b - a)x$ сәйкестік арқылы орнатылады. Шынында да $x = 0$ болғанда $y = a$, ал $x = 1$ болғанда $y = b$.

Демек [0; 1] кесінді мен кез келген $[a; b]$ кесіндінің нүктелері арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатуға болады. Бұл сәйкестікті шартты түрде сурет 1.6-дан көруге болады: $X \leftrightarrow Y$.

§ 2. Нақты сандар және олардың негізгі қасиеттері

2.1. Сандар жиындары. Нақты сандар

2.1. Санау қажеттілігінен пайда болған 1; 2; 3 ... сандары натурал сандар деп аталады.

$N = \{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n;\ ...\}$ натурал сандар жиынында қосу және көбейту амалдарын орындауға болады. Ал азайту мен бөлу (нөлге тең емес санға) амалдарын, барлық уақытта орындауға болмайды. Мысалы, 3–5, 3/5 сандары натурал сандар емес.

N натурал жиынды кеңейткенде пайда болған

$Z = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ бүтін сандар жиынында қосу, азайту, көбейту амалдарын орындауға болады, бірақ бөлу амалын орындауға болмайды. Z_0 теріс емес бүтін сандар жиыны

Z жиынды кеңейтуден пайда болған $Q = \left\{\frac{p}{q}; p; q \in z, q \neq 0\right\}$ рационал сандар жиынында қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдарын орындауға болады. Кез келген p/q рационал санды бүтін сан, немесе ақырлы және ақырсыз периодты ондық бөлшек түрінде жазуға болады. Мысалы, 10/5=2, 1/4=0,25, 4/3=1,333=1,(3). Егер бүтін сан мен ақырлы ондық бөлшекті периоды нөлге тең болған ақырсыз ондық бөлшек деп қарастырсақ, онда рационал сандар жиыны - ақырсыз периодты ондық бөлшектер жиыны болады.

Әртүрлі геометриялық және физикалық шамаларды өлшеу, түбір табу, логарифмдерді есептеу, алгебралық теңдеулерді шешу қажеттілігі иррационал (рационал болмаған) сандарды енгізуге себепші болды.

Ақырсыз периодсыз ондық бөлшек түрінде *жазылатын* сандарды иррационал сандар дейді.

Барлық рационал сандар мен иррационал сандардан құралған жиынды нақты сандар жиыны деп атайды. Нақты сандар $\{\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots\}$, $a_j = \overline{0{,}9}, j \in Z_0\}$ түрінде жазылады.

Анықтама 2.1. Барлық ақырсыз ондық бөлшектер жиынын нақты сандар жиыны деп атайды.

Нақты сандар жиынын R әрпімен белгілейді. Аталған жиындар бір-бірінің ішжиыны болатынын былайша жазып көрсетуге болады:

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R.$$

Мысал 2.1. $0{,}2020020002\underbrace{000\ldots0}_{n\ \text{нөл}}2000\ldots02\ldots$ саны иррационал сан екендігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Шынында n-ші екі мен $(n + 1)$-ші екінің арасында n нөл бар, ал $(n + 1)$-ші екі мен $(n + 2)$-ші екінің арасында $n + 1$ нөл бар. Сондықтан, бұл периодты бөлшек бола алмайды, демек, берілген сан иррационал сан.

Мысал 2.2. $\sqrt{2}$ саны иррационал сан екендігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Керісінше ұйғарайық, яғни $\sqrt{2}$ рационал сан болсын. Онда оны қысқармайтын p/q бөлшек түрінде жазуға болады: $\sqrt{2} = {}^{p}/_{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ Бұдан p^2 жұп сан екендігі шығады. Жұп сан тек жұп санның квадраты болғандықтан p жұп сан, яғни $p = 2p_1$, деп жазуға болады.

Осы мәнді соңғы теңдіктегі p ның орнына қойсақ; $(2p_1)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p_1^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p_1^2 = q^2$. Яғни, q да жұп сан, $q = 2q_1$. Демек, p саны да, q саны да жұп сан болды.

Онда, $p/q = 2p' /2q'$ болып қысқарылатын бөлшек шықты. Бұл тұжырым ұйғаруымызға қайшы. Сондықтан $\sqrt{2}$ - иррационал сан. $\sqrt{2} = 1,41421356...$

Мысал 2.3. $\log_2 5$ иррационал сан екендігін дәлелдеу керек.

Шешуі. $\log_2 5 > 1$ рационал сан деп ұйғарайық, яғни $\log_2 5 = p/q \Rightarrow 2^{p/q} = 5 \Rightarrow 2^p = 5^q$ Соңғы теңдіктің болуы мүмкін емес, себебі 2^p – жұп сан, ал 5^q тақ сан. Сондықтан, ұйғаруымыз дұрыс емес. Демек, $\log_2 5$ иррационал сан.

Мысал 2.4. Периодты ондық бөлшекті жай бөлшекке айналдыру керек: а) 2,363636... = 2,(36); б) 3,24545 ... = 3,2(45).

Шешуі. а) 2,(36) санында бөлшектің периоды бүтін бөлігінен кейін бірден басталып тұр (таза периодты бөлшек). Сондықтан, бөлшектің бүтін бөлігін 2-ні қалдырып, ал бөлшек бөлігін алымы 36 периодтан тұратын, бөлімі периодында екі цифр болғандықтан, екі тоғыздан тұратын жай бөлшекпен алмастырылады:

$$2{,}363636... = 2(36) = 2\frac{36}{99} = 2\frac{4}{11}.$$

б) 3,2(45) саны аралас периодты бөлшек. Сондықтан бөлшектің бүтін бөлігі 3-ті қалдырып, ал бөлшек бөлігін алымы үтірден кейінгі екінші периодқа дейінгі 245 саны мен үтірден кейінгі бірінші периодқа дейінгі 2 санының айырымынан тұратын, бөлімі периодында екі цифр болғандықтан екі тоғыздан және үтірден кейінгі бірінші периодға дейінгі 2 саны бір цифр болғандықтан бір нольден тұратын жай бөлшекпен алмастырылады:

$$3{,}24545... = 3{,}2(45) = 3\frac{245-2}{990} = 3\frac{243}{990}.$$

2.2. Нақты сандар жиынының негізгі қасиеттері

1. Кез келген x және y нақты сандарының қосындысы $(x + y)$, айырымы $(x - y)$, көбейтіндісі $(x \cdot y)$, қатынасы $\left(\frac{x}{y}, y \neq 0\right)$ нақты сан болады.

2. Кез келген x және y нақты сандарының арасында $x > y$ (x үлкен y), немесе $x < y$ (x кіші y) немесе $x = y$ (x тең y) қатынастардың біреуі ғана орындалады. Демек, нақты сандар жиыны реттелген жиын.

$a < b, a \leq b, a > b, a \geq b$ қатынастар теңсіздіктер деп аталады. $a < b, a > b$ теңсіздіктері қатаң теңсіздіктер деп аталады. $a > 0$ оң сан, $a < 0$ – теріс сан деп аталады.

3. Егер X пен Y нақты сандар жиыны болса және кез келген $x \in X, y \in Y$ нақты сандар үшін $x \leq y$ теңсіздігі орындалса, онда ең болмағанда бір c саны табылып, $x \leq c \leq y$ теңсіздіктер орындалады.

Бұл қасиетті нақты сандардың үзіліссіздік қасиеті дейді.

Ескеретін жағдай, үзіліссіздік қасиеті нақты сандар жиынында орындалады, ал рационал сандар жиынында орындалмайды. Шынында да, X

жиыны 2-ден кіші рационал сандар, ал Y жиыны $\sqrt{2}$ -ден үлкен рационал сандар жиыны болса, яғни $X = \{x \in Q \mid x <\sqrt{2}\}$, $Y = \{x \in Q \mid x >\sqrt{2}\}$, онда кез келген $x \in X$, $y \in Y$ рационал сандар үшін $x \leq y$ теңсіздігі орындалады. Бірақ $x \leq c \leq y$ теңсіздіктері орындалатын с рационал саны табылмайды, өйткені мұндай сан тек $\sqrt{2}$, ал бұл сан иррационал сан.

Осы негізгі үш қасиеттен нақты сандардың басқа қасиеттері шығады.

2.3 Сандық жиындардың шекаралары

$X = \{ x \} \subset R$ нақты сандардан құралған кез келген жиын болсын.

Анықтама 2.1. Егер кез келген $x \in X$ үшін $x \leq M$ $(x \geq m)$ теңсіздігі орындалса, онда X жоғарыдан (төменнен) шенелген жиын, ал M саны (m саны) оның жоғарғы (төменгі) шекарасы деп аталады.

Егер X жоғарыдан да, төменнен де шенелген жиын болса, онда ол шенелген жиын деп аталады.

Егер X жоғарыдан да төменнен де шенелмесе ол шенелмеген жиын деп аталады.

Мысал 2.5. $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ төменнен шенелген жиын, төменгі шекарасы 1, бірақ жоғарыдан шенелмеген.

Мысал 2.6. Теріс бүтін сандар жиыны жоғарыдан шенелген жиын, жоғарғы шекарасы - 1, бірақ төменнен шенелмеген.

Мысал 2.7. R нақты сандар жиыны шенелмеген жиын.

R жиыны жоғарыдан (төменнен) шенелген болса оның ақырсыз көп жоғарғы (төменгі) шегаралары болады, себебі M (m) жоғарғы (төменгі) шекарасы болса, одан үлкен (кіші) сандардың барлығы да жоғарғы (төменгі) шекара болады.

Анықтама 2.3. X жиынының жоғарғы шекаралар (төменгі шекаралар) жиынының ең кіші (ең үлкен) элементі X жиынының дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекарасы деп аталады және Sup$X$ (inf X) деп белгіленеді.

(Supremum (лат) ең жоғарғы, infinum (лат) ең төменгі) Sup$X$ пен inf$X$ сандары X жиынға кіруі де, кірмеуі де мүмкін.

Егер X жиын жоғарыдан (төменнен) шенелмесе, онда $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$ деп жазылады.

Мысалы, $X = [a, b)$ жиын үшін $\text{Sup}X = b$, $\inf X = a$, мұнда $\inf X \in X$, $\text{Sup}X \notin X$; ал $X = (a, +\infty)$ жиын үшін $\inf X = a$, Sup$X$ жоқ; мұнда $\inf X = a \notin X$.

Sup$X$ (inf$X$) мынадай маңызды қасиетке ие: әрқандай кішкене $\varepsilon > 0$ саны үшін $x \in X$ саны табылып, $x > \text{Sup}X - \varepsilon$ $(x < \inf X + \varepsilon)$ теңсіздік орындалады. Шынында да мұндай x табылмаса, онда $\text{Sup}X - \varepsilon$ $(\inf X + \varepsilon)$ шама да дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекара болар еді. Онда Sup$X$ (inf$X$) дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекара бола алмас еді.

Әрқандай жоғарыдан (төменнен) шенелген жиынның дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекарасы бар ма деген сұраққа келесі теорема жауап береді.

Теорема 1.1. Әрқандай бос емес жоғарыдан (төменнен) шенелген жиынның дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекарасы бар.

Дәлелдеуі. X – бос емес жоғарыдан шенелген жиын болсын. Онда X жиынды жоғарыдан шенеуші Y сандар жиыны бос емес. Дәл жоғарғы шекараның анықтамасы бойынша әрқандай $x \in X$ және әрқандай $y \in Y$ үшін $x \leq y$ теңсіздігі орындалады. Нақты сандар жиынның үзіліссіздік қасиеті бойынша c саны табылып $x \leq c \leq y$ теңсіздіктері орындалады. $x \leq c$ теңсіздіктен c саны X жиынның жоғарғы шекарасы, ал $c \leq y$ теңсіздіктен жоғарғы шекаралардың ең кішісі екендігі шығады. Дәл төменгі шекараның бар болуы да осы сияқты дәлелденеді.

2.4. Нақты сандардың геометриялық кескіні

Кез келген түзуде екі қарама-қарсы бағытты көрсетуге болады. Бағыты таңдалған түзу ось деп аталады.

Осьтегі бастапқы A нүктесі және соңғы B нүктесі көрсетілген кесіндіні бағытталған кесінді деп атайды және $\overline{AB}$ немесе $\overline{AB}$ деп белгілейді.

$\overline{AB}$ бағытталған кесіндінің ұзындығы $|\overline{AB}|$ немесе $|AB|$ түрінде белгіленеді.

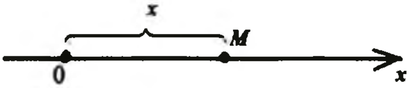
$\overline{AB}$ бағытталған кесіндінің AB шамасы деп, $\overline{AB}$ мен осьтің бағыттары бірдей болса $|\overline{AB}|$-ға тең, ал $\overline{AB}$ мен ось бағыттары қарама қарсы болса, $-|\overline{AB}|$-ға тең санды айтады.

$\overline{AB}$ мен $\overline{BA}$ бағытталған кесінділердің шамаларының таңбалары қарама-қарсы болады: $AB = -BA$.

A мен B нүктелері дәлме-дәл келсе $AB = 0$ болады.

Берілген түзуде оң бағыт, бас нүкте O және (өлшем) масштаб бірлігі таңдалса, ол түзуді координата түзуі (координата осі немесе сандық ось) деп атайды.

Осы түзудің M кез келген нүктесі болсын. M нүктеге $\overline{OM}$ бағытталған кесіндінің шамасы $OM = x$ болатын x санды сәйкес қоямыз.



Сурет 1.7

x саны M нүктесінің координатасы деп аталады және $M(x)$ деп жазылады.

Демек, координата түзуінің кез келген M нүктесіне оның координатасы болатын x нақты сан сәйкес келеді.

Керісінше, әрбір x нақты санға координаталық түзуде координасы x болатын M нүктесі сәйкес келеді. Сонымен нақты сандарды кеоординаталық түзудің нүктелерімен бір мәнді кескіндеуге болады (сурет 1.7).

X жиынында ең үлкен M (ең кіші m) саны бар болса, онда M санын (m санын) X жиынының ең үлкен элементі (ең кіші элементі) деп атайды да

$$M = \max X = \max_{x \in X}\{x\} (m = \min X = \min_{x \in X}\{x\})$$

арқылы белгілейді.

Нақты сандардың жиі қолданылатын кейбір жиындарын келтірейік.

1. $X_1 = [a, b] = \{x \in R |\ a \leq x \leq b\}$ сегмент (кесінді); a мен b сегменттің (кесіндінің) шеткі нүктелері немесе ұштары;

$\forall x$, $a \leq x \leq b$ сегменттің ішкі нүктелері. $\max X_1 = \operatorname{Sup} X_1 = b$, $\min X_1 = \inf X_1 = a$.

2. $X_2 = [a; b)=\{x \in R \mid a \leq x < b\}$ - жарты сегмент,

$\min X_2 = \inf X_2 = a$, $\max X_2$ - жоқ, $\operatorname{Sup} X_2 = b$.

$X_3 = (a; b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$ - жарты сегмент.

$\min X_3$ - жоқ, $\inf X_3 = a$, $\max X_3 = b$. $\operatorname{Sup} X_3 = b$.

3. $X_4 = (a; b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ - интервал.

$\min X_4$ - жоқ, $\inf X_4 = a$, $\max X_4$ - жоқ, $\operatorname{Sup} X_4 = b$. $x \in R$

4. $O(c) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, мұндағы $\varepsilon > 0$; c нүктесінің ε маңайы.

5. $Y_1 = (-\infty, +\infty) =\{x \in R \mid -\infty < x < \infty\}$ - сандық түзу, ақырсыз түзу.

$\min Y_1$ - жоқ, $\inf Y_1$ - жоқ, $\max Y_1$ - жоқ, $\operatorname{Sup} Y_1$ - жоқ.

6. $Y_2 = [a, +\infty)=\{x \in R \mid a \leq x < +\infty\}$ - жарты түзу.

$\min Y_2 = \inf Y_2 = a$, $\max Y_2$ - жоқ, $\operatorname{Sup} Y_2$ - жоқ.

$Y_3 = (-\infty, b]= \{x \mid R \mid - \infty< x \leq b\}$ - жарты түзу.

$\min Y_3$ - жоқ, $\inf Y_3$ - жоқ, $\max Y_3 = \operatorname{Sup} Y_3 = b$.

7. $Y_4 = (a, +\infty) = \{x \in R \mid a < x < +\infty\}$ - ашық жарты түзу.

$\min Y_4$ - жоқ, $\inf Y_4 = a$; $\max Y_4$ - жоқ, $\operatorname{Sup} Y_4$ - жоқ.

$Y_5 = (-\infty, b) = \{x \in R \mid - \infty< x < b\}$ ашық жарты түзу.

$\min Y_5$ - жоқ, $\inf Y_5$ - жоқ, $\max Y_5$ - жоқ, $\operatorname{Sup} Y_5 = b$.

Бұл жиындардың барлығы аралықтар деп аталады.

2.5. Санның абсолют шамасы

Анықтама 2.4. Нақты сан x-тің абсолют шамасы (немесе модулі) $|x|$ деп

$$|x| = \begin{cases} x, \text{егер } x \geq 0 \text{ болса,} \\ -x, \text{егер } x < 0 \text{ болса} \end{cases}$$

болатын теріс емес нақты санды атайды.

Анықтамадан санның абсолют шамасының бірнеше қасиеттері шығады.

1°. $|x| = |-x|$. Шынында да: 1) егер $x \geq 0$ болса, $-x \leq 0$ болады, онда $|-x|= -(-x) = x = |x|$; 2) егер $x < 0$ болса, $-x > 0$ болады, онда $|-x|= -x = |x|$, себебі $x < 0$. 1) және 2) жағдайлардан $|x| =|-x|$ екендігі шығады.

2° $-|x| \leq x \leq |x|$. Шынында да: 1) егер $x \geq 0$ болса, $|x| = x$ және $-x \leq 0$ болады. Осыдан $-|x| = x$. $x < 0$ болғандықтан $2x < 0$ немесе $x + x < 0$, бұдан $x < -x$, яғни $x < |x|$. Демек, $-|x| =x < |x|$. 1) және 2) жағдайлардан $-|x| \leq x \leq |x|$ екендігі шығады.

3°. $\varepsilon > 0$ болғанда, $|x| \leq \varepsilon$ мен $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ теңсіздіктері пара-пар.

Дәлелдеуі. $|x| \leq \varepsilon$ болсын. Онда: 1) егер $x \geq 0$ болса, $|x|= x$. Яғни $x \leq \varepsilon$ болады, осыдан $0 \leq x \leq \varepsilon$; 2) егер $x < 0$ болса, $|x| = -x$. Демек $-x \leq \varepsilon$, осыдан $-\varepsilon \leq x \leq 0$.

1) және 2) жағдайларды біріктірсек, $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ екендігі шығады.

$-\varepsilon \le x \le \varepsilon$ болсын. Онда $x \ge -\varepsilon$ және $x \le \varepsilon$ теңсіздіктері бір мезгілде орындалады. $x \ge -\varepsilon$ теңсіздіктен $-x \le \varepsilon$.

Анықтама бойынша $|x|$ не x-қа, немесе $-x$-қа тең болғандықтан $|x| \le \varepsilon$ теңсіздігі шығады.

4° $|x + y| \le |x| + |y|$.

Дәлелдеуі. x және y кез келген нақты сандар болсын. 2° қасиет бойынша, бұл сандар үшін $-|x| \le x \le |x|$ және $-|y| \le y \le |y|$ теңсіздіктері орындалады. Бұл теңсіздіктерді мүшелеп қосса $-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$ қос теңсіздік шығады. 3° қасиет бойынша $|x + y| \le |x| + |y|$.

4° қасиеттен $|x - y| \le |x| + |y|$ теңсіздігі тікелей шығады.

5° $|x - y| \ge |x| - |y|$.

Дәлелдеуі. Кез келген x, y нақты сандары үшін $x = y + (x - y)$ теңдігі орындалады. 4° қасиет бойынша $|x| \le |y| + |x - y|$. Осыдан $|x - y| \ge |x| - |y|$.

5° қасиеттен $|x + y| \ge |x| - |y|$ теңсіздігі шығады.

6° $|x \cdot y| = |x| \ |y|$.

7° $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, егер $y \neq 0$ болса.

6° және 7° қасиеттер анықтама бойынша оңай тексеріледі.

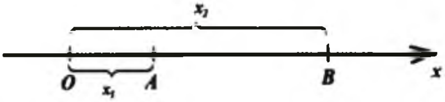
§ 3. Координаталар жүйелері

Координаталар жүйесі нүкте орнын реттелген сандар жиынтығымен анықтап, сызықтар мен беттерді алгебралық теңдеулермен өрнектеу арқылы үйренуге мүмкіндік беретін құрал.

3.1. Түзудегі декарт координаталар жүйесі

Нақты сандардың геометриялық кескінін анықтау үшін түзудегі декарт координата жүйесі ұғымы енгізілген еді.

Анықтама 3.1. Берілген түзуде оң бағыт, бас нүкте O және өлшем (масштаб) бірлігі таңдалса, ол түзуді координата түзуі (координата осі немесе сан осі) деп атайды.



Сурет 1.7а

$OM = x$ болса, $M(x)$ деп жазады, яғни таңдалған координата жүйесінде, Ox осінде, x саны M нүктесінің координатасы болады (сурет 1.7).

$A(x_1)$ және $B(x_2)$ нүктелері берілсе (сурет 1.7а) $\overline{AB}$ бағытталған кесіндінің шамасы

$$AB = x_2 - x_1 \qquad (1.1)$$

ал ұзындығы

$$|AB| = |x_2 - x_1| \qquad (1.2)$$

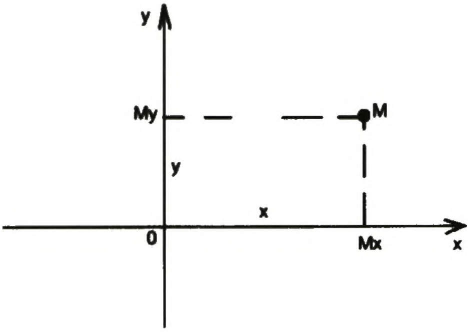
формулалармен анықталады.

Шынында да $OB = OA + AB$, бұдан $AB = OB - OA = x_2 - x_1$, ал арақашықтық теріс емес шама болғандықтан, $|AB| = |x_2 - x_1|$ болады.

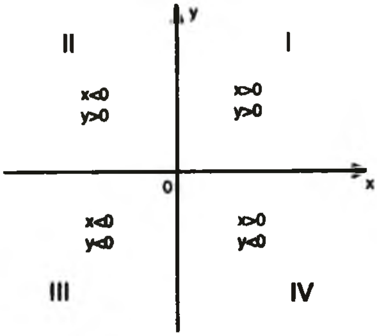
3.2. Жазықтықтағы тікбұрышты декарт координаталар жүйесі

Анықтама 3.2. Өлшем бірліктері тең, ортақ O нүктесінде қиылысатын өзара перпендикуляр Ox және Oy координаталық осьтерді жазықтықтағы Oxy тікбұрышты декарт координаталар жүйесі деп атайды.

Мұнда Ox – абсцисса осі, Oy – ордината осі, O – координаталар бас нүктесі деп аталады.



Сурет 1.8



Сурет 1.9

M нүктесінің Ox (Oy) осьтегі проекциясы деп M нүктесінен өтетін, Ox (Oy) осіне перпендикуляр түзудің Ox (Oy) осімен қиылысу нүктесі M_x M_y -ті айтады. $OM_x = x, OM_y = y$ сандарын сәйкес түрде M нүктесінің абсциссасы, ординатасы деп атайды және $M(x, y)$ деп жазады (сурет 1.8, 1.9).

Келесі қарапайым есептерді қарастырайық.

1. *Берілген екі нүкте арасындағы арақашықтық*

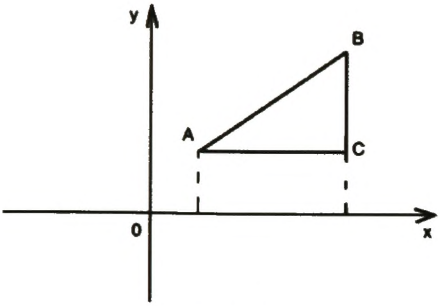
Теорема 1.2 $A(x_1; y_1)$ мен $B(x_2; y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.3)$$

формуламен анықталады.

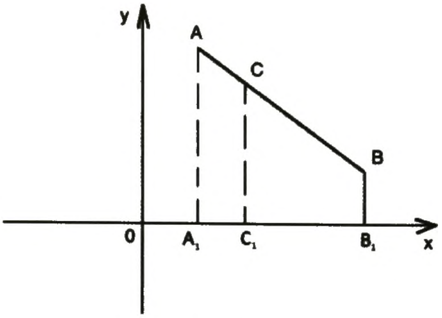
Дәлелдеуі. Шынында да $AC \parallel Ox$ түзу өткізсек $C(x_2;\ y_1)$ болады. Тікбұрышты үшбұрыш ΔACB да Пифагор теоремасы бойынша $|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$. (1.1) формуланы қолдансақ $AC = x_2 - x_1$, $CB = y_2 - y_1$ болғандықтан (сурет 1.10)

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Сурет 1.10

2.



Сурет 1.11

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

AB кесіндіні, мұндағы $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, берілген $\lambda > 0$ қатынаста бөлу керек, яғни $\frac{AC}{CB} = \lambda$ шартты қанағаттандырушы C нүктесінің x_c ; y_c координаталарын табу керек.

Теорема 1.3. Егер $C(x_c ; y_c)$ нүктесі AB кесіндіні берілген $\lambda > 0$ қатынаста бөлсе, онда оның координаталары

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1.4)$$

формулалармен анықталады.

Дәлелдеуі. AB түзуі Ox оське перпендикуляр болмасын. A, C және B нүктелерінен Ox оське перпендикуляр өткізіп, олардың Ox осьпен қиылысу нүктелерін сәйкес A_1, C_1 және B_1 деп белгілейік. Элементар математикадағы параллель түзулер арасындағы түзулердің кесінділерінің пропорционалдығы туралы теоремаға сәйкес $\frac{|A_1C_1|}{|C_1B_1|} = \frac{AC}{CB} = \lambda$ болады (сурет 1.11).

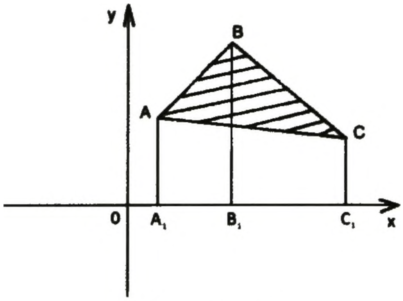
Ал $|A_1C_1| = |x_c - x_1|$, $|C_1B| = |x_2 - x_c|$. $(x_c - x_1)$, $(x_2 - x_c)$ сандарының таңбалары бірдей болғандықтан $\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda$, бұл қатыстан $x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$

$AB \perp Ox$ болса, $x_1 = x_2 = x_c$ болып, алынған теңдік дұрыс болады. Сонымен (1.4) формулалардың біріншісі дәлелденді. Екінші формуласы да осылайша дәлелденеді.

Егер C нүктесі AB кесіндіні тең екіге бөлсе, яғни $\lambda = 1$ болса, онда (1.4) формулалар

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (1.5)$$

түрінде болады.



Сурет 1.12

Мысал 3.1. $A(2; -1)$ және $B(5; 3)$ нүктелері берілген. $d = |AB|$ арақашықтық және AB кесіндіні $\lambda = 2$ қатынаста бөлуші C нүктесінің координаталары табылсын.

Шешуі. Бұл жағдайда $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 5$, $y_2 = 3$ болғандықтан (1.3) формула бойынша

$$d = |AB| = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = 5.$$

(1.4) формулаларды қолдансақ,

$$x_c = \frac{2 + 2\cdot 5}{1+2} = 4,\ y_c = \frac{-1 + 2\cdot 3}{1+2} = \frac{5}{3}.$$

3. Үшбұрыш ауданы

Теорема 1.4. Төбелері $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ нүктелерде жатқан ABC үшбұрыштың ауданы:

$$S = \frac{1}{2}\ |(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)| \qquad (1.6)$$

Дәлелдеуі. A, B, C нүктелерінен Ox оське AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярлар түсіреміз.

$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$$

екендігі (сурет 1.12) айқын.

Демек,

$$S_{ABC} = \left|\frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 -$$

$$-x_3y_1 + x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_3\,| = \frac{1}{2}|(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)|.$$

Ескерту 3.1. Егер $S_\Delta = 0$ болса, онда A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатады.

Мысал 3.2. Төбелері $A(2;\ -3)$, $B(-3;\ 4)$, $C(3;\ 6)$ нүктелер болатын үшбұрыштың ауданы есептелсін.

Шешуі. $x_1 = 2$, $y_1 = -3$; $x_2 = -3$, $y_2 = 4$; $x_3 = 3$, $y_3 = 6$ болғандықтан (1.6) формула бойынша

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|(3-2)(4+3) - (-3-2)(6+3)| = \frac{1}{2}|7 + 45| = 26 \text{ кв.б.}$$

3.3. Полярлық координаталар жүйесі

Анықтама 3.3. Өлшем бірлігі таңдалған OP сәулені полярлық координаталар жүйесі деп атайды.

Мұнда O – полюс, OP – полярлық ось деп аталады (сурет 1.13).

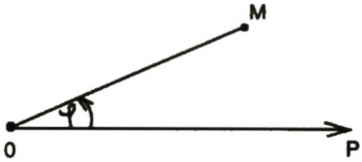
Жазықтықта M нүктесін алып, OM кесіндісін жүргізейік. Онда жазықтықтағы кез келген M нүкте $\rho = |OM|$, $\varphi = \widehat{OM, OP}$ сандары арқылы толық анықталады және $M(\rho, \varphi)$ деп жазады. ρ, φ сандары M нүктесінің полярлық координаталары деп аталады: ρ – полярлық радиус, φ – полярлық бұрыш.

Жазықтықтың барлық нүктелерін қамту үшін $-\pi \leq \varphi < \pi$ немесе $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \rho < +\infty$ деп аламыз.

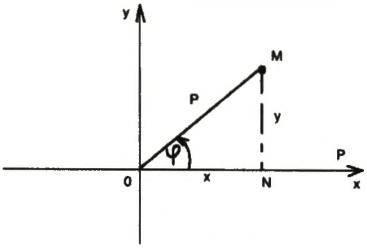
Енді Декарт координаталары мен полярлық координаталардың байланысын қарастырайық.

ONM тікбұрышты үшбұрыштан (сурет 1.14) $\frac{NM}{OM} = \sin\varphi$, $\frac{ON}{OM} = \cos\varphi$ қатынастар орынды. $NM = y$, $ON = x$, $OM = \rho$ екендігін ескерсек:

$$x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi \tag{1.7}$$



Сурет 1.13



Сурет 1.14

Екі теңдікті квадраттап қоссақ және екіншісін біріншісіне бөлсек,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \text{tg}\varphi = \frac{y}{x} \tag{1.8}$$

формулалары алынады.

Мысал 3.3. $M(-2; -2\sqrt{3})$ нүктесінің полярлық координаталары табылсын.

Шешуі. (1.8) формулаларын пайдаланып, ρ мен φ полярлық координаталарды табамыз.

$$\rho = \sqrt{(2)^2 + \left(+2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4;$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}, \qquad \text{осыдан } \varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

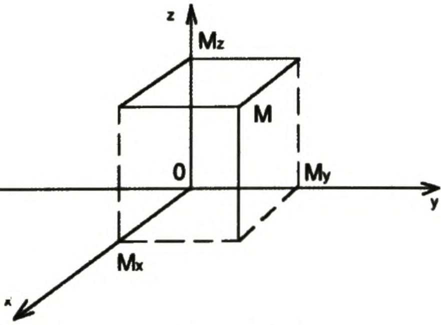
Бірақ M нүктесі үшінші ширекте жатқандықтан $n = -1$, яғни $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$. Демек $\rho = 4$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$; яғни $M\left(4: -\frac{2\pi}{3}\right)$; немесе $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ болып, $M(4, \frac{4\pi}{3})$.

3.4. Кеңістіктегі тікбұрышты декарт координаталар жүйесі

Анықтама 3.4. Өлшем бірліктері тең, ортақ O нүктесінде қиылысатын, өзара перпендикуляр Ox, Oy және Oz осьтер үштігін кеңістіктегі $Oxyz$ тікбұрышты декарт координаталар жүйесі деп атайды.

O координаталар басы (бас нүктесі), Ox абсцисса осі, Oy - ордината осі, Oz аппликата осі деп аталады.

M кеңістіктің кез келген нүктесі болсын. (сурет 1.15) M нүктесі



Сурет 1.15

арқылы Ox, Oy, Oz осьтерге перпендикуляр үш жазықтық өткіземіз. Бұл жазықтықтардың координаталық осьтермен қиылысу нүктелерін M_x, M_y және M_z деп белгілейік.

$\overline{OM_x}, \overline{OM_y}, \overline{OM_z}$ бағытталған кесінділердің шамалары $x = OM_x, y = OM_y$, $z = OM_z$ сандар M нүктесінің тік бұрышты координаталары деп аталады; M нүктесінің x – абсциссасы, y – ординатасы, z – аппликатасы деп аталады.

Сонымен таңдалған координаталар жүйесінде кеңістіктің әрбір M нүктесіне жалғыз (x; y; z) реттелген сандар үштігі – тікбұрышты координаталары, сәйкес қойылды және керісінше, әрбір реттелген (x; y; z) сандар үштігіне $Oxyz$ кеңістікте жалғыз M нүктесі сәйкес келеді.

Сөйтіп, кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі кеңістік нүктелері мен реттелген (x; y; z) накты сандар үштігінің арасында бір мәнді сәйкестік орнатты.

Oxy, Oyz, Ozx жазықтықтары координаталық жазықтықтар деп аталады.

Координаталық жазықтықтар барлық кеңістікті октант деп аталушы сегіз бөлікке бөледі.

$Oxyz$ кеңістіктегі A(x_1, y_1,z_1) мен B(x_2; y_2,z_2) нүктелері арасындағы арақашықтық

$$d= |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} , \qquad (1.3')$$

ал $\frac{AC}{CB} = \lambda$ қатыста бөлуші C(x; y, z) нүктесінің координаталары

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.4')$$

формулаларымен анықталады.

§ 4. Комплекс сандар

Анықтама 4.1. $z = (x; y)$ реттелген нақты сандар жұбын комплекс сан деп атайды.

Мұндағы x саны z комплекс санның нақты бөлігі, ал y комплекс санның жорамал бөлігі деп аталады да $x = Rez, y = Jmz$ деп белгіленеді.

(0; y) таза жорамал сан, ал (0; 1) санын жорамал бірлік деп атайды да, i әрпімен белгілейді, яғни $i = (0; 1)$. Онда (0; y)=iy болады.

Анықтама бойынша (x; 0) = x, (0; y) = iy, (0; 0) = 0.

Комплекс сандар жиынын C әрпімен белгілейді. Егер $y = 0$ болса, онда (x, 0) келісім бойынша (x, 0) жұп, x нақты санмен теңестіріледі, $x = (x, 0)$. Сонымен мына теңдіктер орынды:

(0, 1) = i, (0, y) = iy, (x,0) = x, (0; 0) = 0.

Комплекс сандардың теңдігі және оларға қолданылатын арифметикалық амалдар келесі ережелер бойынша енгізіледі.

$z_1 = (x_1; y_1)$, $z_2 = (x_2; y_2)$ болса, онда:

1°. Егер $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ болса, $z_1 = z_2$ болады.

2°. $z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$.

3°. $z = z_1 \; z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

4°. $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$.

3°-ереже бойынша $i^2 = (0;1)(0;1) = (-1;0) = -1$; яғни $i^2 = -1$.

Бұл ережелер жәрдемімен кез келген $z = (x, y)$ комплекс санды былайша жазуға болады:

$z = (x;y) = (x;0) + (0;y) = (x;0) + (y;0)\,(0;1) = x + iy$.

$z = x + iy$ өрнек комплекс санның алгебралық түрі деп аталады.

2° және 3° теңдіктерден комплекс сандарды қосу және көбейту амалдары – нақты сандарды қосу және көбейту амалдарының барлық қасиеттеріне ие екендігі және комплекс сандарға қолданылатын амалдар $i^2 = -1$ теңдікті ескергенде, алгебралық өрнектерге қолданылатын амалдар сияқты орындалатыны көрінеді.

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ сандары өзара түйіндес комплекс сандар деп аталады. Түйіндес сандар үшін, 3° ережеден $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ екендігі көрінеді.

Мысал 4.1. $z_1 = 3+4i$ $z_2 = 5-2i$ комплекс сандары берілген. $z_1 \pm z_2, z_1, z_2, z_1/z_2$ комплекс сандарын табыңыз.

Шешуі. $z_1 + z_2 = (3+4i) + (5-2i) = (3+5) + i(4-2) = 8+2i$.

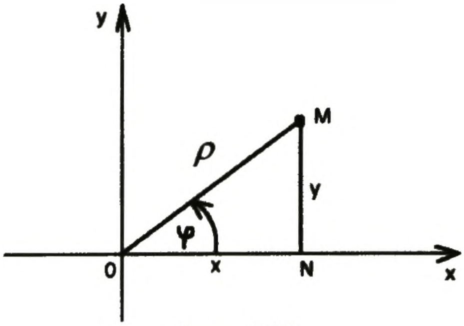
$z_1 - z_2 = (3+4i) - (5-2i) = (3-5) + (4i + 2i) = -2 + 6i$.

$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)\;(5-2i) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2i + 5 \cdot 4i - 8i^2 = 23+14i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{5-2i} = \frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{15+20i+8i+8i^2}{25+4} = \frac{7}{29} - \frac{28}{29}i.$$

Мұнда алымы мен бөлімін бөлімінің түйіндесіне көбейттік.

Кез келген $z = x + iy$ комплекс санды Oxy жазықтықта $M(x, y)$ нүктесімен, немесе $\overline{OM} = \{x, y\}$ радиус векторымен бейнелеуге болады және, керісінше, Oxy координата жазықтығыың әрбір $M(x, y)$ нүктесін $z = x + iy$ комплекс санның бейнесі деп карауға болады. (сурет 1.16).



Сурет 1.16

Комплекс сандар кескінделген (бейнеленген) жазықтық шартты түрде, комплекс сандар жазықтығы деп аталады. Мұндағы Ox – нақты ось, Oy– жорамал ось.

Oxy жазықтықта (ρ, φ) полярлық координаталарын енгізсек (О полюс, Ox осінің оң бағыты полярлық ось), онда тікбұрышты ΔONM-нен $x = \rho \cos\varphi$, $x = \rho \sin\varphi$.

Бұдан

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.9)$$

Бұл өрнек комплекс санның тригонометриялық түрі деп аталады.

Мұндағы $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ саны z комплекс санының модулі деп аталады. φ бұрышы $\overline{OM}$ бағытталған кесінді мен Ox осінің оң бағыты арасындағы бұрыш болып, φ = arg$z$, $-\pi \leq \varphi < \pi$ немесе $0 \leq \varphi < 2\pi$ деп белгіленген санды z комплекс санының аргументі деп аталады, φ санын аргументтің бас мәні деп атайды, Arg$z$ = φ+2$k\pi$ арқылы φ бұрыштың мәндерінің ақырсыз жиынын белгілейді, мұндағы $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Аргумент φ-дің шамасы

$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\rho}$, $\text{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, формулаларынан анықталады.

Егер z нүкте нақты немесе жорамал осьте жатса, онда arg$z$ тікелей табылады: $z_1 = 2$ болғанда arg$z_1 = 0$; $z_2 = -3$; болғанда, arg$z_2 = \pi$; $z_3 = i$ болғанда, $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$; $z_4 = -2i$ болғанда, arg$z_4 = -\frac{\pi}{2}$.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \ -\infty < \varphi < +\infty \qquad (1.10)$$

Эйлер формуласын қолданып, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс санын $z = \rho e^{i\varphi}$ көрсеткіштік түрде жазуға болады.

Мұндағы ρ=|z|, ал φ = Arg$z$ = arg$z$ + 2$k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ болып, arg$z$ = φ_0, $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ немесе $-\pi \leq \varphi_0 < \pi$ аргументтің бас мәні.

Сонымен комплекс санның төрт түрі анықталды:

1. $z = (x, y)$ – реттелген нақты сандар жұбы;
2. $z = x + iy$ – алгебралық түрі
3. $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\rho \geq 0$, φ = Arg$z$ = arg$z$ + 2$k\pi$ – тригонометриялық түрі, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$
4. $z = \rho e^{i\varphi}, \rho \geq 0$, φ= Arg$z$ = arg$z$ + 2$k\pi$ – көрсеткіштік түрі, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Мысал. 4.2. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = i$, $z_4 = -2i$, $z_5 = 3$, $z_6 = -4$ сандарының реттелген жұптар, тригонометриялық және көрсеткіштік түрлері жазылсын.

Шешуі. Комплекс сандар алгебралық түрде берілген z_1 санында $x_1 = 1$, y_1=1; Онда: $\rho_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \varphi_1 = \arg(1 + i) = \text{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$.

Демек, реттелген жұптар түрі $z_1 = (1; 1)$; тригонометриялық түрі $z_1 = \sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; көрсеткіштік түрі $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

z_2 санында $x_2 = 1, y_2 = 1$; Онда: $\rho_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;
$\varphi_2 = \arg(1 - i) = arctg\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$. Демек: реттелген жұп түрі $z_2 = (1;-1)$; тригонометриялық түрі $z_2 = \sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$; көрсеткіштік түрі $z_2 = \sqrt{2}e^{-\left(i\frac{\pi}{2}\right)}$.

z_3 санында $x_3 = 0, y_3 = 1$; Онда: $\rho_3 = |z_3| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\varphi_3 = \arg i = \frac{\pi}{2}$. Демек: реттелген жұп түрі $z_3 = (0;1)$; тригонометриялық түрі $z_3 = 1.(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; көрсеткіштік түрі $z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z_4 = -2i$ санында $x_4 = 0, y_4 = -2$; онда $\rho_4 = |z_4| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$;

$\varphi_4 = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$. Демек: реттелген жұп түрі z_4 =(0; –2); тригонометриялық түрі $z_4 = 2\ (\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2})$; көрсеткіштік түрі $z_4 = 2e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)}$.

z_5 санында $x_5 = 3$, $y_5 = 0$. Онда: $\rho_5 = |z_5| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$;

$\varphi_5 = \arg 3 = 0$. Демек: реттелген жұп түрі z_5 =(3; 0); тригонометриялық түрі $z_5 = 3\ (\cos 0 + i\sin 0)$; көрсеткіштік түрі $z_5 = 3 \cdot e^{i0}$.

z_6 санында $x_6 = -4$, $y_6 = 0$. Онда $\rho_6 = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$; $\varphi_6 = \arg(-4) = \pi$. Демек: реттелген жұп түрі z_6=(–4; 0); тригонометриялық түрі $z_6 = 4\ (\cos\pi + i\sin\pi)$; көрсеткіштік түрі $z_6 = 4\ e^{i\pi}$

Комплекс сандарды көбейту және бөлу амалдарын орындау тригонометриялық түрінде берілгенде ыңғайлы.

1. $z_1 = \rho_1\ (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ мен $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ кез келген комплекс сандар болсын.

$z_1\ \ z_2 = \rho_1\ (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ \ \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\ \rho_2\ (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\ \ i\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\ \ \sin\varphi_2) = \rho_1\ \rho_2\ (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) = \rho_1\ \rho_2\ [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Яғни, комплекс сандарды көбейткенде олардың модулдары өзара көбейтіліп, аргументтері қосылады. Осы ереже кез келген ақырлы комплекс сандарды көбейткенде де орындалады.

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho_1\ \ \rho_2 \cdot \ldots\ \rho_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)] \qquad (1.12)$$

(1.12) теңдік математикалық индукция әдісімен оңай дәлелденеді.

Дербес жағдайда $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс санын өзара n рет көбейтсек:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1.13)$$

Бұл теңдік Муавр формуласы деп аталады.

Мысал 4.3. $(1+\sqrt{3}\,i)^9$ комплекс саны табылсын.

Шешуі. Алдымен $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ санды триогонометриялық түрде жазамыз:

$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3},\ z = 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Онда (1.12) Муавр формуласы бойынша $z^9 = (1+\sqrt{3}\,i)^9 = [2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]^9 = 2^9\ \ (\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 512(-1) = -512$.

2. $\frac{z_1}{z_2}$ бөлінді үшін келесі теңдік орындалады:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\ [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \qquad (1.14)$$

Шынындада, $z_1/z_2 = z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ деп алсақ, $z_1 = z.\ z_2$ болып (1.12) формула бойынша $\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi) = \rho\rho_2\,[\cos(\varphi + \varphi_2) + i\sin(\varphi + \varphi_2)]$ теңдігі орындалады. Комплекс сандардың теңдігінің ережесі бойынша:

$\rho_1\cos\varphi_1 = \rho\rho_2\cos((\varphi + \varphi_2)$, $\rho_1\sin\varphi_1 =\rho\rho_2 \sin(\varphi + \varphi_2)$. Бұдан $\rho_1 = \rho\rho_2, \varphi = \varphi + \varphi_2$, яғни $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \varphi = \varphi - \varphi_2$ екендігі шығады. Демек, комплекс сандарды бөлгенде, сәйкес түрде, модулдары бөлінеді, ал аргументтері айрылады.

Мысал 4.4. $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ сандарының $\frac{z_1}{z_2}$ бөліндісі табылсын.

Шешуі. Бұл сандардың тригонометриялы түрі (мысал 4.2) $z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ болғандықтан (1.14) формула бойынша, $z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Енді $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ санының n-дәрежелі ($n = 2, 3$ ...) түбірін табайық:

$$w = \sqrt[n]{z} = r(\cos\psi + i\sin\psi).$$

(1.13) Муавр формуласы бойынша, $w^n = z = r^n$ $(\cos n\psi + i\sin n\psi)$ болады.

ρ $(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$ $r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$ теңдіктен $\rho = r^n$, $n\psi=\varphi = \arg z + 2\pi k$, мұндағы $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ теңдіктері шығады. Соңғы теңдіктерден $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\psi = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}$ болады. Сонымен,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{n}\right);\ k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (1.15)$$

Мұндағы $\sqrt[n]{|z|}$ модульдың арифметикалық түбірі. k-ның басқа мәндерінде, осы табылған түбір мәндері қайталанады, өйткені $\sin x$, $\cos x$ периодты функциялар.

(1.15) формуладан көрінгендей комплекс сандар жиынында n-дәрежелі түбірдің n мәні бар.

(1.15) формуланы қолданып, келесі түбірлерді табу керек.

Мысал 4.5. $\sqrt[3]{1}$

Шешуі. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3})$; $k = 0,1,2$.

$k = 0$ болғанда, $w_1=\sqrt[3]{1}$ $=(\cos 0 + i\sin 0) = 1$;

$k = 1$ болғанда, $w_2=$ $\sqrt[3]{1}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=$ $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$k = 2$ болғанда, $w_3=$ $\sqrt[3]{1}\cdot(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Мысал 4.6. $\sqrt{-1}$

Шешуі. $\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}$; $k=0,1$;

$k = 0$ болғанда, $w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$

$k = 1$ болғанда, $w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$

Мысал 4.7. $\sqrt[3]{i}$

Шешуі. $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right)$, $k = 0,1,2.$

$k = 0$ болғанда, $w_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$;

$k = 1$ болғанда, $w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$;

$k = 2$ болғанда, $w_3 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = 0 - i = -i$;

§ 5. Алгебралық теңдеулер

Комплекс сандарды енгізу квадрат теңдеудің дискриминанты нөлден кіші болғанда ($D < 0$) да оны комплекс сандар жиынында шешуге мүмкіндік береді. Мысалы $x^2 + 1 = 0$ теңдеудің шешімі $x = i$, $x = -i$ сандары болады. Шынында да: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - i^2 = 0 \Rightarrow (x - i)(x + i) = 0 \Rightarrow x_1 = i, x_2 = -i$.

Көпмүше және оның түбірі

Анықтама 5.1. n-дәрежелі көпмүше деп

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_1 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, a_n \neq 0 \qquad (1.16)$$

түріндегі өрнекті атайды. Мұндағы a_k тұрақты коэффициенттері – нақты немесе комплекс сандар, $z = x + iy$ комплекс айнымал.

Анықтама 5.2. Егер $P_n(a) = 0$ болса, онда a саны көпмүшенің түбірі немесе нөлі деп аталады.

z_0 кез келген комплекс сан болсын. $z = (z - z_0) + z_0$ деп түрлендіріп жазсақ (1.16) көпмүшені

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k [(z - z_0) + z_0]^k$$

түрінде жазып, мұндағы квадрат жақшаларды дәрежелеп, $z - z_0$ айырым бойынша ұқсас мүшелерін ықшамдасақ,

$$P_n(z)=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\ldots+b_n(z-z_n)^n=\sum_{k=0}^{n} b_k(z-z_0)^k \qquad (1.16a)$$

түріндегі көпмүше алынады, мұндағы b_k коэффициенттер, жалпы жағдайда, тұрақты комплекс сандар. (1.16а) теңдіктен $P_n(z_0)=b_0$ екендігі көрінеді. $b_0=0$ болса, $P_n(z)$ көпмүше $z-z_0$ айырымға бөлінеді.

Теорема 1.5. (Безу). z_0 саны $P_n(z)$ көпмүшенің түбірі болуы үшін $P_n(z)$ көпмүшенің $z-z_0$ айырымға бөлінуі, яғни кез келген z үшін

$$P_n(z)=(z-z_0)\,P_{n-1}(z) \qquad (1.17)$$

көбейтінді түрінде өрнектелуі, қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі.Шынында да z_0 саны (1.16) көпмүшенің түбірі болса, (1.16а) теңдікте $b_0=0$ болады. Демек, $P_n(z)=(z-z_0)\,P_{n-1}(z)$ түрінде жазылады. (1.17) теңдікте $z=z_0$ болса, $P_n(z_0)=0$ болады.

Егер $P_{n-1}(z_0)\neq 0$ болса, онда z_0 саны $P_n(z)$ көпмүшенің жай түбірі деп аталады. Жалпы жағдайда, егер $s\leq n$ болып,

$P_n(z)=(z-z_0)^s\,P_{n-s}(z),\ P_{n-s}(z_i)\neq 0$

теңдік орындалса, онда z_0 саны $P_n(z)$ көпмүшенің s еселі, түбірі (нөлі) деп аталады.

Теорема 1.6. (Алгебраның негізгі теоремасы). Кез келген $n\geq 1$ дәрежелі $P_n(z)$ көпмүшенің ең болмағанда бір түбірі бар.

Бұл теоремадан келесі маңызды салдар шығады.

Салдар 5.1. Кез келген n-дәрежелі көпмүшенің (еселі түбірлерді қоса есептегенде) нақты және комплекс n түбірі бар.

Яғни n-дәрежелі көпмүшені

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_j)^{k_j},k_1+k_2+\ldots+k_j=n, \qquad (1.18)$$

көбейтінді түрінде жіктеп жазуға болады. Мұндағы $z_1,z_2,\ldots z_j$ сандары еселіктері сәйкес $k_1,k_2,\ldots k_j$ болатын әр түрлі түбірлер.

Салдар 5.1 дегі (1.18) формула алгебраның негізгі теоремасын n рет қолдану арқылы шығады.

Егер (1.16) көпмүшенің коэффициенттері нақты сандар болса, онда келесі тұжырым орынды болады.

Теорема 1.7. Егер $z_0=\alpha+i\beta$ комплекс саны (1.16) нақты коэффициентті көпмүшенің түбірі болса, онда оған түйіндес $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ комплекс саны да осы көпмүшенің түбірі болады.

Дәлелдеуі. $P_n(z_0)=P_n(\alpha+i\beta)=0$ екендігін және $\overline{z_0^k}=\bar{z}_0^k$, $a_k=\overline{a_k}$ теңдіктерді ескерсек

$$P_n(\bar{z}_0)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\bar{z}_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\,\overline{z_0^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_kz_0^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_kz_0^k}=\overline{P_0(z_0)}=\bar{0}=0$$

теңдіктері орынды болады. Демек $\bar{z}_0$, саны (1.16) көпмүшенің түбірі.

Мұнда тікелей тексерілетін (тригонометриялық түрдегі z_1, z_2 комплекс сандар үшін) келесі теңдіктерді қолдандық:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}\,,\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Мысал. 4.1. $P_3(z) = z^3 - 10z^2 + 37z - 52$ көпмүшені көбейткіштерге жіктеу керек.

Шешуі: Алгебраның негізгі теоремасының салдары бойынша $z^3 - 10z^2 + 37z - 52 = 0$ үшінші дәрежелі теңдеудің үш түбірі бар. Шынанда да: $z^3 - 10z^2 + 37z - 52 = 0 \Leftrightarrow z^3 - 4z^2 - 6z^2 + 24z + 13z - 52 = 0 \Leftrightarrow z^2(z - 4) - 6z(z - 4) + 13(z - 4) = 0 \Leftrightarrow (z - 4)(z^2 - 6z + 13) = 0 \Leftrightarrow z - 4 = 0$, $z^2 - 6z + 13z = 0$. Бұдан $z_1 = 4$; $z_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm \sqrt{4i^2} = 3 \pm 2i$; яғни $z_1 = 4$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = \overline{z_2} = 3 - 2i$. (1.18) теңдік бойынша: $z^3 - 10z^2 + 37z - 52 = (z - 4)[z - (3 + 2i)][z - (3 - 2i)] = (z - 4)(z^2 - 6z + 13)$. Соңғы теңдікте $z_2\ \overline{z_2} = 3^2 + 2^2 = 13$ екендігі ескерілді.

Теорема 1.8. Кез келген n-дәрежелі коэффициенттері нақты (1.16) көпмүше коэффициенттері нақты сызықтық және квадрат үш мүшелі көбейткіштерге жіктеледі:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m} \tag{1.19}$$

Мұнда $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$, барлық квадрат үш мүшелердің нақты түбірлері жоқ.

Дәлелдеуі тікелей (1.18) жіктеу және теорема 1.3 тұжырымынан шығады. Себебі көпмүшенің коэффициенттері нақты болғанда түйіндес түбірлерге сәйкес (1.18) жіктеудің көбейткіштері квадрат үш мүшелік болады. Шынындада $x_1 = a + bi$, $x_2 = a - bi$ түбірлер үшін, сәйкес көбейткіш,

$$(x - x_1)(x - x_2) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] =$$

$$= (x - a)^2 - (bi)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 - 2xa + (a^2 + b^2).$$

Мысал 4.2. $P_5(x) = x^5 - 5x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 68x + 52$ көпмүше көбейткіштерге жіктелсін.

Шешуі. Алгебраның негізгі теоремасының салдары бойынша берілген бесінші дәрежелі көпмүшенің бес түбірі бар. Коэффициенттері нақты сандар болғандықтан теорема 1.7 бойынша көпмүшенің комплекс түбірі болса, оған түйіндес комплекс сан да көпмүшенің түбірі болады. Тікелей есептеу арқылы -2; 1; 2; $2 + 3i$, $2 - 3i$ сандарының берілген көпмүшенің түбірі екенін анықтауға болады. Онда (1.19) формула бойынша,

$$P_5(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 2)[x - (2 + 3i)] \cdot [x - (2 - 3i)] =$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x^2 - 4x + 13)$$

§ 6. Математикалық индукция әдісі

Кейбір формулаларды қорытып шығаруда және қайсыбір математикалық тұжырымдарды дәлелдеуде математикалық индукция әдісі қолданылады.

n натурал санына тәуелді қандай да бір тұжырымдаманың дұрыстығын көрсету үшін математикалық индукция әдісін қолдану алгоритмі төмендегідей:

а) берілген тұжырымның $n = 1$ болғанда, дұрыс екенін тексеру;

б) қандай да бір $n = k$ болғанда, тұжырымды ақиқат деп ұйғару;

в) $n = k + 1$ үшін тұжырымның ақиқат екенін дәлелдеу. Бұдан тұжырымның кез келген n үшін ақиқат екендігі шығады, яғни $n = 1$ үшін дұрыс болғандықтан $n = 2$ үшін де дұрыстығы шығады, $n = 2$ үшін дұрыс болғандықтан $n = 3$ үшін де дұрыстығы шығады және т. с. с.

Мысал 6.1. $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ екендігі дәлелденсін.

Дәлелдеуі. Математикалық индукция әдісінің алгоритмін қолданамыз:

а) $n = 1$ болғанда, $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, яғни $1 = 1$;

б) $n=k$ үшін берілген теңдік дұрыс дейік, яғни $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

в) $n = k + 1$ үшін дұрыстығын дәлелдейміз:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Шынында да,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Демек, берілген теңдік дұрыс.

II тарау. СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 1. Квадрат матрица ұғымы. Анықтауыштар және оларды есептеу

Анықтама 1.1. n жолдан және n бағаннан тұратын кез келген a_{ij} , $i=\overline{1,n}$ $j=\overline{1,n}$ сандардан құралған квадрат кесте n-ретті квадрат матрица деп аталады.

Ол дөңгелек жақшамен немесе қосарланған тік сызықтармен белгіленеді:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}=\|a_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \qquad (2.1)$$

Мұндағы i = 1, 2, ... , n – жол нөмірі, j = 1, 2, ... , n – баған нөмірі, a_{ij} – i жол мен j бағанның қиылысындағы элемент деп аталады.

Сызықтық теңдеулер жүйесін шешумен тығыз байланысты – квадрат матрицаны сипаттаушы анықтауыш ұғымы.

A матрицаның анықтауышы $|A|$, $\det A$ немесе Δ арқылы белгіленеді.

Бірінші ретті $A=(a_{11})$ матрицаның анықтауышы немесе 1-ретті анықтауыш деп a_{11} санды атайды: $\det A=\Delta=|A|=a_{11}$. Мысалы $A=(-5)$ болса, $\Delta=|A|=-5$ болады.

2-ретті $A=(a_{ij})$ матрицасының анықтауышы немесе 2-ретті анықтауыш деп

$$\det A=\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21} \qquad (2.2)$$

санды атайды.

Мысалы, $A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$ болса, онда $\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 4==-2.$

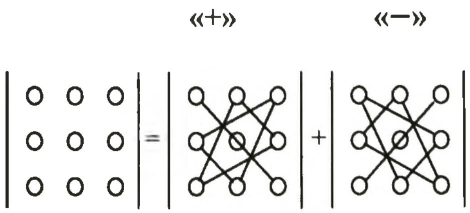
3-ретті $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,3} \\ j=\overline{1,3}}}$ матрицасының анықтауышы немесе 3-ретті анықтауыш деп

$$\det A=\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2.3)$$

санды атайды.

(2.3) теңдік үшбұрыштар ережесі (Саррюс ережесі) деп аталадыда схемалық түрде былайша көрінеді:



Анықтама 1.2. n-ретті (2.1) A матрицасының анықтауышы немесе n-ретті анықтауыш деп

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\omega(n)} (\pm a_{1\omega_1} a_{2\omega_2} .. a_{n\omega_n}) \qquad (2.4)$$

санды атайды, мұндағы қосынды барлық a_{ij} элементтерден, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$, n-ретті алмастырулар бойынша алынған.

Көрсетілген қосынды $n!$ қосылғыштан тұрып, әрбір қосылғыш әрбір жолмен әрбір бағаннан алынған n элементтің көбейтіндісі. Қосылғыштардың жартысы “+”, екінші жартысы “−” таңбамен алынады.

Бұл анықтама бойынша жоғарғы ретті ($n > 3$) анықтауыштарды есептеу күрделі. Дегенмен жоғарғы ретті анықтауыштарды төменгі ретті анықтауыштарға келтіретін ыңғайлы әдістер бар.

Анықтауыштардың қасиеттері

Кез келген ретті анықтауыштарға тән негізгі қасиеттерді қарастырайық. Ыңғайлы болу үшін бұл қасиеттердің алғашқыларын 3-ретті анықтауыштар үшін келтіреміз.

1° Δ анықтауыштың жолдарымен сәйкес бағандарының орнын алмастырғанда, Δ -ның мәні өзгермейді, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дәлелдеу үшін екі анықтауышты да (2.3) ереже бойынша ашып шықсақ мүшелерінің тең екендігіне көз жеткіземіз.

2°.Δ анықтауыштың кез келген екі жолының (екі бағанының) орнын алмастырғанда, Δ -ның таңбасы өзгереді.

Дәлелдеуі (2.3) ережеден шығады.

3°. Δ анықтауыштың екі жолының (екі бағанының) сәйкес элементтері өзара тең болса, онда Δ -ның мәні нөлге тең.

Дәлелдеуі. Шынында да бірдей жолдарды (бірдей бағандарды) алмастырғанда анықтауыштың мәні Δ өзгермейді. Ал 2° қасиет бойынша жолдарды алмастырғанда таңбасы өзгереді, яғни $\Delta = -\Delta$ болады. Бұдан $2\Delta = 0$, яғни $\Delta = 0$.

4°. Δ анықтауыштың кез келген жолының (бағанының) барлық элементтерін λ санына көбейтсек, онда Δ -нің мәні осы санға көбейтіледі, яғни

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дәлелдеуі. (2.3) ереже бойынша екі анықтауышты қосылғыштар түрінде жазсақ, қосылғыштардың өзара теңдігі шығады.

5° Δ анықтауыштың кейбір жолының (бағанының) барлық элементтері нөлге тең болса, онда Δ -ның мәні де нөлге тең.

Бұл қасиеттің орындылығы $\lambda = 0$ болғанда, 4° қасиеттен шығады.

6° Δ анықтауыштың екі жолының (екі бағанының) сәйкес элементтері пропорционал болса, онда Δ -ның мәні нөлге тең.

Шынында да 4° қасиет бойынша пропорционалдық көбейткіштің анықтауыш белгісі алдына шығарсақ, қалған анықтауыштың екі жолының сәйкес элементтері бірдей болады. Онда 3° қасиет бойынша анықтауыш нөлге тең болды.

7°. Δ анықтауыштың k-жолының (k-бағанының) элементтері екі қосылғыштан тұрса, онда екі анықтауыштың k-жолының элементтері бірінші қосылғыштар болып (k-бағанының), ал екінші анықтауыштың k-жолының (k-бағанының) элементтері екінші қосылғыштар болады; екі анықтауышта да басқа жолдардың (басқа бағандардың) элементтері бастапқы анықтауыштың сәйкес элементтеріне тең болады. Яғни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бұл теңдіктің дұрыстығына, барлық анықтауыштарға (2.3) теңдікті қолданып, көз жеткізуге болады.

8° Δ анықтауыштың кез келген жолының (бағанының) барлық элементтерін λ санына көбейтіп, оны басқа бір жолдың (бағанның) сәйкес элементтеріне қосса, онда Δ -ның мәні өзгермейді.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \lambda \\ \hookleftarrow \\ \end{array} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} + a_{21} & \lambda a_{12} + a_{22} & \lambda a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бұл қасиеттің дұрыстығы 7° және 6° қасиеттерден шығады.

9° **Анықтауыштың жол мен баған элементтері бойынша жіктелуі.** Жоғары ретті анықтауышты есептеуді жеңілдететін бір тәсіл, ол осы анықтауышты төменгі ретті анықтауыштарға жіктеу.

Басқаша айтқанда n-ретті анықтауышты $(n-1)$-ретті анықтауыштардың қосындысы түріне келтіру. Ол үшін алдымен жаңа ұғымдар енгізіледі.

Анықтама 1.3. n-ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің миноры M_{ij} деп, осы анықтауыштың a_{ij} элементі тұрған i-жол мен j-бағанды алып (өшіріп) тастағанда шығатын (n–1)-ретті анықтауышты атайды.

Анықтама 1.4. n-ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің алгебралық толықтаушысы A_{ij} деп, $(-1)^{i+j}$-ге көбейтілген a_{ij} элементінің минорын атайды, яғни

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. Δ анықтауыштың мәні осы анықтауыштың кез келген жол (баған) элементтері мен олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \; A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, i = \overline{1,n} \tag{2.6}$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, j = \overline{1,n} \tag{2.7}$$

(2.6) қосындысы (2.4) n-ретті анықтауыштың i-жолының элементтері бойынша жіктелуі, (2.7) қосынды (2.4) n-ретті анықтауыштың бағанының элементтері бойынша жіктелуі деп аталады.

Дәлелдеуі.Бұл қасиетті 3-ші ретті анықтауыштың, мысалы, 3-ші жол элементтері үшін дәлелдейік.

$$a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{32}\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{33}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{31}(a_{12}\cdot a_{23}-a_{13}\cdot a_{22})-a_{32}(a_{11}\cdot a_{23}-a_{13}\cdot a_{21})+a_{33}(a_{11}\cdot a_{22}-$$

$$-a_{12}\cdot a_{21})=\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

10° Δ анықтауыштың кейбір жолының (бағанының) элементтерін басқа жолының (бағанының) сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қоссақ, оның мәні нөлге тең болады.

Бұл қасиеттің дұрыстығына айтылған амалдарды орындап, анықтауыштарды ашып көз жеткізуге болады.

Мысал 1.1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеу керек.

Шешуі. (2.2) формула бойынша

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)-(-3)\cdot 5 = -8+15 = 7.$$

Мысал 1.2. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ анықтауышты үшбұрыш ережесі бойынша, бірінші жол және екінші баған элементтері бойынша жіктеп есептеу керек.

Шешуі. Үшбұрыш ережесі бойынша (2.3) формуланы қолданып есептейміз:

$$\Delta = 5\cdot 1(-3) + (-2)(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-2)(-3) - 0\cdot(-4)\cdot 5 =$$
$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

Бірінші жол элементтері бойынша (2.6) формуланы қолданып есептейміз:

$$\Delta = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(-3+0) + 2(-9+24) + 1(0-6) = -15 + 30 - 6 = +9.$$

Екінші баған элементтері бойынша (2.7) формуланы қолданып есептейміз:

$$\Delta = -2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-9+24) + 1\cdot(-15-6) + 0 = 30 - 21 = 9.$$

§ 2. Матрицалар

2.1. Матрица ұғымы

Анықтама 2.1. m жолдан және n бағаннан тұратын кез келген a_{ij}, сандардан құралған тік төртбұрышты кесте $m \times n$ өлшемді матрица деп аталады.

Матрица $A = (a_{ij})$, $A = \|a_{ij}\|, i = \overline{1,m}$ ($i = 1;2;...;m$), $j = \overline{1,n}$ ($j = 1;2; ...; n$) немесе

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

белгілердің біреуімен белгіленеді. Мұндағы i – жол нөмірі, j – баған нөмірі, a_{ij} саны i – жол мен j – бағанның қиылысындағы элемент.

Бірдей $m \times n$ өлшемді $A = (a_{ij})$ және $B = (b_{ij})$, матрицаларының элементтері үшін $a_{ij} = b_{ij}$ болса, онда $A = B$ болады.

$m = n$ болса, онда A матрицасы n өлшемді квадрат матрица деп аталады.

A квадрат матрицаның бас диагональ $\{a_{ij}\}$ элементтерінен басқа элементтердің барлығы нөлге тең болса, оны диагональ матрица деп атайды. Дербес жағдайда $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$ болса, оны E бірлік матрица, ал $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1,n}$ болса, нөлдік матрица деп атайды.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Нөлдік матрица ұғымы кез келген өлшемді матрица үшін де енгізіледі.

2.2. Матрицаларға амалдар қолдану

1. $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, матрицасының λ санына көбейтіндісі λA деп, элементтері $b_{ij}=\lambda\, a_{ij}$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, болатын $B=(b_{ij})$ матрицасын атайды.

2. Бірдей $m\times n$ өлшемді $A=(a_{ij})$ және $B=(b_{ij})$ матрицаларының қосындысы деп, элементтері $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, болатын $m\times n$ өлшемді $C=(c_{ij})$ матрицасын атайды.

$A-B=A+(-B)$, мұндағы $-B=(-1)\quad B$.

Матрицаларды санға көбейту және матрицаларды қосу амалдары сызықтық қасиеттер деп аталып, келесі қасиеттерге ие:

а) $A+B=B+A$; (коммутативтік)
б) $A+(B+C)=(A+B)+C$; (ассоциативтік)
в) $A+0=A$;
г) $A-A=0$;
д) $1\quad A=A$;
е) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$; (дистрибутивтік)
ж) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
з) $1\cdot\alpha(\beta A)=(\alpha\cdot\beta)A$;

мұндағы A, B, C - өлшемдері бірдей матрицалар, ал α,β - сандар.

3. $m\times n$ өлшемді $A=(a_{ij})$ мен $n\times p$ өлшемді $B=(b_{jk})$ матрицаларының көбейтіндісі деп, элементтері

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \qquad (2.8)$$

$i=\overline{1,m}\ \ k=\overline{1,p}$, болатын $C=(c_{ik})$ матрицасын атайды.

Матрицаларды көбейту келесі қасиеттерге ие:

а) $A(B\cdot C)=(A\quad B)\cdot C$; (ассоциативтік)
б) $A\quad(B+C)=AB+AC$; (дистрибутивтік)
в) $(A+B)\cdot C=AC+BC$; (дистрибутивтік)
г) $\alpha\ (AB)=(\alpha\ A)\cdot B$

Жалпы жағдайда, $AB\neq BA$

Мысал 2.1. 2×3 өлшемді $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ матрицалары үшін $2A+3B$ сызықтық комбинация табылсын.

Шешуі. Матрицаларды санға көбейту жәнə матрицаларды қосу ережесін қолдансақ:

$$2A+3B=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}2-6 & 4+9 & 6+0\\ 0+6 & 2+3 & -4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

Мысал 2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ квадрат матрицалары үшін AB және BA матрицалары табылсын.

Шешуі. Матрицаларды көбейту ережесі (2.8) бойынша:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot3+2\cdot7 & 1\cdot(-4)+2\cdot(8) \\ 5\cdot3-6\cdot7 & 5\cdot(-4)-6\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ -27 & -68 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3\cdot1-4\cdot5 & 3\cdot2-4\cdot(-6) \\ 7\cdot1-8\cdot5 & 7\cdot2+8\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 30 \\ 47 & -34 \end{pmatrix}$$

нәтижелерден көрінгендей $AB \neq BA$. Бірақ AB, BA квадрат матрицалардың анықтауыштары өзара тең және

$$\Delta_{BA} = \Delta_{AB} = \Delta_A \cdot \Delta_B$$

теңдік орындалады.

Мысал 2.2 үшін $\Delta_A = -16$, $\Delta_B = 52$, $\Delta_{AB} = \Delta_{BA} = -832$.

2.3. Кері матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), i = \overline{1,n}\ \ j = \overline{1,n}$$

n-ретті квадрат матрицаның анықтауышы $\Delta = \det A \neq 0$ болса, A – бейерекше матрица деп, ал $\Delta = \det A = 0$ болса, онда A – ерекше матрица деп аталады.

Анықтама 2.2. $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$ квадрат матрицаның аударылған (транспонирленген) матрицасы деп, оның жолдары мен сәйкес бағандарын ауыстырғанда шығатын

$$A^T = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12}\, a_{22} \cdots a_{n2} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{1n}\, a_{2n} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадрат матрицаны атайды.

Анықтама 2.3. $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ квадрат матрицаға қосалқы матрица деп, a_{ij} элементтердің A_{ij} алгебралық толықтауыштарынан құралған

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

квадрат матрицаны атайды.

Қосалқы матрицаны алу үшін A матрицасының әрбір элементін оның алгебралық толықтауышымен ауыстырып, алынған матрицаны транспонирлеу керек.

Анықтама 2.4. A квадрат матрицасы үшін $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$ болатын, мұнда E – бірлік матрица, A^{-1} матрицасы табылса, онда A^{-1} матрицасы A матрицасына кері матрица деп аталады.

Ескерту 2.1. A мен A^{-1} өзара кері матрицалар болып, өлшемдері бірдей болады.

Теорема 2.2. Кез келген бейерекше квадрат матрицаның кері матрицасы бар және ол мына түрде болады:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{A^{*}}{\det A} \tag{2.10}$$

Дәлелдеуі.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{21} & A_{22} & A_{33} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+\ldots+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\ldots+a_{1n}A_{2n} & \ldots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\ldots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\ldots+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\ldots+a_{2n}A_{2n} & \ldots & a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\ldots+a_{2n}A_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\ldots+a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22}+\ldots+a_{nn}A_{2n} & \ldots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\ldots+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Мұнда анықтауыштардың 10° қасиеті мен (2.6), (2.7) формулаларды пайдаландық. Осылайша $A^{-}!\,A = E$ екендігі дәлелденеді.

Кері матрицаның қасиеттері:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$;

3. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

Анықтама 2.5. Матрицаларды элементар (жай) түрлендіру деп келесі түрлендірулерді атайды:

а) матрицаның i-жолын (бағанын) $k \neq 0$ санға көбейту;

б) i-жолға (бағанға) j-жолды (бағанды) $k \neq 0$ санға көбейтіп қосу;

в) i-жолмен (бағанмен) j-жолдың (бағанның) орындарын ауыстыру.

Мысал 2.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицаның A^{-1} кері матрицасы табылсын.

Шешуі. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad 1 - 3 \quad (-1) = 5 \neq 0$ болғандықтан бұл бейерекше матрицаның кері матрицасы бар. Қосалқы A^* матрицаны табамыз: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$. Демек, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Онда $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Тексеру:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} & 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \cdot \frac{2}{5} \\ -1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} & -1 \cdot (-\frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицаның рангі

Матрицаның рангі базистік жолдар (базистік бағандар) деп аталатын жолдар (бағандар) санын анықтайды, ал қалған жолдар (бағандар) осы базистік жолдардың (базистік бағандардың) сызықтық комбинациясы болады.

$m \times n$ өлшемді $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ матрицасын қарастырайық.

A матрицасының k-ретті миноры деп, $k \leq \min(m, n)$ осы матрицаның кез келген k жолдарымен, кез келген k бағандарының қиылысындағы элементтерінен құралған матрицаның анықтауышын атайды.

Осындай минорлардың саны $C_m^k C_n^k$ болады, мұндағы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1.2.3...n$, n элементтен k элементті терулер саны.

Анықтама 2.6. A матрицасының рангі деп, осы матрицаның нөлге тең емес минорларының ең үлкен ретін атайды.

A матрицасының рангін rang$A$, r, немесе $r(A)$ деп белгілейді.

Матрицаның рангін анықтайтын минор базистік минор деп аталады.

Матрица рангісінің қасиеттері:

1. Матрицаны аударғанда (транспонирлегенде) оның рангі өзгермейді.

2. Матрицаның нөлдік қатарын (жол, баған) өшіргенде оның рангі өзгермейді.

3. Матрицаны элементар түрлендіргенде оның рангі өзгермейді.

Мысал 2.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ матрицаның рангі табылсын.

Шешуі. Бұл матрицада барлық 3-ретті минорлар нөлге тең. 2-ретті $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ минор бар. Демек, берілген матрицаның рангі rang $A = 2$.

§ 3. Сызықтық теңдеулер жүйелері

3.1. n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.11}$$

түрінде беріледі. Мұндағы x_j– белгісіз шамалар, ал a_{ij} жүйенің коэффициенттері, b_i бос мүшелер – берілген сандар, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Егер $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ... $x_n = a_n$ сандары теңдеулер жүйесіндегі барлық теңдеулерді қанағаттандырса, онда $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ сандар жиынтығы (2.11) сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады.

(2.11) теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі бар болса, онда ол үйлесімді жүйе, ал бірде-бір шешімі болмаса, онда ол үйлесімсіз жүйе деп аталады.

Тек бір ғана шешімі бар жүйе – анықталған жүйе, ал бірден көп шешімі бар жүйе – анықталмаған жүйе деп аталады.

Белгісіздер саны бірдей екі сызықтық жүйенің барлық шешімдерінің жиыны дәл бірдей болса, онда олар эквивалент жүйелер деп аталады.

Егер $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ болса, онда (2.11) біртекті жүйе деп аталады, ал ең болмағанда бір бос мүше нөлге тең болмаса, біртекті емес жүйе деп аталады.

(2.11) жүйесін матрицалар арқылы

$$AX = B \tag{2.12}$$

ықшам түрде жазуға болады. Мұндағы:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|, B = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|,$$

яғни A – белгісіздердің коэффициенттерінен құрылған $m\times n$ өлшемді матрица, X белгісіздерден құрылған $n\times 1$ өлшемді баған матрица, B – бос мүшелерден құрылған $m\times 1$ өлшемді баған матрица.

(2.11) жүйе матрицасы A ның оң жағына бос мүшелер бағанын тіркеп жазғандағы $\overline{A}$ матрица (2.11) жүйенің кеңейтілген матрицасы деп аталады, яғни

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

Шешімнің бар не жоқтығын мына теорема анықтайды.

Теорема 2.3 (Кронекер-Капелли). Біртекті емес (2.11) сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді болу үшін $\text{rang}A=\text{rang}\overline{A}$ болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі. (2.11) жүйе үйлесімді, ал $x_i=\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$, сандары жүйенің шешімдері болсын. Осы мәндерді (2.11) жүйеге қойып, m тепе-теңдікті аламыз:

$$\begin{matrix} a_{11}\alpha_1 & +a_{12}\alpha_2+ & \cdots & +a_{1n}\alpha_n=b_1 \\ a_{21}\alpha_1+ & a_{22}\alpha_2+ & \cdots & +a_{2n}\alpha_n=b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}\alpha_1+ & a_{m2}\alpha_2+ & \cdots & +a_{mn}\alpha_n=b_m \end{matrix} \qquad (2.14)$$

(2.14) тепе-теңдіктер бойынша кеңейтілген (2.13) түріндегі $\overline{A}$ матрицаның соңғы бағаны элементтері, сәйкес түрде α_1, α_2, ... α_n коэффициенттерімен алынған алдыңғы бағандардың қосындысына тең болады, яғни соңғы баған алдыңғы бағандардың сызықтық комбинациясы. Демек, $\text{rang}A=\text{rang}\overline{A}$.

Жеткіліктілігі. $\text{rang}A=\text{rang}\overline{A}=r=\min(n,m)$ болсын. Онда A матрицаның базистік бағандары, $\overline{A}$ матрицанында базистік бағандары болып шығады. Сондықтан, $\overline{A}$ матрицаның соңғы бағаны сол базистік бағандар арқылы, жалпы алғанда, A матрицаның бағандарының жүйесі арқылы сызықтық түрде өрнектеледі. Сондықтан A матрицаның α_1, α_2, ... α_n коэффициенттерімен алынған бағандарының қосындысы, бос мүшелерден құралған бағанға тең болады, яғни (2.14) түріндегі m теңдіктер орындалады. Демек, (α_1, α_2, ... α_n) сандар жиынтығы (2.11) жүйенің шешімі болады, яғни (2.11) жүйе үйлесімді.

3.2. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің матрицалық әдісі

Егер A – n-ретті квадрат матрица болып, ($m=n$), $\Delta=\det A\neq 0$ болса, A^{-1} кері матрицаны пайдаланып, (2.11) жүйенің шешімін табуға болады.

Теорема 2.4. Егер A бейерекше квадрат матрица болса, яғни $\Delta=\det A\neq 0$, онда (2.12) $AX=B$ жүйенің

$$X=A^{-1}B \qquad (2.15)$$

формуламен табылатын жалғыз шешімі бар.

Дәлелдеуі. $AX = B$ теңдіктің екі бөлігін сол жақтарынан A^{-1} ге көбейтсек:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Мысал 3.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$ жүйені матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешуі. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ екендігін ескеріп, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +(1+2) = +3 \neq 0$ болғандықтан, A^{-1} кері матрица бар.

A матрицасының алгебралық толықтауыштары: $A_{11} = 1$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = (-1) = 1$, $A_{22} = 1$ болғандықтан, (*) теңдік бойынша қосалқы матрица $A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, болады. Онда кері матрица (2.10) формула бойынша:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2.15) формула бойынша теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ -\frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Демек, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

3.3. Крамер әдісі

n белгісізді n сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.16}$$

түрінде берілсе, оның матрицалық түрі $AX = B$ болады да, $\Delta = \det A \neq 0$ болғанда, оның шешімі $X = A^{-1}B$.

(2.15) бойынша формуланы тарқатып жазсақ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Осыдан келесі теңдіктер шығады:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta}, \\ x_n &= \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Бұл теңдіктердің оң бөлігіндегі бөлшектердің алымдары, сәйкес түрде бос мүшелерден құралған бағандардың элементтері бойынша жіктелулері. Сондықтан (2.17) теңдіктер былайша жазылады:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{2.19}$$

Бұл формулалар Крамер формулалары деп аталады.

Мысал 3.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6 \end{cases}$ жүйені Крамер формулаларын қолданып шешу керек.

Шешуі. Жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 84 + 96 - 105 - 48 - 0 = 27 \neq 0.$$

Демек, берілген жүйенің жалғыз шешімі бар. (2.18) бойынша. Δ_1, Δ_2, Δ_3 анықтауыштарды, бос мүшелерден құрылған бағанмен Δ-дағы, сәйкес түрде, бірінші бағанды, екінші бағанды, үшінші бағанды алмастырып табамыз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \ (-48) - 2 \ \ 36 + 3 \cdot 102 = -288 - 72 + 306 = -54.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\ 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\quad 36 - 6\quad (-42) + 3 \cdot (-87) = 288 - 261 = 27.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\quad (-102) - 2\quad (-87) + 6\quad (-3) = -102 + 174 - 18 = 54.$$

Мұнда Δ_1, Δ_2, Δ_3 анықтауыштарды есептегенде, бірінші жол элементтері бойынша, жіктедік. Енді (2.19) Крамер формулалары бойынша шешімдерді табамыз:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2.$$

Демек, жүйенің шешімдері: $x_1 = -2; x_2 = 1; x_3 = 2$.

3.4. Гаусс әдісі

Бұл әдіс белгісіздерді біртіндеп арылтуға негізделген.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right. \qquad (2.11)$$

n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық.

Гаусс әдісін қолдану екі кезеңнен тұрады. Бірінші кезеңде (тура бағыт) (2.11) жүйе түрлендіру арқылы сатылы түрге (дербес жағдайда үшбұрышты) келтіріледі.

Екінші кезеңде (кері жол) пайда болған соңғы теңдеудегі бірінші белгісіз басқалары (еркін белгісіздер) арқылы өрнектеліп, біртіндеп кері қайтып, қалған белгісіздер де еркін белгісіздер арқылы өрнектеледі.

Бірінші кезең. $a_{11} \neq 0$ деп есептейміз (егер $a_{11} = 0$ болса, жүйеде x_1-дің алдындағы коэффициент нөлге тең емес теңдеуді жазамыз).

1-қадам. (2.11) жүйенің бірінші теңдеуінің екі бөлігін: $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз; $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ге көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз; осылайша жалғастырып, $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$-ге көбейтіп, соңғы теңдеуге қосамыз. Нәтижесінде, бірінші теңдеуден басқа барлық теңдеулерде x_1 белгісізін жойып, келесі жүйе алынады.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases} \tag{2.11_1}$$

Демек, 1-теңдеуден басқа теңдеулерден x_1 шығарылып тасталды. $a_{ij}^{(1)}, b_i^{(1)}\left(i = \overline{2,m}, j = \overline{2,n}\right)$– жаңа коэффициенттер.

2-қадам. Анықтық үшін $a_{22}^{(1)} \neq 0$ деп (2.11_1) жүйенің екінші теңдеуінің екі бөлігін: $-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$-ге көбейтіп, 3-теңдеуге қосамыз; $-\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$-ге көбейтіп, 4-теңдеуге қосамыз; т.с.с. $-\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$-ге көбейтіп, соңғы теңдеуге қосамыз. Нәтижесінде, келесі жүйе алынады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad a_{m3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)} \end{cases} \tag{2.11_2}$$

Демек, бірінші және екінші теңдеулерден басқа теңдеулерден x_2 шығарылып тасталды. $a_{ij}^{(2)}, b_i^{(2)}\left(i = \overline{3,m}, j = \overline{3,n}\right)$ жаңа коэффициенттер. Осылайша түрлендіруді мүмкіндігінше жалғастыра береміз. Ең соңында сатылы жүйе шығады.

Сатылы жүйеге келтіру процессінде:

а) 0 = 0 теңдік шықса, ол теңдік шығарып тасталады;

ә) $0 = b, b \neq 0$ теңдік шықса, онда берілген жүйе үйлесімсіз болады.

Соңғы сатылы жүйенің соңғы теңдеуінде бір белгісіз қалса, онда (2.11) жүйе жалғыз шешімге ие болады:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ \dots \quad \dots \quad & \dots \\ a_{mn}^{(m-1)}x_n &= b_m^{(m-1)} \end{aligned} \tag{2.11_{m-1}}$$

Екінші кезең: Гаусс әдісінің кері бағыты. Сатылы жүйе жалпы алғанда, ақырсыз көп шешімге ие. Жүйенің соңғы теңдеуінде бірінші белгісіз x_k ны басқа белгісіздер ($x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$) арқылы өрнектейміз. Содан соң x_{k-1}-ді, x_{k-2} ні, ... x_1 ді табамыз. ($x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$), еркін белгісіздерге әртүрлі мәндер беріп – (2.11) жүйенің шексіз көп шешімін аламыз.

Ескерту 4.1. Егер сатылы үшбұрышты болса, яғни $k = n$, онда (2.14) жүйе жалғыз шешімге ие болады. Соңғы теңдеуден x_n ді табамыз, одан алдыңғы теңдеуден x_{n-1} ді, т.с.с. $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1$ лерді табамыз.

Ескерту 4.2. Іс жүзінде (2.11) жүйені шешу үшін, оның кеңейтілген матрицасын элементар түрлендірген тиімді. $a_{11} = 1$ болғандығы есептеулер үшін ыңғайлы.

Мысал 3.3. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39 \end{cases}$ сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі. Жүйені төмендегіше түрлендіреміз:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18, \\ \frac{15}{2}x_2 - \frac{33}{2}x_3 = 39 \end{cases} \left(-\frac{15}{7}\right) \sim \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18, \\ -\frac{3}{7}x_3 = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Бұл үшбұрышты сатылы жүйе. Гаусс әдісінің кері бағытын қолдансақ:

$$x_3 = -1;\ x_2 = \left(18 + \frac{15}{2}x_3\right) : \left(18 + \frac{15}{2}(-1)\right) : \frac{7}{2} = -\frac{21}{2} \cdot \frac{2}{7} = -3;$$

$$x_1 = (-7x_2 - 13x_3) : 2 = (-7 \cdot (-3) - 13\ \ (-1)) : 2 = (21 + 13) : 2 = 17.$$

Демек, берілген жүйенің шешімі: $x_1 = 17$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

Мысал 3.4. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 27 \end{cases}$ сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі. Гаусс әдісін қолданып, келесі түрлендірулер жасаймыз:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\ \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 27 \end{cases} \sim$$

$$\sim\begin{cases}2x_1+5x_2-4x_3=8,\\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7,\\ -\frac{15}{2}x_2+3x_3=-7 \leftarrow\end{cases} (1)\sim\begin{cases}2x_1+5x_2-4x_3=0,\\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7,\\ 0=0\end{cases}$$

2-қадамнан кейін екі теңдеу қалды, себебі үшінші теңдеу 0 = 0 түріне келіп, жүйеден шығарылды. Осымен Гаусс әдісінің тура бағыты аяқталды.

Енді кері бағытқа көшеміз. Екінші теңдеуден $x_2=\frac{2}{5}x_3-\frac{14}{5}$. Бірінші теңдеудегі x_2-нің орнына осы өрнекті қойсақ $2x_1-2x_3=\frac{38}{3}$ болады. Онда, жалпы шешім:

$$\begin{cases}x_1=x_3+\frac{19}{3},\\ x_2=\frac{2}{5}x_3-\frac{14}{15}.\end{cases}$$

Мұндағы x_1, x_2 лер базистық белгісіздер, ал x_3 – еркін белгісіз.

Дербес шешімдер: $x_3=0$ болғанда, $x_1=\frac{19}{3}$, $x_2=\frac{14}{15}$; $x_3=1$ болғанда $x_1=\frac{22}{3}$, $x_2=-\frac{8}{13}$, т.с.с.

Мысал 3.5. $\begin{cases}2x_1+5x_2-4x_3=8,\\ 3x_1+15x_2-9x_3=5,\\ 5x_1+5x_2-7x_3=1\end{cases}$ жүйені шешу керек.

Шешуі. Гаусс әдісінің тура бағыты бойынша түрлендіреміз:

$$\begin{matrix} & \left(-\frac{3}{2}\right)\ \left(-\frac{5}{2}\right)\\ \begin{cases}2x_1+5x_2-4x_3=8,\\ 3x_1+15x_2-9x_3=5,\leftarrow\\ 5x_1+5x_2-7x_3=1\leftarrow\end{cases} & \sim\end{matrix}$$

$$\sim\begin{cases}2x_1+5x_2-4x_3=8,\\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7,\\ -\frac{15}{2}x_2+3x_3=-19 \leftarrow\end{cases} (1) \sim \begin{matrix}2x_1+5x_2-4x_3=8,\\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7,\\ 0=26\end{matrix}$$

Үшінші 0 = 26 теңдіктің болуы мүмкін емес, сондықтан берілген жүйе үйлесімсіз, яғни жүйенің шешімі жоқ.

§ 4. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.20)$$

біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін. Бұл жүйе үйлесімді, rang$A$ = rang $\overline{A}$, себебі нөлдік шешім бар: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Қандай шарттар орындалғанда, (2.20) жүйенің нөлге тең емес шешімдері бар?

Теорема 2.5. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі (2.20) нөлдік емес шешімге ие болуы үшін r = rang$A < n$ болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі. Матрицаның рангі оның өлшемінен үлкен бола алмайды, яғни $r \leq n$. $r = n$ болса, онда $n \times n$ өлшемді минорлардың біреуі нөлге тең болмайды. Сондықтан, сәйкес сызықтық теңдеулер жүйесі жалғыз шешімге ие: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \neq 0$. Демек, басқа шешімдер жоқ. Яғни нөлдік емес шешім бар болса, $r < n$.

Жеткіліктілігі. $r < n$ болсын. Онда біртекті жүйе үйлесімді болғандықтан анықталмаған болады. Яғни жүйе ақырсыз көп шешімге ие болады. Демек, нөлдік емес шешімге де ие болады.

Теорема 2.6. $m = n$ болғанда (2.20) біртекті жүйе нөлдік емес шешімге ие болуы үшін Δ = det$A$ = 0 болуы, қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі. $m = n$ болғанда (2.20) жүйе нөлдік емес шешімге ие болса, онда $\Delta = 0$ болады. Себебі $\Delta \neq 0$ болғанда, жүйе нөлдік шешімге ие болады.

Жеткіліктілігі. Егер $\Delta = 0$ болса, онда rang$A = r < n$ болады. Демек, жүйе ақырсыз көп шешімге ие болады.

Мысал 4.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + \ldots + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$ біртекті жүйенің жалпы және іргелі шешімдерін табу керек.

Шешуі. Берілген төрт теңдеу, бес белгісізден құралған жүйенің матрицасының рангін табайық:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&0&4&8\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2)\,(-3)\,(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&2&-2&-6\\0&0&-1&1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \sim(-2)\quad(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\end{pmatrix}.$$

Демек, rang$A$ = rang$\overline{A}$ = 2. Сондықтан берілген жүйе келесі жүйемен мәндес болады:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0,\\ \qquad\qquad\quad x_3-x_4+3x_5=0.\end{cases}$$

Мысалы, x_1 мен x_3 белгісіздерді x_2, x_4, x_5 еркін белгісіздер арқылы өрнектейік:

$$\begin{cases}x_3=x_4+3x_5\\ x_1=-\dfrac{2x_2+4x_4+8x_5}{3}\end{cases}$$

Жүйенің дербес (іргелі) шешімдерін табу үшін x_2, x_4, x_5 еркін белгісіздерге әртүрлі мәндер береміз:

а) $x_2=1, x_4=0, x_5=0$: $x_3=0, x_1=-\frac{2}{3}$;

б) $x_2=0, x_4=1, x_5=0$: $x_3=1, x_1=-\frac{4}{3}$;

в) $x_2=0, x_4=0, x_5=1$: $x_3=3, x_1=-\frac{8}{3}$.

Демек, $(-\frac{2}{3}, 1, 0, 0, 0)$, $(-\frac{4}{3}; 0; 1; 1; 0)$, $(-\frac{8}{3}; 0; 3; 0; 1)$ сандар жиындары берілген жүйенің дербес іргелі шешімдері болады.

Мысал 4.2. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\2x_1+x_2+3x_3=0,\\3x_1+3x_2+2x_3=0\end{cases}$ жүйенің жалпы және дербес (іргелі) шешімдерін табу керек.

Шешуі. Берілген жүйенің матрицасының рангін табайық:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&1&3\\3&3&2\end{vmatrix}=2-6+18+3-9-8=0.$$

Демек, квадрат матрицаның анықтауышы нөлге тең болғандықтан, бұл біртекті жүйенің нөлдік емес шешімдері бар. Алдымен матрицаның рангін табайық:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&3\\3&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2)\,(-3)\\ \leftarrow\!\rfloor\quad\\ \leftarrow\!\!-\!\!-\!\rfloor\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&5\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(-1)\\ \leftarrow\!\rfloor\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&5\end{pmatrix}.$$

Демек, rang = 2. Сондықтан берілген жүйе мына жүйемен мәндес болады:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\ -3x_2+5x_3=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\ -3x_2+5x_3=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3-2x_2\\ x_2=\dfrac{5}{3}x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{7}{3}x_3\\ x_2=\dfrac{5}{3}x_3.\end{cases}$$

x_3-ті еркін тәуелсіз деп алып, әртүрлі мәндер беріп, сәйкес дербес (іргелі) шешімдерді табамыз. $x_3=c$ десек, $(-\frac{7}{3}c,\ \frac{5}{3}c,\ c)$ жалпы шешім болады. Іргелі шешімдер: $c=1$ болғанда: $(-\frac{7}{3};\ \frac{5}{3};\ 1)$; $c=3$ болғанда $(-7; -5; 3)$.

III тарау. ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

§ 1. Векторлар және оларға сызықтық амалдар қолдану. Векторларды базис бойынша жіктеу

1.1. Вектор ұғымы

Өзінің сандық мәнімен толық анықталатын шамалар – скаляр шамалар деп аталады. Мысалы, ұзындық, аудан, көлем, температура, масса, жұмыс т.б.

Сандық мәні және бағытымен толық анықталатын шамалар векторлық шамалар деп аталады. Мысалы күш, жылдамдық, үдеу т.б.

Векторлық шамалардың нақты физикалық қасиеттерінен абстракцияланып геометриялық вектор немесе вектор ұғымына келеміз.

Анықтама 1.1. $\overline{AB}$ бағытталған кесінді, геометриялық вектор немесе вектор деп аталады.

A вектордың бастапқы нүктесі, B соңғы нүктесі немесе ұшы деп аталады (сурет 3.1а).

Вектор $\overline{AB} = \bar{a}$ деп кіші латын әріпімен де белгіленеді. $|\overline{AB}|$=$|\bar{a}|$ түрінде $\overline{AB} = \bar{a}$ вектордың ұзындығы белгіленеді.

Басы мен ұшы дәл келетін немесе басы мен ұшы беттесеттін векторды нөлдік вектор деп атайды.

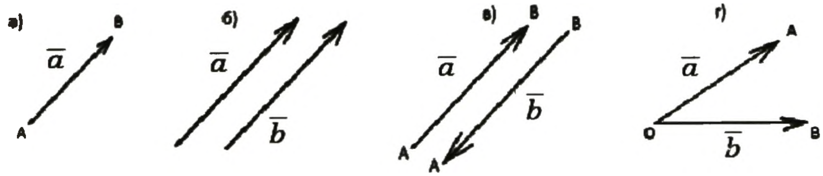
Бұл жағдай нөлдік векторды нөл нақты санымен теңестіруге мүмкіндік береді.

Бір түзуде, немесе параллель түзулерде жататын $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторлары коллинеар векторлар деп аталады (сурет 3.1б).

$\overline{AB}$ мен $\overline{BA}$ векторлары өзара қарама-қарсы векторлар деп аталады (сурет 3.1в).

Анықтама 1.2. $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторлары коллинеар, бірдей бағытталған және ұзындықтары бірдей, яғни $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ болса, онда оларды өзара тең векторлар деп атайды да $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ деп жазады (сурет 3.1б).

Барлық нөлдік векторлар өзара тең деп саналады. Бұл анықтамадан вектордың бас нүктесін кеңістіктің кез келген О нүктесіне параллель көшіруге болатындығы шығады (сурет 3.1г). Тең векторларды еркін векторлар деп те атайды.



Сурет 3.1

1.2. Векторларға сызықтық амалдар қолдану

Векторларға сызықтық амалдар қолдану дегенде оларды санға көбейту мен өзара қосу амалдары түсініледі.

Анықтама 1.3. $\overline{a}$ векторы мен α нақты санының көбейтіндісі $\alpha\overline{a}$ деп модулі (ұзындығы) $|\alpha||\overline{a}|$ -ға тең, бағыты α > 0 болғанда $\overline{a}$ векторымен бағыттас, α < 0 болғанда $\overline{a}$ векторға қарама-қарсы бағытталған, векторды атайды.

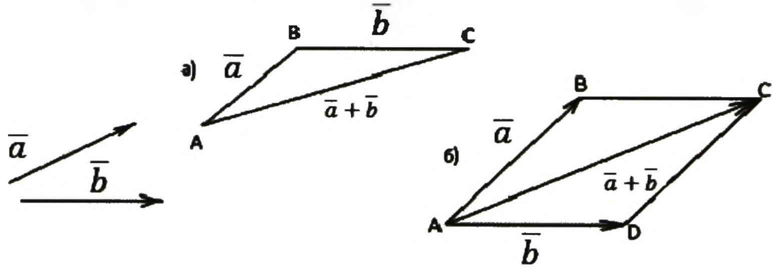
Анықтама 1.3 тен келесі қасиеттердің орынды екені шығады:

1) егер $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ болса, онда $\overline{b} \parallel \overline{a}$. Керісінше, егер $\overline{b} \parallel \overline{a}$ болса, $\overline{a} \neq 0$, онда кейбір λ саны табылып, $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ болады.

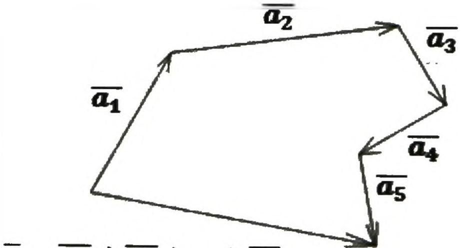
2) $\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a^0}$ теңдік орынды. Мұндағы $\overline{a^0}$ векторы $\overline{a}$ векторымен бағыттас бірлік вектор.

Анықтама 1.4. $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторларының қосындысы $\overline{a}+\overline{b}$ деп $\overline{b}$ векторының басы $\overline{a}$ векторының ұшымен беттестірілгенде, $\overline{a}$ векторының басынан $\overline{b}$ векторының ұшына бағытталған $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ векторын атайды.

$\overline{c}$ қосындысын "үшбұрыш ережесі" бойынша табуға болады. Кез келген A нүктеге $\overline{AB} = \overline{a}$ векторын салып, содан соң B нүктесіне $\overline{BC} = \overline{b}$ векторын тұрғызса $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$ векторы шығады (сурет 3.2а).



Сурет 3.2



$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \cdots + \overline{a_n}$

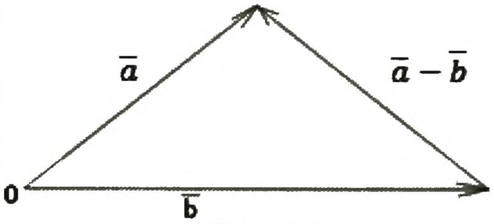
Сурет 3.3

Немесе, "параллелограмм ережесін" қолдануға болады: $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторларының бас нүктелерін ортақ A басына келтіріп, $\overline{AB} = \overline{a}, \overline{AD} = \overline{b}$ қабырғалардан параллелограмм тұрғызады. Онда $\overline{AC}$ диагоналі $\overline{a}+\overline{b}$ болады (сурет 3.2б).

Бірнеше $\overline{a_k}, k = 1, 2, \ldots, n$ векторларды қосу үшін әрбір келесі $\overline{a_k}$ векторының басын алдыңғы

$\overline{a}_{k-1}$ ұшымен түйістіреді де, бірінші $\overline{a}_1$ векторының басымен соңғы $\overline{a}_n$ векторының ұшын қосып $\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k$ векторын тұрғызады (сурет 3.3; $n = 5$).

Анықтама 1.5. $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторларының айырымы $\overline{a} - \overline{b}$ деп, $\overline{b}$ векторымен қосындысы $\overline{a}$ векторына тең болатын $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ векторын айтады. Яғни $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$ болса, онда $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$. Бір O нүктесінен шығатын $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторларының айырмасы $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$ векторларын салу үшін $\overline{b}$ векторының ұшын $\overline{a}$ векторының ұшымен қосатын вектор тұрғызса болғаны. Яғни $\overline{a} - \overline{b} = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$ (сурет 3.4).



Сурет 3.4

Сызықтық амалдар келесі қасиеттерге ие:

1° $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (ауыстырымдылық қасиеті).

2° $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (терімділік қасиеті).

3° Кез келген $\overline{a}$ векторы үшін $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ болатындай нөлдік векторы бар (нөлдік вектордың ерекше қасиеті).

4° Кез келген $\overline{a}$ векторы үшін $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$ болатындай $(-\overline{a})$ қарама-қарсы векторы бар.

5° $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$

6° $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$

7° $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$

5°, 6°, 7° қасиеттердегі α, β кез келген нақты сандар.

Бұл қасиеттер анықтамалар жәрдемімен оңай тексеріледі. Бұл қасиеттердің маңызы, сызықтық амалдарды – алгебрада әріптерге қалай қолданса, түрлендіруде векторларға да осы ережелерді қолдану мүмкін болады.

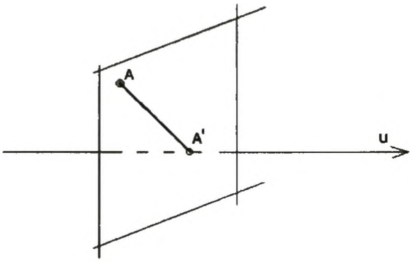
Анықтама 1.6. $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ векторларының сызықтық комбинациясы деп $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\overline{a}_k$ векторларын атайды. Мұндағы $\alpha_k, k = \overline{1, n}$ нақты сандар.

Анықтама 1.7. Егер $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ векторлары бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар компланар векторлар деп аталады.

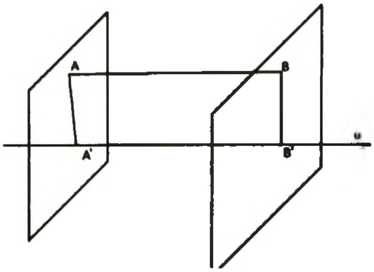
1.3. Вектордың оське проекциясы

u – кеңістіктегі ось, яғни бағытталған түзу болсын. A нүктесінің u осіндегі проекциясы $Пр_u A$ деп, осы нүктеден u осіне түсірілген перпендикулярдың табаны A' нүктесін айтады. Яғни A' нүкте u осінің A нүктесінен өтіп u осіне перпендикуляр жазықтықпен қиылысу нүктесі, $Пр_u A = A'$ (сурет 3.5).

Анықтама 1.8. $\overline{AB}$ вектордың u осіндегі проекциясы деп A және B нүктелерінің проекцияларынан өтуші $\overline{A'B'}$ векторын атайды (сурет 3.6).



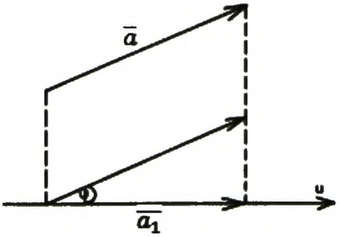
Сурет 3.5



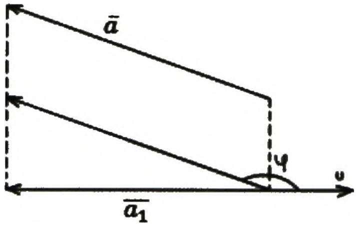
Сурет 3.6

Теорема 3.1. $\bar{a} = \overline{AB}$ векторының u осіндегі проекциясы $\bar{a}$ векторы мен u осінің арасындағы φ бұрышының косинусын $\bar{a}$ векторының ұзындығына көбейткенге тең:

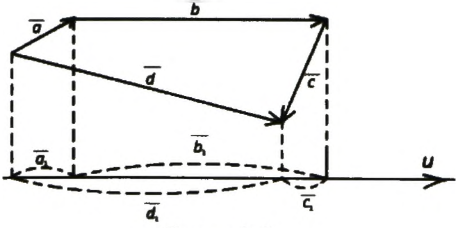
$$\text{Пр}_u\bar{a} = |\bar{a}|\cos\phi;\ (0 \le \varphi \le \pi) \tag{3.1}$$



Сурет 3.7



Сурет 3.8



Сурет 3.9

Дәлелдеуі. Егер $\varphi<\frac{\pi}{2}$ болса, онда $\text{Пр}_u\bar{a} = |\overline{a_1}| = |\bar{a}|\cos\varphi$ (сурет 3.7); егер $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$ болса, онда $\text{Пр}_u\bar{a} = -|\overline{a_1}| = -|\bar{a}|\cos(\pi-\varphi) = |\bar{a}|\cos\varphi$ (сурет 3.8).

Проекциялардың кейбір қасиеттері:

1° Дербес жағдайда, $\bar{a}=\bar{0}$ немесе $\bar{a}\perp u$ болса, онда $Пр_u\bar{a} = 0$ бұл тұжырым тікелей формула (3.1) ден шығады.

2° $Пр_u(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=Пр_u\bar{a}+Пр_u\bar{b}+Пр_u\bar{c}.$

Яғни бірнеше векторлардың қосындысының проекциялары олардың проекцияларының қосындысына тең (сурет 3.9).

Дәлелдеуі: $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ болсын.

Онда $Пр_u\bar{d}=|\bar{d}_1|=+|\bar{a}_1|+|\bar{b}_1|-|\bar{c}_1|=Пр_u\bar{a}+Пр_u\bar{b}+Пр_u\bar{c}.$

3°. $Пр_u\lambda\bar{a}=\lambda\ \ Пр_u\bar{a}.$

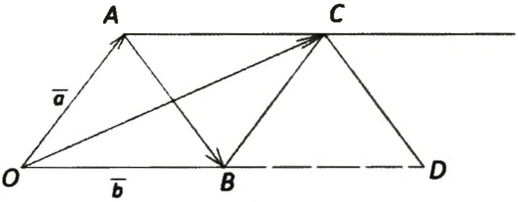
Дәлелдеуі: λ > 0 болғанда $\text{Пр}_u\lambda\bar{a} = |\lambda\overline{a_1}|\cos\varphi = \lambda|\bar{a}|\cos\varphi = \lambda\text{Пр}_u\bar{a}$

λ < 0 болғанда $\text{Пр}_u\lambda\bar{a} = |\lambda\overline{a_1}|\cos(\pi-\varphi) = -\lambda|\bar{a}|\,(-\cos\varphi) = \lambda|\bar{a}|\cos\varphi = \lambda\text{Пр}_u\bar{a}$

Бұл қасиет λ = 0 болғанда да орынды.

Демек, векторларға сызықтық амалдарды қолдануды олардың сәйкес проекцияларына да қолдануға болады.

Сызықтық амалдарға мысалдар келтірейік.



Сурет 3.10

Мысал 3.1. *OACB* параллелограммда $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$. $\overline{AC},\overline{CB},\overline{OC},\overline{CO},\overline{AB},\overline{BA}$ векторларын $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторлары арқылы өрнектеу керек (сурет 3.10).

Шешуі. $\overline{AC}=\overline{OB}$, өйткені параллелограммның қарама қарсы қабырғалары тең және параллель, әрі $\overline{AC},\overline{OB}$ векторлары бірдей бағытталған. Демек, $\overline{AC}=\bar{b}$. $\overline{CB}$ мен $\overline{OA}$ өзара параллель, ұзындықтары тең, бірақ бағыттары қарама – қарсы, сондықтан $\overline{CB}=-\bar{a}$. $\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}$ ол $\overline{CO}$ векторы $\overline{OC}$-ға қарама – қарсы: $\overline{CO}=-(\bar{a}+\bar{b})$

Екі вектордың айырымының анықтамасы бойынша: $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\bar{b}-\bar{a}$; онда $\overline{BA}=-(\bar{b}-\bar{a})=\bar{a}-\bar{b}$. Сонымен $\overline{AC}=\bar{b}$, $\overline{CB}=-\bar{a}$, $\overline{OC}=\bar{a}+\bar{b}$. $\overline{CO}=-(\bar{a}+\bar{b})$, $\overline{AB}=(\bar{b}-\bar{a})$, $\overline{BA}=\bar{a}-\bar{b}$.

Мысал 3.2. $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторлары берілген, $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{b}| = 4$, $\left(\overline{a},\hat{\ }Ou\right) = 60°$, $\left(\overline{b},\hat{\ }Ou\right) = 120°$, $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ мұндағы $\overline{c} = 5\overline{a}$,, векторының Ou осіндегі проекциясын табу керек.

Шешуі: Векторлардың қосындысының осьтегі проекциясы, қосылғыштардың осы осьтегі проекцияларының қосындысына тең болғандықтан, (3.1) формула бойынша,

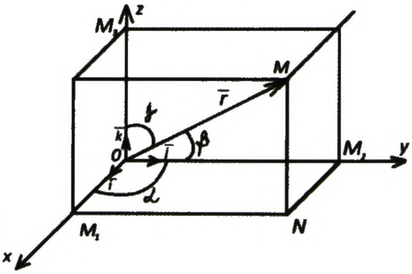
$$Пр_{Ou}\overline{a} = |\overline{a}|\cos 60^0 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3; \quad Пр_{Ou}\overline{b} = |\overline{b}|\cos 120^0 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2;$$

3°. қасиет бойынша: $\text{Пр}_{Ou}\overline{c} = \text{Пр}_{Ou}(\overline{5a}) = 5\text{Пр}_{Ou}\overline{a} = 5 \cdot 3 = 15$; $\text{Пр}_{Ou}5\overline{a} = \text{Пр}_{Ou}\overline{c}$

2° қасиет бойынша: $\text{Пр}_{Ou}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right) = \text{Пр}_{Ou}\overline{a} + \text{Пр}_{Ou}\overline{b} + \text{Пр}_{Ou}\overline{c} = 3 + (-2) + 15 = 16.$

1.4. Векторды декарттық тікбұрышты координаталық базис бойынша жіктеу

Кеңістікте $Oxyz$ декарттық тікбұрышты координаталар жүйесін қарастырайық. Ox, Oy, Oz координаталық осьтерде сәйкес түрде $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ бірлік векторлар (орттар) аламыз. Кез келген $\overline{r}$ векторын алып, оның бас нүктесін координата бас нүктесіне көшіреміз: $\overline{r} = \overline{OM}$ (сурет 3.11).



Сурет 3.11

$\overline{r} = \overline{OM}$ векторы M нүктесінің радиус векторы деп аталады. $\overline{OM}$ векторының координата осьтеріндегі проекциясын табу үшін осы вектор арқылы Oyz, Oxz, Oxy координаттық жазықтықтарға параллель жазықтықтар өткізіп, олардың координаталық осьтермен қиылысу нүктелерін M_1, M_2, M_3 деп белгілейміз. Нәтижеде тікбұрышты параллелепипед шығады. Ал $\overline{OM}$ вектор осы параллелепипедтің диогональдарының бірі болады: $Пр_x\overline{r} = \overline{OM_1}$, $Пр_y\overline{r} = \overline{OM_2}$, $Пр_z\overline{r} = \overline{OM_3}$. Бірнеше векторлардың қосындысының анықтамасы бойынша, $\overline{r} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}$.

$\overline{M_1N} = \overline{OM_2}$, $\overline{NM} = \overline{OM_3}$ болғандықтан: $\overline{r} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}$. $\overline{OM_1} = \overline{OM_1} \cdot \overline{i}$, $\overline{OM_2} = OM_2 \cdot \overline{j}$, $\overline{OM_3} = OM_3\ \overline{k}$ болғандықтан, соңғы теңдік былай жазылады:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \tag{3.2}$$

Бұл формула векторды тікбұрышты базис бойынша жіктеу немесе координаталық орттар бойынша жіктеу деп аталады да, векторлық есептеулерде негізгі формула болып есептеледі.

(3.2) теңдікті қысқаша $\bar{r} = (x, y, z)$ түрінде де жазады.

Тікбұрышты параллелепипедтер үшін

$|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM}_1|^2 + |\overline{OM}_2|^2 + |\overline{OM}_3|^2$ болғандықтан

$$|\bar{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ немесе } |\bar{r}|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3.3)$$

Яғни вектордың модулі (ұзындығы), проекциялардың квадраттарының қосындысының квадрат түбіріне тең.

Егер $\bar{r} = \overline{OM}$ вектор Ox, Oy, Oz координат өстерімен, сәйкес түрде α, β, γ бұрыштар жасаса, (3.1) формула бойынша:

$$x = |\bar{r}| \cdot \cos\alpha; \quad y = |\bar{r}| \cdot \cos\beta; \quad z = |\bar{r}| \cdot \cos\gamma;$$

немесе,

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad (3.4)$$

Соңғы теңдіктерді квадраттап қоссақ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (3.5)$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ сандары $\bar{r}$ вектордың бағыттаушы косинустары деп аталады.

$\bar{e}$ бірлік вектордың координаталары осы бағыттаушы косинустар болады:

$$\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$$

1.5. Проекцияларымен берілген векторларға сызықтық амалдар қолдану

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \qquad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$$

векторлары Ox, Oy, Oz координаталық осьтерге проекцияларымен (координаталарымен) берілсін.

Теорема 3.2. Проекцияларымен берілген $\bar{a}, \bar{b}$ векторлары үшін

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}, \qquad (3.6)$$

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_x)\bar{i} + (\lambda a_y)\bar{j} + (\lambda a_z)\bar{k} \qquad (3.7)$$

теңдіктері орындалады.

Дәлелдеуі. Векторлардың проекцияларының 2° және 3° қасиеттері бойынша:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) + (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k}$$

$$\lambda\bar{a} = \lambda(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) = (\lambda a)\bar{i} + (\lambda a_y)\bar{j} + (\lambda a_z)\bar{k}$$

Мысал 3.3. $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ векторлары берілген. $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$, $2\bar{a} + \bar{b}, 3\bar{a} + 2\bar{b}$ векторларын табу керек.

Шешуі: Бұл жағдайда $x_1=2$, $y_1=-3$, $z_1=1$, $x_2=1$, $y_2=1$, $z_2=-2$, болғандықтан (3.6), (3.7) формулалары бойынша:

$$\overline{a}+\overline{b}=(2+1)\overline{i}+(-3+1)\overline{j}+\big(1+(-2)\big)\overline{k}=3\overline{i}-2\overline{j}-\overline{k},$$
$$\overline{a}-\overline{b}=(2-1)\overline{i}+(-3-1)\overline{j}+\big(1-(-2)\big)\overline{k}=\overline{i}-4\overline{j}+3\overline{k},$$
$$2\overline{a}+\overline{b}=2\quad 2\overline{i}-2\cdot 3\overline{j}+2\overline{k}+\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}=5\overline{i}-5\overline{j},$$
$$3\overline{a}+2\overline{b}=3\cdot 2\overline{i}-3\cdot 3\overline{j}+3\overline{k}+2\quad 1\overline{i}+2\cdot 1\overline{j}+2(-2)\overline{k}=8\overline{i}-7\overline{j}-\overline{k}.$$

Теорема 3.3. $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторлары тең болуы үшін олардың сәйкес координаталарының тең болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі: $\overline{a}=\overline{b}$ болсын. Онда $\overline{0}=\overline{a}-\overline{b}$, (3.6) формула бойынша:

$$\overline{0}=(a_x-b_x)\overline{i}+\big(a_y-b_y\big)\overline{j}+(a_z-b_z)\overline{k},\Rightarrow a_x-b_x=0, a_y-b_y=$$
$$=0, a_z-b_z=0;$$

яғни, $a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$

Жеткіліктігі: $a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$ болса, жіктелудің жалғыздығына байланысты екі вектор бір біріне тең болады.

Векторлардың коллинеарлық белгісі.

Теорема 3.4. $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторлары коллинеар болуы үшін олардың проекцияларының пропорционал болуы, қажетті және жеткілікті. Яғни,

$$\overline{b}\parallel\overline{a}\iff\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

Қажеттілігі: $\overline{b}\parallel\overline{a}$ болса, онда $\overline{b}=\lambda\overline{a}$

(3.7) формула бойынша $b_x=\lambda a_x, b_y=\lambda a_y, b_z=\lambda a_z$ немесе $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda.$

Жеткіліктігі: Яғни $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$ болса, олардың пропорцианалдық коэффицентің λ десек, $b_x=\lambda a_x, b_y=\lambda a_y, b_z=\lambda a_z$ теңдіктері орындалады. Демек, $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ коллинеар векторлар.

1.6. Нүкте мен вектордың координаталары.

Кеңістікте $Oxyz$ тікбұрышты декарт координаталар жүйесі берілсін.

Кез келген M нүктесі үшін $\overline{OM}$ вектордың координаталары M нүктесінің координаталары деп аталады. $\overline{OM}$ вектор M нүктесінің радиус векторы деп аталады да $\overline{OM}=\overline{r}$ деп белгіленеді. Демек, $M(x, y, z)$ нүктесінің координаталары $\overline{r}=\overline{OM}$ вектордың да координаталары болады:

(3.2) бойынша $\overline{r}=(x,y,z)$ немесе $\overline{r}=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}$, ал (3.3) бойынша бұл вектордың ұзындығы $|\overline{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ болады.

Кез келген $A=(x_1,y_1,z_1)$ мен $B=(x_2,y_2,z_2)$ нүктелері үшін $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ екендігін ескерсек,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \left(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}\right) - \left(x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}\right) =$$
$$=(x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Демек, $\overline{AB}$ вектордың координаталары B нүктесінің координаталары мен A нүктесінің сәйкес координаталарының айырымына тең:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Сондықтан $\overline{AB}$ векторының ұзындығы:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (3.8)$$

§ 2. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

$\bar{a}$ мен $\bar{b}$ нөлдік емес векторлардың арасындағы φ бұрыш деп бас нүктелерін O нүктеге көшіргендегі OA мен OB сәулелерінің арасындағы бұрыштың кішісі айтылады; яғни $0 \le \varphi = \left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) \le \pi$

Анықтама 2.1. $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларының $\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$ скаляр көбейтіндісі деп осы векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы φ бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең санды (скалярды) атайды:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi. \qquad (3.9)$$

Вектордың проекциясы туралы (3.1) формуланы ескерсек

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = |\bar{a}| \ \text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \ \text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}. \qquad (3.10)$$

2.1. Скаляр көбейтіндінің негізгі қасиеттері

1. $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \left(\bar{b}, \bar{a}\right)$ (орын ауыстыру қасиеті)

Дәлелдеуі: Бұл теңдіктің дұрыстығы, косинустың жұп функция екендігін ескерсек, (3.9) формуладан тікелей шығады.

2. $\left(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \bar{b}\right) + (\bar{a}, \bar{c})$ (үлестірімдік қасиеті)

Дәлелдеуі: (3.10) теңдіктер бойынша

$$\left(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}\right) = |\bar{a}| \cdot \text{Пр}_{\bar{a}}\left(\bar{b} + \bar{c}\right) = |\bar{a}|\left(\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b} + \text{Пр}_{\bar{a}}\bar{c}\right) =$$
$$= |\bar{a}|\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b} + |\bar{a}|\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{c} = \left(\bar{a}, \bar{b}\right) + (\bar{a}, \bar{c}).$$

3. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$ (терімділік қасиеті).

Дәлелдеуі: $(\lambda\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}|.\ \text{Пр}_{\bar{b}}\lambda\bar{a} = \lambda|\bar{b}|\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \lambda\left(\bar{a}, \bar{b}\right).$

4. $\overline{a^2} = |\bar{a}|^2$ (Скаляр квадраттың теріс еместік қасиеті).

Дәлелдеуі: $\overline{a^2} = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0 = |\bar{a}|^2.$

Дербес жағдайда $\overline{i^2} = \overline{j^2} = \overline{k^2} = 1.$

$\bar{a} \perp \bar{b}$ болса, онда $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ болады, керісінше $\bar{a} \ \bar{b} = 0$ болса $\varphi = \pi/2$ болып, (3.9) формула бойынша $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ болады. $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ болса, $\bar{a} \ne \bar{0}, \bar{b} \ne \bar{0}$ болғанда (3.9) теңдік бойынша $\cos\varphi = 0$, бұдан $\varphi = \pi/2$.

2.2. Тікбұрышты декарт координаталарында скаляр көбейтіндіні өрнектеу

Теорема 3.5. Тікбұрышты координаталарда $\bar a = x_1\bar i + y_1\bar j + z_1\bar k$, $\bar b = x_2\bar i + y_2\bar j + z_2\bar k$ векторларының скаляр көбейтіндісі олардың сәйкес координаталары көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$\bar a \cdot \bar b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{3.11}$$

Дәлелдеуі: Тікбұрышты $(\bar i, \bar j, \bar k)$ базистік векторлар үшін (3.9) формула бойынша

$$\bar i \cdot \bar i = 1, \bar i \cdot \bar j = 0, \bar i \cdot \bar k = 0, \bar j \cdot \bar j = 1, \bar j \cdot \bar k = 0, \bar k \cdot \bar i = 0, \bar k \cdot \bar j = 0, \bar k \cdot \bar k = 1$$

екедігін ескерсек

$$\bar a \cdot \bar b = (x_1\bar i + y_1\bar j + z_1\bar k)(x_2\bar i + y_2\bar j + z_2\bar k) =$$

$$= x_1x_2(\bar i, \bar i) + x_1y_2(\bar i, \bar j) + x_1z_2(\bar i, \bar k) + y_1x_2(\bar j, \bar k) +$$

$$+ y_1y_2(\bar j, \bar j) + y_1z_2(\bar j, \bar k) + z_1x_2(\bar k, \bar i) + z_1y_2(\bar k, \bar j) + z_1z_2(\bar k, \bar k)$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Салдар 2.1. $\bar a = \bar b$ болса, $\bar a^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\bar a|^2$ (3.11a)

Бұл теңдік тікелей (3.11) теңдіктен шығады.

2.3. Скаляр көбейтіндінің кейбір қолданылулары

1. Екі вектор арасындағы бұрыш.

(3.9) формула бойынша

$$\cos\varphi = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar a| \cdot |\bar b|}, \text{ яғни } \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{3.12}$$

Дербес жағдайда, $\bar a \perp \bar b$ болса

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{3.13}$$

2. Вектордың берілген бағытқа проекциясы. (3.10) формулалардан, $\vec a$ векторының $\vec b$ бағыты бойынша проекциясы

$$\text{Пр}_{\bar b}\bar a = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar b|}, \ \text{Пр}_{\bar a}\bar b = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar a|}, \text{ яғни}$$

$$\text{Пр}_{\bar b}\bar a = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \text{Пр}_{\bar a}\bar b = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \tag{3.14}$$

3. Тұрақты күштің жұмысы

Материалдық нүкте түзу бойымен O нүктеден B нүктеге, $\overline{OB}$ мен φ бұрыш жасайтын тұрақты $\bar F$ күш әсерімен жылжысын. Физикадан белгілі болғандай $\bar F$ күштің $\bar S = \overline{OB}$ жылжудағы орындаған жұмысы $A = |\bar F| \cdot |\bar S| \cdot \cos\varphi$, (сурет 3.12), яғни

$$A = \bar F \cdot \bar S. \tag{3.15}$$

Мысал 2.1. $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторларының ұзындықтары $|\overline{a}| = 6, |\overline{b}| = 4$ болып, арасындағы бұрыштары 60°, 90°, 120°, 180° болғандағы векторлардың скаляр көбейтіндісін табу керек.

Шешуі. (3.9) формула бойынша:

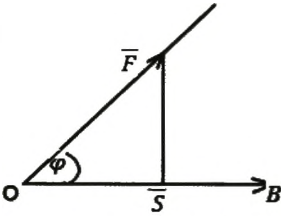
1)$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cdot \cos\varphi_1 = 6 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12;$

2) $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cdot \cos\varphi_2 = 6 \cdot 4 \cdot \cos 90° = 24 \cdot 0 = 0;$

3) $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cdot \cos\varphi_3 = 6 \cdot 4 \cdot \cos 120° = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -12;$

4) $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cdot \cos\varphi_4 = 6 \cdot 4 \cdot \cos 180° = 6 \cdot 4 \cdot (-1) = -24.$

Мысал 2.2. $\overline{a} = \{1, -2, 2\}, \overline{b} = \{2, -2, -1\}$ векторларының скаляр көбейтіндісі мен олар арасындағы бұрышты табу керек; $2\overline{a^2} - 4\overline{a}\overline{b} + 5\overline{b^2}$ өрнектің мәні неге тең?



Сурет 3.12

Шешуі: (3.11) формула бойынша:

$\overline{a}\,\overline{b} = 1.2+(-2)(-2)(-2) + 2(-1) = 4.$

(3.11a) формула бойынша:

$|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, |\overline{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3.$

(3.12) формула бойынша:

$cos(\overline{a}\,\hat{;}\,\overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$; демек $(\vec{a}, \widehat{\ } \vec{b}) = \arccos\frac{4}{9}$;

$\overline{a^2} = |\overline{a}|^2 = 3^2 = 9,\ \overline{b^2} = |\overline{b}|^2 = 3^2 = 9, \overline{a} \cdot \overline{b} = 4$ болғандықтан,

$2\overline{a^2} - 4\overline{a}\,\overline{b} + 5\overline{b^2} = 2 \cdot 9 - 4 \cdot 4 + 5 \cdot 9 = 47.$

Мысал 2.3. Материалдық нүкте $\overline{F} = \{2, -1, -4\}$ күш әсерімен түзу бойымен $M(1, -2, 3)$ нүктеден $N(5, -6, 1)$ нүктеге дейін жылжығанда орындалатын жұмысты есептеу керек.

Шешуі. (3.15) формула бойынша $A = \overline{F} \cdot \overline{S}$, вектор $\overline{S} = \overline{MN}$ (3.6) формула бойынша;

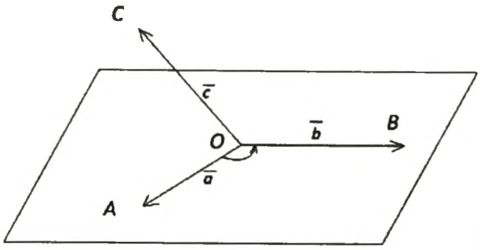
$\overline{S} = \{5 - 1, -6 - (-2), 1 - 3\} = \{4; -4, -2\}$. Онда

$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = 2 \cdot 4 + (-1)(-4) + (-2)(-4) = 20$ (жұмыс бірлігі).

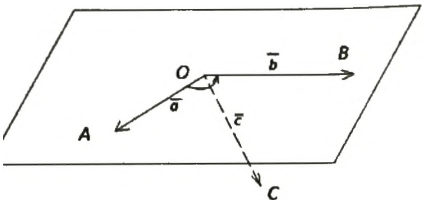
§ 3. Векторлардың векторлық көбейтіндісі

3.1 Оң және сол векторлар үштігі. Векторлық көбейтінді

Анықтама 3.1. Бас нүктелері ортақ бір O нүктесіне келтірілген компланар емес, реттелген $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ векторлар үштігі үшін $\overline{c}$ вектор ұшынан қарағанда $\overline{a}$ векторының $\overline{b}$ векторына қысқаша бұрылуы сағат тіліне қарама-қарсы бағытта болса, онда $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ -оң үштік векторлар, ал сағат тілімен бағыттас болса, онда $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ -сол үштік векторлар деп аталады (сурет 3.13, сурет 3.14).



Сурет 3.13



Сурет 3.14

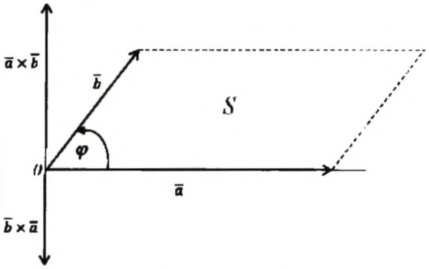
Жалпы алғанда $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ үш вектордан алты үштік жасауға болады:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c};\ \bar{b}, \bar{c}, \bar{a};\ \bar{c}\ \bar{a}, \bar{b},;\ \bar{b}, \bar{a}, \bar{c};\ \bar{a}, \bar{c}, \bar{b};\ \bar{c}, \bar{b}, \bar{a}.$$

Бұлардың алдынғы үшеуі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ үштікке бағыттас, ал соңғы үшеуі қарама-қарсы бағытталған.

Ескерту 3.1. Компланар векторлар үшін оң және сол үштік ұғымдары мағынасын жояды.

Анықтама 3.2. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}]$ векторын атайды:

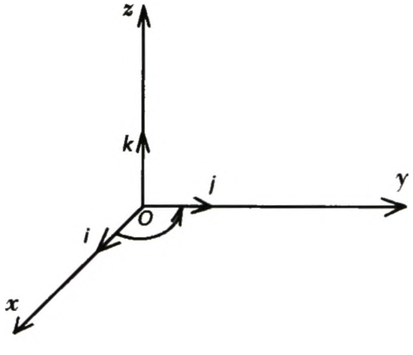


Сурет 3.15

1) $\vec{c}$ векторы $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына перпендикуляр;

$$2)\ |\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi, \varphi = (\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}); \qquad (3.15)$$

3) Бағыты $\bar{c}$ векторының ұшынан қарағанда $\bar{a}$-дан $\bar{b}$-ға дейінгі қысқаша бұрылуы сағат тіліне қарама-қарсы бағытта болады (оң үштік) (сурет 3.15).



Сурет 3.16

Векторлық көбейтіндінің анықтамасынан бірлік векторлар $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$-лар үшін (сурет 3.16) келесі қатынастар тікелей шығады:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$$

Мысал ретінде $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$ екендігін дәлелдейік.

1) $\bar{k} \perp \bar{i},\ \bar{k} \perp \bar{j}$

2) $|\bar{k}| = 1$ әрі $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}|\,|\bar{j}| \cdot \sin 90° = 1$.

3) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлары оң үштік құрайды. Басқа теңдіктер де осылайша дәлелденеді.

3.2. Векторлық көбейтіндінің қасиеттері

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-(\bar{b}\times\bar{a})$.

Дәлелдеуі. $\bar{a}\times\bar{b}$ мен $\bar{b}\times\bar{a}$ векторлары коллинеар, модульдері бірдей (параллелограмм ауданы), бірақ бағыттары қарама-қарсы, себебі, $\bar{a},\bar{b},\bar{a}\times\bar{b}$ оңүштікті, ал $\bar{a},\bar{b},\bar{b}\times\bar{a}$, сол үштікті құрайды. Демек, $\bar{a}\times\bar{b}=-(\bar{b}\times\bar{a})$.

2. $\lambda\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})$.

Дәлелдеуі. $\lambda>0$ болсын. $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$ векторы $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларына перпендикуляр. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b}$ векторы да $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларына перпендикуляр, себебі $\bar{a}$ $(\lambda\bar{a})$, векторлары бір жазықтықта жатады. Демек, $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$ және $\lambda\bar{a}\times\bar{b}$ векторлары коллинеар. Бағыттары да дәл келуі айқын. Ұзындықтары да бірдей:

$$|\lambda(\bar{a}\times\bar{b})|=\lambda|\bar{a}\times\bar{b}|=\lambda|\bar{a}||\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\hat{;}\bar{b}),$$

$$|(\lambda\bar{a})\times\bar{b}|=|\lambda\bar{a}||\bar{b}|\cdot\sin(\lambda\bar{a}\hat{;}\bar{b})=\lambda|\bar{a}||\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\hat{,}\bar{b}).$$

Сондықтан $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=\lambda\bar{a}\times\bar{b}$.

$\lambda<0$ болғанда да, осы сияқты дәлелденеді.

3. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары коллинеар болуы үшін, олардың векторлық көбейтіндісі нөлдік вектор болуы қажетті және жеткілікті, яғни $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$; $\bar{a}\neq 0,\bar{b}\neq 0$.

Қажеттілігі. Егер $\bar{a}\parallel\bar{b}$ болса, олар арасындағы бұрыш 0, не π болады. Онда $\bar{a}\times\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\hat{;}\bar{b})=0$. Демек, $\bar{a}\times\bar{b}=0$.

Жеткіліктілігі: Егерде $\bar{a}\times\bar{b}=0$ болса, онда $|\bar{a}||\bar{b}|\cdot\sin\varphi=0$. Бұдан $\sin\varphi=0$, яғни $\varphi=0$, не $\varphi=\pi$ болады. Демек, $\bar{a}\parallel\bar{b}$

Дербес жағдайда, $\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$ болады.

4. Векторлық көбейтінді үлестірімдік қасиетке де ие:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$$

Дәлелдеуі салдар 4.1 де көрсетілген.

3.3. Векторлық көбейтіндіні декарт координаталары арқылы өрнектеу

Теорема 3.6. $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$ мен $\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$ векторларының векторлық көбейтіндісі:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\qquad(3.16)$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. Векторлық көбейтіндінің қасиеттерін ескеріп, үшмүшені үшмүшеге көбейтсек:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})\times(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})=$$

$$=x_1x_2(\bar{i}\times\bar{i})+y_1x_2(\bar{j}\times\bar{i})+z_1x_2(\bar{k}\times\bar{i})+x_1y_2(\bar{i}\times\bar{j})+$$

$$+y_1y_2(\bar{j}\times\bar{j})+z_1y_2(\bar{k}\times\bar{j})+x_1z_2(\bar{i}\times\bar{k})+z_1z_2(\bar{k}\times\bar{k}).$$

Енді $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ бірлік векторлар оң үштік құрайтынын, әрбір екеуі өзара перпендикуляр екендігін және векторлық көбейтіндінің анықтамасын ескерсек:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0,\ \bar{i}\times\bar{j}=-\bar{j}\times\bar{i}=\bar{k},$$
$$\bar{j}\times\bar{k}=-\bar{k}\times\bar{j}=\bar{i},\ \bar{k}\times\bar{i}=-\bar{i}\ \times\bar{k}=\bar{j}.$$

Бұл теңдіктерді пайдалансақ:

$$\bar{a}\times\bar{b}=-y_1x_2\bar{k}+z_1x_2\bar{j}+x_1y_2\bar{k}-z_1y_2\bar{i}-x_1z_2\bar{j}+y_1z_2\bar{i}=$$
$$=(y_1z_2-z_1y_2)\bar{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\bar{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\bar{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}\bar{i}+\begin{vmatrix}z_1 & z_2\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Теорема дәлелденді.

3.4. Векторлық көбейтіндінің кейбір қолданулары

1. Векторлардың коллинеарлығын анықтау.

Егер $\bar{a}\ \parallel\ \bar{b}$ болса, $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ болады және керісінше

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}\leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}\leftrightarrow\bar{a}\ \parallel\ \bar{b}.$$

2. Параллелограммның және үшбұрыштың ауданын есептеу.

Векторлық көбейтіндінің анықтамасына сәйкес $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$. Яғни $S_{\text{пар}}=\|\bar{a}\times\bar{b}\|$, демек $S_{\Delta}=0{,}5\|\bar{a}\times\bar{b}\|$.

3. Екі вектор арасындағы бұрышты анықтау.

(3.15) формуладан $\sin\varphi=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$

Мысал 3.1. $\bar{a}=\{1,-2,2\}$, $\bar{b}=\{3,0,4\}$ векторлары берілген. Табылсын:

а) $\bar{a}\times\bar{b}$ векторлық көбейтінді;

б) екі вектордың арасындағы бұрыш;

в) Осы векторларға құрылған параллелограмм ауданы;

г) OAB үшбұрыш ауданы.

Шешуі. а) (3.16) формула бойынша:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=8\bar{i}+8\bar{j}+8\bar{k}.$$

(3.15) формуланы қолдансақ:

$$\text{б)}\quad\sin\varphi=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{|8\bar{i}+10\bar{j}+6\bar{k}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\ \sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{8^2+10^2+6^2}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{200}}{3\cdot5}=\frac{10\sqrt{2}}{15}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=;\varphi=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

в) Векторлық көбейтіндінің геометриялық мағынасын ескерсек, параллелограмм ауданы:

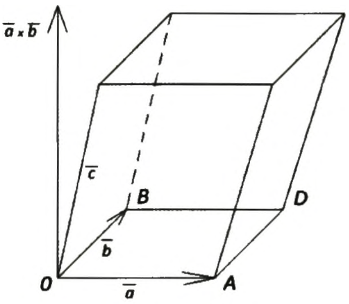
$$S = \left\|\bar a \times \bar b\right\| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2} = 10\sqrt{2} \text{ кв. б.}$$

г) *OAB* үшбұрыштың ауданы осы параллелограмм ауданының жартысы болады:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left\|\bar a \times \bar b\right\| = \frac{1}{2}10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ кв. б.}$$

§ 4. Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама 4.1. $\bar a, \bar b$ және $\bar c$ үш вектордың аралас көбейтіндісі деп $\bar a \times \bar b$ векторлық көбейтіндіні $\bar c$ векторына скаляр көбейткендегі санды атайды.



Сурет 3.17

Аралас көбейтінді $\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c$, немесе $\bar a\, \bar b\, \bar c$ түрінде белгіленеді.

$\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c$ өрнектің геометриялық мағынасын айқындайық. Скаляр көбейтіндінің анықтамасына сүйеніп $\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c = \left|\bar a \times \bar b\right| \text{Пр}_{\bar a \times \bar b}\bar c = |\bar a|\left|\bar b\right| \sin\varphi \cdot \text{Пр}_{\bar a \times \bar b}\bar c$ түрінде жазуға болады. Мұндағы $|\bar a|\left|\bar b\right|\sin\varphi$, шамасы $\bar a$ мен $\bar b$ векторларына құрылған *OADB* параллелограмм ауданы, ал $\text{Пр}_{\bar a \times \bar b}\bar c$ шамасы $\bar a\, \bar b\, \bar c$ векторларына құрылған параллелопипедтің *OADB* жағына жүргізілген биіктік. Демек, $\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c$ аралас көбейтінді $\bar a, \bar b, \bar c$ векторларына салынған параллелопипедтің көлемін анықтайды. $\bar a, \bar b, \bar c$ оң үштік болса “+” таңбамен, сол үштік болса “–” таңбамен шығады (сурет 3.17).

Сондықтан

$$\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c = \pm V, \tag{3.17}$$

яғни $V_{\text{пар-д}} = \left|\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c\right|$.

4.1. Аралас көбейтіндінің қасиеттері

1. Көбейткіштер циклді түрде орнын ауыстырғанда аралас көбейтінді өзгермейді:

$$\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c = \left(\bar b \times \bar c\right) \cdot \bar a = \left(\bar c \times \bar a\right) \cdot \bar b .$$

Шынында да, бұл жағдайда параллелепипедтің көлемі де, қабырғаларының бағыты да өзгермейді.

2. Векторлық көбейтінді мен скалярлық көбейтіндінің орнын ауыстырғанда аралас көбейтінді өзгермейді. Яғни

$$\left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c = \bar a \cdot \left(\bar b \times \bar c\right)$$

Шынында да, $(\bar a \times \bar b)\cdot \bar c = \pm V$ және $\bar a(\bar b \times \bar c) = (\bar b \times \bar c)\cdot \bar a = \pm V$. Бұл теңдіктердің оң жағындағы таңбалары бірдей болады, себебі $\bar a, \bar b, \bar c$ мен $\bar b, \bar c, \bar a$ – бір бағыттағы үштіктер.

2'. Нөлдік емес $\bar a, \bar b, \bar c$ векторлар үшін $\bar a\,\bar b\,\bar c = 0$ болуы үшін бұл векторлар компланар, тек компланар болуы керек.

Бұлай емес деп ұйғарайық. Онда көлемі $V \neq 0$ параллелопипед салуға болар еді, ал $\bar a \bar b \bar c = \pm V$ болғандықтан бұл ұйғаруымыз дұрыс емес, себебі $\bar a \bar b \bar c = 0$.

Керісінше $\bar a, \bar b, \bar c$ компланар векторлар болсын. Онда $\bar a \times \bar b$ векторы $\bar a, \bar b, \bar c$ үштік жататын жазықтыққа перпендикуляр, демек $(\bar a \times \bar b) \perp \bar c$. Сондықтан $\bar a, \bar b, \bar c = 0$, яғни $\bar a \bar b \bar c = 0$.

3. Векторлық көбейткіштер орнын ауыстырғанда аралас көбейтіндінің таңбасы өзгереді:

$$(\bar a \times \bar b)\bar c = -(\bar b \times \bar a)\bar c, \; (\bar a \times \bar b)\bar c = -(\bar a \times \bar c)\bar b, \; (\bar a \times \bar b)\bar c = -(\bar c \times \bar b)\bar a$$

Бұл жағдайдағы орын ауыстыру векторлық көбейткіштердің орын ауыстыруымен бірдей, сандық таңба өзгереді.

4. Аралас көбейтінді үш көбейткіштің әрбірі бойынша сызықтық қасиетке ие:

$$(\bar a_1 + \bar a_2)\bar b\,\bar c = \bar a_1 \bar b\,\bar c + \bar a_2 \bar b\,\bar c\,;$$
$$\bar a(\bar b_1 + \bar b_2)\,\bar c = \bar a\,\bar b_1 \bar c + \bar a \bar b_2 \bar c\,;$$
$$\bar a\,\bar b(\bar c_1 + \bar c_2) = \bar a\,\bar b\,\bar c_1 + \bar a\,\bar b\,\bar c_2$$

Бұл теңдіктер 1-қасиеттен және скаляр көбейтіндінің 2-үлестірімдік қасиетінен шығады. Мысалы,

$$\bar a\,\bar b(\bar c_1 + \bar c_2) = \left(|\bar a \cdot \bar b|\bar c_1 + \bar c_2\right)(\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c_1) + (\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c_2) = \bar a\,\bar b\,\bar c_1 + \bar a\,\bar b\,\bar c_2$$

Салдар 4.1. Векторлық көбейтінді үлестірілімдік қасиетке ие:

$$(\bar a + \bar b) \times \bar c = (\bar a \times \bar c) + (\bar b \times \bar c)$$

Дәлелдеуі. $\bar d = (\bar a + \bar b) \times \bar c - (\bar a \times \bar c) - (\bar b \times \bar c)$ деп белгілеп, $\bar d = \bar 0$ екендігін көрсету жеткілікті.

Скаляр көбейтінді бірінші көбейткіш бойынша сызықтық қасиетке ие екендігін ескерсек, $(\bar d, \bar d) = \left((\bar a + \bar b) \times \bar c, \bar d\right) - (\bar a \times \bar c, \bar d) - (\bar b \times \bar c, \bar d)$ теңдік алынады. Әрі қарай аралас көбейтінді бірінші көбейткіш бойынша сызықтың қасиетке (4-қасиет) ие болғандықтан,

$$\left([\bar a + \bar b] \times \bar c, \bar d\right) = (\bar a \times \bar c, \bar d) - (\bar b \times \bar c, \bar d)$$

теңдік орындалады. Аралас көбейтіндінің бірінші және үшінші қасиеттері бойынша $(\bar d, \bar d) = 0$ екендігі шығады, бұдан $d = 0$.

4.2. Аралас көбейтіндіні декарт координаталары арқылы өрнектеу

Теорема 3.7. Декарттық координаталарымен берілген $\bar a = x_1\bar i + y_1\bar j + z_1\bar k$, $\bar b = x_2\bar i + y_2\bar j + z_2\bar k$, $\bar c = x_3\bar i + y_3\bar j + z_3\bar k$ векторлардың аралас көбейтіндісі

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix} \qquad (3.18)$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі.

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\cdot\left(x_3\overline{i}+y_3\overline{j}+z_3\overline{k}\right)=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\cdot\overline{k}\right)\cdot\left(x_3\overline{i}+y_3\overline{j}+z_3\overline{k}\right)=$$

$$=\left(\begin{matrix}\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\cdot x_3-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\cdot y_3+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\cdot z_3\\ 0\cdot z_3\end{matrix}\right)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

Мұнда скаляр көбейтіндінің формуласын қолданып, үшінші ретті анықтауышты үшінші жол элементтері бойынша жіктелуін ескердік.

4.3. Аралас көбейтіндінің кейбір қолданулары

1. Параллелопипед және үшбұрышты пирамиданың көлемін анықтау.

$\overline{a},\overline{b}$ және $\overline{c}$ векторларында құрылған параллелопипедтің көлемі $V=\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|$, өйткені $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\pm V$, ал осы векторларда құрылған үшбұрышты пирамиданың көлемі:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right| \qquad (3.19)$$

2. Векторлардың компланарлығын анықтау. $\overline{a}\neq\overline{0}$, $\overline{b}\neq\overline{0}$, $\overline{c}\neq\overline{0}$, векторлар $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$ болғанда, тек сонда ғана компланар болады:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\overline{a},\overline{b},\overline{c}\text{ компланар.} \qquad (3.20)$$

3. Кеңістіктегі векторлардың өзара бағытталуын анықтау.

$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\pm V$ болғандықтан $\overline{a}\overline{b}\overline{c}>0$ болса, $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторлар оң үштікті, ал $\overline{a}\overline{b}\overline{c}<0$ болса, сол үштікті анықтайды.

Мысал 4.1. O (1; 1; 2), A (2; 3; –1), B (2; –2; 4), C (–1; 1; 3) нүктелері тетраэдрдың төбелері. Анықталсын:

а) $\overline{a}=\overline{OA}$, $\overline{b}=\overline{OB}$, $\overline{c}=\overline{OC}$, векторлары қандай үштік құрайды.

б) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторларда құрылған параллелопипедтің көлемі және тетраэдрдің көлемі.

Шешуі. $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ вектоларының координаталары:

$\overline{a}=\overline{OA}=\{2–1; 3–1; –1–2\}=\{1; 2; –3\}$

$\overline{b}=\overline{OB}=\{2–1; –2–1; 4–2\}=\{1; –3; 2\}$

$\overline{c}=\overline{OC}=\{–1–1; 1–1; 3–2\}=\{–2; 0; 1\}$

Демек, аралас көбейтінді (3.18) формула бойынша:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 1\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot(-3)\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-3-2\cdot 5-3\cdot(-6)=5;$$

(3.17) теңдік бойынша $\overline{a}\overline{b}\overline{c}>0$ болғандықтан $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторлары оң үштік құрайды.

$V_{паралл}=\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}\right|=5$; ал $V_{тетраэдр}=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}$

Мысал 4.2. $\overline{a}=\overline{OA}=(1;1;2),\overline{b}=\overline{OB}=(2;1;1),\overline{c}=\overline{OC}=(1;-2;3)$ векторларда құрылған пирамиданың көлемі және осы векторлардың қандай үштік екендігі анықталсын.

Шешуі. (3.18) формула бойынша аралас көбейтіндіні табамыз:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}(-2) & (-1)\\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow\end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-1-9=-10.$$

Аралас көбейтінді теріс сан болғандықтан, берілген векторлар сол үштікті құрайды. Пирамиданың көлемін (3.19) формуланы қолданып табамыз:

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot(-10)\right|=\frac{5}{3}\quad \text{куб бірлік.}$$

Мысал 4.3. $\overline{a}=(1;\ 2;\ -2),\overline{b}=(1;\ -2;\ 1),\ \overline{c}=(5;\ -2;\ -1)$ векторлары компланар екендігі дәлелденсін.

Шешуі. Берілген векторлар компланар болуы үшін (3.20) бойынша, $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$ екендігін тексеру керек:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}(1) & (1)\\ \hookleftarrow & |\\ & \hookleftarrow\end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=0.$$

IV тарау. АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

Аналитикалық геометрия – геометриялық бейнелерді алгебралық әдістермен үйренетін математиканың бір саласы.

Геометриялық бейнелердің ең қарапайымын нүкте деп, ал кез келген геометриялық бейнені белгілі бір қасиетке ие нүктелердің жиыны деп қарау табиғи нәрсе. Аналитикалық геометрияда нүкте сандар арқылы анықталады. Белгілі бір координаталар жүйесінде нүктенің орнын анықтаушы сандар оның координаталары деп аталады. Геометриялық бейнелерді координаталар арқылы үйрену координаталар әдісі деп аталады.

§ 1. Жазықтықтағы сызық теңдеуі

Oxy тікбұрышты декарт координаталар жазықтығында L сызық берілсін.

Анықтама 1.1. Тек қана L сызықта жататын нүктелердің координаталары ғана қанағаттандыратын, x және y айнымалдарды байланыстыратын

$$F(x;\ y) = 0 \qquad (4.1)$$

теңдеу L сызықтың теңдеуі деп аталады.

Мұндағы F қатыс L сызықтың нүктелерінің ортақ геометриялық қасиетін сипаттайды. (4.1) теңдеу L сызықты анықтайды.

L сызықтың полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеуі

$$F(\rho;\ \varphi) = 0 \qquad (4.2)$$

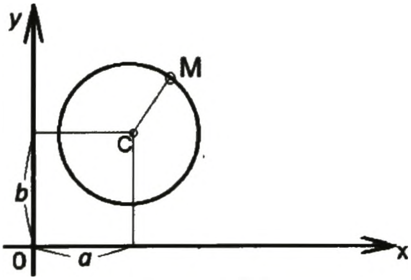
түрінде анықталады. Мұндағы $(\rho;\ \varphi)$ кез келген нүктенің полярлық координаталары.

Жазықтықтағы сызықтарды қарастырғанда екі мәселе туындайды:

а) Берілген сызықтың нүктелерінің ортақ геометриялық қасиеті бойынша, оның теңдеуін табу;

б) қайсыбір сызықтың теңдеуі берілген. Осы теңдеу жәрдемімен сызықтың геометриялық қасиеттерін және жазықтықта орналасуын зерттеу.

Мысал 1.1. Радиусы R, центрі $C(a;\ b)$ нүктесі болатын шеңбердің теңдеуі шығарылсын.



Сурет 4.1

Шешуі. $M(x;\ y)$ шеңбердің кез келген нүктесі болсын. Шеңбердің анықтамасы бойынша $|\overline{CM}| = R$ (сурет 4.1).

Яғни, бұл теңдік нүктелерінің ортақ қасиетін сипаттайды. Екі нүктенің ара қашықтығын есептейтін (1.3) формула бойынша

$$\sqrt{(x-a)^{2} + (y-b)^{2}} = R$$

теңдікті аламыз. Бұл теңдікті квадратқа көтерсек

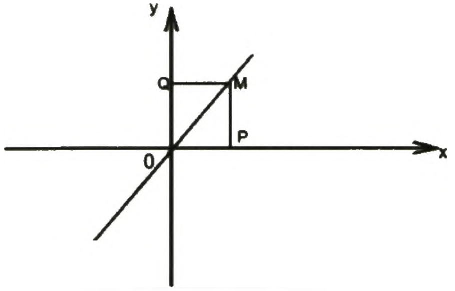
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (4.3)$$

түріндегі шеңбер теңдеуі шығады.

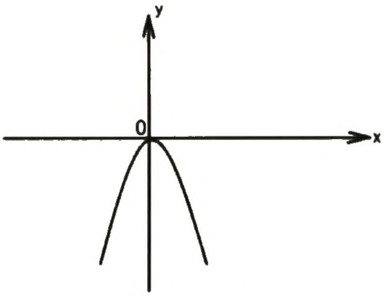
Центрі $O(0; 0)$ нүктесінде жатса, шеңбер теңдеуі

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{4.3a}$$

түрінде болады.



Сурет 4.2



Сурет 4.3

Мысал 1.2. I және III координаталық бұрыштардың биссектрисасының теңдеуі шығарылсын.

Шешуі. $M(x; y)$ берілген биссектрисаның кез келген нүктесі болсын.

Сурет 4.2 бойынша $x = OP = QM$; $y = PM$.

Бұрыш биссектрисасының нүктелері бұрышты құрайтын сәулелерден бірдей қашықтықта жататындықтан

$$y = x$$

теңдік әрқашан орындалады. Демек бұл ізделген биссектрисаның теңдеуі.

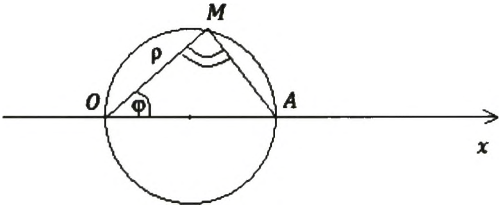
Мысалы 1.3. $y = -x^2$ теңдеумен анықталатын сызық салынсын.

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9	...

Кесте жасасақ табылған (x_k, y_k), $k = 1, 2, ...,$ нүктелердің жиыны қисық сызық —параболаны құрайды (сурет 4.3)

Мысал 1.4. $\rho = a\cos\varphi$ теңдеумен анықталатын сызық салынсын. $a > 0$ берілген сан, ρ және φ полярлық координаталар, $O(0, 0)$, $A(a; 0)$ $M(\rho; \varphi)$. φ-ге әр түрлі $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ мәндер берсек диаметрі $OA = a$ болған шеңбер шығады (сурет 4.4).

Мысал 1.5. $y^2 - x^2 = 0$ теңдеуді, $(y - x)(y + x) = 0$ түрде жазуға болғандықтан, ол $y = x$ және $y = -x$ түзулерді анықтайды.



Сурет 4.4

Мысал 1.6. $x^2 + y^2 = 0$ теңдеу жалғыз ғана (0, 0) нүктесін анықтайды.

Мысал 1.7. $x^2 + y^2 + 9 = 0$ теңдеу ешқандай геометриялық бейнені анықтамайды, себебі кез келген x және y-тер үшін $x^2 + y^2 + 9 > 0$ болады.

Ескерту 1.1. Берілген сызықтың теңдеуін құру үшін мына ережеден пайдаланған жөн:

а) сызықтың кез келген $M(x, y)$ нүктесін аламыз;

б) осы сызықтың $M(x, y)$ нүктелерінің ортақ геометриялық қасиетін геометриялық теңдік арқылы жазамыз;

в) жазылған геометриялық теңдікке кіретін кесінділерді және бұрыштарды M нүктесінің x және y айнымал координаталары және берілген тұрақты шамалар арқылы өрнектейміз.

Екі сызықтың қиылысуы

Егер берілген L_1 және L_2 сызықтар сәйкес түрде $F_1(x; y) = 0$ және $F_2(x; y) = 0$ теңдеулермен анықталса, олардың қиылысу нүктелерін табу

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0 \\ F_2(x;y) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

жүйені шешу мәселесіне келтіріледі. Шынында да, қиылысу нүктесі екі сызықта да жататындықтан, оның координаталары екі сызықтың теңдеуін де қанағаттандыруы шарт.

Мысал 1.8. $y - x^3 = 0$ және $y - 9x = 0$ сызықтардың қиылысу нүктелері табылсын.

Шешуі. Жоғарыда айтылғандай, бұл теңдеулерді жүйе ретінде шешеміз.

$$\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ y - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ y - 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - x^3 = 0 \\ y = 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(9 - x^2) = 0 \\ y = 9x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ 9 - x^2 = 0 \\ y = 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0;\ x_2 = -3;\ x_3 = 3 \\ y_1 = 0;\ y_2 = -27;\ y_3 = 27 \end{cases}.$$

Демек берілген сызықтар (0; 0), (–3; –27), (3; 27) нүктелерінде қиылысады.

§ 2. Жазықтықтағы түзу

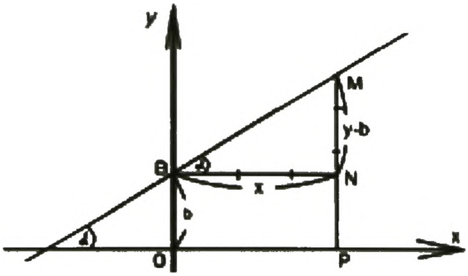
Бұл тақырыптың негізгі мақсаты координаталар жазықтығында әртүрлі орналасуына қарай түзудің теңдеуін шығару және оны зерттеу, бұл теңдеулер жәрдемімен түзуге байланысты кейбір есептерді шешу.

2.1. Түзудің бұрыштық коэффициентті теңдеуі

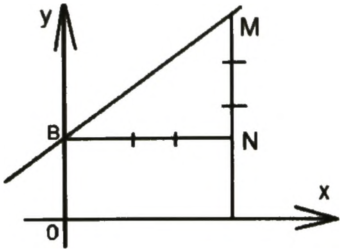
Oxy жазықтықта L түзу берілсін. L түзудің көлбеулік бұрышы α деп Ox осінен L түзуіне дейін, сағат тіліне қарсы бағытпен бұрғандағы алынатын бұрышқа айтылады, ал осы түзудің бұрыштық коэффициенті деп $k = \operatorname{tg}\alpha$ шаманы атайды.

Oy осіне параллель емес L түзуінің теңдеуін табайық: k – оның бұрыштық коэффициенті, $B(0, b)$ – оның Oy осімен қиылысу нүктесі болсын (сурет 4.5).

Айталық, $M(x; y)$ – L түзуінің $B(0, b)$ нүктесінен өзге кез келген (ағымдық) нүктесі болсын. $OB = b$; $OP = x$; $PM = y$ деп белгілейік.



Сурет 4.5



Сурет 4.6

B нүктесінен *Ox* оське параллель *BN* кесінді жүргіземіз. *BNM* тік бұрышты үшбұрыштан: $k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{NM}{BN}$; $NM = y - b$, $BN = OP = x$ екендігін ескерсек $k = \frac{y-b}{x}$; бұл өрнекті түрлендірсек

$$y = kx + b \qquad (4.5)$$

теңдеу шығады. Бұл теңдеу түзудің бұрыштық коэффициентті теңдеуі деп аталады.

Дербес жағдайларда:

а) егер $b = 0$ болса (4.5) теңдеу

$$y = kx \qquad (4.6)$$

түрінде жазылады. Бұл $O(0; 0)$ нүктеден өтетін түзу.

б) егер $L \parallel Ox$, яғни $\alpha = 0$ болса, $k = 0$ болып (4.5) теңдеу

$$y = b \qquad (4.7)$$

түрінде болады.

Енді *Oy* оське параллель түзуді қарастырайық. Бұл түзудің *Ox* осьпен қиылысу нүктесінің абциссасы *a* болсын. Онда тек осы түзудің бойында жататын кез келген нүктенің абсциссасы *a*-ға тең болатындығы айқын. Сондықтан бұл түзудің теңдеуі

$$x = a$$

түрінде болады.

Мысал 2.1. $y = \frac{3}{5}x + 2$ теңдеуімен берілген түзу сызылсын.

Шешуі. Мұнда $k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ және $b = 2$. Сондықтан *Oy* осінде $OB = 2$ бірлік кесінді салып, *B* нүктені белгілейміз. *B* нүктесінен *Ox* оське параллель $BN = 5$ бірлік кесінді саламыз да, *N* нүктесінен *BN*-ға перпендикуляр $NM = 3$ бірлік кесінді саламыз. *B* және *M* нүктелерді қоссақ ізделінген түзуді аламыз (сурет 4.6).

2.2. Берілген нүктеден берілген бағыт бойынша өтуші түзу теңдеуі

L түзу берілген $M_1(x_1; y_1)$ нүктеден өтіп *Ox* осьпен α бұрыш жасасын. *L* түзудің теңдеуін

$$y = kx + b \qquad (4.5)$$

түрінде іздейміз. Мұндағы $k = \text{tg}\alpha$ берілген, ал ізделінді түзу $M_1(x_1; y_1)$ нүктеден өткендіктен $y_1 = kx_1 + b$ теңдік орындалады. Бұл теңдіктен $b = y_1 - kx_1$ b-ның осы мәнін (4.5) теңдеуге қойсақ

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4.6}$$

теңдеу шығады. Бұл L түзудің ізделген теңдеуі.

Ал $M_1(x_1; y_1)$ нүктеден өтіп Oy оське параллель түзу теңдеуі $x = x_1$ болады. Шынында да бұл түзудің барлық нүктелерінің абсциссасы x_1 болып, ординатасы кез келген сан болады.

Ескерту 2.1. Егер (4.6) теңдеуде k айнымал болса, онда (4.6) теңдеу $M_1(x_1; y_1)$ нүктесінен өтетін түзулер шоғын анықтайды.

Мысал 2.2. $M_1(2; 4)$ нүктесінен өтіп, Ox осьпен 135° бұрыш жасайтын түзудің теңдеуі жазылсын.

Шешуі. Мұнда $k = \text{tg}135° = -1$. k-ның бұл мәнін және M_1 нүктесінің координаталарын (4.6) теңдеуге қойсақ $y - 4 = -1(x - 2)$ немесе $y = -x + 6$ теңдеу шығады.

2.3. Берілген екі нүктеден өтуші түзу теңдеуі

$M_1(x_1; y_1)$ және $M_2(x_2; y_2)$ берілген екі нүктеден өтуші түзу теңдеуін іздейміз. Екі жағдайды қарастырамыз.

а) M_1M_2 түзу Oy оське параллель болмасын. $M_1(x_1; y_1)$ нүктесінен өтуші түзулер шоғының теңдеуі

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{4.7}$$

Осы түзулер шоғының M_2 нүктесінен өтетін түзуі үшін $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ шарт орындалады.

Соңғы теңдіктен $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ болады.

k-ның осы мәнін (4.7) теңдеуге қойсақ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

немесе

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{4.8}$$

Бұл ізделген M_1M_2 түзудің теңдеуі.

Мысал 2.3. $M_1(-1; -2)$ және $M_2(3; -4)$ нүктелерден өтетін түзудің теңдеуі табылсын.

Шешуі. (4.8) теңдеуге берілген нүктелердің координаталарын қойсақ

$$\frac{y - (-2)}{-4 - (-2)} = \frac{x - (-1)}{3 - (-1)}$$

немесе

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

ізделген M_1M_2 түзудің теңдеуі шығады.

б) M_1M_2 түзу Oy оське параллель.

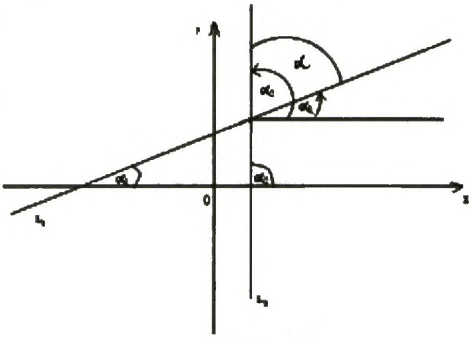
Бұл жағдайда $x_1 = x_2$ болып, ізделген түзудің теңдеуі

$$x = x_1 \qquad (4.9)$$

түрінде болады.

2.4. Екі түзу арасындағы бұрыш. Екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

Түзулердің бұрыштық коэффициентті теңдеулері олар арасындағы бұрыштарды есептеуге қолайлы.



Сурет 4.7

L_1 және L_2 түзулер $y = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$ бұрыштық коэффициентті теңдеулерімен берілсін. L_1 түзу мен L_2 түзу арасындағы бұрыш деп L_1 түзуді сағат стрелкасына қарсы бағытта L_2 түзумен дәлме-дәл түскенше, не параллель болғанша бұрғанда пайда болған бұрышты айтады.

Ол бұрышты α десек, $0 \leq \alpha < \pi$ болады. L_1 және L_2 түзулердің Ox осьпен арасындағы бұрыштарын, сәйкес түрде α_1 және α_2 десек $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$ болады. Сурет 4.7-ден $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha$ немесе $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ екендігі көрінеді. Соңғы теңдіктен

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2 . \mathrm{tg}\,\alpha_1} \ ,$$

немесе, бұрыштық коэффициенттердің белгілеулерін ескерсек,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 . k_1} \qquad (4.10)$$

формула шығады. Бұл формула екі түзу арасындағы сыбайлас бұрыштардың біреуін анықтайды, ал екіншісі $\pi - \alpha$-ға тең.

Егер L_1 және L_2 түзулер параллель болса, онда $\alpha = 0$, яғни $\mathrm{tg}\alpha = 0$ болып, $k_2 - k_1 = 0$ немесе

$$k_1 = k_2 \qquad (4.11)$$

шарт орындалады. Керісінше, егер (4.11) теңдік орындалса $\mathrm{tg}\alpha = 0$ болып, $\alpha_1 = \alpha_2$ екендігі шығады. Яғни L_1 және L_2 түзулер параллель болады.

Демек L_1 және L_2 түзулер параллель болуы үшін (4.11) шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

Егер L_1 және L_2 түзулер перпендикуляр, яғни $\alpha = \frac{\pi}{2}$, болса, онда $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$ болып, $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1}$ қатыстар орындалады, яғни

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (4.12)$$

формула шығады. Бұл екі түзудің перпендикулярлық шарты.

Мысал 2.4. $y = \frac{1}{2}x - 4$ және $y = 3x + 1$ түзулер арасындағы бұрыш табылсын.

Шешуі. Бұл түзулерде $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 3$. (4.10) формула бойынша $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot 3} = 1$. Демек, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Мысал 2.5. $5x + 8y - 1 = 0$ (L_1), $10x + 16y + 7 = 0$ (L_2) және $8x - 5y + 5 = 0$ (L_3) түзулердің өзара параллель және перпендикуляр түзулері көрсетілген.

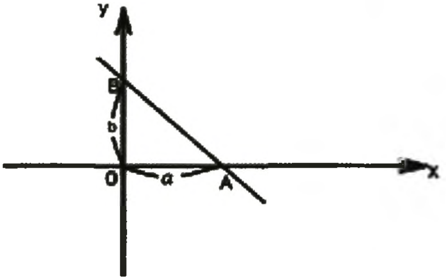
Шешуі. $k_1 = -\frac{5}{8}$, $k_2 = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$, $k_3 = \frac{8}{5}$ болғандықтан (4.10) және (4.11) формулалары бойынша $L_1 \parallel L_2$, $L_1 \perp L_3$, $L_2 \perp L_3$ болады.

2.5. Түзудің кесінділер бойынша теңдеуі

Берілген L түзу Ox осьтен $OA = a$ кесіндіні, Oy осьтен $OB = b$ кесіндіні қиып өтсін. Осы түзудің теңдеуін табамыз. L түзуді $A(a;\ 0)$ және $B(0;\ b)$ екі нүктеден өтуші түзу деп қарап, (4.8) формуладан пайдалансақ (сурет 4.8) $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$ немесе $\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$ теңдік шығады. Соңғы теңдіктен

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4.13)$$

теңдеу шығады. Бұл теңдеу түзудің кесінділер бойынша теңдеуі деп аталады.



Сурет 4.8

Мысал 2.6. Ox осінен шамасы –2-ге және Oy осінен шамасы 4-ке тең кесінділерді қиятын түзудің теңдеуі жазылсын.

Шешуі. $a = -2$, $b = 4$ болғандықтан (4.13) формула бойынша $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$ ізделген түзудің теңдеуі алынады.

2.6. Түзудің жалпы теңдеуі және оны зерттеу

Теорема 4.1. Тікбұрышты координаталар жүйесінде кез келген түзу бірінші дәрежелі

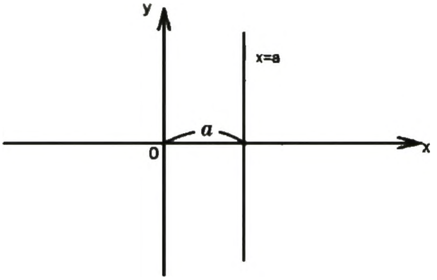
$$Ax + By + C = 0 \qquad (4.14)$$

теңдеумен беріледі және, керісінше, (4.14) теңдеу кез келген A, B, C коэффициентер үшін, $A^2 + B^2 \neq 0$, Oxy тікбұрышты координаталар жүйесінде қайсыбір түзуді анықтайды.

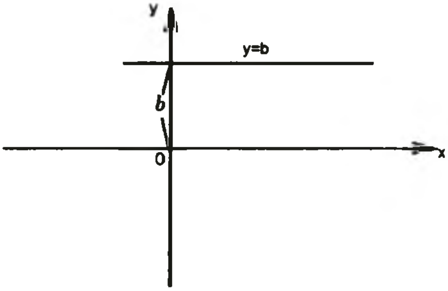
Дәлелдеуі. Шынында да Ox оське көлбеу түзу $y = kx + b$, теңдеумен, ал Ox оське перпендикуляр түзу $x = a$ теңдеумен анықталатыны белгілі. Бұлардың біріншісі (4.14) теңдеуден $A = k$, $B = -1$ және $C = b$ болғанда, ал екіншісі $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$ болғанда алынады. Бірінші тұжырым дәлелденді. Кері тұжырымды дәлелдейміз. (4.14) теңдеу беріліп, онда A және B коэффициенттердің ең болмағанда біреуі нөлге тең болмасын. Егер $B \neq 0$ болса, онда (4.14) теңдеуді

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

түрінде жазуға болады. $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ деп алсақ, түзудің бұрыштық коэффициентті теңдеуі $y = kx + b$ шығады. Егер $B = 0$ болса, онда $A \neq 0$ болып (4.14) теңдеу $x = -\frac{C}{A}$ түрінде болып, $a = -\frac{C}{A}$ деп алсақ $x = a$ түзу шығады. Бұл Ox оське перпендикуляр түзу.



Сурет 4.9



Сурет 4.10

(4.14) теңдеу түзудің жалпы теңдеуі деп аталады. Бұл теңдеуде x, y айнымалдар бірінші дәрежеде болғандықтан, кейде түзуді бірінші ретті сызық деп те атайды.

Енді (4.14) түзудің A, B, C коэффициенттерінің Oxy жазықтықта түзудің орналасуына әсерін зерттейік.

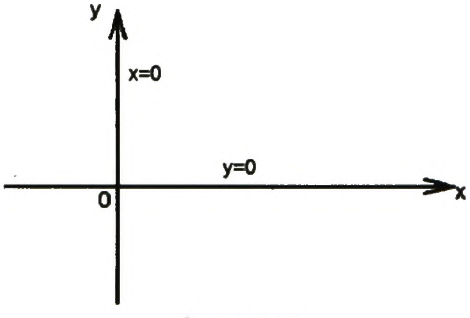
1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ болса, онда (4.14) теңдеу $y = kx + b$ түрінде болып, Ox оське көлбеу түзуді анықтайды (сурет 4.5).

2) $C = 0$ болса (4.14) теңдеу $Ax + By = 0$ түрінде болып, $O(0, 0)$ нүктесінен өтетін түзуді анықтайды (сурет 4.2).

3) $B = 0$, $A \neq 0$ болса, (4.14) теңдеу $Ax + C = 0$ түрінде болып, $x = a$ түзуді, $a = -\frac{C}{A}$ анықтайды, ол Oy оське параллель түзу (сурет 4.9).

4) $A = 0$, $B \neq 0$ болса, (4.14) теңдеу $By + C = 0$ түрінде болып, $y = b$ түзуді, мұнда $b = -\frac{C}{B}$, анықтайды (сурет 4.10).

5) $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$ болса, (4.14) теңдеу $Ax = 0$ немесе $x = 0$ түрінде болып, Oy осьті анықтайды (сурет 4.11).

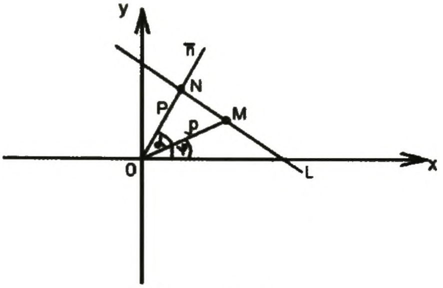


Сурет 4.11

6) $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$ болса, (4.14) теңдеу $By = 0$ немесе $y = 0$ түрінде болып, Ox осьті анықтайды (сурет 4.11).

2.7. Түзудің нормаль теңдеуі. Нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық

Oxy жазықтықта L түзу берілсін. $O(0;\ 0)$ нүктеден L түзуге перпендикуляр $\overline{n}$ векторын өткіземіз, оны L түзуге нормаль деп атаймыз. $\overline{n}$ мен L-дің қиылысу нүктесін N арқылы белгілейік (сурет 4.12). Нормальда O нүктеден N нүктеге қарай бағыт енгізсек, ол оське айналады. Егер N және O нүктелері беттессе, онда бағыт ретінде мүмкін болған екі жағдайдың кез келгені алынады. $\overline{n}$ осьпен Ox ось арасындағы бұрышты α, $p = |ON|$ деп белгілейік. Мұнда $p \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 2\pi$



Сурет 4.12

α және p сандары берілген деп L түзудің теңдеуін шығару керек. L түзудің кез келген M нүктесінің полярлық координаталары (ρ, φ) болсын, мұнда 0 полюс, Ox полярлық ось. Егер O және N нүктелері беттеспесе (сурет 4.12), ONM тік бұрышты үшбұрыштан мына қатысты аламыз:

$$p = \rho\cos(\alpha - \varphi) = \rho\,(\cos\alpha \cdot \cos\varphi + \sin\alpha\ \ \sin\varphi\ )$$

Бұл теңдікті

$$\rho\ \ \cos\varphi \cdot \cos\alpha + \rho\ \ \sin\varphi\ \ \sin\alpha - p = 0 \tag{4.15}$$

түрінде жазсақ және $x = \rho\ \ \cos\varphi, y = \rho\ \ \sin\varphi$ формулаларды ескерсек

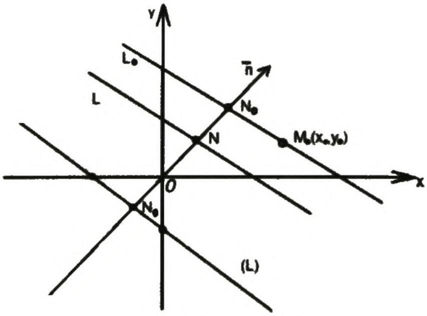
$$x\ \ \cos\alpha + y\ \ \sin\alpha - p = 0 \tag{4.16}$$

теңдеу шығады. (4.16) теңдеу L түзудің Oxy тікбұрышты координаталар жүйесіндегі нормаль теңдеуі деп аталады. Ал (4.15) теңдеу L түзудің полярлық координаталардағы теңдеуі. Егер O және N нүктелері беттессе, $p = 0$ болып, L түзудің кез келген M нүктесі үшін $\cos(\varphi - \alpha) = 0$ теңдік орындалады. Соңғы теңдіктің екі жағын да ρ-ға көбейтсек $\rho\cos(\varphi - \alpha) = 0$ немесе $\rho \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha + \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha = 0$ теңдік аламыз. Тікбұрышты координаталарға өтсек $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha = 0$ теңдеу шығады.

Түзудің (4.16) нормаль теңдеуі жәрдемімен жазықтықта нүктеден түзуге дейінгі арақашықтықты есептеуге болады.

$M_0(x_0,\ \ y_0)$ нүктеден $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$ (L) түзуге дейінгі қашықтықты табайық.

M_0 нүкте арқылы L түзуге параллель етіп L_0 түзу жүргіземіз. $p_0 = |ON_0|$ деп белгілейміз, мұндағы N_0 нүкте $\overline{n}$ нормаль мен L_0 түзудің қиылысу нүктесі (сурет 4.13).



Сурет 4.13

Төмендегі екі жағдай болуы мүмкін.

1. N және N_0 нүктелері O нүктесінің бір жағында жатады. Онда L_0 түзудің теңдеуі $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p_0 = 0$ түрінде болады. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі L_0 түзуде жататындықтан $x_0 \ \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha - p_0 = 0$ болады. Бұл теңдіктен $p_0 = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \ \sin\alpha$ екендігі шығады. Бұл жағдайда

$$d = |p_0 - p| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

2. N және N_0 нүктелер O нүктесінің екі жағында жатады. Онда L_0 түзудің теңдеуі $x \ \cos(\pi + \alpha) + y \ \sin(\pi + \alpha) - p_0 = 0$ түрінде болады $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінің L_0 түзуінде жататындығынан

$$p_0 = x_0 \ \cos(\pi + \alpha) + y_0 \ \sin(\pi + \alpha) = -x_0 \ \cos\alpha - y_0 \ \sin\alpha$$

теңдік орындалады. Бұл жағдайда

$$d = |p_0 + p| = |-x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha + p| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

болады.

Сонымен екі жағдайда да

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p \qquad (4.17)$$

формула орынды екендігі шығады. (4.17) формуладан көрінгендей берілген $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінен L түзуге дейінгі ара қашықтық L түзудің нормаль теңдеуінің сол бөлігіндегі өрнектегі айнымал x және y-тердің орнына M_0 нүктесінің координаталарын қойғандағы санның абсолют шамасына тең болады.

Енді түзудің жалпы теңдеуін нормаль түрге қалай келтірілуін көрсетейік.

Қайсыбір түзудің жалпы теңдеуі

$$Ax + By + C = 0, \qquad (4.14)$$

ал нормаль теңдеуі

$$x \ \cos\alpha + y \ \sin\alpha - p = 0 \qquad (4.16)$$

болсын. (4.14) және (4.16) теңдеулер L түзудің теңдеулері болғандықтан олардың коэффициенттері пропорционал болады. (4.14) теңдеудің екі бөлігінде еркін көбейткіш $\mu \neq 0$ санға көбейтсек, мына теңдеуді аламыз:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0 \qquad (4.14а)$$

Соңғы теңдеудегі $\mu \neq 0$ саны пропорциональдық коэффициент болғанда ғана, ол теңдеу (4.16) түріне келеді, яғни

$$\mu A = \cos\alpha, \ \mu B = \sin\alpha, \ \mu C = -p.$$

Бұл теңдіктердің алғашқы екеуін квадраттап қоссақ

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

яғни $\mu^2(A^2 + B^2) = 1$, немесе

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (*)$$

μ санының таңбасы $\mu C = -p$ теңдігінен анықталады, яғни μ -дің таңбасы бос мүше C-ның таңбасына қарама қарсы таңбамен алынады.

μ саны нормаль көбейткіш деп аталады. μ -дің табылған (*) мәнін (4.14а) теңдеуге қойсаң

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (4.16а)$$

теңдеу шығады. Бұл теңдеу L түзудің (4.16) түріндегі нормаль теңдеуі.

Мысал 1.13. $M(3;\ 8)$ нүктеден $14x - 13y + 5 = 0$ түзуге дейінгі қашықтық есептелсін

Шешуі. Алдымен берілген түзу теңдеуін нормаль түрге келтіреміз:

$$\frac{14x - 13y + 5}{-\sqrt{14^2 + 13^2}} = 0,$$

өйткені $C = 5 > 0$, болғандықтан, (*) формула бойынша $\mu = -\frac{1}{\sqrt{14^2+(-13)^2}}$.

Енді x, y-тің орнына (4.17) формуланы пайдаланып $x_0 = 3$, $y_0 = 8$ мәндерді қоямыз, нәтижеде

$$d = \left|\frac{14 \cdot 3 - 13 \cdot 8 + 5}{-\sqrt{365}}\right| = \left|\frac{-57}{-\sqrt{365}}\right| = \left|\frac{57}{\sqrt{365}}\right|$$

екендігі шығады. Абсолют шама белгісінің ішіндегі санның оң сан болғандығы $M(3;\ 8)$ және $O(0;\ 0)$ нүктелер берілген түзудің әртүрлі жақтарында орналасқанын білдіреді.

§ 3. Жазықтықтағы екінші ретті сызықтар

Бұл тақырыпта теңдеулері Oxy тікбұрышты Декарт координаталар жүйесінде екінші дәрежелі болатын шеңбер, эллипс, гипербола және парабола деп аталатын сызықтар қарастырылады. Екінші дәрежелі сызықтың жалпы теңдеуі

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (4.18)$$

түрінде жазылады.

3.1. Шеңбер

Центрі $C(a;\ b)$ нүктесінде, радиусы R болатын шеңбер, $C(a;\ b)$ нүктесінен бірдей R қашықтықта жатқан нүктелер жиыны, теңдеуі

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (4.3)$$

екендігін шығарған едік (сурет 4.1). (4.3) теңдеу шеңбердің канондық (қарапайым) теңдеуі деп аталады.

(4.3) теңдеуді жақшаларды ашып, түрлендіріп

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

түрінде жазуға болады. Бұл теңдеуді жалпы теңдеумен салыстырсақ, теңдеу (4.18) шеңбердің теңдеуі болуы үшін екі шарт орындалуы керек:

1) x^2 пен y^2 өрнектердің алдындағы коэффициенттер өзара тең;

2) xy айнымалдардың көбейтіндісінің коэффициенті нөлге тең.

Кері мәселені қарастырайық. $B = 0$ және $A = C \neq 0$ десек,

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1.18a)$$

теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді түрлендіріп,

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{2E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \quad \text{яғни}$$

$$x^2 + 2x\frac{D}{A} + \left(\frac{D}{A}\right)^2 + y^2 + 2y\frac{E}{A} + \left(\frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} - \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{E}{A}\right)^2 = 0,$$

яғни

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}$$

Бұл теңдіктен, $\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}>0$ болғанда (4.18*a*) теңдеу шеңберді анықтайтыны шығады. Бұл шеңбердің центрі $C\left(-\frac{D}{A},\frac{E}{A}\right)$ нүктесінде, ал радиусы

$$R=\sqrt{\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}}.$$

Егер $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}=0$ болса (4.18*a*) теңдеу $C\left(-\frac{D}{A},\frac{E}{A}\right)$ нүктені анықтайды, $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}<0$ болса ешқандай сызықты анықтамайды.

3.2. Эллипс

1. Элипстің қарапайым теңдеуі

Анықтама 3.1. Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеден ара қашықтықтарының қосындысы тұрақты шама болатын (фокустардың ара қашықтығынан артық) жазықтық нүктелерінің жиыны эллипс деп аталады.

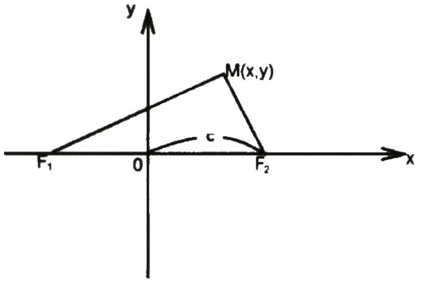
Фокустарды F_1, F_2 деп белгілеп. $|F_1F_2|=2c$ десек, ал кез келген *M* нүктеден фокустарға дейінгі ара ғашықтықтардың қосындысын

$$|F_1M|+|F_2M|=2a \qquad (4.19)$$

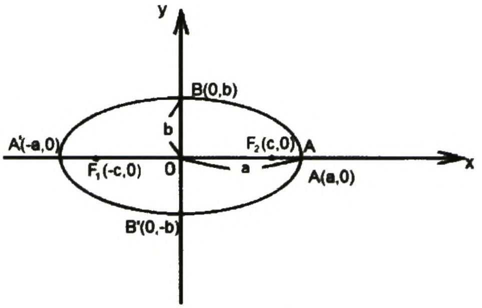
десек, анықтама бойынша, $2a>2c$ яғни $a>c$.

Эллипстің теңдеуін шығару үшін, *Ox* осі ретінде F_1F_2 бағытындағы түзуді, ал координата бас нүктесі *O* ретінде F_1F_2 кесіндінің қақ ортасын аламыз.

Сонда $F_1(-c;\ 0), F_2(c;\ 0)$, болады (сурет 4.14).



Сурет 4.14



Сурет 4.15

Таңдаған *Oxy* координаталар жүйесінде эллипстің кез келген нүктесін *M*$(x;y)$ арқылы белгілесек, $r_1=|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, r_2=|F_2M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ болады. r_1 және r_2 сандары *M* нүктесінің фокальдық радиустары деп аталады.

Осы өрнектерді (4.19) теңдікке қойсақ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (4.20)$$

(4.20) теңдеу таңдап алынған *Oxy* Декарт тікбұрышты координаталар жүйесінде эллипстың теңдеуі болады. Пайдалануға қолайлы болу үшін бұл теңдеуді қарапайым (жәй) түрге келтіреміз. Ол үшін (4.20) теңдеудегі екінші қосылғыш түбірді теңдеудің оң бөлігіне өткізіп, екі бөлігін де квадраттаймыз:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Жақшаларды ашамыз:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Өқсас мүшелерін ықшамдап алынған

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

теңдікті, тағы бір рет квадраттап, ұқсас мүшелерін ықшамдаймыз,

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2,$$

яғни $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Шарт бойынша $a > c$, сондықтан $a^2 - c^2 > 0$.

$a^2 - c^2 = b^2$деп белгілесек, соңғы теңдікті

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

түрінде жазуға болады. Теңдіктің екі бөлігін де a^2b^2-қа бөлсек, соңғы теңдеу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.21)$$

түріне келеді. Бұл теңдеу эллипстің қарапайым теңдеуі деп аталады.

2. Эллипстің пішінін зерттеу

Эллипстің пішінін қарапайым теңдеуі бойынша зерттейміз. (4.21) теңдеуге x және y-тің тек квадраттары ғана кіргендіктен $(x; y)$ нүкте эллипсте жатса $(x; -y)$, $(-x; y)$; $(-x; -y)$ нүктелер де эллипсте жатады. Сол себептен эллипс координата осьтеріне және координата бас нүктесіне (басына) сәйкес симметриялы орналасқан. Демек, эллипс формасын бірінші ширекте үйрену жеткілікті. Бірінші ширектегі нүктелер үшін (4.21) теңдеуді y-ке байланысты шешеміз:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (4.22)$$

Бұдан $|x| \leq a$ екендігі шығады, (4.22) теңдіктен мынадай тұжырымдар жасауға болады:

1) $x = 0$ болғанда $y = b$ болады. Демек, $B(0; b)$ нүкте эллипсте жатады;

2) x айнымал нөлден a-ға дейін өскенде y айнымал кемиді;

3) $x = a$ болғанда $y = 0$ болады. $A(a, 0)$ нүкте эллипсте жатады;

4) $x > a$ болғанда, y-тің нақты мәндері жоқ.

Сондықтан $x > a$ болатын эллипс нүктелері жоқ. Демек, *BA* доға эллипстік бөлігі болады. Одан әрі симметрияға негізделіп эллипстің толық пішінін құрамыз (сурет 4.15).

Симметрия осьтері – эллипстің осьтері деп, осьтердің қиылысу нүктесі элипстің центрі деп, ал эллипстің осьтермен қиылысу нүктелері эллипстің төбелері деп аталады.

$a^2 - c^2 = b^2$ теңдіктен $a > b$ болғандықтан, фокустар арқылы өткен ұзындығы $2a$-ға тең болған ось эллипстің үлкен осі, ұзындығы $2b$-ға тең ось эллипстің кіші осі деп аталады. Сондықтан a – эллипстің үлкен жарты осінің ұзындығы, b – кіші жарты осінің ұзындығы болады.

3. Эллипстің эксцентриситеті

Анықтама 3.2. Эллипстің фокустары арасындағы қашықтық $2c$-ның оның үлкен осінің ұзындығы $2a$-ға қатынасы эллипстің эксцентриситеті деп аталады.

Эксцентриситет ε әрпімен белгіленеді: $\varepsilon = \frac{c}{a}$

$c < a$ болғандықтан $0 < \varepsilon < 1$ болады. $c^2 = a^2 - b^2$ екендігін еске алсақ $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$ – болады. Бұдан $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ Бұл теңдікте a-ны өзгертпей b-ны өзгертейік. Егер $b = a$ болса, онда $\varepsilon = 0$ болады. Егер b-ның мәні a дан 0-ге дейін кемісе, онда ε мәні 0 ден 1-ге дейін өседі, яғни шеңберден бастап жіңішкеленіп барады. Демек эллипстің эксцентриситеті эллипстің жіңішкеленуінің шамасын сипаттайды.

Мысал 3.1. $9x^2 + 25y^2 = 225$ эллипс фокустарының координаталары, эксцентриситеті және абсциссасы 2-ге тең нүктесінің r_1 мен r_2 фокальдың радиустары табылсын.

Шешуі. Эллипс теңдеуінің екі бөлігінде 225-ке бөлеміз:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Бұл теңдеуден $a^2 = 25$, $a = 5$, $b^2 = 9$, $b = 3$ екенін көреміз. $a^2 - c^2 = b^2$ формула бойынша: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Демек, $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$ нүктелер эллипстің фокустары. Эллипстің эксцентриситеті:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$x = 2$ болғанда

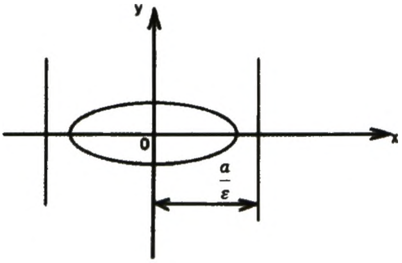
$$r_1 = a + \varepsilon x = 5 + \frac{4}{5} \cdot 2 = 6{,}6,$$

$$r_2 = a - \varepsilon x = 5 - \frac{4}{5} \cdot 2 = 3{,}4.$$

4. Эллипстің директрисалары

Анықтама 3.3. Координата басынан $\frac{a}{\varepsilon}$ қашықтықта үлкен оське перпендикуляр болып симметриялы орналасқан түзулер. (4.21) эллипстің директрисалары деп аталады. $0 < \varepsilon < 1$ болғаны үшін $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Демек директрисалардың теңдеулері:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \qquad (4.23)$$

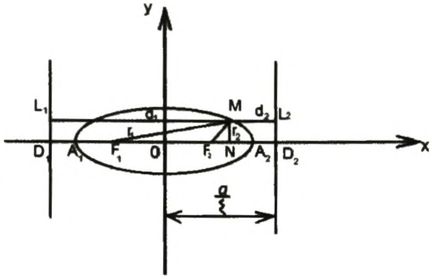


Сурет 4.16

Сондықтан директрисалар эллипстің төбелерінің сыртында орналасқан (сурет 4.16). Директрисалардың мынадай қасиеті бар.

Теорема 4.1. Эллипстің кез келген *M* нүктесінен фокустарына дейінгі ара қашықтықтың сәйкес директрисаларына дейінгі ара қашықтыққа қатынасы эллипстің эксцентриситетіне тең тұрақты шама, яғни

$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$



Сурет 4.17

Дәлелдеуі. $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon, \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ екенін көрсетеміз.

Мұнда: $d_1 = |ML_1|$, $d_2 = |ML_2|$ сандары *M* нүктеден директрисаларға дейінгі қашықтықтар, r_1, r_2 фокальдық радиустар. Сурет 4.17 ден

$$d_1 = |ML_1| = |OD_1| + |NO| = \frac{a}{\varepsilon} + x$$

$$d_2 = |ML_2| = |ND_2| = |OD_2| - |NO| = \frac{a}{\varepsilon} - x$$

екендігі көрінеді.

Демек,

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon, \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Мысал 3.2. Үлкен жарты осі 3 және кіші жарты осі 2 болған эллипстің теңдеуі және оның директрисаларының теңдеулері құрылсын.

Шешуі. Мысалдың шарты бойынша $a = 3$, $b = 2$

Онда эллипстің (4.21) теңдеуі

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

ал эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{9-4}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Сонда іздеген директрисалардың теңдеуі (4.23) формулалар бойынша:

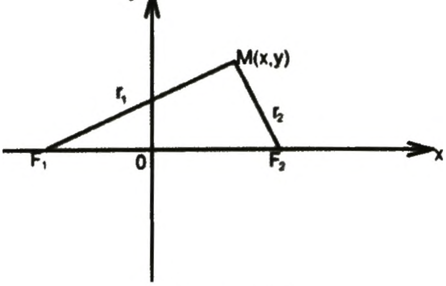
$$x = \pm\frac{3 \cdot 3}{\sqrt{5}} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

3.3. Гипербола

1. Гиперболаның қарапайым теңдеуі

Анықтама 3.4. Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеге дейінгі ара қашықтықтарының айырымының модулі тұрақты шама болатын, фокустарының ара қашықтығынан кем, нүктелер жиыны гипербола деп аталады.

Анықтамада айтылған тұрақты шама фокустар арасындағы қашықтықтан кіші болуы және нөлге тең болмауы шарт.



Сурет 4.18

Фокустарды F_1 және F_2 әріптермен белгілейміз. Гиперболаның қарапайым теңдеуін шығару үшін абсцисса осі ретінде F_1 F_2 түзуді, ал координаталар бас нүктесі ретінде F_1 F_2 кесіндіні тең екіге бөлетін нүктені аламыз (сурет 4.18).

$M(x; y)$ гиперболаның кез келген нүктесі болсын.

$$|F_1F_2| = 2c, \qquad r_1 = |F_1M|, \quad r_2 = |F_2M| \tag{4.24}$$

белгілеулер енгіземіз. r_1, r_2 сандар M нүктесінің фокальдық радиустары деп аталады.

Анықтама бойынша $M(x; y)$ нүкте $|r_1 - r_2| = 2a$ шарт орындалғанда ғана гиперболада жатады. Соңғы теңдіктен

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \tag{4.24a}$$

Гиперболаның ізделген теңдеуін табу үшін (4.24) теңдікте r_1 және r_2-лерді координаталар арқылы өрнектеу керек.

F_1 және F_2 фокустар Ox осьте координата басына симметриялы болғандығы үшін олардың координаталары $(-c; 0)$ және $(c; 0)$ болады. Гиперболаның кез келген $M(x; y)$ нүктесі үшін $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$, арақашықтықтар $r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ болады

Бұл өрнектерді (4.24) теңдікке қойсақ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \tag{4.25}$$

Бұл гиперболаның теңдеуі.

(4.25) теңдеуді ықшамдаймыз. Ол үшін азайтқышты теңдеудің оң бөлігіне өткізіп квадраттаймыз,

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$

немесе,

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Тағы да бір рет квадраттаймыз:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0 \tag{4.26}$$

деп белгілесек, (4.25) теңдеу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ түрде болып, осыдан,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.27}$$

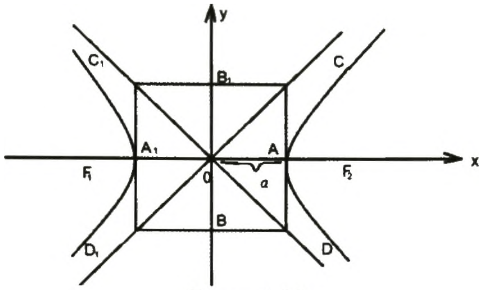
Бұл гиперболаның қарапайым (канондық) теңдеуі деп аталады. Мұндағы x, y – гиперболаның бойынағы кез келген нүктенің айнымал координаталары, a – гиперболаның нақты жарты осі, b – жорамал жарты осі.

2. Гиперболаның пішінін зерттеу

(4.27) теңдеуді y-ке байланысты шешсек:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{4.28}$$

(4.28) теңдеуге x пен y-тің тек жұп дәрежелері кіргендіктен гипербола координата осьтеріне байланысты симметриялы орналасқан. Сондықтан гиперболаның бірінші ширектегі қарастыру жеткілікті.



Сурет 4.19

1) $0 < x < a$ болғанда, y тек жорамал мәндер қабылдайды, яғни бұл аралықта гипербола абсцисса осімен қиылыспайды,

2) егер $x = a$ болса, онда $y = 0$ болады, яғни (a; 0) нүкте гиперболада жатады. Бұл нүктені A мен белгілейік;

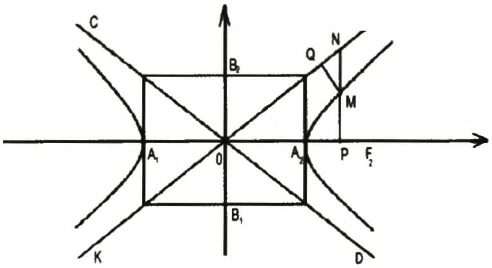
3) егер $x > a$ болса, онда $y > 0$ болады, x өскенде y-те өседі, яғни $x \longrightarrow +\infty$ болғанда $y \rightarrow +\infty$.

Бұл тұжырымдардан гиперболаның бірінші ширектегі доғасы AC сызық екендігін көру қиын емес. Енді симметриядан пайдаланып, қалған ширектердегі гипербола доғаларын сызсақ, гиперболаның CAD және $C_1A_1D_1$ тармақтарына ие боламыз (сурет 4.19).

Фокустардан өтуші симметрия осі гиперболаның фокальдық осі, симметрия осьтерінің қиылысқан нүктесі гиперболаның центрі A(a; 0) және $A_1(-a;\ 0)$ гиперболаның төбелері деп аталады.

Гиперболаның Oy осьпен ортақ нүктесі жоқ. AA_1 кесінді ($|AA_1| = 2a$) гиперболаның нақты осі, BB_1 кесінді ($|BB_1| = 2b$) гиперболаның жорамал осі деп аталады.

3. Гиперболаның асимптоталары



Сурет 4.20

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (4.29)$$

теңдеулермен анықталған екі түзуді қарастырайық. Бірінші ширекте $y = +\frac{b}{a}x$ түзудің теңдеуін гиперболаның (4.28) теңдеуімен салыстырайық (сурет 4.20).

Олардың бірдей абсциссалы нүктелерін сәйкес түрде $N(x;\ Y)$ және $M(x; y)$ әріптермен белгілесек, $Y > y$ екендігі көрінеді.

Сурет 4.20-да $OP = x, PM = y, PN = Y$ Сондықтан $MN = Y - y =$

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) == \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Соңғы теңдіктен $\lim\limits_{x \to +\infty}(Y - y) = 0$ екендігі шығады.

Егер M(x; y) нүктеден $y = +\frac{b}{a}x$ түзуге түсірілген перпендикулярдың табанын Q әрпімен белгілесек, $|QM| < |MN|$ болғандықтан, $\lim\limits_{x \to +\infty}|QM| = 0$ болады.

Бұл тұжырымға симметрия негізінде $y = -\frac{b}{a}x$ түзу үшін гипербола тармақтарын салыстырумен келуге болады.

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

екі түзу (4.27) гиперболаның асимптоталары деп аталады.

Мысал 3.3. Гиперболаның нақты осі 6 жорамал осі 4-ке тең. Гиперболаның және оның асимптоталарының теңдеулері жазылсын.

Шешуі. Мысалдың шарты бойынша $2a = 6$, $2b = 4$, яғни $a = 3$, $b = 2$.

Гиперболаның (4.27) теңдеуінен және асимптоталардың (4.29) теңдеулерінен пайдалансақ, іздеген гиперболаның теңдеуі

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4} = 1,$$

ал асимптоталарының теңдеулері $y = \frac{2}{3}x$; $y =-\frac{2}{3}x$ болады.

4. Гиперболаның эксцентриситеті

Анықтама 3.5. Гипербола фокустары арасындағы қашықтықтың гиперболаның нақты осінің ұзындығына қатынасы, гиперболаның эксцентриситеті деп аталады.

Эксцентриситет ε әрпімен белгіленеді, яғни

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \tag{4.30}$$

Гиперболада $c > a$ болғандығы үшін $\varepsilon > 1$ болады. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ екендігін ескеріп, бұл өрнекті (4.30) формулаға қойсақ,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

теңдік шығады.

Егер a өзгермей b-ның мәні 0-ге жуықтаса ε бірге жуықтайды; бұл жағдайда гипербола фокальдық оське қысыла түседі. Ал өскенде ε да өседі. Бұл жағдайда гипербола тармақтары фокалдық осьтен жайыла түседі.

Демек гиперболаның эксцентриситеті гиперболаның пішінін сипаттайтын шама.

5. Гиперболаның директрисалары

Анықтама 3.6. Гиперболаның центрінен $\frac{a}{\varepsilon}$ қашықтықта фокальдық оське перпендикуляр болып өтетін, екі түзу гиперболаның директрисалары деп аталады.

Анықтама бойынша, (4.27) гиперболаның директрисаларының теңдеуі

$$x =-\frac{a}{\varepsilon}, x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{4.31}$$

болады. Гипербола үшін $\varepsilon > 1$, сондықтан $\frac{a}{\varepsilon} < a$ болады (4.31) түзулер сурет 4.21-дегідей орналасқан.

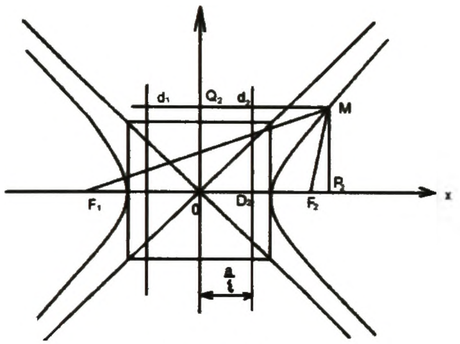
Гипербола директрисаларының да, эллипстің директрисалары сияқты мынадай қасиеті бар.

Теорема 4.2. Гиперболаның кез келген M нүктесінен фокустарына дейінгі ара қашықтықтың сәйкес директрисаларына дейінгі арақашықтыққа қатынасы гиперболаның эксцентриситетіне тең тұрақты шама, яғни $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

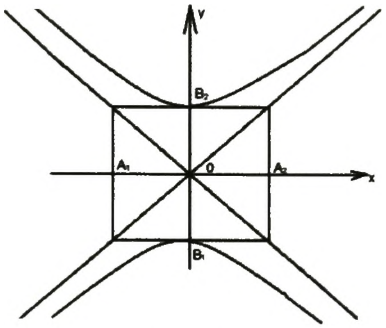
Теорема 4.2-де теорема 4.1 сияқты дәлелденеді.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (4.32)$$

теңдеу нақты осі (=2b) Oy осінде орналасқан. Жорамал осі (=2a) Ox осінде орналасқан гиперболаны анықтайды (сурет 4.22).



Сурет 4.21



Сурет 4.22

Егер (4.27) теңдеуде $a = b$ болса, ол тең қабырғалы гипербола деп аталып, оның теңдеуі

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (4.33)$$

түрде болады және оның асимптоталары өзара перпендикуляр болады.

Теорема 4.1 мен теорема 4.2 негізінде, эллипс пен гиперболаны фокусқа дейінгі ара қашықтықтың сәйкес директрисаға дейінгі ара қашықтыққа қатынасы ε-ға тең тұрақты шама болатын жазықтық нүктелерінің жиыны деп қарауға болады екен: мұнда ε < 1 болса – эллипс, ε > 1 болса – гипербола болады.

Мысал 3.4. $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$ гиперболаның эксцентриситеті және директрисалары табылсын.

Шешуі. Берілген теңдеуді қарапайым түрге келтіреміз. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, яғни $a^2 = 25, b^2 = 16$. $c^2 = a^2 + b^2 = 41$. (4.30) формула бойынша $\varepsilon = \frac{\sqrt{41}}{5}$

(4.31) формулалар бойынша директрисалардың теңдеуін табамыз: $x = \pm\frac{5}{\frac{\sqrt{41}}{5}}$ немесе $x = \pm\frac{5}{\sqrt{41}}$.

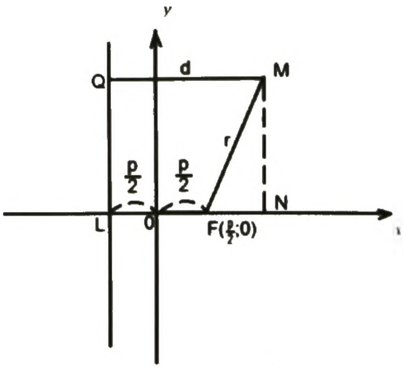
Енді $\varepsilon = 1$ болғанда мұндай жиынның қандай пішінді анықтайтынын қарастырайық.

3.4. Парабола

1. Параболаның қарапайым теңдеуі

Анықтама 3.7. Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден ара қашықтықтары бірдей болатын жазықтық нүктелерінің жиыны парабола деп аталады.

Берілген нүкте F және берілген түзу LQ болсын. F нүктеден LQ түзуге перпендикуляр етіп жүргізілген түзуді Ox ось деп, LQ түзу мен F нүктенің қақ ортасынан Ox оське перпендикуляр етіп жүргізілген түзуді Oy ось деп аламыз. Кез келген M нүктенің бұл таңдалған Oxy жүйесінде координаталары $(x;\ y)$ және F фокуспен LQ директрисаның ара қашықтығы p болсын (сурет 4.23).



Сурет 4.23

Анықтама бойынша

$$|FM| = |MQ| \qquad (4.34)$$

Мұнда $F(\frac{P}{2}; 0), M(x, y), Q(-\frac{P}{2}; 0)$

Екі нүктенің ара қашықтығының формуласы бойынша:

$$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2}, |MQ| = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{P}{2}$$

Бұл өрнектерді (4.34) теңдікке қойсақ,

$$\sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$$

Бұл параболаның ізделінді теңдеуі. Алынған теңдеудің екі бөлігін де квадраттасак

$$x^2 - px + \frac{P^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{P^2}{4}$$

болады. Осыдан,

$$y^2 = 2px \qquad (4.35)$$

Алынған теңдеу параболаның қарапайым теңдеуі деп аталады.

Парабола үшін $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

2. Парабола теңдеуі бойынша оның пішінін зерттеу

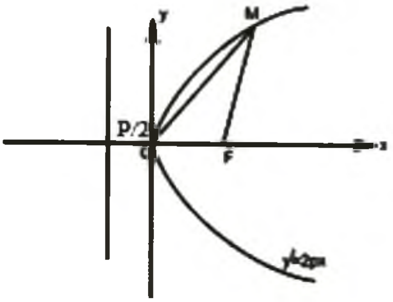
а) (4.35) теңдеуде айнымал y жұп дәрежеде, демек, парабола Ox оське сәйкес симметриялы; Ox осі - параболаның симметриялық осі;

б) Параметр $p > 0$ болғандықтан (4.35) теңдеуден $x \geq 0$ екендігі шығады. Демек, парабола Oy осінің оң жағына орналасқан;

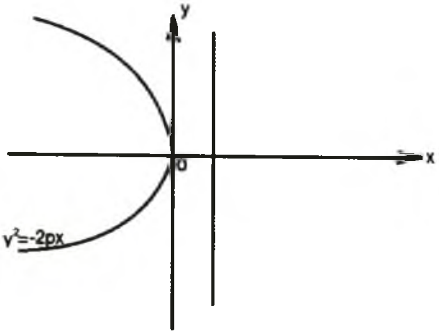
в) $x = 0$ болғанда $y = 0$ болады. Демек, парабола координаталардың бас нүктесінен өтеді;

г) x айнымал модулі бойынша шенелмей өссе, y айнымал да шенелмей өседі. (сурет 4.24) $O(0;\ 0)$ нүктесі параболаның төбесі, $FM = r$ кесінді M нүктесінің фокальдық радиусы деп аталады.

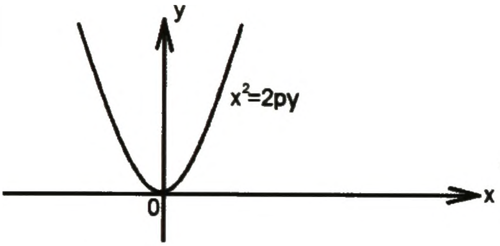
$y^2 = -2px$ (4.25-сурет), $x^2 = 2py$ (4.26-сурет), $x^2 = -2py$ (4.27-сурет) теңдеулер де параболарды анықтайды



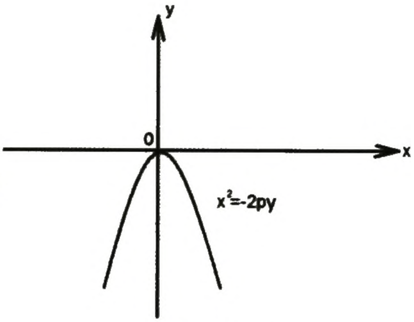
Сурет 4.24



Сурет 4.25



Сурет 4.26



Сурет 4.27

§ 4. Жазықтықтағы екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін қарапайым түрге келтіру

4.1. Тікбұрышты координаталарды түрлендіру

Жазықтықтағы нүктенің координаталары координаталар жүйесін таңдап алуға байланысты екендігі белгілі. Егер координаталар жүйесі өзгерсе, онда нүктенің координаталары да, сондай-ақ сызықтың теңдеулері де өзгереді. Сондықтан кейбір жүйеде берілген нүктенің координаталары белгілі болса, басқа жүйеде осы нүктенің координаталары қалайша өзгереді деген мәселе туындайды.

Тікбұрышты координаталарды түрлендірудің екі түрін қарастырамыз.

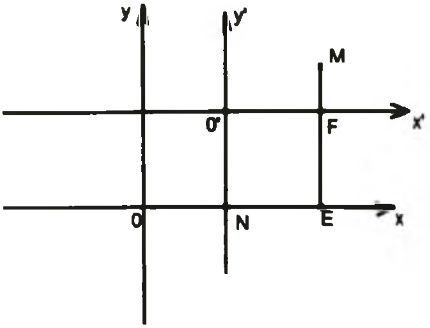
1. Координаталық осьтерді параллель көшіру

Бұл жағдайда координаталардың бас нүктесі $O(0;\ 0)$ басқа $O'(a;\ b)$ нүктеге көшіп, координата осьтерінің бағыттары бұрынғыша қалады (сурет 4.28).

Жазықтықтағы кез келген M нүктенің ескі Oxy жүйедегі координаталарын $(x;\ y)$, жаңа $O'x'y'$ жүйедегі координаталарын $(x';\ y')$ арқылы белгілейік M нүктенің жаңа және ескі координаталарын байланыстырушы формулалар шығарамыз. M нүктеден өзара параллель Ox және $O'x'$ осьтерге перпендикуляр түсірсек, нүкте координаталарының анықтамасы бойынша: $x = OE$; $y = EM$; $x' = O'F$; $y' = FM$. Негізгі тепе-теңдік бойынша

$$OE = ON + NE,\ EM = EF + FM \qquad (*)$$

болады. $NE = O'F$, $EF = NO'$ теңдіктерді және $ON = a$, $NO' = b$ екендігін ескерсек (*) теңдіктерден параллель көшіру формулаларын шығарып аламыз:



Сурет 4.28

$$x = x' + a,\ \ y = y' + b \tag{4.36}$$

не болмаса

$$x' = x - a,\ \ y' = y - b. \tag{4.37}$$

Мысал 4.1. Oxy жүйедегі $M(2;\ 3)$ нүктенің бас нүктесі $O'(-1;\ 2)$ нүктесінде, осьтері параллель көшкен жаңа $O'x'y'$ жүйедегі координаталары табылсын.

Шешуі. (4.37) формулалар бойынша:

$$x' = 2 - (-1) = 3,\ \ y' = 3 - 2 = 1.$$

2. Координаталық осьтерді бұру

Бұл жағдайда координаталар бас нүктесі O өзгерместен, Ox және Oy осьтер бір бағытта берілген α бұрышқа бұрылады (сурет 4.29). Жазықтықтағы кез келген M нүктенің ескі Oxy жүйедегі координаталарын $(x;\ y)$ деп, жаңа $Ox'y'$ жүйедегі координаталарын $(x';\ y')$ деп белгілейік (сурет 4.29) бойынша:

$$ON = x,\ \ NM = y,\ \ ON' = x',\ N'M = y',\ \ \angle NON' = \alpha.$$

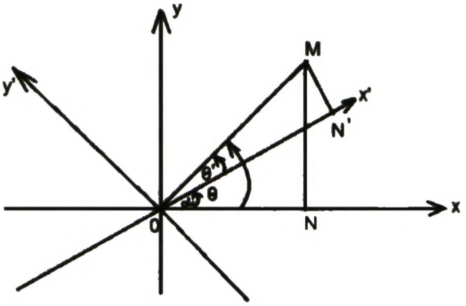
Көмекші екі поляр координаталар жүйесін кіргізейік: O нүктені полюс деп, ал Ox және Ox' осьтерін поляр остері деп алайық M нүктенің бұл жүйелердегі координаталарын сәйкесінше $(\rho,\ \theta)$, $(\rho,\ \theta')$ деп белгілейік. сурет 4.29-дан $|OM| = \rho$, $\angle NOM = \theta$, $\angle N'OM = \theta'$ және $\theta = \theta' + \alpha$.

(1.7) формулаларға сәйкес $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ және $x' = \rho\cos\theta'$, $y' = \rho\sin\theta'$.

Сондықтан,

$$x = \rho\cos\theta = \rho\cos(\theta' + \alpha) = \rho\cos\theta' \cos\alpha - \rho\sin\theta' \cdot \sin\alpha$$

$$y = \rho\sin\theta = \rho\sin(\theta' + \alpha) = \rho\cos\theta' \sin\alpha + \rho\sin\theta'\ \ \cos\alpha,$$



Сурет 4.29

яғни

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \tag{4.38}$$

Бұл теңдіктерден x', y'-терді x, y-тер арқылы өрнектесек

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (4.39)$$

формулалар алынады.

Салдар 4.1. Егер жазықтықта осьтерді бұру мен параллель көшіруді бірінен соң бірін орындасақ, онда координаталарды жалпы түрлендіру формулалары

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a;\ \ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b; \qquad (4.40)$$

түрінде болады, ал (4.49) теңдіктерді x, y-терге сәйкес шешсек,

$$x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha;\ \ y' = -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha; \qquad (4.41)$$

түріндегі формулалар алынады.

Мысал 4.2. Бас нүктеден айналдыра осьтерді оң бағытта 45°-қа бұрғандағы $M(2;\,1)$ нүктенің координаталары табылсын.

Шешуі. $\alpha = 45°$ болғанда (4.39) формулаларды қолдансақ,

$$x' = 2\cdot\cos45^\circ + 1\ \ \sin45^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{1\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ ,$$

$$y' = -2\ \ \sin45^\circ + 1\ \ \cos45^\circ = -\frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{1\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4.2. Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуі және оны түрлендіру

Анықтама 4.1. Екінші ретті сызық деп, кейбір тікбұрышты координаталар жүйесінде x және y айнымалдарға сәйкес екінші дәрежелі

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (4.42)$$

алгебралық теңдеумен өрнектелетін сызықты атайды.

Мұндағы A, B, C коэффициенттердің ең болмағанда біреуі нөлге тең емес, яғни $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. (4.42) теңдеу екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуі делінеді.

Ілгері шеңбер, эллипс, гипербола, парабола теңдеулерінің екінші дәрежелі екендігін көргенбіз. (4.42) теңдеу осы аталған сызықтардан басқа да сызықтарды өрнектей ме деген сұрақ туады. Бұл сұраққа мына теорема жауап береді.

Теорема 4.2. Екінші ретті сызықтың (4.42) жалпы теңдеуі кейбір $O'XY$ тікбұрышты координаталар жүйесінде келесі қарапайым түрлердің біріне келтіріледі :

1) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (эллипс);

2) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ (жорамал эллипс);

3) $a^2X^2 + c^2Y^2 = 0$ (қиылысушы жорамал түзулер жұбы)

4) $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (гипербола);

5) $a^2X^2 - c^2Y^2 = 0$ (қиылысушы түзулер жұбы);

6) $Y^2 = 2pX$ (парабола);

7) $Y^2 - a^2 = 0$ параллель түзулер жұбы);

8) $Y^2 + a^2 = 0$ (жорамал параллель түзулер жұбы);

9) $Y^2 = 0$ беттескен түзулер жұбы).

Теореманы дәлелдеу үшін көмекші екі лемма дәлелдейміз.

Лемма 4.1. (4.42)теңдеуде $AC - B^2 \neq 0$, $B \neq 0$ болса, онда (4.42) теңдеу алдымен осьтерді параллель көшіру, соңынан осьтерді бұру арқылы жаңа $O'XY$ тікбұрышты координаталар жүйесінде

$$A'^{X^2} + C'^{Y^2} + F' = \tag{4.43}$$

теңдеу түріне келтіріледі.

Мұндағы A', C', F' шамалар кейбір сандар; $(X;\ Y)$-нүктенің жаңа $O'XY$ жүйедегі координаталары.

Дәлелдеуі. $O'x'y'$-тікбұрышты координаталар жүйесі Oxy жүйені кез келген $O'(x_0;\ y_0)$ нүктеге параллель көшіргендегі жаңа жүйе болсын. Онда нүктенің $(x;\ y)$ ескі координаталары жаңа $(x';\ y')$ координаталармен (4.36) формулалар бойынша мынадай байланысады;

$$x = x' + x_0;\ \ y = y' + y_0.$$

x, y-тердің бұл өрнектерін (4.42) теңдеуге қойсақ,

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \tag{4.44}$$

теңдеу алынады, мұндағы

$$D' = Ax_0 + By_0 + D;\ \ E' = Bx_0 + Cy_0 + E;$$

$$F' = Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F$$

Енді x_0, y_0-дердің мәндерін $D' = 0$; $E' = 0$ шарттары орындалатын етіп таңдаймыз, яғни

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \tag{4.45}$$

деп аламыз.

Лемманың шарты бойынша $AC - B^2 \neq 0$ болғандықтан, бұл жүйе x_0, y_0 шамаларға сәйкес жалғыз шешімге ие.

x_0, y_0-дердің бұл табылған мәндерінде (4.44) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0 \tag{4.46}$$

Енді $O'x'y'$ жүйені кейбір α бұрышқа бұрайық. Жаңа жүйені $O'XY$ деп белгілейік. Онда нүктенің жаңа $(X;\ Y)$ координаталары $(x';\ y')$ координаталарармен (4.38) бойынша келесі байланыста болады:

$$x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha;\ \ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

x', y'-тердің бұл өрнектерін (4.46) теңдеуге қойсақ:

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 + F' = 0 \tag{4.47}$$

мұндағы

$$\begin{gathered} A' = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\ \ \sin\alpha + C\sin^2\alpha, \\ B' = -A\sin\alpha\ \ \cos\alpha + B\ \ (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C\ \ \sin\alpha\ \ \cos\alpha; \\ C' = A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\ \ \sin\alpha + C\sin^2\alpha. \end{gathered} \tag{4.48}$$

Енді α бұрышты $B' = 0$ болатын етіп таңдаймыз. Онда (4.48) теңдіктердің екіншісі бойынша α-ға байланысты

$$-A\sin\alpha\ \ \cos\alpha + C\sin\alpha \cdot \cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

яғни

$$2B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha = 0 \qquad (4.49)$$

теңдеу алынады.

$B \neq 0$ екендігін ескерсек, (4.49) теңдеуді

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} \qquad (4.50)$$

түрінде жазуға болады. Бұдан

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\operatorname{arcctg} \qquad (4.50a)$$

Дербес жағдайда $A = C$ болса,

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad (4.50б)$$

болады.

Біз α бұрышты табу үшін (4.50) теңдеуді шығардық. Бұл формула бойынша жәрдемінен $\sin\alpha$ және $\cos\ \alpha$ шамаларды табу үшін

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}$$

екендігн ескерсек,

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \qquad (4.50в)$$

формулаларға ие боламыз.

Сонымен бұру α бұрышын (4.50) формула бойынша тапсақ, онда түрлендірілген (4.47) теңдеуге XY көбейтіндісі бар мүше енбей қалады.

Демек, (4.47) теңдеу (4.43) теңдеу түріне келтіріледі.

Лемма 4.2. (4.42) теңдеудің бас мүшелерінің коэффициенттерінен құралған $AC - B^2$ өрнектің мәні тікбұрышты координаталар жүйесін түрлендіруге тәуелсіз шама.

Дәлелдеуі. Тікбұрышты координаталар жүйесін параллель көшіргенде A, B, C коэффициенттердің өзгермейтіндігі (4.46) теңдеуден көрінеді.

Енді кез келген α бұрышқа бұрғанда да тәуелсіздігін көрсету үшін (4.48) теңдіктерден пайдаланамыз.

$$A'C' - B'^2 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\ \ \cos\alpha + C\sin^2\alpha)\cdot(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\ \ \cos\alpha + C\cos^2\alpha) -$$
$$- [(C - A)\sin\alpha\ \ \cos\alpha + B(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)]^2$$

Бұл теңдіктің оң бөлігіндегі жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді ықшамдасақ, шығатыны

$$A'C - B'^2 = AC(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - B^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = AC - B^2$$

$7AC - B^2$ шама екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуінің инварианты деп аталады. $AC - B^2$ шаманың таңбасына байланысты екінші ретті сызықтар мынадай үш текке бөлінеді:

1) егер $AC - B^2 > 0$ болса эллипстік тек;
2) егер $AC - B^2 < 0$ болса гиперболалық тек;
3) егер $AC - B^2 = 0$ болса параболалық тек.

Теорема 4.2-ні дәлелдеу. $AC - B^2$ өрнектің шамасының таңбасына қарай үш жағдайды қарастырамыз.

I. $AC - B^2 > 0$. Бұл жағдайда лемма 4.1 бойынша (4.42) теңдеу мына

$$A'X^2 + C'Y^2 = -F' \qquad (4.43)$$

теңдеу түріне келтіріледі.

Осы теңдеу үшін мүмкін болатын жағдайларды қарастырамыз.

а) Айталық A', C' және $-F'$ таңбалары бірдей болсын. Анықтық үшін $A' > 0$, $C' > 0$, $-F' > 0$ дейік (олай болмағанда (4.43) теңдеудің барлық мүшелерін (-1)-ге көбейтер едік). Теңдеудің екі бөлігінде $-F'$-ке бөліп, оны мына түрде жазамыз

$$\frac{X^2}{\frac{-F'}{A'}} + \frac{Y^2}{\frac{-F'}{C'}} = 1, \text{ не болмаса } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Бұл теңдеу эллипсті анықтайды, ал оның жарты осьтері $a = \sqrt{\frac{-F'}{A'}}$, $b = \sqrt{\frac{-F'}{C'}}$ болады. $A' = C'$ болғанда радиусы $R = \sqrt{\frac{-F'}{A'}}$ болған шеңберді анықтайды.

б) Айталық $A > 0$, $C' > 0$, және $-F' < 0$ (яғни $F' > 0$) болсын. Онда (4.43) теңдеу а) жағдайдағыдай түрлендірген

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

түрде жазылады. Бұл теңдеуді жазықтықтың бірде-бір нүктесінің координаталары қанағаттандырмайды. Сондықтан ол жорамал эллипстің теңдеуі делінеді.

в) $A' > 0$, $C' > 0$, және $F' = 0$ болсын. Онда теңдеу

$$a^2X^2 + c^2Y^2 = 0$$

түрде жазылады. Мұндағы $a^2 = A'$, $c^2 = C'$.

Бұл теңдеуді тек жалғыз бір ғана $X = 0$, $Y = 0$ нүктенің координаталары қанағаттандырады. Мұндай теңдеуді өзара қиылысушы жорамал түзулердің жұбы деп атайды.

II. $A'C' - B'^2 < 0$

Бұл жағдайда да лемма 4.1 бойынша (4.42) теңдеу (4.43) теңдеу түріне келтіріледі.

а) Айталық, A' пен C' әр таңбалы болып ал $-F' \neq 0$ дейік. Анықтық үшін $A' > 0$, $C' < 0$ (олай болмағанда теңдеудің барлық мүшелерін (-1)-ге көбейтер едік), $-F' > 0$ дейік. (4.43) теңдеудің екі бөлігінде $(-F')$-ке бөлсек, мына теңдеу шығады.

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1;$$

мұндағы $a^2 = -\frac{F'}{A'} - b^2 = \frac{-F'}{C'}$.

Бұл гиперболаның қарапайым теңдеуі $A' < 0$, $C' > 0$, $-F' < 0$ болғанда $\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1$ болады.

б) $A' > 0$, $C' < 0$, және $F' = 0$ болсын. Егер $a^2 = A'$, $c^2 = -C'$ десек, мына теңдеуіміз $a^2X^2 - c^2Y^2 = 0$ немесе $(aX - cY)(aX + cY) = 0$. Бұдан $aX - cY = 0$ және $aX + cY = 0$ теңдеулер шығады. Демек, бұл жағдайда қиылысатын түзулер жұбын аламыз.

III. $AC - B^2 = 0$ болсын. Онда лемма 4.1-ге сәйкес кейбір α бұрышқа (4.50) бұрып (4.42) теңдеуді мына түрге келтіруге болады.

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \qquad (4.51)$$

Лемма 4.2-ге сәйкес $A' \cdot C' = 0$ болғандықтан, соңғы теңдеуде A', C'-тердің біреуі нөлге тең болады.

а) Анықтық үшін $A' = 0$, $C' \neq 0$ болсын. Онда (4.51) теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$C'\left[y'^2 + 2 \cdot y' \cdot \frac{E'}{C'} + \left(\frac{E'}{C'}\right)^2\right] + 2D'x' + F - \frac{E'^2}{C'} = 0$$

немесе

$$C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 + 2D'\left(x' + \frac{F'}{2D'}\right) = 0, \qquad (4.52)$$

мұндағы $F' = F - \dfrac{E'^2}{C'}$

Енді координата осьтерін параллель түрде $O'\left(-\frac{E'}{2D'}, -\frac{E'}{C'}\right)^2$ нүктеге көшірсек, яғни $X = x' + \frac{-F'}{2D'}$, $Y = y' + \frac{-E'}{C'}$ формулалар бойынша жаңа координаталарға өтсек

$$Y^2 = 2pX$$

теңдеуге ие боламыз, мұндағы $p = \frac{-D'}{C'}$.

Ал бұл симметрия осі $O'X$ болған параболаның қарапайым теңдеуі.

б) Осы сияқты $C' = 0$, $A' \neq 0$, және $E' \neq 0$ болғанда

$$X^2 = 2qY$$

парабола теңдеуі алынады.

в) Егер (4.51) теңдеуде $D' = 0$ болса,

$$C'Y^2 + F' = 0$$

теңдеуге ие боламыз.

Бұл теңдеу C' және F' шамалардың таңбалары әртүрлі болғанда $O'X$ оське параллель екі $y = \pm\sqrt{\frac{-F'}{C'}}$ түзуді анықтайды, ал C' және F' -тердің таңбалары бірдей болғанда ешқандай геометриялық пішінді анықтамайды.

г) Егер (4.51) теңдеуде $E' = 0$, $C' = 0$, $A' \neq 0$ болса, онда $A'X^2 + F' = 0$ теңдеуге ие боламыз. Бұл жағдайда да в) жағдайға ұқсас не $X = \pm\sqrt{\frac{-F'}{A'}}$ екі $O'Y$ оське параллель түзулер алынады, немесе (4.51) теңдеу ешқандай геометриялық пішінді анықтамайды.

(4.51) теңдеу ешқандай пішінді анықтамаса, ол екі жорамал параллель түзулерді анықтайды делінеді.

е) $F' = 0$ болсын. Онда $y^2 = 0$ теңдеуге ие боламыз. Бұл теңдеу өзара беттесетін түзулер жұбын анықтайды. Теорема толығымен дәлелденді.

Ескерту 4.1. Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуін қарапайым түрге келтіру осьтерді параллель көшіру немесе осьтерді бұру түрлендірулерінің ретіне байланысты емес. Егер (4.42) теңдеуде $B = 0$ болса, онда ол тек осьтерді параллель көшіру арқылы қарапайым түрге келтіріледі.

Мысал 4.3. $$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \qquad (4.53)$$

квадрат үшмүшенің графигі парабола екені дәлелденсін.

Шешуі IIIa жағдайға сәйкес бұл теңдеу параболаны анықтайды. Шынында да (4.53) теңдеудің оң бөлігінен толық квадрат ажыратсақ, мына түрге келеді:

$$y = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

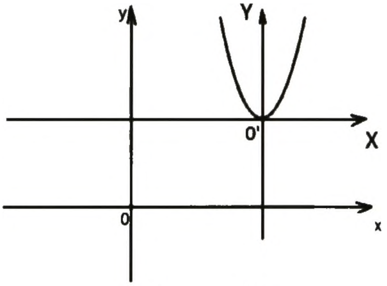
Координаталар жүйесінің жаңа бас нүктесі ретінде $O' \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$ нүктесін қабылдап, осьтерді параллель көшіреміз. Сонда кез келген нүктенің жаңа X, Y координаталары осы нүктенің ескі x, y координаталары арқылы былайша өрнектеледі:

$$X = x - \left(-\frac{b}{2a}\right) ; \; Y = y - \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Ал (4.53) теңдеу жаңа $O'XY$ координаталық жүйеге қатысты $Y = aX^2$ түрге келеді (сурет 4.30).

Мысал 4.4. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (4.54)

бөлшекті-сызықты функцияның графигі қандай сызық болатынын анықтау керек.



Сурет 4.30

Шешуі. Мұнда $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ болсын ($ad - bc = 0$ және $c = 0$ болғанда (4.54) теңдеу түзуді анықтайды). Координаталардың бас нүктесі ретінде жаңа $O'(x_0; y_0)$ нүктесін алып, осьтерді параллель көшірейік. Мұндағы x_0, y_0 әзірше анықталмаған сандар. Нүктенің ескі x, y және жаңа X, Y координаталары арасындағы (4.36) $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ байланыстарды пайдалансақ, (4.54) теңдеу қарапайым түрлендірулерден кейін мына түрге келеді:

$$cXY + (cx_0 + d)Y + (cy_0 - a)X = ax_0 + b - y_0(cx_0 + d) \tag{4.51}$$

x_0, y_0 сандарды (4.45) жүйеге сәйкес

$$\begin{cases} cx_0 + d = 0 \\ cy_0 - a = 0 \end{cases}$$

шарттар орындалатындай етіп таңдаймыз.

Бұл жүйеден

$$x_0 = -\frac{a}{c}; \; y_0 = +\frac{a}{c}.$$

Осы мәндер негізінде және

$$k = \frac{1}{c}\,(ax_0 - b - y_0(cx_0 + d))$$

белгілеуін енгізіп, (4.51) теңдеуді мына түрге келтіреміз:

$$XY = k \tag{4.54a}$$

Бұл теңбүйірлі гиперболаның теңдеуі. Бұл гиперболаның асимптоталары жаңа координаталар осьтерімен ($X = 0$ және $Y = 0$) дәл келеді.

§ 5. Кеңістіктегі бет және сызық теңдеулері

5.1. Бет және оның теңдеуі

Кеңістіктегі бетті кейбір шартты қанағаттандыратын кеңістік нүктелерінің жиыны деп қарауға болады. Мысалы, центрі O нүктесінде радиусы R-ге тең сфера O нүктесінен бірдей R қашықтықта жатқан кеңістік нүктелерінің жиыны.

Кеңістіктегі $Oxyz$ тікбұрышты декарт координаталар жүйесі кез келген M нүктесі мен оның реттелген $(x,\ y,\ z)$ координаталарының арасында бір мәнді сәйкестік орнатады.

Анықтама 5.1. $Oxyz$ тікбұрышты декарт координаталар жүйесінде берілген S беттің кез келген нүктесінің x, y, z координаталары

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4.55}$$

теңдеуін қанағаттандырса, ал S бетте жатпайтын нүктенің координаталары бұл теңдеуді қанағаттандырмаса, онда (4.55) теңдеу S беттің теңдеуі деп аталады.

(4.55) алгебралық теңдеу S беттің геометриялық қасиеттерін зерттеуге мүмкіндік береді.

Беттің теңдеуін табу үшін:

а) Таңдап алынған $Oxyz$ координаталар жүйесінде S беттің кез келген нүктесі $M(x, y, z)$ деп белгіленеді;

б) S беттің барлық нүктелерінің ортақ қасиетін геометриялық теңдік немесе теңсіздік түрінде жазады;

в) геометриялық теңдіктен не теңсіздіктен алгебралық өрнек түріне өтеді.

Мысал 5.1. Центрі $C(a,\ b,\ c)$ нүктесінде, радиусы R ге тең сфераның теңдеуін жазу керек.

Таңдалған $Oxyz$ координаталар жүйесінде сфераның кез келген нүктесі $M(x,y,z)$. Сфераның барлық нүктелерінің ортақ қасиеті $|\overline{CM}| = R$.

$|\overline{CM}| = \{x - a, y - b, z - c\}$ болғандықтан соңғы геометриялық теңдік:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

түріндегі алгебралық теңдеуге өтеді. Бұл теңдікті квадраттасақ:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{4.56}$$

Бұл сфераның теңдеуі. Дербес жағдайда $a = b = c = 0$ болса,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{4.56а}$$

Ескерту 5.1. Жалпы, теңдеу кейбір жағдайларда бір нүктені, ақырлы нүктелерді анықтауы мүмкін, бірде бір нүктені анықтамауы да мүмкін.

Мысалы, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ теңдеу бірде бір нүктені де анықтамайды; $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$ теңдеу (1, –2, 3) нүктені ғана анықтайды. $(x^2-4)^2 + (y^2-9)^2 + (z^2-1)^2 = 0$ теңдеу (2, 3, 1), (–2, 3, 1), (2, –3, 1), (2, –3, –1), ... нүктелерді анықтайды.

Демек, кеңістікте бет геометриялық бейне және аналитикалық түрде беріледі. Осыдан негізгі екі мәселе туындайды:

1. Бет нүктелердің жиыны ретінде берілген. Беттің теңдеуін табу керек.
2. $F(x,\ y,\ z) = 0$ теңдеу берілген. Осы теңдеумен анықталған беттің пішінін (бейнесін) зерттеу керек.

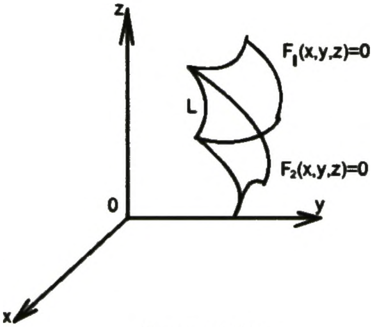
5.2. Кеңістіктегі сызық теңдеуілері

Анықтама 5.2. $F_1(x, y, z) = 0$ мен $F_2(x, y, z) = 0$ беттерінің қиылысындағы ортақ нүктелер жиыны сызық деп аталады.

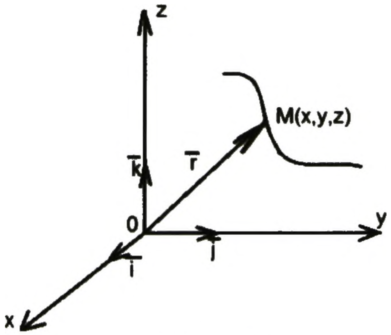
Демек, $F_1(x, y, z) = 0$ мен $F_2(x, y, z) = 0$ беттер кейбір L сызықты анықтаса (сурет 4.31), онда бұл сызықтың координаталары үш белгісізді екі теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases} \qquad (4.57)$$

Мысалы, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ жүйе Oz осьті анықтайды, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ жүйе Oy осьті, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ жүйе Ox осьті анықтайды.



Сурет 4.31



Сурет 4.32

Кеңістіктегі сызықты қозғалыстағы нүктенің траекториясы деп қарауға болады (сурет 4.32). Бұл жағдайда сызық векторлық теңдеуімен беріледі:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \qquad (4.58)$$

немесе осьтердегі проекцияларымен параметлік теңдеулермен беріледі.

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \qquad (4.58а)$$

Мысалы 5.2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера мен $z = h$ жазықтықтың қиылысу сызығы табылсын.

Шешуі. $z = h$ жазықтық Oxy координаталық жазықтыққа параллель жазықтық. $h < R$ болғанда, ол берілген сфераны қияды: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = h \end{cases}$

Бұдан $x^2 + y^2 = R^2 - h^2$ Яғни қиылысу сызығы $x^2 + y^2 = R^2 - h^2$ шеңбер болады.

§ 6. Кеңістіктегі жазықтық теңдеуі

Жазықтық ең қарапайым бет. Енгізілген $Oxyz$ кеңістіктегі тікбұрышты декарт координаталар жүйесінде берілген шамаларға байланысты жазықтықтың теңдеуін әртүрлі беруге болады.

6.1. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр өтетін жазықтық теңдеуі

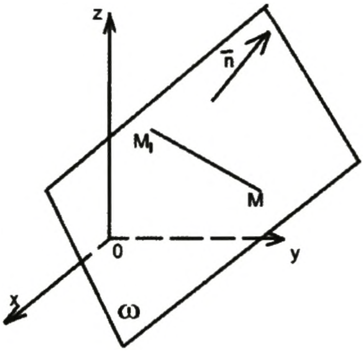
$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы өтіп, $\bar{n} = \{A, B, C\}$ векторына перпендикуляр ω жазықтық теңдеуін жазу керек. $M(x, y, z)$ – ω жазықтығының кез келген нүктесі болсын. $\bar{n} \perp \omega$ болғандықтан, $\overline{M_1M} \perp \bar{n}$ болады. Ендеше векторлардың перпендикуляр болу шарты бойынша:

$$\bar{n} \cdot \overline{M_1M} = 0 \qquad (4.59)$$

Ал, $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ екенін ескерсек, скаляр көбейтіндінің формуласы бойынша:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (4.59a)$$

теңдеуі шығады. Яғни бұл теңдеу $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы берілген $\bar{n} = \{A, B, C\}$ векторға перпендикуляр өтетін жазықтық теңдеуі (сурет 4.33).



Сурет 4.33

$\bar{n} = \{A, B, C\}$ векторы ω жазықтықтың нормаль векторы деп аталады.

ω жазықтықтың кез келген $M(x, y, z)$ нүктесінің координаталары (4.59а) теңдеуді қанағаттандырады, ал бұл жазықтықта жатпайтын нүктелердің координаталары (4.59а) теңдеуді қанағаттандырмайды, себебі $\overline{M_1M} \cdot \bar{n} \neq 0$.

Мысал 6.1. $M_1(5;\ 2;\ -3)$ нүктесі арқылы өтіп, $\bar{n} = \{2; -1; 4\}$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуін құру керек және осы жазықтықта $P(1; 2; -1)$, $Q(4; 5; 0)$, $N(-6; 2; -3)$ нүктелердің жатуын не жатпайтындығын аныктау керек.

Шешуі. $A = 2$, $B = -1$, $C = 4$, $x_1 = 5$, $y_1 = 2$, $z_1 = 3$ мәндерді (4.59 а) теңдеуге қойсак,

$$2(x - 3) - (y - 2) + 4(z + 3) = 0$$

теңдеу алынады. Бұл теңдеуді түрлендірсек, ізделген жазықтық теңдеуі:

$$2x - y + 4z + 4 = 0.$$

P, Q, N нүктелерінің координаталардың бұл теңдеудің сол бөлігіндегі өрнекке қойсақ, $2 \quad 1 - 1 \quad 2 + 4 \quad (-1) + 4 = 0$.

$$2 \quad 4 - 1 \quad 5 + 4 \quad 1 + 4 = 11 > 0, \quad 2 \quad (-6) - 1 \quad 2 + 4 \quad (-3) + 4 = -22 < 0.$$

Демек, P нүктесі жазықтықта жатады, ал Q, N нүктелері жазықтықта жатпайды.

6.2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

Анықтама 5.3. x, y, z үш айнымалдың бірінші дәрежелерінен құрылған

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4.60}$$

теңдеу жазықтықтың жалпы теңдеуі деп аталады.

Шынында да (4.60) теңдеуі $B \neq 0$ болғанда

$$A(x-0) + B(y + \frac{D}{B}) + C(z-0) = 0$$

деп жазсақ, бұл теңдеу нормаль векторы $\bar{n} = \{A, B, C\}$ болған $M(0, -\frac{D}{B}, 0)$ нүктесі арқылы өтуші жазықтықты анықтайды.

Демек, (4.60) теңдеу енгізілген $Oxyz$ координаталар жүйесінде кейбір жазықтықты анықтайды.

(4.60) жазықтықтың жалпы теңдеуінің дербес жағдайлары:

1) $D = 0$ болса, $Ax + By + Cz = 0$ жазықтық $O(0, 0, 0)$ нүктесінен өтеді.

2) $C = 0$ болса, $Ax + By + D = 0$ жазықтықтың $\bar{n} = \{A, B, 0\}$ нормаль векторы Oz оське перпендикуляр болады. Демек, жазықтық Oz оське параллель болады; егер $B = 0$ болса, $Ax + By + D = 0$ жазықтық Oy оське параллель болады; егер $A = 0$ болса, $By + Cz + D = 0$ жазықтық Ox оське параллель болады.

3) Егер $C = D = 0$ болса, $Ax + By = 0$ жазықтық $O(0, 0, 0)$ нүктесі арқылы өтіп, Oz оське параллель болады, яғни Oz осі арқылы өтеді; осы сияқты, $By + Cz = 0$ жазықтығы Ox осі арқылы, $Ax + Cz = 0$ жазықтығы Oy осі арқылы өтеді.

4) Егер $A = B = 0$ болса, (4.60) теңдеу $Cz + D = 0$, яғни $z = -D/C$ түрінде болады. Бұл Oxy-ке параллель жазықтық. Осы сияқты $Ax + D = 0$ теңдеу Oyz-ке параллель жазықтықты, ал $By + D = 0$ теңдеу Oxz-ке параллель жазықтықты анықтайды.

5) Егер $A = B = D = 0$ болса, онда (4.60) теңдеу $Cz = 0$, яғни $z = 0$ түрінде болады. Бұл Oxy жазықтығының теңдеуі. Осы сияқты $y = 0$ теңдеу Oxz жазықтығының, $x = 0$ теңдеу Oxz-ке жазықтығының теңдеуі болады.

Мысал 6.2. Берілген шарттар бойынша жазықтықтың теңдеуін құру керек:

а) жазықтық Ox осіне параллель және $P(1, 1, 2)$ мен $Q(5, 3, -2)$ нүктелері арқылы өтеді;

б) жазықтық Oz осі және $P(4, 2, -5)$ нүктесі арқылы өтеді;

в) жазықтық $N(1, -2, 3)$ нүктесінен өтіп, Ox осіне перпендикуляр.

Шешуі. а) Жазықтық Ox осіне параллель болғандықтан, оның теңдеуіне x кірмейді: $By + Cz + D = 0$; әрі P мен Q нүктелерінен өткендіктен, олардың координаталары бұл теңдеуді қанағаттандырады:

$$B + 2C + D = 0, \quad 3B - 2C + D = 0.$$

Бұл жүйені шешсек $B = -\frac{D}{2}$, $C = -\frac{D}{4}$. Сондықтан жазықтық теңдеуі $-\frac{D}{2}y - \frac{D}{4}z + D = 0$ немесе $D \neq 0$ болғандықтан $2y + z - 4 = 0$.

б) Oz осіне перпендикуляр жазықтың Oxy координаталық жазықтыққа параллель болып, оның теңдеуі $Cz + D = 0$ түрінде болады (4-жағдай). Бұл теңдеуге N нүктесінің координаталарын қойсақ, $C \ 3 + D = 0$, бұдан $D = -3C$. Демек, $Cz - 3C = 0$, $C(z-3) = 0$, $C \neq 0$ болғандықтан $z - 3$ немесе $z = 3$ теңдеу шығады.

в) Ізделінді жазықтық Oy осі арқылы өткендіктен (3-жағдай) теңдеуі $Ax + Cz = 0$ түрде болады. Бұл теңдеуге P нүктесінің координаталарын қойсақ,

$A \quad 4 + C(-5) = 0$, бұдан $A = \frac{5}{4}C$. Сонымен, жазықтық теңдеуі $\frac{5}{4} \quad Cx + Cz = 0$ немесе $C\left(\frac{5}{4}x + z\right) = 0$, бірақ $C \neq 0$, сондықтан $5x + 4z = 0$.

6.3. Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуі

$Oxyz$ кеңістікте бір түзудің бойында жатпайтын $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүкте берілсін. Үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.

$M(x, y, z)$ осы жазықтықтың кез келген нүктесі дейік. $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ векторларын құрамыз. Бұл векторлар бір жазықтықта жатады, сондықтан олар компланар векторлар. Компланар векторлар үшін олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең. (3.20) теңдік бойынша:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.61)$$

(4.61) теңдеу берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуі.

Мысал 6.3. $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$, $M_3(-3, 1, 2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуі жазылсын.

Шешуі. (4.61) формула бойынша берілген M_1, M_2, M_3 нүктелері арқылы өтуші жазықтық теңдеуі,

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z + 2 \\ 4 - 1 & -5 - 3 & 6 + 2 \\ -3 - 1 & 1 - 3 & 2 + 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ немесе } \begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z + 2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ болады.}$$

Соңғы анықтауышты бірінші жолдың элементтері бойынша жіктесек,

$$\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot (x - 1) - \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \cdot (y - 3) + \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \cdot (z + 1) = 0, \text{ немесе}$$

$8x + 22y + 19z - 36 = 0$.

6.4. Жазықтықтың кесінділер бойынша теңдеуі

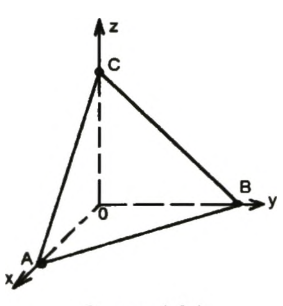
Берілген ω жазықтық координата осьтерінен шамалары $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ кесінділерді қисын, яғни $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ нүктелері арқылы өтсін (сурет 4.34). Бұл нүктелердің кординаталарын (4.61) теңдеуг қойсақ:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & a & c \end{vmatrix} = 0.$$

Анықтауышты ашып шықсақ, $bcx - abc + abz + acy = 0$ болады, яғни $bcx + acy + abz = abc$ теңдіктің екі бөлігін де $abc \neq 0$ шамаға бөлсек, келесі теңдеу шығады:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (4.62)$$

Бұл теңдеуді жазықтықтың кесінділер бойынша теңдеуі деп атайды.



Сурет 4.34

Мысал 6.4. $x + 2y - 3z + 2 = 0$ жазықтық және координаталық жазықтықтармен шенелген пирамиданың көлемін есептеу керек.

Шешуі. Пирамиданың көлемі (сурет 4.34) $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S \quad h$, мұндағы S пирамиданың табаны OAB үшбұрыштың ауданы, ал $h = |\overline{OC}|$ – пирамиданың биіктігі. Егер $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ сандары берілсе, онда $S = \frac{1}{3}|a| \quad |b|$, $h = |c|$, демек $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|a| \quad |b| \quad |c| = \frac{1}{6}|abc|$. Енді берілген жазықтықтың теңдеуін кесінділер бойынша жазамыз. Ол үшін бос мүшені оң бөлікке шығарып, осы санға теңдіктің екі бөлігінде бөлеміз:

$x + 2y - 3z = -2$, $\frac{x}{-2} + \frac{2y}{-2} - \frac{3z}{-2} = 1$, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} - \frac{z}{2/3} = 1$, яғни $a = -2$, $b = -1$, $c = \frac{2}{3}$.

Демек, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot 2 \quad 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ куб бірлік.

6.5. Жазықтықтың нормаль теңдеуі

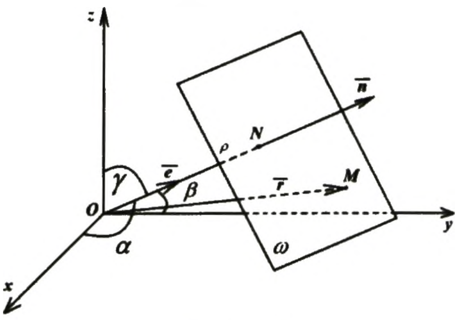
$Oxyz$ координаталар жүйесінде O координата бас нүктесінен берілген ω жазықтыққа қарай бағытталған перпендикуляр вектор $\bar{n}$ нормаль вектор деп аталады. $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ осы вектордың бірлік векторы.

$|\overline{ON}| = p$ мен $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ берілген. ω жазықтығының теңдеуін жазу керек (сурет 4.35).

ω жазықтығының кез келген нүктесін $M(x, y, z)$ деп, $|\overline{OM}| = \bar{r}$ радиус вектор жүргіземіз. Онда $\text{Пр}_{\bar{e}}\bar{r} = p$, яғни $\bar{r}\bar{e} = p$, немесе (сурет 4.35)

$$\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0 \qquad (4.63)$$

(4.63) теңдеу ω жазықтығының векторлық теңдеуі.



Сурет 4.35

$\bar{r} = \{x, y, z\}$, $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ екендігін ескерсек, скаляр көбейтіндінің (3.11) формуласы бойынша (4.63) теңдеу

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (4.63а)$$

түрінде болады. Бұл теңдеуді жазықтықтың нормал теңдеуі деп атайды.

Жазықтықтың жалпы теңдеуі $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуді нормаль түрге келтіру үшін оның екі жағы да, нормальдық көбейткіш

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (*)$$

санға көбейтіледі, мұнда D-ның таңбасына қарама-қарсы таңба алынады. Яғни

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \\ + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (4.63\ б)$$

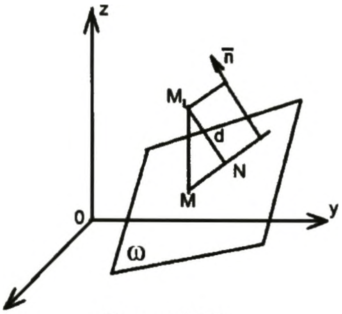
нормаль теңдеу түріне келеді.

6.6. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

Теорема 4.3. Берілген $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нүктеден $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуімен берілген ω жазықтыққа дейінгі қашықтық

d

формуламен анықталады.



Сурет 4.35а

Дәлелдеуі. $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ берілген нүкте берілген ω жазықтығының $M(x, y, z)$ кез келген нүктесі, $\bar{n} = \{A,\ B,\ C\}$ нормаль векторы болсын (сурет 4.35а). Онда M_1 нүктесінен ω жазықтыққа дейінгі қашықтық

$$d = |np_{\bar{n}}\overline{MM_1}| = \left|\frac{\overline{MM_1}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_1 - x)A + (y_1 - y)B + (z_1 - z)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|x_1A + y_1B + z_1C - (Ax + By + Cz)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$M(x, y, z) \in$ ω болғандықтан $Ax + By + Cz + D = 0$, яғни $D = -Ax - By - Cz$.

Сондықтан, $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Атап өтетін жағдай, егер ω жазықтық нормаль түрде берілсе, яғни

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

болса, онда

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|. \qquad (4.64а)$$

Мысал 6.5. $M_1(3, 4, -7)$, $M_2(2, 4, 9)$, $M_3(5, 1, 0)$ нүктелерден $2x - y + 2z - 9 = 0$ жазықтыққа дейінгі ара қашықтықтар есептелсін.

Шешуі. Берілген жазықтықтың теңдеуінде $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$, $D = -9 < 0$ болғандықтан, (*) нормалдық көбейткіш $\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{3}$ болып, түзудің нормалдық теңдеуі (4.63б) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 3 = 0$ түріне келеді. Онда сәйкес қашықтықтарды d_1, d_2, d_3 десек (4.64) формула бойынша:

$$d_1 = \frac{|2\cdot 3 - 4 + 2\cdot(-7) - 9|}{3} = \frac{|-21|}{3} = 7;$$

$$d_2 = \frac{|2\cdot 2 - 4 + 2\cdot 9 - 9|}{3} = \frac{|9|}{3} = 3;$$

$$d_3 = \frac{|2\cdot 5 - 1 + 2\cdot 0 - 9|}{3} = \frac{|0|}{3} = 0.$$

Демек, M_3 нүктесі берілген жазықтықта жатады.

6.7. Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Екі жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

ω_1 және ω_2 жазықтықтары өзінің жалпы теңдеулерімен берілсін:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

ω_1 және ω_2 жазықтықтарының арасындағы бұрыш деп, олардың арасындағы екіжақты бұрыштардың біреуін атайды (сурет 4.36).

$\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ мен $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ нормаль векторлардың арасындағы φ бұрышы ω_1 мен ω_2 жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрыштың біреуіне тең болады. Сондықтан,

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (4.65)$$

Сүйір бұрышты тапқанда:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (4.65а)$$

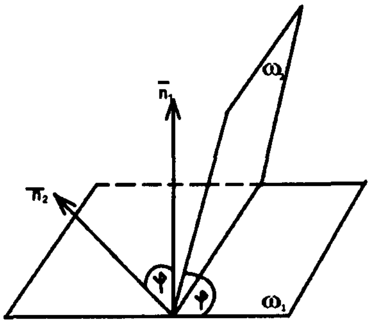
формуладан пайдаланылады (сурет 4.36).

Егер $\omega_1 \perp \omega_2$ болса, $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ болады, яғни (сурет 4.37)

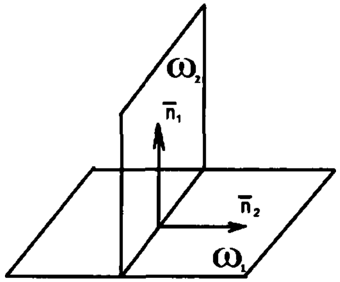
$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (4.66)$$

Егер $\omega_1 \parallel \omega_2$ болса, $\bar{n}_1 \| \bar{n}_2$ болады, яғни (сурет 4.38)

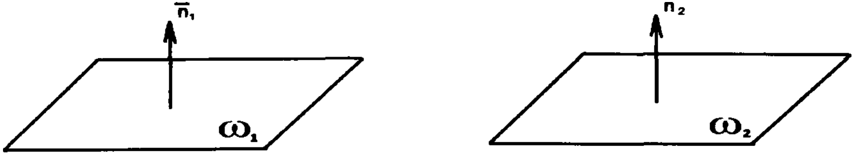
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (4.67)$$



Сурет 4.36



Сурет 4.37



Сурет 4.38

Мысал 6.5. $11x - 8y - 7z + 6 = 0$ және $7x + 2y - 8z - 2 = 0$ жазықтықтары арасындағы бұрыш табылсын.

Шешуі. (4.65) формулаға $A_1 = 11$, $B_1 = -8$, $C_1 = -7$, $A_2 = 7$, $B_2 = 2$, $C_2 = -8$ мәндерді қойсақ,

$$\cos\varphi = \frac{11\cdot 7 + (-8)\cdot 2 + (-7)(-8)}{\sqrt{121+64+49}\cdot\sqrt{49+4+64}} = \frac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}} = \frac{1}{2}.$$

Демек, берілген екі жазықтық арасындағы бұрыш $\varphi = 45°$.

Ескерту 6.1. (4.65) формула, қосындысы 180° болатын екі бұрыштың біреуін анықтайды. Сүйір бұрыш (4.65а) формуламен анықталады.

§ 7. Кеңістіктегі түзу теңдеулері

7.1. Түзудің векторлық теңдеуі

L түзуге параллель $\vec{a} = \{l, m, n\}$ вектор L түзудің бағыттаушы векторы деп аталады. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтуші, бағыттаушы векторы $\vec{a} = \{l, m, n\}$ болған L түзудің теңдеуін табу керек.

L түзуде кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алып, M_0 мен M нүктелерінің $\overline{OM_0}$ мен $\overline{OM}$ радиус-векторларын жүргіземіз (сурет 4.39).

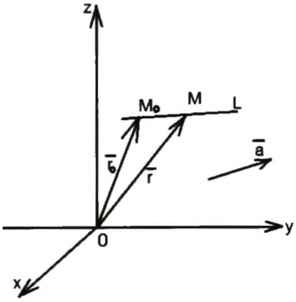
Сурет 4.39-дан көрінгендей

$$\bar{r} = \bar{r_0} + \overline{M_0M}$$

$\overline{M_0M} \parallel \vec{a}$ болғандықтан, $\overline{M_0M} = t\cdot\vec{a}$ болады, онда соңғы теңдік мына түрге келеді:

$$\bar{r} = \bar{r_0} + t\cdot\vec{a} \qquad (4.68)$$

(4.68) теңдеу түзудің векторлық теңдеуі деп аталады.



Сурет 4.39

7.2. Түзудің параметрлік теңдеулері

$\bar{r} = \{x; y; z\}$, $\bar{r_0} = \{x_0; y_0; z_0\}$, $t\vec{a} = \{tl; tm; tn\}$ екендігін ескеріп, (4.68) теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tl)\bar{i} + (y_0 + tm)\bar{j} + (z_0 + tn)\bar{k}.$$

Бұл теңдіктен келесі теңдіктер шығады:

$$x = x_0 + tl, y = y_0 + tm, z = z_0 + tn. \qquad (4.69)$$

(4.69) теңдіктер кеңістіктегі түзудің параметрлік теңдеулері деп аталады.

7.3. Түзудің канондық теңдеулері

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі L түзуде жатсын және $\bar{a} = \{l; m; n\}$ векторы L түзудің бағыттаушы векторы болсын. Онда (4.69) теңдіктерден

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

қатынастар шығады. Бұл теңдіктерден t параметрді шығарып тастасақ:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (4.70)$$

(4.70) теңдіктер түзудің канондық теңдеулері деп аталады.

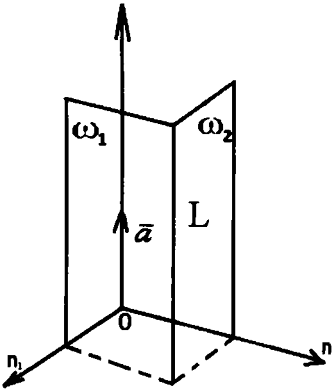
7.4. Түзудің жалпы теңдеуі

Параллель емес $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (ω_1) мен $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (ω_2) жазықтықтарының қиылысуы L түзуді анықтайды.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (4.71)$$

Бұл жүйе түзудің жалпы теңдеуі деп аталады.

Мұнда нормаль векторлар $\vec{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$ мен $\vec{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\}$ (сурет 4.40) өзара параллель емес; яғни олардың коэффициенттері пропорционал болмайды. (4.71) жалпы теңдеуден (4.70) канондық теңдеуге өтуге болады. Түзуде жататын M_0 нүктесінің координаталарын (4.71) жүйеде $z=z_0$ мән беріп, x_0 мен y_0 координаталарын табамыз. $L\perp\vec{n}_1$, $L\perp\vec{n}_2$ болғандықтан $\bar{a}$, бағыттаушы вектор ретінде олардың векторлық көбейтіндісін алуға болады:



Сурет 4.40

$$\bar{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad (4.72)$$

Мысал 7.1. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{0}$ теңдеулер $M_0(3;\ -2;\ 1)$ нүктесінен өтуші, Oz осіне перпендикуляр, себебі $\bar{a}=\{-2;\ 3;\ 0\}$ бағыттаушы вектордың Oz осіне проекциясы нөлге тең, яғни түзу $z=1$ жазықтықта жатыр. Демек, түзудің барлық нүктелері үшін $z-1=0$.

Мысал 7.2. $N(1;\ -2;\ 2)$ нүктесінен өтуші және Oz оське параллель түзудің канондық және параметрлік теңдеулері жазылсын.

Шешуі. Oz осьте жатушы $\bar{k}=\{0;\ 0;\ 1\}$ векторы шарт бойынша ізделінді түзуге параллель. Сондықтан $\bar{k}$ векторды осы түзудің бағыттаушы векторы деп есептеуге болады. (4.70) формула бойынша, түзудің канондық теңдеуі:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{1}$$

Параметрлік теңдеуге өткенде 1- және 2-қатынастардағы бөліміндегі нөлдер $x-1=0$ және $y+2=0$ дегені. 3-қатынасты t-ға тең десек, $z=2+t$. Демек, ізделінді түзудің параметрлік теңдеуі:

$$x=1;\ y=-2;\ z=2+t.$$

Мысал 7.3. Жалпы теңдеуімен берілген

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

түзудің канондық және параметрлік теңдеулері жазылсын.

Шешуі. Түзудің кейбір нүктесінің координаталарын анықтаймыз: $z = 0$ десек, $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$ жүйеден $x = 2, y = -1$.

Демек, $N(2; -1; 0)$ нүкте түзуде жатады. Қиылысушы жазықтықтарға перпендикуляр векторлар $\bar{n}_1 = \{1; -2; 3\}$, $\bar{n}_2 = \{3; 2; -5\}$ болғандықтан, түзудің бағыттаушы векторы (4.72) формула бойынша,

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}.$$

Онда (4.70) теңдіктер бойынша түзудің канондық теңдеуі $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$ немесе $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$. Ал параметрлік теңдеулері, (4.69) формула бойынша $x = 2 + 2t, y = -1 + 7t, z = 4t$ болады.

7.5. Екі нүкте арқылы өтуші кеңістіктегі түзу теңдеуі

L түзуі $M_1(x_1, y_1, z_1)$ мен $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтсін. Бағыттаушы вектор ретінде $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ векторды алуға болады, яғни $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$. Демек, $l = x_2 - x_1$; $m = y_2 - y_1$; $n = z_2 - z_1$. Түзу $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте арқылы өткендіктен, (4.70) теңдеулер бойынша:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4.70а)$$

(4.70а) теңдеулер екі нүкте арқылы өтуші түзу теңдеуі деп аталады.

Егер $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$ бағыттаушы вектор болып, түзу $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктесі арқылы өтсе, оның теңдеуі былайша жазылады:

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \qquad (4.70б)$$

7.6. Кеңістіктегі екі түзу арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

L_1 мен L_2 түзулері канондық түрде берілсін:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Олардың арасындағы бұрыш дегенде, $\bar{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1)$ мен $\bar{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2)$ бағыттаушы векторлар арасындағы бұрыш түсініледі (сурет 4.41). Демек,

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad (4.73)$$

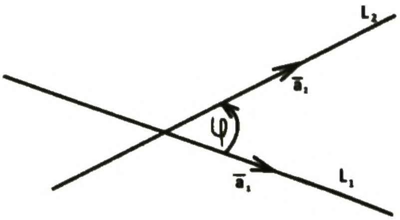
L_1 мен L_2 арасындағы сүйір бұрышты табу үшін (4.23) теңдіктің оң жағының алымының модулін алу керек.

Егер $L_1 \perp L_2$ болса, $\cos\varphi = 0$ болады, яғни

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \qquad (4.73а)$$

Егер $L_1 \parallel L_2$ болса, онда $\overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2$ болады, демек

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (4.73б)$$



Сурет 4.41

7.7. Екі түзудің бір жазықтықта жату шарты

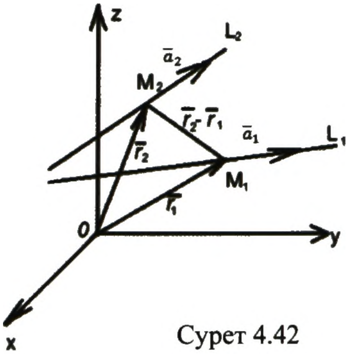
L_1 мен L_2 түзулері канондық теңдеулерімен берілсін,

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \; (L_1),$$
$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \; (L_2).$$

Олардың бағыттаушы векторлары $\overline{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\overline{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ болып, L_1 түзуі $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы, L_2 түзуі $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктесі арқылы өтеді. $\overline{OM_1} = \bar{r}_1$, $\overline{OM_2} = \bar{r}_2$ деп белгілесек, онда $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. L_1 мен L_2 түзулері бір жазықтықта жатуы үшін $\overline{a}_1, \overline{a}_2$, $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$, векторлары компланар болуы керек, яғни олардың аралас көбейтіндісі $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2 = 0$, немесе координаталарда

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.74)$$

болуы шарт (сурет 4.42).



Сурет 4.42

Демек, $\Delta = 0$ (4.74) шарт орындалғанда L_1 мен L_2 түзулері бір жазықтықта жатады:

а) $\overline{a}_2 \neq \lambda\overline{a}_1$ болғанда олар қиылысады;

б) немесе, егер $\overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2$ болса, олар да параллель болады.

Егер $\Delta \neq 0$ болса, L_1 мен L_2 түзулері айқасады.

Мысал 7.4. $M_1(2; 1; -3)$ және $M_2(1; -2; 2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі жазылсын.

Шешуі. (4.70а) формула бойынша M_1M_2 түзуінің теңдеуі:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z+3}{2+3} \quad \text{немесе,} \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

Мысал 7.5. $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ түзулердің арасындағы бұрыш анықталсын.

Шешуі. (4.72) формула бойынша бұл түзулердің бағыттаушы векторларын табамыз:

$$\bar a_1 = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\bar\imath + 2\bar\jmath + 11\bar k\,,$$

$$\bar a_2 = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\bar\imath + 12\bar\jmath + 4\bar k\,.$$

(4.73) формула бойынша түзулер арасындағы бұрыш косинусы,

$$\cos\varphi = \frac{\bar a_1\cdot\bar a_2}{|\bar a_1|\cdot|\bar a_2|} = \frac{10\cdot 3 + 2\cdot 12 + 11\cdot 4}{\sqrt{10^2+2^2+11^2}\cdot\sqrt{3^2+12^2+4^2}} = \frac{98}{195}$$

Демек, $\varphi = \arccos\frac{98}{195} \approx 59°58'$.

§ 8. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

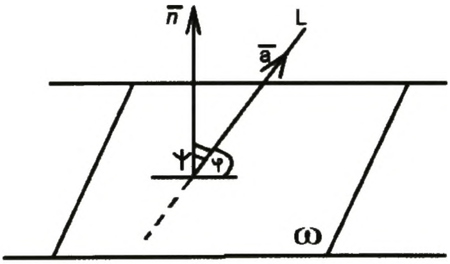
8.1. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

$Oxyz$ кеңістікте ω жазықтығы $Ax + Bx + Cz + D = 0$ теңдеуімен, ал L түзуі

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

теңдеулерімен берілсін.

Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп, түзу мен оның жазықтықтағы проекциясының арасындағы сыбайлас бұрыштардың кез келгенін атайды.



Сурет 4.43

φ арқылы L түзуі мен ω жазықтығы арасындағы бұрышты, ψ арқылы $\bar n = \{A, B, C\}$ мен $\bar a = \{l, m, n\}$ арасындағы бұрышты белгілейміз (сурет 4.43). Онда $\cos\psi = \frac{\bar n\cdot\bar a}{|\bar n|\cdot|\bar a|}$ болып, $\sin\varphi = \pm\cos\psi$ теңдік орындалады.

Мұнда: егер $\psi \le \frac{\pi}{2}$ болса, $\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$;
егер $\psi > \frac{\pi}{2}$ болса, $\cos\psi = \cos(\pi - \varphi) = -\sin\varphi$

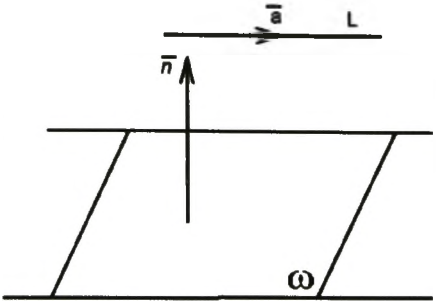
Демек, $$\sin\varphi = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (4.75)$$

ω мен L арасындағы сүйір бұрышты табу үшін (4.75) формулада алымының модулін алу керек.

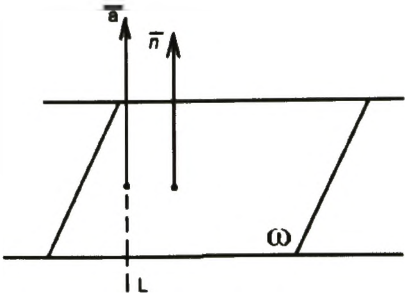
Егер $L \parallel \omega$ болса, онда $\bar n$ мен $\bar a$ векторлары перпендикуляр болады (сурет 4.44), демек $\bar a\cdot\bar n = 0$, яғни

$$Al + Bm + Cn = 0 \qquad (4.75а)$$

Бұл түзу мен жазықтықтың параллельдік шарты.



Сурет 4.44



Сурет 4.45

Егер $L \parallel \omega$ болса, онда $\bar{n}$ мен $\bar{a}$ векторлары параллель болады (сурет 4.45). Сондықтан

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \tag{4.75б}$$

теңдіктер түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық шарттары.

Мысал 8.1. $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ түзу мен $4x - 2y - 2z + 7 = 0$ жазықтық арасындағы бұрыш анықталсын.

Шешуі. (4.75) формуланы қолданамыз.

$l = 1$, $m = 1$, $n = -2$, $A = 4$, $B = -2$, $C = -2$ болғандықтан,

$$\sin\varphi = \frac{|4\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + (-2)(-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\ \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}} = \frac{1}{2}.$$

Демек, $\varphi = 30°$

8.2. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ теңдеулерімен берілген L түзуі мен

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

теңдеуімен берілген ω жазықтықтың қиылысу нүктесін табу үшін L түзудің теңдеулерін

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt$$

параметрлік түрде жазып, ω жазықтықтың теңдеуіндегі x, y, z айнымалдардың орнына қоямыз:

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0,$$

немесе

$$t(Al + Bm + Cn) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{*}$$

Егер L түзу ω-ға параллель болмаса, яғни $Al + Bm + Cn \neq 0$ болса, соңғы теңдіктен

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Осы табылған t-ның мәнін түзудің параметрлік теңдеулеріне қойсақ, L түзудің ω жазықтықпен қиылысу нүктелерінің координаталары шығады.

$L \parallel \omega$ жағдайды, яғни $Al + Bm + Cn = 0$, қарастырайық:

а) егер $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ болса, онда $L \parallel \omega$ болып L түзуі ω-мен қиылыспайды, себебі (*) теңдеу $0 \quad t + F = 0$ түрінде болады, мұнда $F \neq 0$.

б) Егер $F = 0$ болса, онда (*) теңдеу $0 \quad t + 0 = 0$ түрінде болып, кез келген t қанағаттандырады, яғни L түзудің кез келген нүктесі қиылысу нүктесі болады. Демек, L түзуі ω жазықтықта жатады. Сонымен

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

теңдіктердің екеуінің де орындалуы L түзудің ω жазықтықта жату шарты.

Мысал 8.2. $\frac{x+6}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{-3}$ түзу мен $3x - 4y + 5z + 16 = 0$ жазықтықтың қиылысу нүктесі табылсын.

Шешуі. Түзу мен жазықтықтың теңдеуін жүйе етіп шешеміз. Түзудің канондық теңдеуін, параметрлік түрде жазсақ. $x = -6 + 2t$, $y = 7 - t$, $z = 8 - 3t$. x, y, z шамалардың осы өрнектерін жазықтықтың теңдеуіне қойсақ , $3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 5(8 - 3t) + 16 = 0$, немесе ықшамдағаннан соң $-5t + 10 = 0$ болады, яғни $t = 2$. Осы табылған мәнді түзудің параметрлік теңдеуіне қойсақ, түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесінің координаталары табылады: $x = -2, y = 5, z = 2$.

8.3. Түзуді проекциялаушы жазықтық

Егер кеңістіктегі түзу теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{4.70}$$

конондық түрде берілсе,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}, \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{4.76}$$

теңдіктердің әрқайсысы берілген түзуді сәйкес түрде, Oxy, Oxz, Oyz координаталық жазықтықтарға проекциялаушы жазықтықты анықтайды.

Егер кеңістіктегі түзу,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4.71}$$

жалпы теңдеуімен берілсе, онда Oxy координаталық жазықтыққа проекциялаушы жазықтық теңдеуі (4.71) жүйеден z координатаны шығарып тастау арқылы алынады. Осы сияқты түзудің Oyz (Oxz) координаталық жазықтыққа проекциясы x координатаны (y координатаны) шығару арқылы алынады.

Мысал 8.3. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ түзудің Oyz жазықтыққа проекциясының теңдеуі жазылсын.

Шешуі. Берілген түзуді Oyz жазықтыққа проекциялаушы жазықтық теңдеуі (4.76) теңдіктер бойынша

$\frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ немесе $y - 3z + 5 = 0$.

Ізделінді проекция, осы жазықтық пен Oyz жазықтығының ($x = 0$) қиылысуында болады, яғни $\begin{cases} y - 3z + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Мысал 8.4. Жалпы теңдеуімен берілген $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$ түзудің Oxy координаталық жазықтықтағы проекциясы табылсын.

Шешуі. Берілген екі теңдеуден z координатаны шығарамыз. Ол үшін екінші теңдеуді 2-ге көбейтіп, 1-теңдеуге мүшелеп қосамыз: $5x + 7y - 4 = 0$.

Ізделінді проекция алынған жазықтық пен Oxy жазықтықтың ($z = 0$) қиылысуы болады:

$$\begin{cases} 5x + 7y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

8.4. Берілген түзу мен берілген нүкте арқылы өтетін жазықтық

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте мен $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ түзу берілсін. M_0 нүкте түзуде жатпайды. Түзудің теңдеуінен, оның бағыттаушы векторы $\bar{a} = \{l, m, n\}$ және $M_1(x_1, y_1, z_2)$ нүктеден өтетіндігі көрінеді. $M(x, y, z)$ ізделінді жазықтықтың кез келген нүктесі болсын. Қалай таңдалғанда да (сурет 4.46)

$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$ және $\bar{a} = \{l, m, n\}$ векторлары бір жазықтықта жатады. Демек, олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.77)$$

Бұл анықтауышты ашып, ізделінді жазықтық теңдеуі алынады.

Мысал 8.5. $M_0(2; 0; 1)$ нүктесі және $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ түзуі арқылы өтетін жазықтық теңдеуі жазылсын.

Шешуі. Алдымен M_0 нүктесінің берілген түзуде жатпайтынын анықтаймыз; $\frac{2-1}{1} \neq \frac{0+1}{2} \neq \frac{1+1}{-1}$ $N(1; -1; -1)$ нүктесі берілген түзуде жатады, ал $\bar{a} = \{1, 2, -1\}$ берілген түзудің бағыттаушы векторы. $M(x, y, z)$ ізделінді жазықтықтың кез келген нүктесі болсын. Онда $\overline{M_0M} = \{x - 2, y, z - 1\}$, $\overline{M_0N} = \{-1; -1; -2)$ және $\bar{a} = \{1, 2, -1\}$ компланар векторлар болады. Сондықтан (4.77) формула бойынша, $\begin{vmatrix} x - 2 & y & z - 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, яғни 1-жол бойынша жіктесек,

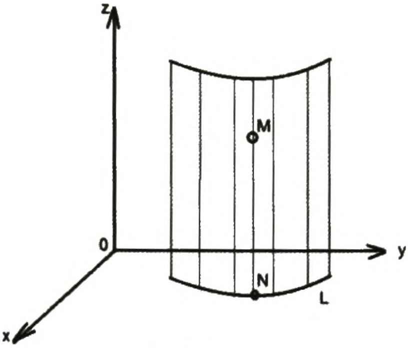
$$(x - 2)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z - 1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$5(x - 2) - 3y - (z - 1) = 0.$

Демек, ізделінді жазықтық теңдеуі: $5x - 3y - z - 9 = 0$.

§ 9. Кеңістіктегі екінші ретті беттер

9.1. Цилиндрлік беттер

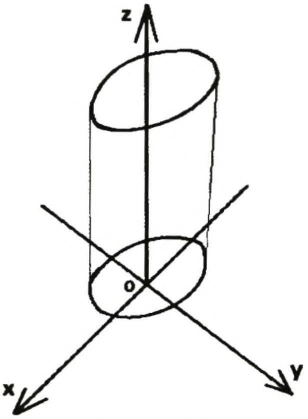


Сурет 4.47

Қисық сызық пен оның барлық нүктелері арқылы өтуші параллель түзулер жиыны цилиндрлік бет деп аталады.

Қисық – цилиндрлік беттік бағыттаушысы, ал параллель түзулер оның жасаушылары деп аталады.

Кеңістікте $F_1(x, y) = 0$ теңдеуі, Oxy жазықтықта берілген L_1 бағыттаушы сызық $F_1(x, y) = 0$ арқылы өтуші, жасаушылары Oz осіне параллель, цилиндрлік бетті анықтайды (сурет 4.47).



Сурет 4.48

Осы сияқты кеңістікте $F_2(x, z) = 0$ теңдеуі, Oxz жазықтықта берілген L_2 бағыттаушы сызық арқылы өтуші, жасаушылары Oy осіне параллель цилиндрлік бетті, ал кеңістікте $F_3(y, z) = 0$ теңдеуі, Oyz жазықтықта берілген L_3 бағыттаушы сызық арқылы өтуші, жасаушылары Ox осіне параллель цилиндрлік бетті анықтайды.

Теорема 9.1. Егер $F_1(x, y) = 0$ теңдеуі Oxy жазықтықта кейбір L сызықтың теңдеуі болса, онда

$$F_1(x, y) = 0 \qquad (4.78)$$

теңдеу $Oxyz$ кеңістікте жасаушылары Oz осіне параллель цилиндрлік бетті анықтайды.

Дәлелдеуі. $M\ (x,\ y,\ z)$ цилиндрдің кез келген нүктесі болсын; ол кейбір жасаушының бойында жатады. Осы жасаушының L сызықпен қиылысу нүктесі N нүктесінің координаталары (4.78) теңдеуді қанағаттандырады. Онда M нүктесінің де абсциссасы x, ординатасы y болғандықтан $M(x, y, z)$ нүктесінің координаталары да (4.78) теңдеуді қанағаттандырады, себебі теңдеуге z кірмейді. $M(x, y, z)$ цилиндрдің кез келген нүктесі болғандықтан, (4.78) цилиндрдің теңдеуі болады (сурет 4.47).

Салдар 9.1. $F_2(x, z) = 0$ ($F_3(y, z) = 0$) теңдеуі жасаушысы Oy оське (Ox оське) параллель цилиндрлік бетті анықтайды.

Егер бағыттаушы сызық Oxy жазықтықтағы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.78а)$$

эллипс болса, онда $Oxyz$ кеңістікте сәйкес цилиндрлік бет эллипстік цилиндр деп аталады (сурет 4.48).

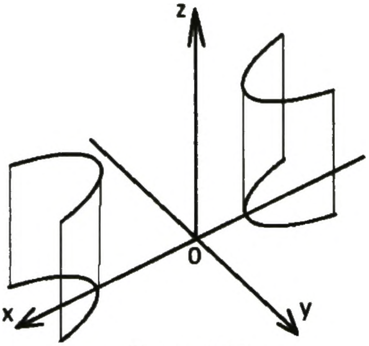
Дербес жағдайда $a = b = R$ болса, онда дөңгелектік цилиндрді анықтайды.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.78б)$$

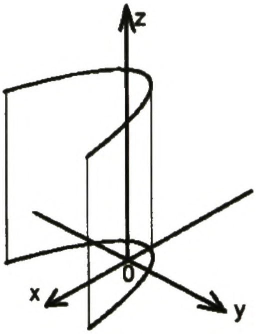
теңдеу кеңістікте гиперболалық цилиндрді (сурет 4.49),

$$y^2 = 2px \qquad (4.78в)$$

теңдеу кеңістікте параболалық цилиндрді анықтайды (сурет 4.50).



Сурет 4.49



Сурет 4.50

Эллипстік, гиперболалық, параболалық (4.78а), (4.78б), (4.78в) цилиндрлік беттер, екінші ретті цилиндрлік беттер деп аталады, өйткені бұл теңдеулер айнымал x, y және z-терге байланысты екінші дәрежелі теңдеулер.

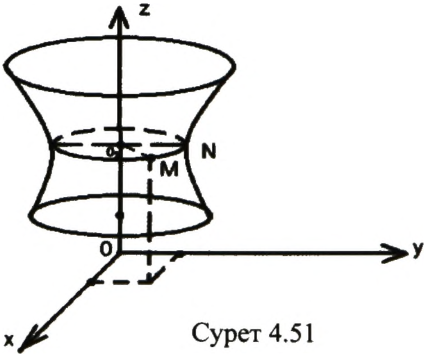
9.2. Айналу беттері

Кейбір қисықсызықтың өзімен бір жазықтықта жатқан ось арқылы айналуынан пайда болған бет айналу беті деп аталады.

Кейбір L қисық Oyz жазықтығында жатса, бұл қисықтың теңдеуі

$$\begin{cases} F(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (4.79)$$

түрінде болады. L қисықтың Oz осі арқылы айналғандағы айналу бетінің теңдеуін жазу керек. Айналу бетінің кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алып, M нүктесі арқылы Oz ке перпендикуляр жазықтық өткіземіз. Жазықтықтың Oz осімен қиылысу нүктесі $O_1(0; 0; z)$, ал L сызықпен қиылысу нүктесін $N(0, y_1, z_1)$ деп белгілейміз. O_1M мен O_1N бір шеңбердің радиустары болғандықтан, (сурет 4.51) $O_1M = O_1N$, бірақ $O_1M = \sqrt{x^2 + y^2}$, $O_1N = |y_1|$.



Сурет 4.51

Демек, $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$, немесе $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; $x_1 = x$ екендігі анық. N нүктесі L сызықта жатқандықтан, оның координаталары сызықтың теңдеуін қанағаттандырады: $F(y_1, z_1) = 0$.

Көмекші y_1 мен z_1 координаталардан арылсақ,

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}; z) = 0 \qquad (4.80)$$

теңдеуге ие боламыз. Бұл айналу бетінің теңдеуі, өйткені бұл теңдеуді айналу бетінің кез келген нүктесінің координаталары қанағаттандырады.

Демек, (4.79) теңдеу (4.78) теңдеуден y айнымалды $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ өрнекке алмастыру арқылы, x өзгеріссіз қалып, алынды. Осы сияқты $F(x, y) = 0$, $z = 0$ сызықты Ox осі бойынша айналдырсақ, айналу беті

$$F(x, \pm\sqrt{z^2+y^2}) = 0 \qquad (4.80а)$$

теңдеумен анықталады, ал $F(y, z) = 0$, $z = 0$ сызықты Oy осі бойынша айналдырса, айналу бетінің теңдеуі

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0 \qquad (4.80б)$$

түрінде болады.

Мысал 9.1. Oz осі маңында айналудан пайда болған келесі пішіндердің теңдеулері жазылсын:

а) айналу эллипсоиды;

б) айналу параболоиды;

в) айналу гиперболоидтары.

Шешуі. а) Ізделінетін айналу эллипсоиды $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z = 0$ эллипсті Oz осі маңында айналдырудан пайда болады. (4.80) формула бойынша y айнымалды $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ өрнекке ауыстырсақ,

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

айналу эллипсоидының теңдеуі шығады.

б) Ізделінетін айналу параболоиды $y^2 = 2pz$, $z = 0$ параболаны Oz осі маңында айналдырғанда шығады. (4.80) формула бойынша, мұнда да y айнымалды $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ өрнекке ауыстырсақ,

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

айналу параболоидының теңдеуі шығады.

в) Бір қуысты айналу гиперболоиды гиперболаны өзінің жорамал осі маңында айналдырғанда алынады. Демек, Oz осі гиперболаның жорамал осі болуы керек, оның теңдеуі:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, x=0$$

түрінде болады. (4.80) формула бойынша, мұнда да y-ті $\pm\sqrt{x^2+y^2}$-ке ауыстырсақ,

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Екіқуысты айналу гиперболоиды гиперболаны нақты осі маңында айналдырғанда алынады. Шарт бойынша нақты ось Oz. Сондықтан гиперболаның теңдеуі

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, x=0$$

болады. (4.80) формула бойынша ізделінді теңдеу,

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

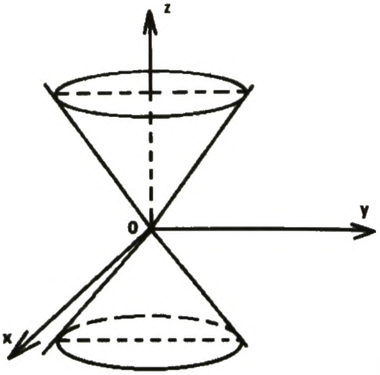
түрінде болады.

Мысал 9.2. $y = z$ түзудің Oz осі маңында айналудан пайда болған пішіннің теңдеуі жазылсын (сурет 4.52).

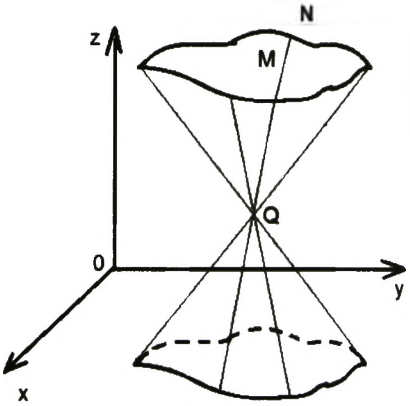
Шешуі. $Oxyz$ кеңістікте берілген түзудің теңдеуі

$$\begin{cases} y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

түрінде жазылады. Бұл түзу Oz осі маңында айналғанда, оның теңдеуі (4.80) формула бойынша $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ болады, немесе $x^2+y^2=z^2$ Бұл пішін екінші ретті конус деп аталады.



Сурет 4.52



Сурет 4.53

9.3. Конустық беттер

$Oxyz$ кеңістікте берілген Q нүктесі арқылы өтуші түзулердің берілген L жазық сызықпен, $Q \notin L$, қиылысқанда пайда болатын бетті конустық бет немесе конус деп атайды. Мұнда Q нүктесі конустың төбесі, L – конустың бағыттаушысы, бетті құрайтын түзулер – конустық беттің жасаушылары деп аталады (сурет 4.53).

$Q_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі конустың төбесі, L бағыттаушы сызық $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ түрінде болсын.

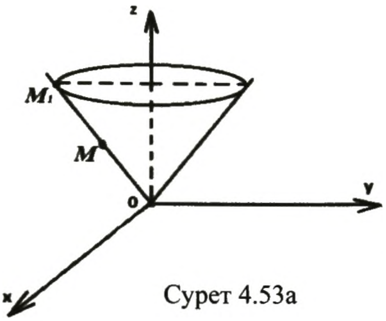
Конустың теңдеуін табу керек.

Конус бетінде $M(x,y,z)$ кез келген нүктені аламыз. Q_0 мен M нүктелері арқылы өтуші түзу L бағыттаушы сызықты $N(x_1,y_1,z_1)$ нүктесінде қисын. $N \in L$ болғандықтан оның координаталары L сызықтың теңдеулерін қанағаттандырады:

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_2,y_2,z_2)=0 \end{cases} \quad (4.81)$$

Q_0 мен N нүктелері арқылы өтуші жасаушылардың канондық теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \quad (4.82)$$



Сурет 4.53а

(4.81) және (4.82) теңдеулерде x_1, y_1, z_1 шамалардан арылсақ, айнымал x, y, z шамаларды байланыстыратын конустың теңдеуі шығады.

Мысал 9.3. Төбесі $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктесінде, бағыттаушы сызығы, $z = c$ жазықтықта жататын $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс болатын конустың теңдеуі жазылсын.

Шешуі. $M(x;\ y;\ z)$ – конустың кез келген нүктесі болсын. Конустың OM жасаушының эллипспен қиылысу нүктесі $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ арқылы өтетін (4.70) түзудің канондық теңдеуі $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$ болады. Осы теңдеулер және $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ эллипстің теңдеуінен x_1 және y_1 шамаларды шығарып тастасақ, $z_1 = c$ болады. Онда $\frac{x}{x_1}=\frac{z}{c}$, $\frac{y}{y_1}=\frac{z}{c}$ болады. Осыдан $x_1 = c.\frac{x}{z}$ және $y_1 = c\cdot\frac{y}{z}\cdot x_1$ мен y_1 шамалардың бұл табылған мәндерін $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ эллипстің теңдеуіне қойсақ, $\frac{c^2}{z^2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2}{z^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}=1$, немесе, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ ізделінді конустың теңдеуі шығады (сурет 4.53а).

9.4. Екінші ретті беттердің қарапайым теңдеулері

Екінші ретті бет деп $Oxyz$ декарт координаталары жүйесінде координаталары

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$
$$+ 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \qquad (4.83)$$

түріндегі екінші дәрежелі алгебралық теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиынын атайды.

Мұндағы a_{ij}, $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ коэффициенттердің ең болмағанда біреуі нөлге тең емес.

Іс жүзінде көбірек қолданылатын екінші дәрежелі беттердің канондық теңдеулерін қарастырайық. Бұл теңдеулерге (4.83) теңдеуді, координаталық осьтерді параллель көшіру мен бұру арқылы келтіріледі. Екінші ретті беттердің түрлері мен қасиеттерін параллельдік қима әдісімен зерттеуге болады: беттерді координаталық жазықтықтарға параллель жазықтықтар арқылы қияды да, қимада алынған сызықтардың түрі мен қасиеттеріне қарай беттің түрі мен қасиеттері туралы тұжырым жасалады ([1], 3 тарау, §2, §6).

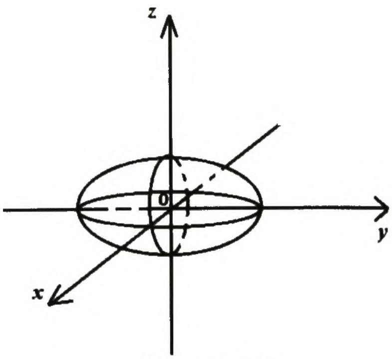
1. Эллипсоид

Oxyz кеңістікте

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a, b, c > 0 \qquad (4.84)$$

теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиыны эллипсоид деп аталады.

Мұндағы a, b, c – шамалар эллипсоидтың жарты осьтері деп аталады (сурет 4.54).



Сурет 4.54

Егер $a = b = c = R$ болса, (4.84) теңдеу

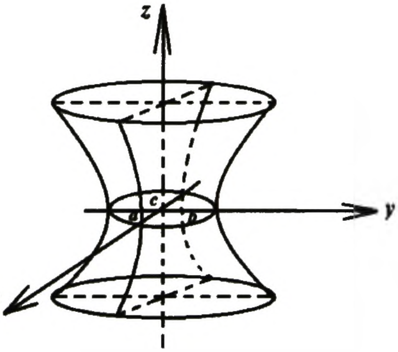
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (4.85)$$

түрге келіп, бұл теңдеу центрі координата басында, радиусы R сфераны анықтайды. (4.84) теңдеуден эллипсоидтың $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ координаталық жазықтықтарға және координата басына қатысты симметриялы екендігі көрінеді. Эллипсоидтың $z = h, -c < h < c$ жазықтықпен қиылысы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

немесе $\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$ түріндегі эллипстер.

$\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)$, $\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)$ жарты осьтері $z = 0$, ($h = 0$) болса, ең үлкен мәнге ие болады, сондықтан бұл мәнге сәйкес, яғни $z = 0$, ($h = 0$), эллипс те ең үлкен болады.



Сурет 4.55а

Осы сияқты жағдайлар $x = h$, $-a < h < a$ және $y = h$, $-b < h < b$ жазықтықтармен қиылысқанда да болады.

($\pm a$, 0, 0), (0, $\pm b$, 0), (0, 0, $\pm c$) нүктелері эллипсоидтың төбелері деп аталады.

Ескерту 9.1. Егер эллипсоидтың кейбір екі жарты осі өзара тең болса, ол айналу эллипсоиды деп аталады.

2. Бірқуысты гиперболоид

Oxyz кеңістікте

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0 \qquad (4.86)$$

теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиыны бір қуысты гиперболоид деп аталады (сурет 4.55а).

(4.86) теңдеуде айнымалдардың тек квадраттары ғана болғандықтан бірқуысты гиперболоид координата жазықтықтарына және координата бас нүктесіне қатысты симметриялы бет болады.

(4.86) бетті $z = h$ жазықтықпен қиғандағы қимасы $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$ немесе

$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$ түріндегі эллипс болады.

Егер (4.86) бетті $x = h$, немесе $y = h$ жазықтығымен қиғандағы қималар гипербола болады:

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\\ x=h\end{cases} \text{ немесе }, \begin{cases}\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}=1\\ x=h\end{cases},$$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}\\ y=h\end{cases} \text{ немесе }, \begin{cases}\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2}=1\\ x=h\end{cases},$$

a, b және c шамалар бірқуысты гиперболоидтың жарты осьтері деп аталады.

3. Екіқуысты гиперболоид

Oxyz кеңістікте

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (4.87)$$

теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиыны екіқуысты гиперболоид деп аталады.

(4.87) теңдеуде айнымалдардың тек жұп дәрежелері болғандықтан, бет координата жазықтықтарына және координата бас нүктесіне қатысты симметриялы болады (сурет 4.55).

a, b және c шамалар екіқуысты гиперболоидтың жарты осьтері деп аталады.

(4.87) бетті $z = h$ жазықтықтарымен қисақ, қима

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{cases}$$

теңдеулерімен анықталады. Егер:

а) $|h| < c$ болса, онда $z = h$ жазықтықтар бетті қимайды;

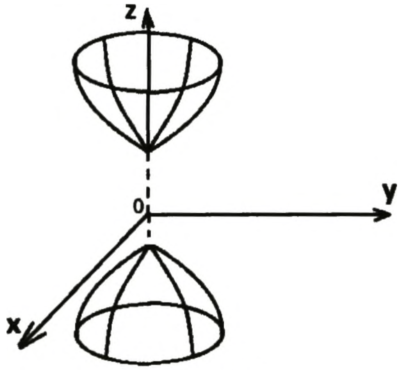
б) $|h| = c$ болса, онда $z = \pm c$ жазықтықтар $(0; 0; c)$, $(0; 0; -c)$ нүктелерінде бетті жанайды;

в) $|h| > c$ болса, (4.87) теңдеуді былайша жазамыз:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1\\ x=h\end{cases}$$

Бұл теңдеулер эллипсті анықтайды, жартыосьтері $|h|$ өскен сайын өседі.

(4.87) бетті Oyz $(x = 0)$ және Oxz $(y = 0)$ координаталық жазықтармен қисақ, қимада



Сурет 4.55

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0\end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{cases}$$

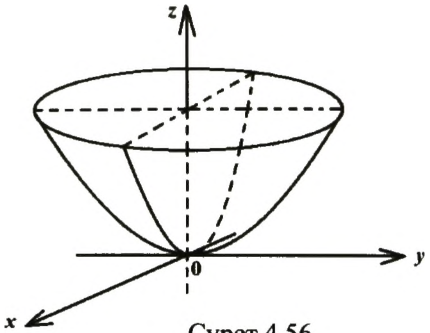
теңдеулермен анықталатын гиперболалар шығады. Екі гиперболаның да *Oz* нақты осі болады.

4. Эллипстік параболоид

Oxyz кеңістікте

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p>0, q>0 \qquad (4.88)$$

теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиыны эллипстік параболоид деп аталады (сурет 4.56).



Сурет 4.56

(4.88) эллипстік параболоидты $z = h$ жазықтықтармен қисақ, қимада

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h\\ z=h\end{cases}$$

теңдеулермен анықталатын сызық шығады. Егер

а) $h < 0$ болса, $z = h$ жазықтықтар бетті қимайды;

б) $h = 0$ болса, $z = 0$ жазықтығы бетті 0 (0; 0; 0) нүктесінде жанайды;

в) $h > 0$ болса, онда қимада $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2ph}+\dfrac{y^2}{2qh}=1\\ z=h\end{cases}$

теңдеулермен анықталатын эллипс шығады. h өскен сайын эллипстің жартыосьтері де өседі.

(4.85) бетті *Oxz* ($y = 0$) және *Oyz* ($x = 0$) координаталық жазықтықтармен қисақ, қимада $\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{2p}\\ y=0\end{cases}$ және $\begin{cases}z=\dfrac{y^2}{2p}\\ x=0\end{cases}$ теңдеулермен анықталатын параболалар шығады.

Сонымен, эллипстік параболоидтың бейнесі (4.56) суреттегідей болады.

5. Гиперболалық параболоид

Oxyz кеңістікте

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p>0, q>0 \qquad (4.89)$$

теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиыны гиперболалық параболоид деп аталады.

(4.89) бетті зерттейік.

Бетті $z = h$ жазықтықтармен қисақ

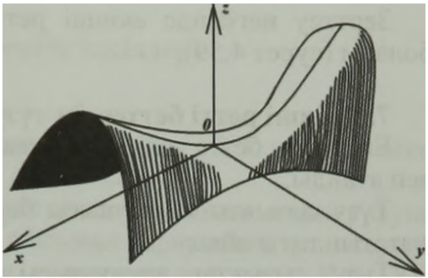
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2ph}-\dfrac{y^2}{2qh}=1\\ z=h\end{cases}$$

қисық сызық теңдеуі шығады. Бұл теңдеу:

а) $h > 0$ болғанда, нақты осьтері Ox осіне параллель гиперболаларды;

б) $h < 0$ болғанда, нақты осьтері Oy осіне параллель гиперболаларды;

в) $h = 0$ болғанда, $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ болып, $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$, $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ қос түзуді анықтайды.



Сурет 4.57

(4.89) бетті $y = h$ жазықтықтармен қиғанда $\begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q}\right) \\ y = h \end{cases}$ параболалар алынады. $y = 0$ болғанда қимада төбесі (0; 0) нүктесінде, симметрия осі Oz болатын $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ парабола алынады.

(4.89) бетті $x = h$ жазықтықтармен қиғанда тармақтары төмен қарай бағытталған $\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right) \\ z = h \end{cases}$ параболалар алынады.

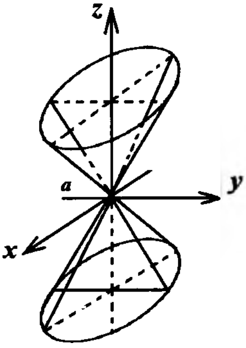
Осы зерттеулер беттің түрін анықтауға мүмкіндік береді (сурет 4.57).

6. Екінші ретті конустар

Oxyz координаталық кеңістікте

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (4.90)$$

теңдеуді қанағаттандыратын кеңістік нүктелерінің жиыны екінші ретті конус деп аталады (сурет 4.58).



Сурет 4.58

(4.90) теңдеуді зерттейік.

(4.90) бетті $z = h$ жазықтықтармен қисақ, қимада:

а) $h \neq 0$ болғанда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}} = 1 \\ z = h \end{cases}$$ эллипстер;

б) $h = 0$ болғанда (0, 0, 0) нүктесі алынады.

(4.90) бетті Oyz ($x = 0$) жазықтықпен қисақ

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

сызық алынады. Бұл қиылысатын $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$ және $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ екі түзуге ажыратылады.

(4.90) бетті $y = 0$ жазықтықпен қиғандағы $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, қима сызық $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$ және $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ екі түзуге ажыратылады.

Зерттеу негізінде екінші ретті конустың геометриялық бейнесін жасауға болады (сурет 4.59).

7. Екінші ретті беттердің түзу сызықты жасаушылары

Егер түзу бетте толығымен жатса, ол түзуді беттің түзу сызықты жасаушысы деп атайды.

Түзу сызықты жасаушысы бар беттерге екінші ретті конус, цилиндрлік бет жататындығы айқын.

Түзу сызықты жасаушысы бар беттерге бірқуысты гиперболоид пен гиперболалық параболоид та жатады.

Келесі тұжырым* орынды:

Бірқуысты гиперболоид пен гиперболалық параболоидтың әрбір нүктесі арқылы, осы беттерде жататын, әртүрлі екі түзу сызықты жасаушылар өтеді.

Бұл тұжырым кейбір орнықты инженерлік құрылымдар (конструкциялар) жасағанда қолданылады. ([1], гл. 6, § 6)

---

* В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. М.: Физматли, 2001. Пункт 5 § 3, Гл. 7.

V тарау. БІР АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ШЕГІ

§ 1. Бір айнымалды функция

1.1. Функция ұғымы. Функциялардың берілу тәсілдері

X, Y сандық жиындар болсын.

Анықтама 1.1. Кез келген $x \in X$ санға анық бір ғана $y \in Y$ санды сәйкес қоятын ереже X жиында анықталған функция деп аталады.

Функция $f\colon X \to Y$ немесе $y = f(x)$ түрінде жазылады және x-тың f функциясы деп оқылады. Мұндағы x – тәуелсіз айнымал (аргумент); y – тәуелді айнымал (функция); $f(x)$ – f функциясының x нүктесіндегі мәні, $X = D(f)$, функцияның анықталу аймағы (анықталу жиыны), $Y = E(f)$ функцияның мәндер жиыны, деп аталады. Жалпы, егер (X, f) жұп берілсе, функция берілген делінеді.

Басқаша функцияны былайша анықтауға болады.

Кез келген $x \in X$ санды белгілі f ереже бойынша анық бір $y \in Y$ санға бейнелесе, онда реттелген (x, y) сандар жұбы жиыны функция деп аталады.

Әрбір $x \in X$ тек бір жұпқа кіреді, әрбір $y \in Y$ кемінде бір жұпқа кіреді.

Функцияны $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ т.с.с. белгілейді.

Анықтама 1.2. $y = f(x)$ функциясының белгіленген Oxy жазықтықтағы графигі деп (x, y) нүктелерінің жиынын атайды. Мұндағы x – тәуелсіз айнымал, ал y, осы x-ке байланысты функцияның мәні.

Іс жүзінде функция көбірек үш тәсілде беріледі: аналитикалық тәсіл; графиктік тәсіл; кестелік тәсіл.

а) Аналитикалық тәсіл.

Мұнда функциялық тәуелділік аналитикалық өрнек немесе формула арқылы беріледі.

Ескеретін жағдай, абстракт функциялық тәуелділіктерде анықталу жиыны ретінде берілген өрнектің мағынасы болатындай x айнымалдың табиғи анықталу жиыны алынады, ал нақты функциялық тәуелділіктерде анықталу жиыны x айнымалдың мазмұнына қарап алынады. Функциялардың $D(y)$ анықталу жиыны және $E(y)$ мәндер жиынын табуға мысалдар келтірейік.

Мысал 1.1. $y = \pi x^2$ функциясының табиғи анықталу жиыны $D(y) = (-\infty, +\infty) = R$, ал мәндер жиыны $E(y) = [0, +\infty)$.

Ал, айнымал x дөнгелектің радиусы, y дөңгелектің ауданы болса, онда: $D(y) = [0, R]$, $E(y) = [0, \pi R^2]$.

Ескерту 1.1. Әдетте функцияның табиғи анықталу жиыны қарастырылады.

Мысал 1.2. $y = \sqrt{1 - x^4}$, $D(y) = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$, $E(y) = \{y \mid 0 \le y \le 1\}$

Мысал 1.3. $y = n!$, $D(y) = N = \{n\}$, $E(y) = \{n!\}$

Мысал 1.4. $y = \begin{cases} 0, \text{егер } x \text{ иррационал сан болса,} \\ 1, \text{егер } x \text{ рационал сан болса.} \end{cases}$

Бұл Дирихле функциясы үшін: $D(y) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = R$, $E(y) = \{0; 1\}$.

Мысал 1.5. $y = \text{sgn}x = \begin{cases} -1, \text{егер } x < 0 \text{ болса,} \\ 0, \text{егер } x = 0 \text{ болса,} \\ +1, \text{егер } x > 0 \text{ болса} \end{cases}$

(sgn термині латынның signum – таңба сөзінен). $D(y) = R$, $E(y) = \{-1; 0; 1\}$.

Мысал 1.6. $y = \begin{cases} x^2, \text{егер } -\infty < x \leq 1 \text{ болса,} \\ 5, \text{егер } x > 1 \text{ болса.} \end{cases}$

$D(y) = R$, $E(y) = [0; +\infty\}$.

б) Кестелік тәсіл.

Мұнда функциялық тәуелділік кесте түрінде беріледі. Тригонометриялық, логарифмдік т.б. кестелер бұған мысал бола алады.

в) Графиктік тәсіл.

Аргумент пен функция арасындағы байланыс график арқылы берілсе, онда оны функцияның графиктік берілуі деп атайды.

Мұндай графиктерді әдетте тәжірибе процесстерін сипаттайтын техникалық құралдар сызады.

Іс жүзінде бұл үш тәсілдің араласып жүзеге асқан түрі тиімді.

Мәселен, $y = f(x)$ түрінде берілген функцияның айнымал x-ке әртүрлі мәндер беріп кесте жасап, осы кесте негізінде графигі сызылады. Кестедегі нүктелер саны неғұрылым көп болған сайын функция туралы мәлімет тереңдеу болады.

Тәжрибе жасағанда да, алынған мәліметтердің кестесі бойынша графигін сызып, функциялық байланыс туралы мәлімет алынады.

x	x_1	x_2	x_n	...	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_n	...	y_{n-1}	y_n

1.2. Функцияның негізгі сипаттамалары

Анықтама 1.3. Кез келген $x \in D(f)$ үшін, $-x \in D(f)$, $f(-x) = f(x)$шарттары орындалса, $f(x)$ функциясы жұп функция, ал $-x \in D(f)$, $f(-x) = -f(x)$шарттары орындалса, $f(x)$ функциясы тақ функция деп аталады.

Мысалы, cos$x$, x^2 функциялары жұп, ал sin$x$, tg$x$, ctg$x$, x^3 функциялары тақ функциялар. Көптеген функциялар тақ та, жұп та емес.

Анықтама 1.4. Кез келген $x \in D(f)$ үшін $x + T \in D(f)$, $f(x + T) = f(x)$ болатын T саны табылса, онда $D(f)$ жиында $f(x)$ функциясы периоды T болатын периодты функция деп аталады. Негізгі периоды T болатын функция үшін kT, $k = \pm1, \pm2, \ldots$ сандары да период болады.

Мысалы, sin$x$ пен cos$x$ функцияларының негізгі периоды 2π, ал tg$x$ пен ctg$x$ функцияларының негізгі периоды π болады.

Анықтама 1.5. $f(x)$ функциясы үшін $M > 0$ саны табылып, барлық $x \in D(f)$ мәндері үшін $|f(x)| \leq M$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы $D(f)$ жиында шенелген функция деп аталады.

Қысқаша жазылуы: $(\exists M > 0, \ \forall x \in D(f)): |f(x)| \leq M$.

Мысалы sin$x$ пен cos$x$ функциялары өздерінің $(-\infty, +\infty)$ анықталу жиынында шеленген функциялар, себебі $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.

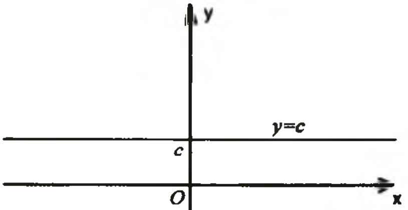
Анықтама 1.6. Егер X жиынының $x_1 < x_2$ $(x_1 > x_2)$ теңсіздігін қанағаттандыратын x_1, x_2 нүктелері үшін $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы X жиында өспелі (кемімелі) функция деп аталады.

$x_1 < x_2$ $(x_1 > x_2)$ болғанда $f(x_1) \geq f(x_2)$, $(f(x_1) \leq f(x_2))$ болса, $f(x)$ функциясы X жиында кемімейтін (оспейтін) функция деп аталады.

Өспелі, кемімелі өспейтін және кемімейтін функциялар бірсарынды функциялар деп аталады.

Мысалы, $f(x) = x^2$функциясы $(-\infty,\ 0)$ жиында кемімелі, ал $(0,\ +\infty)$ жиында өспелі.

1.3. Кері функция



Сурет 5.1

Берілген $y = f(x)$ функциясының анықталу жиыны D, мәндер жиыны E болсын.

Анықтама 1.7. Егер әрбір $y \in E$ үшін тек бір ғана $x \in D$ сәйкес қойылса, онда анықталу жиыны E, мәндер жиыны D болатын $x = \varphi(y)$ функциясы $y = f(x)$ функциясына кері функция деп аталады.

$y = f(x)$ функциясына кері функцияны табу үшін осы теңдікті x-ке байланысты шешу жеткілікті. Тек өзара бір мәнді сәйкестік жиынын анықтау қажет.

Мысал 1.6. $y = 3x$, $D(y) = R$, $E(y) = R$ функциясына кері функция $x = \frac{y}{3}$, $D(x) = R$, $E(x) = R$.

Мысал 1.7. $y = x^3$, $x \in [0;\ 1] = D(y)$, $E(y) = [0,\ 1]$ функциясына кері функция $x = \sqrt[3]{y}$, $D(x) = [0;\ 1]$, $E(x) = [0;\ 1]$.

б) $y = x^2$, $D(y) = [-1;\ 1]$, $E(y) = [0;\ 1]$ функциясына кері функция жоқ, себебі $y = \frac{1}{4}$ болса, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{2}$ болады. Яғни, бір мәнді сәйкестік жоқ.

Анықтамадан байкалғандай, кері функция бар болуы үшін f функциясы D мен E жиындарының арасында бірмәнді сәйкестік орнатуы қажет.

Демек, бірсарынды функциялар кері функцияға ие. $y = f(x)$ пен $x = \varphi(y)$ кері функциялардың графигі бір сызық болады.

1.4. Күрделі функция

Анықтама 1.8. Егер y айнымал u-дың функциясы, яғни $y = f(u)$, ал u айнымал x-тің функциясы, яғни $u = g(x)$, болса, онда y-ті x-тің күрделі функциясы деп атайды.

Күрделі функцияны функцияның функциды, функциялардың суперпозициясы, функциялардың композициясы деп те атайды да оны $y = f[g(x)]$ түрінде жазады.

Мысалы, $y = \cos(x^2 + 3)$ күрделі функция, мұнда $u = x^2 + 3$, $y = \cos u$.

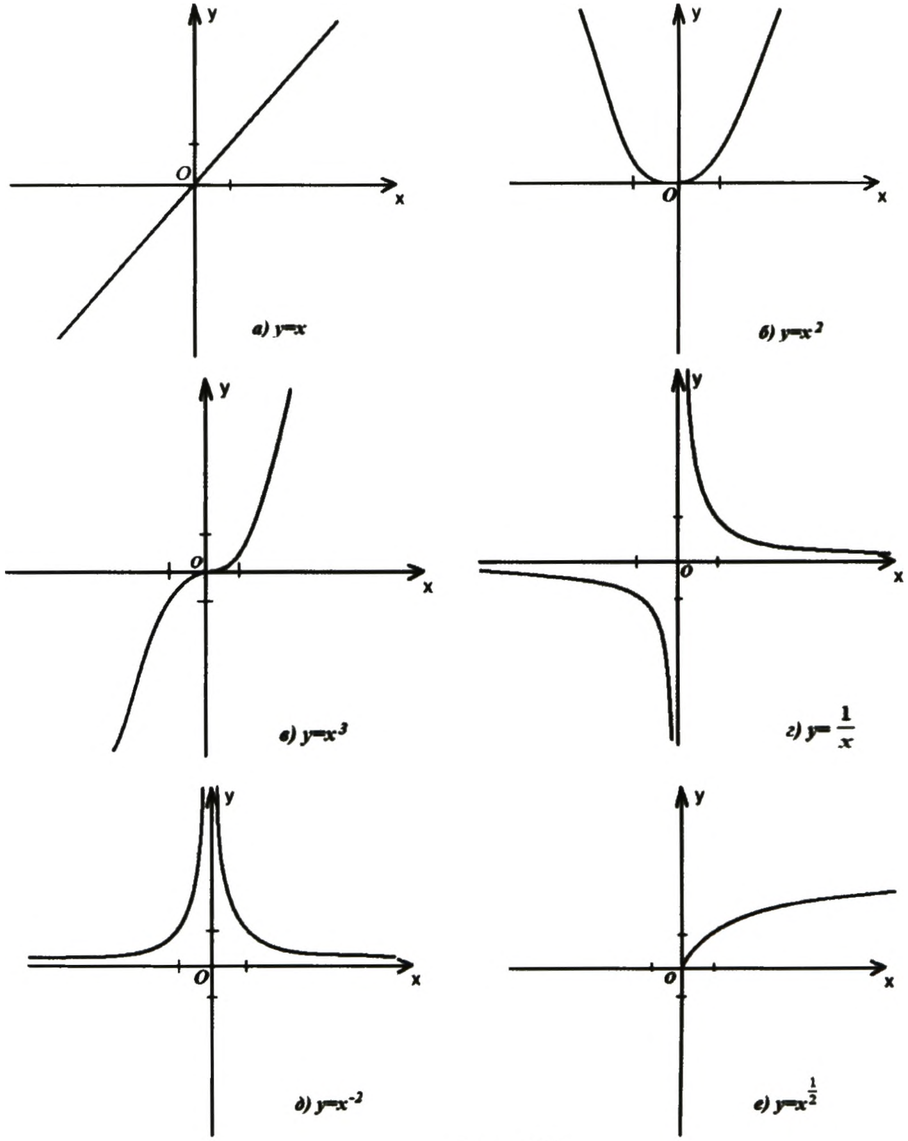
1.5. Негізгі элементар функциялар және олардың графиктері

$y = c = \text{const}$; $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$; $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $y = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \text{tg} x$; $y = \text{ctg} x$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \text{arctg} x$; $y = \text{arcctg} x$ функциялары негізгі элементар функциялар деп аталады.

Бұл функциялардың графиктері суреттерде көрсетілген.

1) $y = c$, $c = \text{const}$ (сурет 5.1).

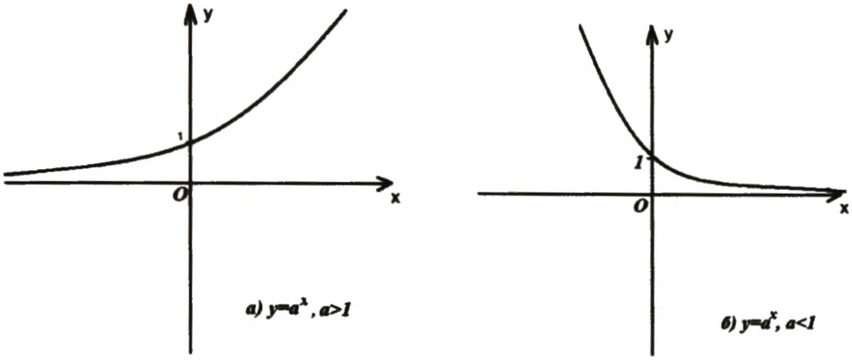
2) Дәрежелі функция $y = x^a$, $\alpha \in R$ (сурет 5.2).



а) $y=x$ б) $y=x^2$ в) $y=x^3$ г) $y=\frac{1}{x}$ д) $y=x^{-2}$ е) $y=x^{\frac{1}{2}}$

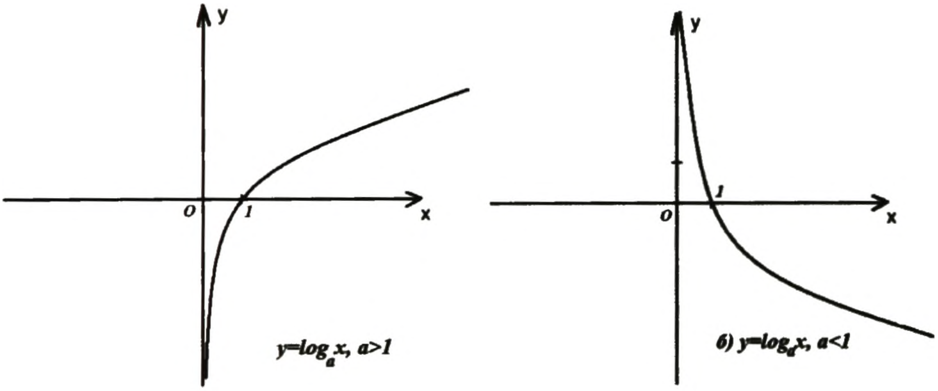
Сурет 5.2

3) Көрсеткішті функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (сурет 5.3).



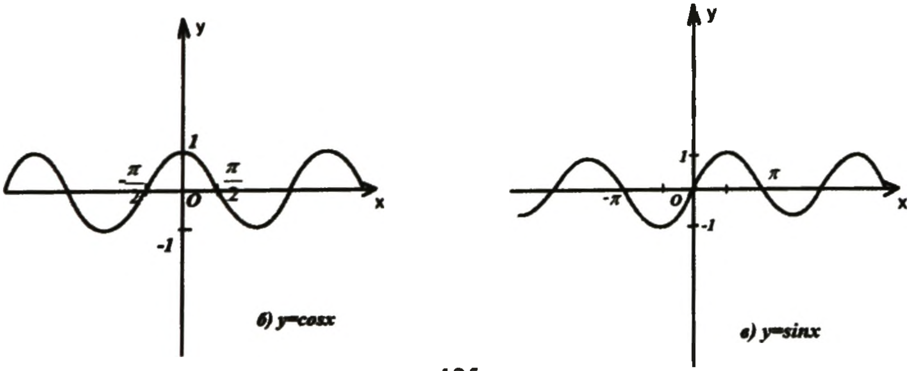
Сурет 5.3

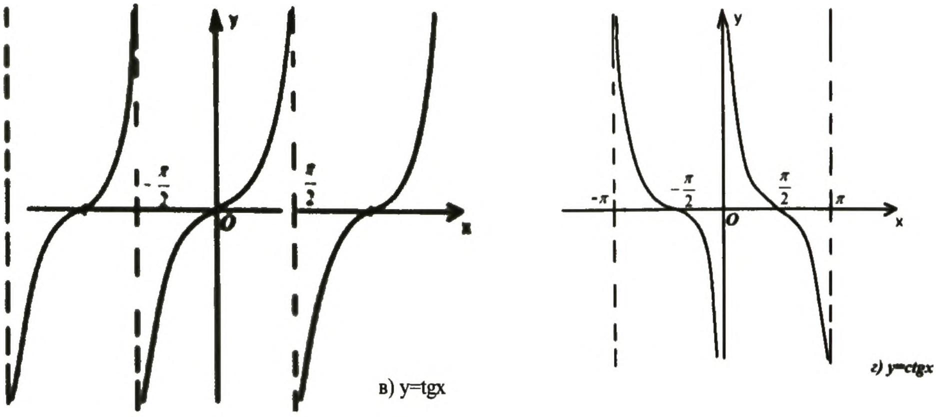
4) Логарифмдік функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (сурет 5.4).



Сурет 5.4

5) Тригонометриялық функциялар $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$ (сурет 5.5).



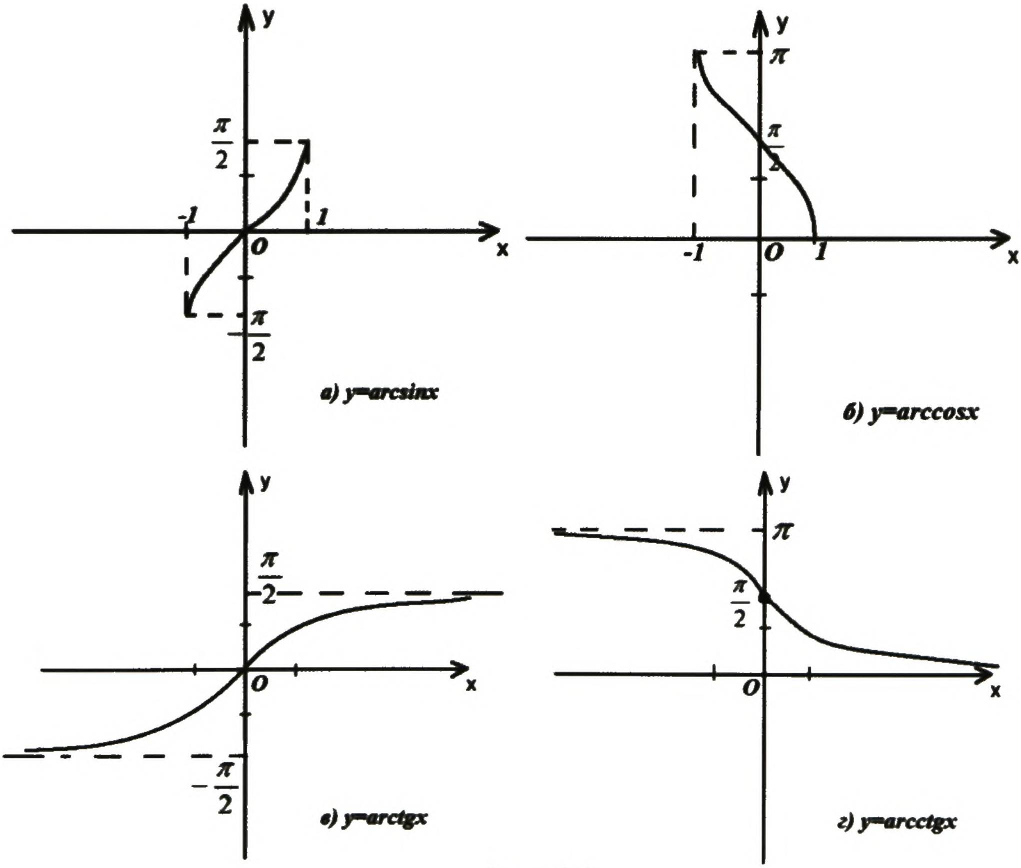


в) y=tgx

г) y=ctgx

Сурет 5.5

6) Кері тригонометриялық функциялар y = arcsin$x$, y = arccos$x$, y = arctg$x$, y = arcctg$x$ (сурет 5.6).



а) y=arcsinx

б) y=arccosx

в) y=arctgx

г) y=arcctgx

Сурет 5.6

1.6. Элементар функция

Анықтама 1.9. Элементар функция деп негізгі элементар функцияларға қосу, азайту, көбейту, бөлу амалдарын және саны ақырлы күрделі функцияны алуды қолдану нәтижесінде табылатын бір ғана аналитикалық өрнекпен жазылған функцияны атайды.

Мысалы, $y = 5^{\sin 3x}$; $y = \log_2(5x + \sqrt{x})$; $y = \operatorname{arctg}(3x^2 - 5x)$ элементар функциялар.

$$y = \begin{cases} 2x, x \geq 1, \\ x^2 + 3, x \leq 1; \end{cases}; \; y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ – элементар функциялар емес.}$$

§ 2. Тізбек және оның шегі

2.1. Сандық тізбектер

Анықтама 2.1. Натурал аргументті $f(n)$ функциясының аргументінің өсуі бойынша реттелген $\{f(1), f(2), f(3), \ldots f(n), \ldots\}$ мәндер жиыны сандық тізбек немесе тізбек деп аталады.

$f(n) = x_n$ тізбектің n-мүшесі немесе жалпы мүшесі деп аталады, ал тізбек $\{x_n\}$ немесе $\{f(n)\}$ түрінде жазылады.

Тізбектің жалпы мүшесі берілсе, онда тізбек берілген делінеді. Мысалы, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, $z_n = \frac{1}{2n+1}$ жалпы мүшелерге сәйкес тізбектер:

$$\{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\},$$

$$\{y_n\} = \left\{1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots\right\},$$

$$\{z_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \cdots, \frac{1}{2n+1}, \cdots\right\}.$$

Тізбектің сан осіндегі кескіні, тізбек мүшелерінің кескіні – нүктелер тізбегі болады.

Анықтама 2.2. $\{x_n\}$ тізбектің мүшелері, кез келген $n \in N$ үшін $|x_n| \leq M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылса, $\{x_n\}$ шенелген тізбек деп аталады.

Мұндай сан табылмаса шенелмеген тізбек деп аталады.

Мысалы, $x_n = \frac{2}{n}$ тізбегі шенелген, себебі барлық $n \in \mathrm{N}$ үшін $\left|\frac{2}{n}\right| \leq 2$, ал $x_n = n^2$ тізбегі шенелмеген, себебі n өскен сайын n^2-та өседі.

Анықтама 2.3. $\{x_n\}$ тізбектің барлық мүшелері үшін $x_{n+1} > x_n (x_{n+1} \geq x_n)$ теңсіздік орындалса онда $\{x_n\}$ өспелі (кемімейтін) тізбек деп аталады. Осы сияқты

$x_{n+1} < x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ теңсіздігі орындалса $\{x_n\}$ кемімелі (өспейтін) тізбек деп аталады. Өспелі, кемімелі, өспейтін және кемімейтін тізбектер бірсарынды тізбектер деп аталады.

Мысалы, $x_n = n^2$ өспелі, ал $y_n = \frac{1}{n^2+1}$ кемімелі тізбек.

2.2. Сандық тізбектің шегі

Анықтама 2.4. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N(\varepsilon) > 0$ саны табылып, барлық $n > N(\varepsilon)$ нөмірлі мүшелері үшін

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (5.1)$$

теңсіздігі орындалса, онда a санын $\{x_n\}$ тізбектің шегі деп атайды.

Шек $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ немесе $x_n \to a$, $n \to \infty$ түрінде жазылады.

Бұл жағдайда $\{x_n\}$ тізбегін a санына жинақталатын, немесе a санына ұмтылатын тізбек дейді. Анықтаманы қысқаша былайша жазуға болады:

$$(\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon)) : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Анықтама 2.5. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ болса, онда $\{\alpha_n\}$ тізбекті ақырсыз кішкене тізбек деп атайды.

Анықтама 2.6. Кез келген $A >$ 0 саны үшін $N(A) >$ 0 саны табылып, барлық $n > N(A)$ нөмірлері үшін $|x_n| > A$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбекті ақырсыз үлкен тізбек деп атайды.

Мысал 1.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = 1$ теңдігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Анықтама 2.4 бойынша $\forall\varepsilon > 0$ үшін, $N(\varepsilon)$ натурал сан табылып, барлық $n > N(\varepsilon)$ нөмірлер үшін $\left|\frac{n+3}{n} - 1\right| < \varepsilon$ орындалса, 1 саны $x_n = \frac{n+3}{n}$, $n \in N$ тізбектің шегі болады, яғни $\left|\frac{n+3}{n} - 1\right| = \frac{3}{n} < \varepsilon$. Бұл теңсіздіктен $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Демек, $n > N = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$, мұндағы $\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$ саны $\frac{3}{\varepsilon}$ санның бүтін бөлігі. Егер $\varepsilon > 3$ болса, онда бүтін бөлік ретінде $\left[\frac{3}{\varepsilon}\right] + 1$ санды алуға болады. Сонымен, $\forall\varepsilon > 0$ үшін сәйкес $N(\varepsilon)$ саны көрсетілді. Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = 1$.

Дербес жағдайларда: $\varepsilon = 0{,}1$ болса $N(0{,}1) = 30$, $\varepsilon = 4$ болса $N(4) = 1$, $N(0{,}01) = 300$ т.с.

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

теңсіздіктің геометриялық мағынасын анықтайық:

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Соңғы қос теңсіздіктен барлық x_n мүшелер $n > N(\varepsilon)$ болғанда a нүктесінің ε – маңайында жататындығы көрінеді.

2.3. Сандық тізбектер туралы негізгі теоремалар

Теорема 5.1. Егер $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ болса, онда $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$ тізбек ақырсыз кішкене тізбек болады.

Дәлелдеуі. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып $n > N(\varepsilon)$ болғанда $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ болады. Яғни $x_n = a + \alpha_n$ түрінде жазуға болады. Керісінше, $x_n = a + \alpha_n$, мұндағы $\{\alpha_n\}$ ақырсыз кішкене тізбек, түрінде жазуға болса, онда $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n(a + \alpha_n) = a + 0 = a$.

Ақырсыз кішкене тізбектің анықтамасынан оның мынадай қасиеттері шығады:

1. Ақырлы санды ақырсыз кішкене тізбектердің алгебралық қосындысы ақырсыз кішкене тізбек болады;
2. Ақырлы санды ақырсыз кішкене тізбектердің көбейтіндісі ақырсыз кішкене тізбек болады.
3. Шенелген тізбектің ақырсыз кішкене тізбекке көбейтіндісі ақырсыз кішкене тізбек болады.
4. Ақырсыз кішкене тізбектің тұрақты санға көбейтіндісі ақырсыз кішкене тізбек болады.

Теорема 5.2. Жинақты $\{x_n\}$ тізбектің тек бір ғана шегі болады.

Дәлелдеуі. Кері жориық, яғни жинақты тізбектің екі шегі бар болсын дейік, яғни $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$. Қарсы жоруымыз бойынша $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$ саны үшін $N_1(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n > N_1(\varepsilon)$ нөмірлер үшін $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалады. Осы сияқты $N_2(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N_2(\varepsilon)$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, $n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ болғанда $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздіктері бірдей орындалады. Сондықтан, $|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Демек, $a = b$, яғни қарсы жоруымыз дұрыс емес.

Теорема 5.3. Жинақты $\{x_n\}$ тізбек шенелген.

Дәлелдеуі. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ болсын. Анықтама 2.4 бойынша кез келген $\forall\varepsilon > 0$ үшін $N(\varepsilon)$ табылып, барлық $n > N(\varepsilon)$ үшін $|x_n| = |x_n - a + a| < |x - a| + |a| < \varepsilon + |a|$ теңсіздігі орындалады. Енді $\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, \varepsilon + |a|\} = M$ деп алсақ, онда барлық n үшін $|x_n| < M$ болады.

Ескерту 2.1. Кері тұжырым орындалмайды, яғни кез келген шенелген тізбек жинақты емес.

Мысалы, $x_n = (-1)^n$ тізбек шенелген, бірақ ол жинақты емес. Себебі, тізбек (–1) мен 1 мәндерін ғана қабылдап, олардың ара қашықтығы 2-ге тең, сондықтан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылмайды.

Теорема 5.4. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ болса және кейбір N нөмірінен бастап, яғни $n \geq N$ үшін, $x_n \leq y_n$ теңсіздігі орындалса, онда $a \leq b$ болады.

Дәлелдеуі. Кері жорық, яғни

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

болсын. $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ деп алайық. Теореманың шарты бойынша $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ нөмірлері табылып, $n > N_1(\varepsilon)$ болғанда $|x_n - a| < \varepsilon$, $n > N_2(\varepsilon)$ болғанда $|y_n - b| < \varepsilon$ болады. $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ десек, барлық $n > N$ үшін $y_n < b + \varepsilon = \frac{b+a}{2} = a - \varepsilon < x_n$ теңсіздегі орындалады. Ал бұл теңсіздік теореманың шартына қайшы.

Теорема 5.5. Егер $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ тізбектері үшін кейбір нөмірден бастап $x_n \leq y_n \leq z_n$ теңсіздіктері орындалса және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ болады.

Дәлелдеуі. Кез келген $\varepsilon > 0$ санды белгілейік. Шектің анықтамасы бойынша $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ нөмірлері табылып, $n > N_1(\varepsilon)$ үшін $|x_n - a| < \varepsilon$, $n > N_2(\varepsilon)$ үшін $|z_n - a| < \varepsilon$. $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ деп алсақ $x_n \leq y_n \leq z_n$ теңсіздіктерінен: $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$. Демек $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема 5.6. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ болса, онда

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b, \tag{5.2}$$

$$\text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n \quad y_n = a \quad b, \tag{5.3}$$

$$\text{в) } \lim_{n\to\infty} = \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \ b \neq 0 \tag{5.4}$$

Дәлелдеуі. Кез келген $\varepsilon > 0$ санды белгілеп алайық.

а) Теореманың шарты бойынша $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ нөмірлері табылып, $n > N_1(\varepsilon)$ үшін $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n > N_2(\varepsilon)$ үшін $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздіктері орындалады. Олай болса, $n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ үшін:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Осы сияқты,

$$|(x_n - y_n) - (a - b)| = |(x_n - a) + (b - y_n)| \leq |x_n - a| + |b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

б) $x_n y_n - ab$ айырымды түрлендірсек:

$$|x_n y_n - ab| = |x_n(y_n - b) + b(x_n - a) \leq |x_n| \quad |y_n - b| + |b|\,|x_n - a|$$

теңсіздік алынады. Теорема 2.2 бойынша $\{x_n\}$ тізбегі шенелген, яғни $|x_n| \leq M$, $\forall n \in N$. Теореманың шарты бойынша қалауымызша белгіленген $\varepsilon > 0$ саны арқылы анықталатын $n > N_1(\varepsilon)$ үшін $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$, $n > N_2(\varepsilon)$ үшін $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ теңсіздіктері орындалатындай $N_1(\varepsilon)$ және $N_2(\varepsilon)$ сандары табылады. Егер

$N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ болса, онда $n > N$ үшін жоғарыдағы теңсіздіктердің екеуі де орындалады, яғни:

$$|x_n y_n - ab| \le |x_n|\,|y_n - b| + b|x_n - a| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + b \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

в) $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ айырымды түрлендірсек $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - a y_n}{b y_n}\right|$. Теорема 5.1 бойынша $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, мұндағы α_n мен β_n ақырсыз кішкене тізбектердің жалпы мүшесі, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Сонда $\left|\frac{x_n b - a y_n}{b y_n}\right| = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b y_n} = \left|\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b y_n}\right| = 0.$

Соңғы бөлшектің алымы, ақырсыз кішкене функциялардың қасиеттері бойынша ақырсыз кішкене тізбек, ал бөлімі шенелген тізбек. Сондықтан,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{\underset{n\to\infty}{b y_n}}\right| = 0.$$

Теорема 5.7. (Вейерштрасс). Кез келген бірсарынды шенелген тізбек жинақты болады.

Дәлелдеуі. $\{x_n\}$ тізбегі өсетін (кемитін), жоғарыдан (төменнен) шенелген, ал оның дәл жоғарғы (төменгі) шекарасы $M = \sup\limits_n x_n$ $(m = \inf\limits_n x_n)$ болсын.

Супремумның (инфинумның) және бірсарынды тізбектің анықтамасы бойынша әрбір $n > N(\varepsilon)$ үшін $M - \varepsilon < x_{N(\varepsilon)} < x_n \le M < M + \varepsilon$ $(m + \varepsilon > x_{N(\varepsilon)} \ge x_n \ge \mathrm{m} > \mathrm{m} - \varepsilon)$ теңсіздіктері орындалады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M = \sup\limits_n x_n$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m = \inf\limits_n x_n)$.

Анықтама 2.8. Кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\{x_n\}$ тізбектің $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $m > n > N(\varepsilon)$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық n, m үшін

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ іргелі (фундаменталь) тізбек деп аталады.

Теорема 5.8. (Коши белгісі) $\{x_n\}$ тізбек жинақты болуы үшін оның іргелі тізбек болуы қажетті және жеткілікті. ([1], Гл.3, §4, Т 3.19)

§ 3. Функцияның шегі

3.1. Функцияның нүктедегі шегі

Анықтама 3.1. Егер x_0 нүктесінің ($x_0 \in X$ немесе $x_0 \notin X$) кез келген маңайында X жиынның ең болмағанда $x \neq x_0$ бір элементі бар болса, онда x_0 нүкте X жиынның шек нүктесі деп аталады.

Анықтама 3.2. (Коши) $x = x_0$ нүкте X жиынның шек нүктесі болсын.

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тар үшін $(x \neq x_0)$

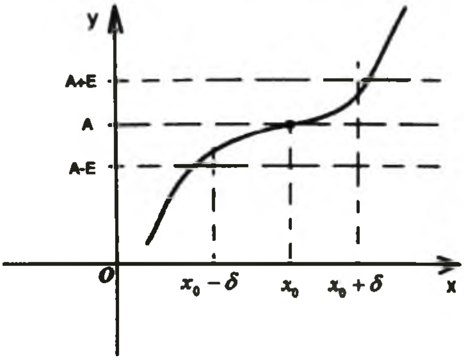
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі деп аталады.

Шек $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ түрінде жазылады. Қысқаша жазылуы:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x |\ 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon \quad (5.9)$$

Функция шегінің геометриялық мағынасы: кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны табылып, x_0 нүктесінің δ-маңайындағы, яғни $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалдағы барлық x-ке сәйкес $f(x)$ мәндері $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ интервалда жатады (сурет 5.7).



Сурет 5.7

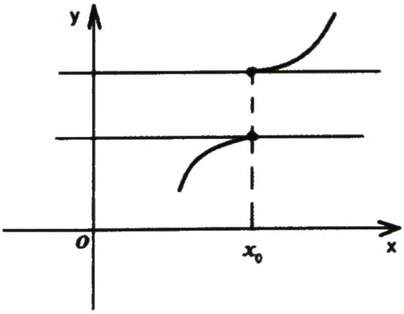
Мысал 3.1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 1) = 5$ екендігі дәлелдensін.

Шешуі. Ол үшін $f(x) - 5 = (3x - 1) - 5 = 3x - 6$ айырымды қарастырайық. $f(x) - 5$ айырымның модулі $3|x - 2|$ кез келген x үшін $f(x)$ саны мен 5 санының арақашықтығы болып табылады.

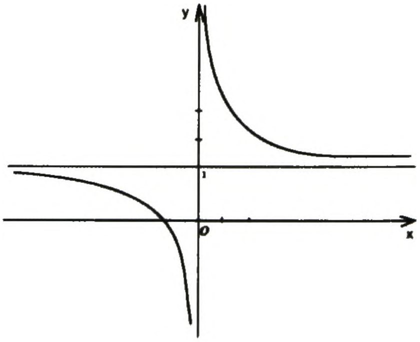
Демек, $|f(x) - 5| = 3|x - 2| < \varepsilon$ теңсіздігі, $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ теңсіздігі орындалғанда ғана орындалады. Бұдан $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ екендігі шығады.

Мысал 3.2. $f(x) = \begin{cases} 1, x \text{ рационал сан} \\ 0, x \text{ иррационал сан} \end{cases}$ Дирихле функциясының бір де бір нүктеде шегі жоқ, себебі бірде бір $\varepsilon > 0$ үшін $\delta > 0$ саны табылмайды.

Анықтама 3.3. Егер кез келген $\delta > 0$ саны үшін, $\delta > 0$ сан табылып, $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$ теңсіздігін қанағаттандырушы барлық x-тар үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі оң жақтық (сол жақтық) шегі деп аталады және



Сурет 5.8



Сурет 5.9

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A)$ түрінде жазылады (сурет 5.8).

Мысал 3.3. $f(x) = \text{sgnx} = \begin{cases} -1, \text{ егер } x < 0 \text{ болса,} \\ 0, \text{егер } x = 0 \text{ болса,} \\ +1 \text{ егер } x > 0 \text{ болса.} \end{cases}$ функция үшін $\lim_{x\to 0+0} sgnx = 1, \lim_{x\to 0-0} sgnx = -1$.

3.2. функцияның аргумент ақырсыздыққа ұмтылғандағы шегі.

Анықтама 3.4. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\Delta > 0$ сан табылып, $|x| > \Delta$ теңсіздікті қанағаттандырушы барлық x-тар үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функцияның x ақырсыздыққа ұмтылғандағы шегі деп аталады және $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ түрінде жазылады. Қысқаша жазылуы:

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta(\varepsilon) > 0, \forall x > \Delta) :| f(x) - A |< \varepsilon \leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Мысал 3.4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ екендігі дәлелденсін.

Шешуі. Ол үшін кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін Δ (ε) саны табылып, $|x| > \Delta$ болғанда $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатынын көрсетеміз.

Бұл теңсіздіктен $\frac{1}{|x|} <$ ε теңсіздігі шығады. Бұдан $|x| > \frac{1}{\varepsilon} = \Delta$; демек $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ (сурет 5.9).

3.3. Ақырсыз үлкен функциялар

Анықтама 3.5. Егер кез келген $M > 0$ саны үшін $\delta = \delta(M) > 0$ саны табылып, $0 < |x - x_0| < \delta$ теңсіздікті қанағаттандырушы барлық x-тар үшін, $|f(x)| > M$ теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде (немесе $x \to x_0$) ақырсыз үлкен функция деп аталады да $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ деп жазады.

Қысқаша белгілер жәрдемімен жазылуы: $(\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta)$: $|f(x)| > M) \leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Мысалы, $f(x) = \frac{-1}{x-3}$ функциясы $x = 3$ нүктесінде ақырсыз үлкен функция.

Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде ақырсыз үлкен функция болып, тек оң мәндерді қабылдаса $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ деп, ал тек теріс мәндерді қабылдаса $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ деп жазады.

Мысалы, $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$ функциясы үшін $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2}=+\infty$, ал $f(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$ функциясы үшін $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$.

Келесі тұжырымдарды атап өтейік:

а) $x\in N$ болып, x айнымал ақырсыздыққа ұмтылса, оған сәйкес ақырсыз үлкен функция ақырсыз үлкен тізбек болады.

Мысалы, $f(n)=n^2+1$, $n\in N$, тізбек ақырсыз үлкен тізбек болады.

б) x_0 нүктесінің маңайында ақырсыз үлкен әрқандай функция шенелмегендігі айқын. Керісінше, әрқандай шенелмеген функция ақырсыз үлкен функция бола алмайды. Мысалы $f(x)=x\ \ \cos x$ функция.

3.4. Ақырсыз кішкене функциялар және олардың қасиеттері

Анықтама 3.6. Егер

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \tag{5.10}$$

болса, $\alpha(x)$ функциясы x_0 нүктесінде (немесе $x\to x_0$) ақырсыз кішкене функция деп аталады.

Қысқаша жазылуы: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\mid 0<|x-x_0|<\delta):|\alpha(x)|<\varepsilon$. $x\to\infty$, $x\to+\infty, x\to-\infty, x\to x_0-0, x\to x_0+0$ жағдайларда да ақырсыз кішкене функция осы сияқты анықталады.

Мысал 3.5. $\alpha(x)=(x-2)^3$ функциясы $x=2$ нүктесінде ақырсыз кішкене функция, себебі $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^3=0$.

Мысал 3.6. $\alpha(x)=\frac{2}{x}$ функциясы $x\to+\infty$ болғанда ақырсыз кішкене функция, себебі $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$.

Мысал 3.7. $\alpha(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ функциясы $x\to+\infty$ болғанда ақырсыз кішкене функция, себебі $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x}}=0$.

Теорема 5.9. Саны ақырлы ақырсыз кішкене функциялардың алгебралық қосындысы ақырсыз кішкене функция болады.

Дәлелдеуі. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0}\alpha_2(x)=0$ болсын.

Анықтама 3.6. бойынша кез келген $\varepsilon>0$ үшін, x_0 нүктесінің $\delta_1(\varepsilon)>0$, $\delta_2(\varepsilon)>0$ маңайлары табылып, бұл маңайлардағы барлық x үшін:

$0<|x-x_0|<\delta_1$ болғанда $|\alpha_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$,

$0 < |x - x_0| < \delta_2$ болғанда $|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ деп алсақ, x_0 нүктесінің δ-маңайында $|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ болады. Онда $|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Осы сияқты, $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_m(x)$ ақырсыз кішкене функциялардың алгебралық қосындысы үшін де дәлелденеді.

Теорема 5.10. Шенелген функция мен ақырсыз кішкене функцияның көбейтіндісі ақырсыз кішкене функция болады.

Дәлелдеуі. $f(x)$ функциясы $x \to x_0$ болғанда шенелген болсын. Онда $M > 0$ саны табылып,

$$|f(x)| \le M \qquad (*)$$

теңсіздігі x_0 нүктесінің кейбір $\delta_1 > 0$ маңайындағы барлық x үшін орындалады. $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ болғандықтан, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін x_0-нүктесінің $\delta_2(\varepsilon)$ маңайы табылып $0 < |x - x_0| < \delta_2$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x үшін

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (**)$$

теңсіздігі орындалады. $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ деп алсақ $0 < |x - x_0| < \delta$ болғанда (*), (**) теңсіздіктері бірдей орындалады.

Демек, $|f(x) \quad \alpha(x)| = |f(x)| \quad |\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

Салдар 3.1. Егер $\lim_{x \to x_0} \alpha_1(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} \alpha_2(x) = 0$ болса, онда $\lim_{x \to x_0} \alpha_1(x) \cdot \alpha_1(x) = 0$ болады.

Салдар 3.2. Егер $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ және $c = \text{const}$ болса, онда $\lim_{x \to x_0} c \quad \alpha(x) = 0$ болады.

Теорема 5.11. Егер $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ $(\alpha(x) \neq 0)$ болса, онда $\frac{1}{\alpha(x)}$ ақырсыз үлкен функция. және керісінше, егер $f(x)$ ақырсыз үлкен функция болса, онда $\frac{1}{f(x)}$ ақырсыз кішкене функция болады.

Дәлелдеуі. $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ болсын. Онда $(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta) : |\alpha(x)| < \varepsilon$, яғни $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| = \frac{1}{|\alpha(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} = M$. Демек, $\frac{1}{\alpha(x)}$ ақырсыз үлкен функция.

Керісінше, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ болсын. Онда $(\forall M > 0, \exists \delta = \delta(M) > 0, \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x)| > M$, яғни, $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$. Демек, $\frac{1}{f(x)}$ ақырсыз кішкене функция.

Теорема 5.12. Егер $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ және $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$ болса, онда $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0$ болады.

Дәлелдеуі. Алдымен $\frac{1}{f(x)}$ функциясының шенелгендігін көрсетеміз. $\varepsilon < |A|$ деп аламыз. Онда шектің анықтамасы бойынша $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $0 < |x - x_0| < \delta$ теңсіздікті қанағаттандырушы барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

$\varepsilon > |f(x) - A| = |A - f(x)| \geq |A| - |f(x)|$ болғандығы үшін, $|A| - |f(x)| < \varepsilon$, яғни $|f(x)| > |A| - \varepsilon > 0$. Соңғы теңсіздіктен $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|A|-\varepsilon} = M$. Демек $\frac{1}{f(x)}$ шенелген функция.

Сондықтан, теорема 5.11 бойынша $\alpha(x) \cdot \frac{1}{|f(x)|}$ ақырсыз кішкене функция.

Теорема 5.13. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ болуы үшін $\alpha(x) = f(x) - A$ функциясының $x \to x_0$ болғанда ақырсыз кішкене функция болуы, қажетті және жеткілікті, яғни

$$f(x) = A + \alpha(x). \tag{5.11}$$

Қажеттілігі. $\alpha(x) = f(x) - A$ функциясын қарастырайық. Мұнда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ болсын. Демек, $(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$, яғни $|f(x) - A < \varepsilon$. Бұл теңсіздіктен $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$ екендігі көрінеді.

Демек, $\alpha(x) = f(x) - A$ функциясы ақырсыз кішкене функция.

Жеткіліктігі. $f(x) = A + \alpha(x)$ болсын, мұнда $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Яғни $(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \mid |x - x_0| < \delta) : |\alpha(x)| < \varepsilon$. Шарт бойынша $f(x) = A + \alpha(x)$, яғни $\alpha(x) = f(x) - A$. Шектің анықтамасы бойынша: $(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \mid 0 < x - x_0 < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$. Демек, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Ескерту 5.1. Теоремалар $x \to x_0$ болғанда дәлелденді. Бірақ бұл теоремалар $x \to \infty$ болғанда да орынды.

3.5. Шектер туралы негізгі теоремалар

Теорема 5.14. Саны ақырлы $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялардың x_0 нүктеде $(x \to \infty)$ шектері бар болса, онда олардың алгебралық қосындысының да шегі бар болады және

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) + \dots + \lim_{x \to x_0} f_n(x) \tag{5.12}$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеуді екі қосылғыш үшін жүргіземіз, себебі кез келген сандағы қосылғыштар үшін де осылайша талдау арқылы дәлелденеді. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$ болсын. Онда (5.11) теңдік бойынша: $f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x)$, $f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x)$. Мұндағы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ – ақырсыз кішкене функциялар. Демек, $f_1(x) + f_2(x) = (A_1 + A_2) + (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))$.

Мұндағы $(A_1 + A_2)$ – тұрақты сан, ал $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ функция теорема 5.9 бойынша ақырсыз кішкене функция.

Сондықтан,

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Мысал 3.8. (5.12) формуланы қолдансақ , $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(3 + \frac{2}{x}\right) =$ $\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 3 + 0 = 3.$

Теорема 5.15. Егер саны ақырлы $f_1(x), f_2(x), \ldots , f_n(x)$ функциялардың x_0 нүктеде (немесе $x \to \infty$) шектері бар болса, онда олардың көбейтіндісінің де шегі бар және

$$\lim_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x) = \lim_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_1(x)\cdot \lim_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_2(x)\cdot \ldots \lim_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_n(x) \quad (5.13)$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеуді екі көбейткіш үшін жүргізейік $\lim\limits_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_2(x) = A_2$ болсын.

Функцияның шегін табуды жеңілдететін кейбір теоремаларды қарастырайық. Теоремалардың мазмұны мен дәлелдеуі $x \to x_0$ жағдай үшін келтірілген. $x \to \infty$ болғанда да осы сияқты болады.

Дәлелдеулер жазу қысқаша болуы үшін екі функция үшін келтірілген.

Демек, теорема 5.12 бойынша: $f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x)$, $f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x)$. Онда $f_1(x) \quad f_2(x) = (A_1 + \alpha_1(x))\,(A_2 + \alpha_2(x)) = A_1A_2 + A_1\alpha_2(x) + A_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x) \quad \alpha_2(x)$. Мұндағы A_1A_2 тұрақты шама, ал $A_1\alpha_2(x) + A_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x) \quad \alpha_2(x)$ функция 5.9, 5.10 теоремалар және салдар 3.1 бойынша ақырсыз кішкене функция.

Сондықтан,

$$\lim_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_1(x) \quad f_2(x) = A_1 \quad A_2 = \lim_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_1(x) \quad \lim_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f_2(x) \qquad (5.13а)$$

Салдар 3.3. Тұрақты көбейткішті шек таңбасының алдына шығаруға болады. Шынында да $\lim\limits_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f(x) = A$, c – тұрақты сан болса, онда $\lim c \ = c$ болғандықтан $\lim\limits_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} c\cdot f(x) = \lim\limits_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} c \quad \lim\limits_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f(x) = c \quad \lim\limits_{\substack{(x\to x_0)\\(x\to\infty)}} f(x) = cA.$

Салдар 3.4. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ болса онда

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = A^n,\ n \in N \qquad (5.14)$$

Мысал 3.9. $\lim\limits_{x\to 3} 4x^2 = 4\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 4 \quad 3^2 = 4 \quad 9 = 36$

Теорема 5.16. Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функцияларының x_0 нүктесінде шектері бар болса және $f_2(x)$ функциясының шегі нөлге тең болмаса, онда x_0 нүктеде $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ бөліндінің шегі бар болады және

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)}, \tag{5.15}$$

Дәлелдеуі. $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A_2$ болсын

Демек, теорема 5.13 бойынша $f_1(x)=A_1+\alpha_1(x)$, $f_2(x)=A_2+\alpha_2(x)$. Мұндағы $\alpha_1(x)$ және $\alpha_2(x)$ функциялар x_0 нүктесінде ақырсыз кішкене функциялар. Келесі тепе-теңдік орынды:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{A_1+\alpha_1(x)}{A_2+\alpha_2(x)}=\frac{A_1}{A_2}+\left(\frac{A_1+\alpha_1(x)}{A_2+\alpha_2(x)}-\frac{A_1}{A_2}\right)=\frac{A_1}{A_2}+\frac{A_2\alpha_1(x)-A_1\alpha_2(x)}{A_2(A_2+\alpha_2(x))};$$

яғни, $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{A_1}{A_2}+\frac{A_2\alpha_1(x)-A_1\alpha_2(x)}{A_2(A_2+\alpha_2(x))}.$$

Мұндағы $\frac{A_1}{A_2}$ – тұрақты шама, ал $\frac{A_2\alpha_1(x)-A_1\alpha_2(x)}{A_2(A_2+\alpha_2(x))}$ ақырсыз кішкене функция, себебі $A_2\ \ \alpha_1(x)-A_1\ \ \alpha_2(x)$ функциясы 5.9, 5.10-теоремалар бойынша ақырсыз кішкене функция, ал $A_2(A_2+\alpha_2(x))$ функциясы $A^2\neq 0$ санға ұмтылатын функция.

Сондықтан, $$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)}.$$

Мысал 3.10. (5.15), (5.14), (5.13), (5.12) формулалары бойынша

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-7}{2x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(3x-7)}{\lim\limits_{x\to1}(2x+5)}=\frac{3\lim\limits_{x\to1}x-7}{2\lim\limits_{x\to1}x+5}=\frac{3\cdot1-7}{2\cdot1+5}=\frac{-4}{7}$$

Теорема 5.17. x_0 нүктесінің кейбір маңайында анықталған (x_0 нүктеде анықтамауы да мүмкін) $f(x)$, $g(x)$ және $h(x)$ функциялары арасында

$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ арақатыстар орындалса және $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$, болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$ болады.

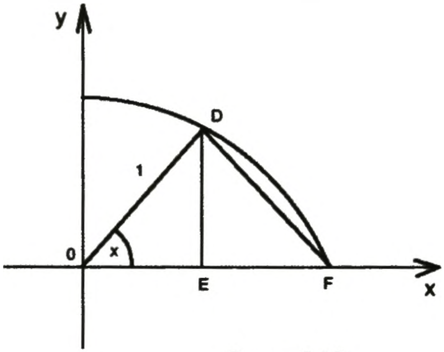
Дәлелдеуі. $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ арақатыстан $f(x)-A\leq g(x)-A\leq h(x)-A$ арақатыс шығады; шарт бойынша $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$. Сондықтан кез келген $\varepsilon>0$ үшін x_0 нүктесінің кейбір маңайы табылып, бұл маңайдың барлық x нүктелері үшін $-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon$, $-\varepsilon<h(x)-A<\varepsilon$ теңсіздіктері орындалады, демек, $-\varepsilon<g(x)-A<\varepsilon$ қос теңсіздік те орындалады, яғни, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$ болады.

Теорема 5.18. Егер $x \to x_0$ (немесе $x \to \infty$) нүктесінің кейбір маңайында $f(x) \geq 0$ және $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ болса, онда $A \geq 0$ болады.

Дәлелдеуі. $A < 0$ деп кері ұйғарайық. Онда $|f(x) - A| \geq |A|$ болады. Демек, $f(x) - A$ айырым $x \to x_0$ болғанда нөлге ұмтылмайды, яғни $A < 0$ саны функцияның нүктедегі шегі емес. Сондықтан $A < 0$ деген ұйғарым дұрыс емес, яғни $A \geq 0$. Осылайша талдау арқылы, егер $f(x) \leq 0$ болса, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq 0$ екендігі дәлелденеді.

Теорема 5.19. Егер $x = x_0$ ($x = \infty$) нүктесінде шектері бар, $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың сәйкес мәндері $f(x) \geq g(x)$ теңсіздікті қанағаттандырса, онда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша $f(x) - g(x) \geq 0$. Онда теорема 5.18 бойынша $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) \geq 0$, немесе $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \geq 0$, яғни $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.



Сурет 5.10

Мысал 3.11. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = 0$ екендігін дәлелдейік.

Сурет 5.10 бойынша $OD = 1$, $\cup DF = x, DE = \sin x$. $\sin x < x$ болады, ал $x < 0$ десек, $|\sin x| < |x|$ болады. Онда 5.18 және 5.19 теоремалардан $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ екендігі шығады.

Теорема 5.20. Егер айнымал шама y өсуші (немесе кемуші) болса және жоғарыдан (төменнен) шегараланған болса, яғни $y < M$ ($y > M$), онда бұл айнымал шаманың шегі бар, яғни $\lim y = A$ болады, мұндағы $A \leq M (A \geq M)$.

Дәлелдеуі. $Y = \{y\}$ сан жиынын қарастырайық және $\{y\}$ жоғарыдан шегараланған жиын болсын.

Теорема 1.1 бойынша бұл жиынның дәл жоғары шегарасы бар, оны A арқылы белгілейік, яғни $\sup\{y\} = A$. A саны дәл жоғары шегара болғандығы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\tilde{y} \in Y$ элемент табылып, барлық $y \geq \tilde{y}$ элементтер үшін $y > A - \varepsilon$ болады. Екінші жағынан, дәл жоғары шегараның анықтамасы бойынша $y \leq A < A + \varepsilon$ теңсіздік орынды. Демек $y \geq \tilde{y}$ барлық элементтер үшін $|y - A| < \varepsilon$ теңсіздік орындалады

Сондықтан $\lim y = A$.

Келесі екі теореманы дәлелсіз келтіреміз.

Теорема 5.21. (Коши) $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесінде шегі бар болуы үшін, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып,

$$0 < |x' - x_0| < \delta, \ 0 < |x'' - x_0| < \delta \qquad (*)$$

шарттарын қанағаттандырушы аргументтің кез келген x' және x'' мәндері үшін

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad (**)$$

теңсіздігінің орындалуы, қажетті және жеткілікті. ([1], гл.6, §3)

(*), (**)шарттары Коши шарттары деп аталады.

Теорема 5.22. (Бірсарынды функцияның шегі). Егер бірсарынды $f(x)$ функциясы $x < x_0$ ($x > x_0$) болғанда шенелген болса, онда оның $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ сол шегі ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$ оң шегі) бар. ([1], гл.6, §3)

3.6. Бірінші және екінші тамаша шектер

Тригонометриялық функциялар кіретін өрнектердің шектерін есептеуде бірінші тамаша шек деп аталушы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{5.16}$$

шек жиі қоланылады.

Келесі түрдегі шек

$$\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e, \;\; e = 2{,}7182818284590... \tag{5.17}$$

екінші тамаша шек деп аталады: (5.17) теңдікте $\alpha = \frac{1}{x}$ ($x \to \infty$ болғанда $\alpha \to 0$) ауыстыруын енгізсек, ол

$$\lim_{\alpha\to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \tag{5.17a}$$

түрінде жазылады (5.16) және (5.17) теңдіктердің қысқаша дәлелдеуі VI тарауда келтіріледі.

§ 4. Эквивалент ақырсыз кішкене функциялар

4.1. Ақырсыз кішкене функцияларды салыстыру

Ақырсыз кішкене екі функцияның қосындысы, айырымы, көбейтіндісі ақырсыз кішкене функция болатындығы белгілі. Екі ақырсыз кішкене функцияның қатынасы әртүрлі болуы мүмкін: ақырлы сан; ақырсыз кішкене функция; ақырсыз үлкен функция; ешқандай шекке ұмтылмайды.

Екі ақырсыз кішкене функциялар олардың қатынасы арқылы салыстырылады.

$\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функциялары $x \to x_0$ болғанда ақырсыз кішкене функциялар болсын: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$.

1. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ болса, онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функциялары x_0 нүктесінде (немесе $x \to x_0$) бірдей ретті ақырсыз кішкене функциялар деп аталады және $\alpha(x) = 0[\beta(x)]$ белгіленеді.

2. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ болса, онда x_0 нүктесінде (немесе $x \to x_0$) $\alpha(x)$ функциясын $\beta(x)$ функциясымен салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз кішкене функция деп атайды және $\alpha(x) = o[\beta(x)]$ деп белгіленеді.

3. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ болса, онда $\alpha(x)$ функциясы $\beta(x)$ функциясымен салыстырғанда төменгі ретті ақырсыз кішкене функция деп аталады.

4. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ жоқ болса, онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функциялары салыстырылмайтын ақырсыз кішкене функциялар деп аталады.

Ескерту 4.1. $x \to \pm\infty$, $x \to x_0 \pm 0$ болғанда да ақырсыз кішкене функциялар осы ережелер бойынша салыстырылады

Ескерту 4.2. Ақырсыз үлкен функциялар да осы ережелер негізінде салыстырылады.

Мысал 4.1. $\alpha(x) = 3(x-2)^2$, $\beta(x) = 5(x-2)^2$ функциялардың $x \to 2$ болғандағы реті анықталсын.

Шешуі. $x \to 2$ болғанда $\lim\limits_{x\to 2} 3(x-2)^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} 5(x-2)^2 = 0$, әрі реттері бірдей ақырсыз кішкене функциялар: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3(x-2)^2}{5(x-2)^2} = \frac{3}{5} \neq 0$.

Мысал 4.2. $\alpha(x) = 2(x-1)^3$, $\beta(x) = 4(x-1)^2$ функциялардың $x \to 1$ болғандығы реті анықталсын.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to 1} 2(x-1)^3 = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} 4(x-1)^2 = 0$. $\alpha(x)$ реті жоғары ақырсыз кішкене функция, өйткені $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2\,(x-1)^3}{4(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2} \cdot (x-1) = 0$.

Ал $\beta(x)$ реті төмен ақырсыз кішкен функция, өйткені $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{4\,(x-1)^2}{2(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{x-1} = \infty$.

Мысал 4.3. $\alpha(x) = 4x^2 \sin\frac{1}{x}$, $\beta(x) = 2x^2$ функциялары $x \to 0$ болғанда салыстырылсын.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{2x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Бұл шек жоқ. Демек, берілген ақырсыз кішкене функцияларды салыстыруға болмайды.

4.2. Эквивалент ақырсыз кішкене функциялар және олардың қолданулары

$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$ болсын.

Анықтама 4.1. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ болса, онда x_0 нүктесінде $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функцияларын эквивалент ақырсыз кішкене функциялар деп атайды.

Эквивалент ақырсыз кішкене функциялар $\alpha(x) \sim \beta(x)$ деп белгіленеді. Мысалы $x \to 0$ болғанда $\sin x \sim x$, өйткені $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; $\operatorname{tg} x \sim x$, өйткені

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Теорема 5.23. Егер $x \to x_0$ болғанда $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ және $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \tag{5.18}$$

Дәлелдеуі. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta_1(x)}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = 1 \quad 1 \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

Осы сияқты $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}$ болатындығы айқын.

Демек, екі ақырсыз кішкене функциялардың қатынасының шегі, олардың екеуінде немесе біреуін эквивалент ақырсыз кішкене функциямен алмастырсақ, өзгермейді.

Мысал 4.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 6x}$ есептелсін.

Шешуі. $x \to 0$ болғанда $\operatorname{tg} 4x \sim 4x$, $\sin 6x \sim 6x$ екендігін ескерсек (5.18) бойынша:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Теорема 5.24. Екі эквивалент ақырсыз кішкене функциялардың айырымы, олардың әрқайсысымен салыстарғанда жоғары ретті ақырсыз кішкене функция болады.

Дәлелдеуі. $x \to x_0$ болғанда $\alpha(x) \sim \beta(x)$ болсын. Онда $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - 1 = 0$; осы сияқты $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} = 0$.

Кері тұжырым да орынды: $\alpha(x) - \beta(x)$ функциясы $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ ақырсыз кішкене функциялармен салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз кішкене функция болса, онда $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Шынында да $0 = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$

Яғни, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Демек, $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

Теорема 5.25. Ақырлы санды реттері әртүрлі ақырсыз кішкене функциялардың қосындысы төменгі ретті қосылғышқа эквивалент.

Дәлелдеуі. Теореманы екі функция үшін дәлелдейміз $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$ және $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, яғни $\alpha(x)$ жоғары ретті ақырсыз кішкене функция болсын.

Онда $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + 1 = 0 + 1 = 1$.

Демек, $x \to x_0$ болғанда $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$.

Ақырсыз кішкене функциялардың қосындысында эквивалент қосылғыш қосындының басты бөлігі деп аталады.

Ақырсыз кішкене функциялардың қосындысын басты бөлігіне алмастыруды жоғары ретті ақырсыз кішкене функцияларды ескермеу деп атайды.

Мысал 4.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6x+5x^2}{\sin 3x}$ шек есептелсін.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6x+5x^2}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{6x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{6x}{3x} = 2$.

Өйткені $x \to 0$ болғанда $6x + 5x^2 \sim 6x$, $\sin 3x \sim 3x$.

Эквивалент ақырсыз кішкене функцияларды қолдануларын қарастырайық.

1. Шектерді есептеу

$\frac{0''}{``0}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашуға ақырсыз кішкене функцияларды эквивалент ақырсыз кішкене функциялармен алмастыру мен эквивалент ақырсыз кішкене функциялардың басқа да қасиеттерін қолдану өте пайдалы.

Шектерді есептеуде қолданылатын маңызды эквивалент ақырсыз кішкене функцияларды келтірейік:

1. $\sin x \sim x \ (x \to 0)$;
2. $\mathrm{tg}x \sim x (x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x (x \to 0)$;
4. $\mathrm{arctg}x \sim x \ (x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} (x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$; (5.18*a*)
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \ (x \to 0)$;
8. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e (x \to 0)$;
9. $\ln(1+x) \sim x (x \to 0)$;
10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x, k > 0 \ (x \to 0)$;

$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2} x$.

Ескерту 4.3. Бұл эквиваленттер x айнымалды $\alpha(x)$ функциямен алмастырғанда да орынды, тек $x \to x_0$ болғанда $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ болуы керек.

Мысал 4.6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 6x}{\mathrm{arctg}\, 2x}$ табылсын

Шешуі. $x \to 0$ болғанда $\arcsin 6x \sim 6x$, $\mathrm{arctg} 2x \sim 2x$ екендігін ескерсек:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 6x}{\mathrm{arctg}\, 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{2} = 3.$$

2. Жуықтап есептеулер

Егер $x \to x_0$ болғанда $\alpha(x) \sim \beta(x)$ болса, онда $\alpha(x) = \beta(x) + (\alpha(x) - \beta(x))$ теңдікте $\alpha(x) - \beta(x)$ жоғары реттік ақырсыз кішкене функцияны ескермесек, онда $\alpha(x) \approx \beta(x)$ жуықтау теңдігін аламыз:

$$\alpha(x) \approx \beta(x) \qquad (5.19)$$

Жуықтау теңдігі берілген ақырсыз кішкене функцияны басқа бір ақырсыз кішкене функция арқылы өрнектеуге мүмкіндік береді.

(5.12) эквиваленттіктер x-тің кішкене мәндерінде орындалады; неғұрлым x кішкене болса жуықтау формуласы дәлірек болады.

Мысал 4.7. ln1,032 санының жуық мәні табылсын.

Шешуі. (5.18*а*) формулалар бойынша $\ln(1 + x) \approx x$, $x \to 0$ болғанда, екендігін ескерсек $\ln(1 + 0{,}032) \approx 0{,}032$. Логарифмдер кестесіндегі мәні ln1,032) $\approx 0{,}031498$.

§ 5. Функцияның үзіліссіздігі

5.1. Функцияның нүктедегі және интервал мен кесіндідегі үзіліссіздігі

Анықтама 5.1. x_0 нүктесі мен оның кейбір маңайында анықталған $f(x)$ функциясы үшін, оның x_0 нүктесіндегі шегі мен мәні тең, яғни

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (5.20)$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз функция деп аталады.

(5.20) теңдік үш шартты қамтиды:

1) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның кейбір маңайында анықталған.

2) $f(x)$ функциясы $x \to x_0$ болғанда оң және сол жақ шектері бар және олар өзара тең.

3) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесіндегі шегі оның осы нүктедегі мәніне тең.

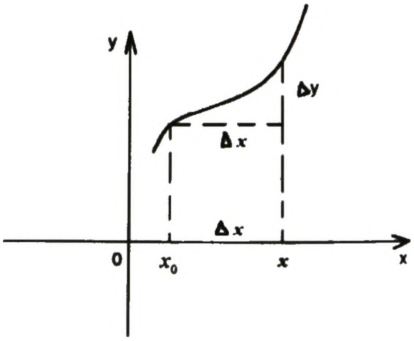
$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ екендігін ескерсек (5.20) теңдікті келесі түрде жазуға болады:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0) \qquad (5.20a)$$

Демек, үзіліссіз функциялар үшін lim мен f белгілерінің орнын ауыстыруға болады.

Тұрақты санның шегі өзіне тең болғандықтан (5.20) теңдікті түрлендіруге болады:

$$\lim_{x-0\to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0; \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$



Сурет 5.11

Мұндағы $\Delta x = x - x_0$ аргумент өсімшесі, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ функция өсімшесі деп аталады (сурет 5.11). Демек, (5.20) теңдікті

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (5.20б)$$

түрінде жазуға болады.

Мысал 5.1. $y = \cos x$ функциясын үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі. Кез келген $x \in D(\cos x)$ нүктесін белгілеп, оған Δx өсімше берсек,

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2} \cdot \sin\frac{x+\Delta x-x}{2} = -2\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) \quad \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

$\Delta x \to 0$ деп шекке көшсек, $\sin(x+\frac{\Delta x}{2})$ шенелген функция, $\sin\frac{\Delta x}{2}$ ақырсыз кішкене функция болғандықтан, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ болады.

Демек, $y = \cos x$ функциясы өзінің анықталу аймағы $(-\infty; +\infty)$ интервалдың кез келген нүктесінде үзіліссіз функция.

Анықтама 5.2. Егер $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ $(\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0))$ болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде оң жақтан (сол жақтан) үзіліссіз деп аталады.

Мысал 5.2 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 2x+1, & 2 < x \le 3 \end{cases}$ функция үзіліссіздікке зерттелсін.

Шешуі. Функцияның анықталу жиыны $D(f) = [0; 3]$. $x = 0$ нүктесінде оң жақтан үзіліссіз, $x = 2$ нүктесінде сол жақтан үзіліссіз, $x = 3$ нүктесінде сол жақтан үзіліссіз. Шынында да:

$$f(0) = 0^2 = 0, \ \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} x^2 = 0^2 = 0;$$

$$f(2) = 2^2 = 4, \ \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} x^2 = 2^2 = 4;$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7, \ \lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} (2x+1) = 2 \quad 3 + 1 = 7.$$

Анықтама 5.3. Егер $f(x)$ функциясы (a, b) интервалдың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функциясы (a, b) интервалда үзіліссіз функция деп аталады.

Анықтама 5.4. Егер $f(x)$ функциясы (a, b) интервалда үзіліссіз, $x = a$ нүктесінде оң жақтан және $x = b$ нүктесінде сол жақтан үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз функция деп аталады.

5.2. Функциянын үзіліс нүктелері

1. Функцияның үзіліс нүктелері және олардың түрлері

Анықтама 5.5. x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады.

Егер x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі болса, үзіліссіздіктің үш шартының ең болмағанда біреуі орындалмайды.

Үш түрлі үзіліс нүктесі бар.

1. **Жөнделетін үзіліс**. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ бар және x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы анықталмаған немесе $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының жөнделетін үзіліс нүктесі деп аталады.

2. **Бірінші текті үзіліс**. Егер $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

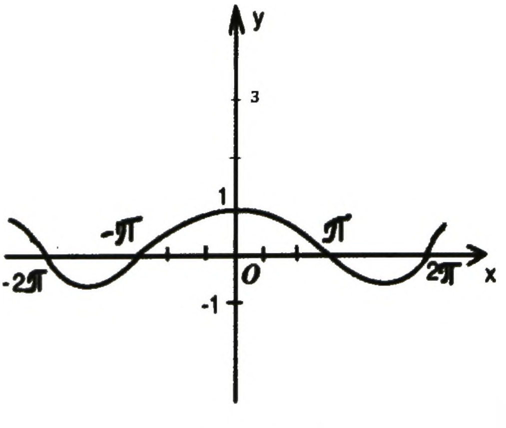
Бұл нүктені ақырлы секірме нүктесі деп те атайды. Яғни, x_0 нүктесінде $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ шек жоқ.

3. **Екінші текті үзіліс**. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының біржақты шектерінің кемінде бірі ақырсыз болса немесе біржақты шектерінің кемінде бірі болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

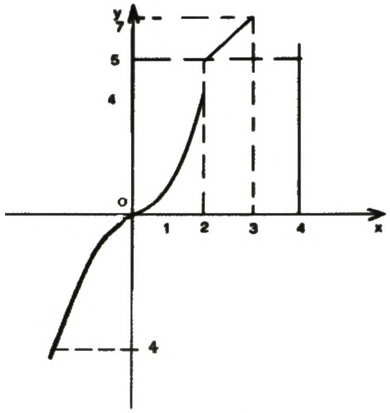
Яғни x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы анықталмаған.

Мысал 5.3. $y(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0\text{, болғанда,} \\ 3, & x = 0 \quad \text{болғанда} \end{cases}$ функциясын үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі. Берілген функция үшін x_0=0 жөнделетін үзіліс нүктесі (сурет 5.12) өйткені $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ =1, ал $y(0)$ =3. $y(0)$ = 1 десек функция (–∞, +∞) аралықта үзіліссіз функцияға айналады.



Сурет 5.12



Сурет 5.13

Мысал 5.4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x + 1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$ функциясы x = 2 нүктесінде 1-текті үзіліске ие екендігін көрсетіңіз (сурет 5.13). Шынында да (мысал 5.2) бойынша

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} x^2 = 2^2 = 4$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} (2x+1) = 5$ болғандықтан $x = 2$ нүктесі функцияның 1-текті үзіліс нүктесі. $x = 2$ нүктесіндегі функцияның секіруінің шамасы (сурет 5.13).

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) - \lim_{x\to 2-0} f(x) = 5 - 4 = 1.$$

Мысал 5.5. $y = \frac{1}{x-3}$ функциясы $x = 3$ нүктесінде 2-текті үзіліске ие екендігін көрсетілсін (сурет 5.14).

Шешуі. Берілген функция $x = 3$ нүктесінде анықталмаған, бірақ бұл нүктенің кез келген маңайында анықталған.

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty, \ \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

болғандықтан бұл нүктеде функция 2-текті үзіліске ие.

2. Бөлікті-үзіліссіз функциялар

Анықтама 5.6. Егер $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндінің ақырлы нүктелерінде бірінші текті үзіліске ие болса, ал басқа нүктелерінде үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде бөлікті-үзіліссіз функция деп аталады.

Мысалы 5.4-тегі функция [0; 3] кесіндіде бөлікті-үзіліссіз.

5.3. Нүктедегі үзіліссіз функциялар туралы негізгі теоремалар

Үзіліссіз функциялар туралы тұжырымдар шектер туралы сәйкес тұжырымдардан шығады.

Теорема 5.26. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\ \ g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ функциялары да x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. Үзіліссіз функцияның және шектері туралы формулалар бойынша:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ \ g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\ \ g(x_0); \tag{5.21}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, g(x_0) \neq 0;$$

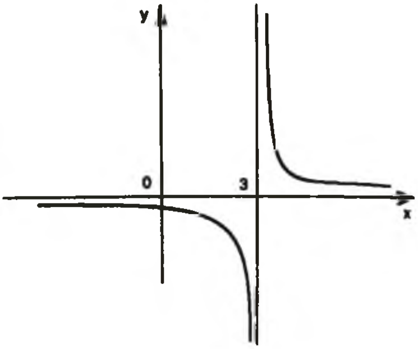
Бұл теңдіктер теореманың дұрыстығын көрсетеді.

Теорема 5.27. (күрделі функцияның үзіліссіздігі) Егер $u = \varphi(x)$ функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз, ал $y = f(u)$ функциясы $u_0 = \varphi\ (x_0)$ нүктеде үзіліссіз болса, онда $y = f[\varphi\ (x)]$ күрделі функция да x_0 нүктеде үзіліссіз болады, яғни

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi\ (x)] = f[\varphi\ (x_0)] \qquad (5.22)$$

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $\varphi(x)$ пен $f(u)$ функциялары, сәйкес, x_0 мен u_0 нүктелерінде үзіліссіз:

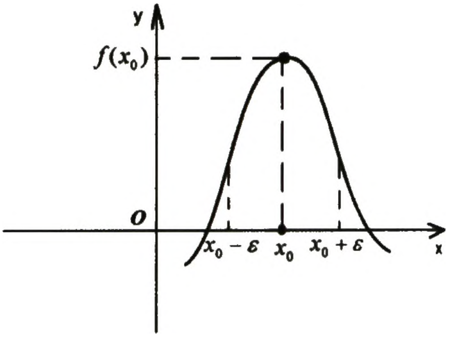
$$\lim_{x\to x_0} \varphi\ (x) = \varphi\ (x_0) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) =$$
$$= f\left[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\right] = f[\varphi\ (x_0)]$$



Сурет 5.14

Салдар 5.1. Кез келген элементтер функция өзінің анықталу жиынының әрбір нүктесінде үзіліссіз. Бұл тұжырым (5.21), (5.22) формулалардан тікелей шығады.

Мысалы, $f(x) = tg^2 5x$ функциясы $x = \frac{\pi}{20}$ нүктесінде үзіліссіз. Шынында да $\lim_{x\to\frac{\pi}{20}}(tg5x)^2 = (tg\frac{\pi}{4})^2 = 1^2 = 1.$

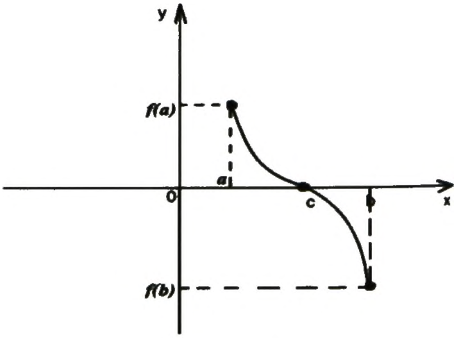


Сурет 5.15

5.4. Кесіндіде үзіліссіз функциялардың негізгі қасиеттері

Теорема 5.28. (Үзіліссіз функцияның таңбасының орнықтылығы). $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және $f(x_0) \neq 0$ болсын. Онда кейбір $\delta > 0$ саны табылып, барлық $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нүктелерде $f(x)$ таңбасы $f(x_0)$-дің таңбасындай болады.

Дәлелдеуі. $f(x_0) > 0$ болсын (сурет 5.15). Үзіліссіздіктің анықтамасы бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x-тер үшін $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, яғни $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$. $\varepsilon = f(x_0)$ деп алсақ, бұл



Сурет 5.16

қос теңсіздіктің сол теңсіздігінен $f(x) > 0$ екендігі шығады. Егер $f(x_0) < 0$ болса, онда $-f(x)$ функцияны қарастырамыз. $-f(x_0) > 0$ болғандықтан жоғарыда дәлелденгендей, x_0 нүктесінің $\delta > 0$ маңайы табылып, бұл маңайдың барлық нүктелерінде $-f(x) > 0$, демек $f(x) < 0$ болады.

Теорема 5.29. (Больцано-Коши). Егер $f(x)$ функция $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз және шеткі нүктелердегі функция мәндерінің таңбасы әртүрлі болса, онда $(a; b)$ интервалда кемінде бір $x = c$ нүкте табылып, бұл нүктеде $f(c) = 0$ болады (сурет 5.16).

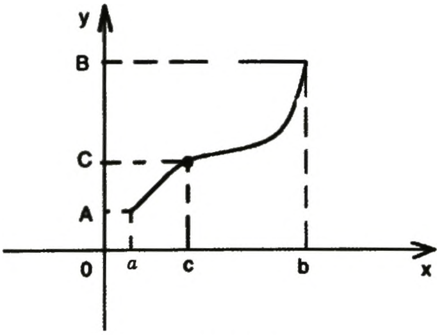
Дәлелдеуі. Анықтылық үшін $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ деп алайық. $d_1 = \frac{a+b}{2}$ нүктесі $[a; b]$ кесіндінің қақ ортасы. Егер $f(d_1) = 0$ болса, теорема дәлелденді. Егер $f(d_1) > 0$ болса, $[d_1; b] = [a_1, b_1]$ деп, ал $f(d_1) < 0$ болса, $[a; d_1] = [a_1; b_1]$ деп белгілейміз. Бұл екі жағдайда да $f(a_1) > 0, f(b_1) < 0$ болады.

Одан әрі $[a_1; b_1]$ кесіндісін қақ бөліп, $[a_2; b_2]$ алдыңғыдағыдай, кесіндісін құраймыз. Осы сияқты бөлуді қайталай берейік. Егер $f(d_k) \neq 0$, $k = 0\ 1, 2, \ldots$ болса, онда $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{b_n\}$ екі тізбек аламыз. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі бірсарынды өспелі және жоғарыдан b санымен шенелген, ал $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбесі бірсарынды кемімелі және төменнен a санымен шенелген. Олай болса $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$ шектері бар. Ал, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ болғандықтан $c_1 = c_2 = c$ болады.

Кез келген n натурал саны үшін $f(a_n\ ) > 0$, $f(b_n) < 0$ және f функциясының $[a; b]$ кескіндісінде үзіліссіз екендігін ескерсек, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \leq 0$, болады. Бұл екі теңсіздіктен $f(c) = 0$ екендігі шығады.

Теорема 5.30. (Больцано-Коши). Егер $f(x)$ функция $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз және $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ болса, онда $f(x)$ функция $[a; b]$ кесіндіде A мен B аралығындағы барлық мәндерді қабылдайды (сурет 5.17)

Дәлелдеуі. C саны $A < C < B$ қостеңсіздікті қанағаттандыратын кез келген сан болсын. Онда $F(x) = f(x) - C$ функциясы $[a; b]$ үзіліссіз функциялардың қосындысы ретінде $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $F(a) = f(a) - C < 0$, $F(b) = f(b) - C > 0$ шарттарды қанағаттандырады. Олай болса теорема 5.29 бойынша $F(c) = f(c) - C = 0$ теңдік орындалатындай $c \in (a; b)$ нүктесі табылады. Яғни, $f(c) = C$.



Сурет 5.17

Ескерту 5.1. Бұл дәлелдеме $f(x) = 0$ теңдеуінің "қақ бөлу әдісі" деп аталатын жуықтап шешу алгоритмін береді.

Мысал 5.6. $\frac{x}{4} + \cos x = 0$ теңдеуінің $(0; \pi)$ аралығында шешімі барлығы анықталсын.

Шешуі. $f(x) = \frac{x}{4} + \cos x$ функциясы $[0; \pi]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(0) = 1>0$, $f(\pi) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$. Демек, теорема 5.29 тұжырымы бойынша берілген теңдеудің түбірі бар.

Теорема 5.31. (Вейерштрасстың бірінші теоремасы). Егер $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде шенелген.

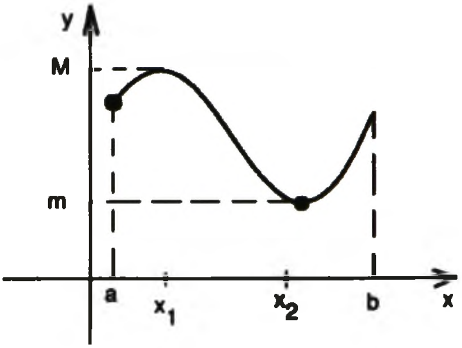
Алдын ала келесі лемманы дәлелдейік.

Лемма 5.1. Егер $f(x)$ функция x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда функция осы нүктенің кейбір маңайында шенелген (сурет 5.15)

Дәлелдеуі. $\varepsilon = 1$ болсын. Онда шектің анықтамасы бойынша $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалдың барлық нүктелері үшін $|f(x) - f(x_0)| < 1$ теңсіздігі орындалады. Осы теңсіздікті пайдалансақ $|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x)| < |1 + |f(x_0)|$ яғни $|f(x)| < M$, мұндағы $M = 1 + f(x_0)$. Демек, $f(x)$ функциясы $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалда шенелген.

Теорема 5.31.-дің дәлелдеуі. Керісінше жорық, яғни $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде шенелмеген болсын. $[a; b]$ кесіндіні тең екіге бөлейік. Онда, ең болмағанда, екі бөлікше кесіндінің біреуінде $f(x)$ функциясы шенелмеген. Бұл кесіндіні $[a_1; b_1]$ деп белгілейік. Бұл кесіндіні тең екіге бөліп, $f(x)$-тің шенелмеген бөлігін $[a_2; b_2]$ деп белгілейік. Осы сияқты бөлуді қайталай берсек $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$ біріне бірі іштей енген кесінділер тізбегі шығады. (бірінін ішінде бірі іштей сызылған сегменттер тізбегі).

Бұл кесінділердің әрқайсысында $f(x)$ функциясы шенелмеген. Бірақ теорема 5.29-да көрсетілгендей $b_n - a_n = \frac{b-a}{2n} \to 0,\ n \to \infty$ болғандықтан, бұл кесінділердің бәріне ортақ нүктесі бар. Лемма 5.1 бойынан бұл нүктенің кейбір маңайында функция шенелген. Демек, жоруымыз дұрыс емес.



Сурет 5.18

Теорема 5.32. (Вейберштрасстың екінші теоремасы). Егер $f(x)$ функция $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде өзінің дәл жоғарғы және дәл төменгі шекараларын қабылдайды, яғни $x_1, x_2 \in [a; b]$ нүктелері табылып, бұл нүктелерде: $f(x_1) = M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$; $f(x_2) = m = \ = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$.

Дәлелдеуі. $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндіде үзіліссіз болғандықтан теорема 5.31 бойынша $f(x)$ функциясы осы кесіндіде шенелген. Кез келген бос емес жоғарыдан (төменнен) шенелген жиынның (теорема 1.1) дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекарасы болғандықтан $f(x)$ функциясының $[a;\ b]$ кесіндісінде дәл жоғары шекарасы M (дәл төменгі шекарасы m) бар (сурет 5.18).

$f(x)$ функциясының M мәнді қабылдайтын $x_1 \in [a;\ b]$ нүктесі барлығын көрсетейік, яғни $f(x_1) = M$. Керісінше жориық, яғни $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінің бірде бір нүктесінде M мәнді қабылдамайды дейік. Онда барлық $x \in [a;\ b]$ нүктелер үшін $f(x) < M$ болады. $[a;\ b]$ кесіндісінде $F(x) = \frac{1}{M-f(x)} > 0$ функцияны қарастырайық.

Теорема 5.26 бойынша екі үзіліссіз функцияның қатынасы ретінде $F\ (x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз. Онда теорема 5.31 бойынша $F\ (x)$ осы кесіндіде шенелген, яғни μ сан табылып, барлық $x \in [a;\ b]$ нүктелер үшін $F(x) = \frac{1}{M-f(x)} \le \mu$ бұдан $f(x) \le M - \frac{1}{\mu}$.

Сонымен M санынан кіші $M - \frac{1}{\mu}$ саны $f(x)$ функциясының $[a;\ b]$ кесіндідегі дәл жоғарғы шекарасы болып шықты. Бұл M дәл жоғарғы шекара дегенге қайшы. Бұл қайшылық x_1 нүктесі табылып $f(x_1) = M$ екендігін дәлелдейді. Осылайша $x_2 \in [a;\ b]$ нүктесі табылып, $f(x_2) = m$ екендігі дәлелденеді.

Салдар 5.2. Егер $f(x)$ функциясы кейбір X интервалда анықталған және үзіліссіз болса, онда оның Y мәндер жиыны да интервал болады.

Дәлелдеуі. $m = \inf\limits_{x} f(x)$, $M = \sup\limits_{x} f(x)$ болсын. Y жиыннан m және M шамаларға тең емес кез келген y-ті алып, $f(x)$ функциясының y_1 және y_2 мәндерін $m \le y_1 < y < y_2 \le M$ теңсіздіктері орындалатындай етіп таңдаймыз (егер $M = +\infty$ $(m = -\infty)$ болса, онда $y_2 < M$ $(m < y_1)$). $f(x)$ функциясының мұндай мәндерінің бар болуы дәл шекаралардың анықтамасынан шығады.

Онда теорема 5.30 бойынша x нүкте табылып, $f(x) = y$ теңдік орындалады. Демек, Y жиын (ақырлы не ақырсыз) шеткі нүктелері m және M болған интервалды анықтайды. m және M сандары бұл интервалға кіруі де, кірмеуі де мүмкін.

Теорема 5.33. (кері функцияның үзіліссіздігі). Егер $y = f(x)$ функциясы X интервалда анықталған, қатаң бірсарынды және үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функциясының Y мәндер жиынында анықталған $x = \varphi(y)$ кері функция да бір мәнді, қатаң бірсарынды және үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. Анықтық үшін $f(x)$ функциясы X интервалда өсуші функция болсын, яғни кез келген $x_1,\ x_2 \in X$ үшін $x_1 < x_2$ болғанда $y_1 < y_2$ болады. Мұндағы $y_1 = f(x_1)$, $y_1 = f(x_2)$. $y = f(x)$ функциясы X интервалда өсуші болғандықтан $x_1 \neq x_2$ болғанда $y_1 \neq y_2$ болады. Яғни, $x = \varphi(y)$ кері функция бірмәнді. Демек, әрбір $y \in Y$ мәнге жалғыз $x \in X$ мән сәйкес келеді. $x = \varphi(y)$ кері функцияның Y жиында өсуші екендігін көрсетелік. Шынында да, егер $y_1 < y_2$ болса $x_1 = \varphi(y_1) < \varphi(y_2) = x_2$ теңсіздігі орындалады. Өйткені $x_1 \ge x_2$ болса,

$f(x)$ функциясы өсуші болғандықтан $y_1 \geq y_2$ болып, $y_1 < y_2$ ұйғаруға қайшы келеді. Сонымен $x= \varphi(y)$ кері функция қатаң бірсарынды екендігі көрсетілді. Енді $x = \varphi(y)$ кері функцияның Y жиында үзіліссіз екендігін дәлелдейік.

Теорема 5.32-нің салдары 5.2 бойынша Y жиын шеткі нүктелері m және M болатын аралық, мұндағы $m = \inf f(x)$, $M= \sup f(x)$. Үзіліссіздікті дәлелдеу үшін эрбір $y_0 \in (m, M)$ белгіленген нүктеде, кез келген $\delta > 0$ саны үшін $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ саны табылып, $|y - y_0| < \delta$ болғанда $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ болатынын көрсетеміз.

$m < y_0 < M$ болсын. Бұл жағдайда $x_0 = \varphi(y_0)$ нүктесі X аралықтың ішкі нүктесі болады. $\varepsilon > 0$ санды $x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon$ нүктелері X аралыққа тиісті етіп таңдаймыз. $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ деп алсақ, $f(x)$ өсуші функция болғандықтан $y_1 < y_0 < y_2$ болады. Енді $\delta > 0$ санды $y_1 \leq y_0 - \delta$ және $y_0 + \delta \leq y_2$ теңсіздіктері орындалатындай етіп аламыз. Сонда, егер y, $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ теңсіздіктді қанағаттандырса, $y_1 < y < y_2$ теңсіздіктері орындалады. Демек, $\varphi(y)$ өсуші, болғандықтан $\varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2)$ теңсіздіктері шығады. $\varphi(y_1) = x_0 - \varepsilon = \varphi(y_0) - \varepsilon$ және $\varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon = \varphi(y_0) + \varepsilon$ екендігін ескерсек, $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ болғанда $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon$ теңсіздіктері алынады. Сонымен, кез келген жеткілікті аз $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|y - y_0| < \delta$ болғанда $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, яғни, $\varphi(y)$ кері функция (m, M) интервалдың кез келген y_0 нүктесінде үзіліссіз.

Егер $m \in Y$ немесе $M \in Y$ болса, осы сияқты талқылаулар негізінде $\varphi(y)$ функциясының m нүктесінде он жағынан және M нүктесінде сол жағынан үзіліссіз екендігі дәлелденеді.

$f(x)$ функциясы кемуші болғанда да теорема осы сияқты дәлелденеді.

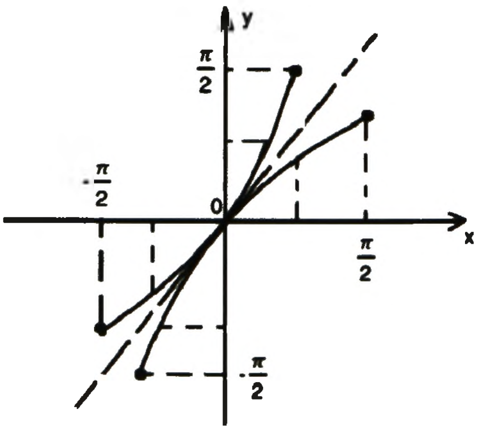
Мысал 5.7. $y = \cos x^3$ функциясының $x = 0$ нүктесінде үзіліссіздігі дәлелденсін.

Шешуі. $u = x^3$ функциясы $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз, ал $y = \cos u$ функциясы сәйкес $u = 0$ нүктесінде үзіліссіз. Сондықтан берілген функция теорема 5.27 бойынша $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз.

Мысал 5.8. $y = \sin x$ функцияға кері функцияның үзіліссіздік анықталсын.

Шешуі. $y = \sin x$ функциясы $]$ кесіндіде өсуші үзіліссіз және оның мәндер жиыны $Y = [-1; 1]$

Теорема 5.33. бойынша, $[-1; 1]$ кесіндіде анықталған, үзіліссіз және мәндер жиыны $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ болған $x = \arcsin y$ кері функция бар. Бұл функцияның графигі $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ функцияның графигімен дәлме-дәл келеді. Енді кері функцияда x пен y айнымалдардың орнын ауыстырсақ, яғни $y = \arcsin x$



Сурет 5.19

функциясын қарастырсақ, оның графигі сурет 5.19- дағыдай болады.

5.5. Бірқалыпты үзіліссіздік. Кантор теоремасы

Анықтама 5.7. X жиында анықталған $f(x)$ функциясы үшін, кез келген $\varepsilon > 0$ санға $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сан табылып, $|x' - x''| < \delta$ болғанда:

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{5.23}$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы X жиында бірқалыпты үздіксіз функция деп аталады.

X жиынның әрбір нүктесінде бірқалыпты үзіліссіз функция осы жиында үзіліссіз болады. Бірақ кез келген үзіліссіз функция бірқалыпты үзілзсіз бола алмайды. Мысалы, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясы $x = (0,1)$ жиында үзіліссіз, бірақ бірқалыпты үзіліссіз емес. Шынында да $\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}, \{x_n''\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right\}$ нүктелер тізбегі $n \to \infty$ болғанда нөлге ұмтылады, әрі $|x_n' - x_n''| = \frac{1}{4\pi(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$ болғанда барлық n нөмірлері үшін $|f(x_n{}') - f(x_n{}'')| = 1$ болады. Демек, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ болғанда, (5.23) теңсіздігі әрқандай аз $\delta > 0$ –де $|x' - x''| < \delta$ үшін қанағаттандырмайды.

Теорема 5.33 (Кантор). Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментте үзіліссіз болса, онда $f(x)$ осы сегментте бірқалыпты үзіліссіз функция болады.

([1], гл. 8, § 9)

VI тарау. БІР АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ҚИСАБЫ

§ 1. Функцияның туындысы

1.1. Функция туындысының анықтамасы

$y = f(x)$ функциясы кейбір $D(y) = (a;\ b)$ интервалында анықталсын. Келесі амалдарды орындайық:

1) берілген x, $x \in (a;\ b)$, айнымалға Δx өсімше береміз: $x + \Delta x \in (a;\ b)$;

2) $f(x)$ функциясының Δx өсімшеге сәйкес Δy өсімшесін табамыз: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасын құрамыз.

Анықтама 1.1. Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ шегі бар болса, онда осы шек $y = f(x)$ функциясының белгіленген x нүктесіндегі туындысы деп аталады.

Туынды $f'(x)$, $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ символдардың бірімен белгіленеді. Демек, анықтама бойынша:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (6.1)$$

Туындыны табу амалын функцияны дифференциалдау деп атайды. $f'(x)$ ақырлы болса, $f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын функция деп аталады.

Теорема 5.13 бойынша (6.1) теңдікті

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \quad \Delta x \qquad (6.1a)$$

түрінде жазуға болады.

Анықтама 1.2. Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ шегі бар болса, онда осы шек $y = f(x)$ функциясының белгіленген x нүктесіндегі оң жақ (сол жақ) туындысы деп аталады да $f'(x + 0)(f'(x - 0))$ символымен белгіленеді.

Белгіленген x нүктесінде $f'(x)$ туындысының бар болуы үшін $f'(x+0)=f'(x - 0)$ болуы шарт.

Анықтама 1.3. Егер $f(x)$ функциясының $(a;\ b)$ интервалының әрбір x нүктесінде ақырлы туындысы бар болса, онда $f(x)$ функциясы $(a;\ b)$ интервалында дифференциалданатын функция деп аталады.

Мысал 1.1. а) $f(x) = c$, $c = \text{const}$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$; г) $f(x) = \sqrt{x}$; д) $f(x) = \frac{1}{x}$; е) $f(x) = \ln x$ функцияларының белгіленген x нүктесіндегі туындысы табылсын.

Шешуі. Анықтама бойынша туынды табудың реттелген амалдарын орындаймыз:

а) $f(x) = c$.

1) $x+\Delta x$; 2) $\Delta y = f\ (x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$; 4) $(c)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$.

б) $f(x) = x$.

1) $x + \Delta x$; 2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$; 4) $(x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 1 = 1$.

в) $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$.

1) $x+\Delta x$; 2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [3(x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - 5] - (3x^2 + 5x - 5) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x - 5 - 3x^2 - 5x + 5 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5\Delta x = \Delta x(6x + 3\Delta x + 5)$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x+5+3\Delta x)}{\Delta x} = 6x + 5 + 3\Delta x$;

4) $(3x^2 + 5x - 5)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} (6x + 5 + 3\Delta x) = 6x + 5 + 0 = 6x + 5$.

г) $f(x) = \sqrt{x}$.

1) $x+\Delta x$; 2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} \quad \sqrt{x} = = \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} == \frac{x+\Delta x-x}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\cdot\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$;

4) $\left(\sqrt{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

д) $f(x) = \frac{1}{x}$

1) $x+\Delta x$; 2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = - \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\cdot\Delta x} = - \frac{1}{x(x+\Delta x)}$;

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$.

е) $f(x) = \ln x$.

1) $x + \Delta x$; 2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$;

4) $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}$

Мұнда (5.18а) формулалардағы $\Delta x \to 0$ болғанда $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$ екендігін пайдаландық.

Демек, қарастырылған функциялардың туындылары:

а) $(c)' = 0$;

б) $(x)' = 1$;

в) $(3x^2 + 5x - 5)' = 6x + 5$;

г) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

д) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

е) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

1.2. Туындының механикалық, геометриялық және экономикалық мағынасы

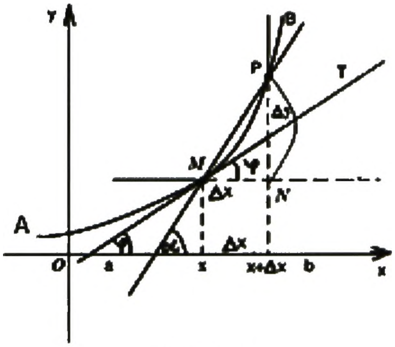
а) Туындының механикалық мағынасы.

$y=f(x)$ функциясы материалдық нүктенің түзу сызықты бойлай қозғалғандағы x уақыттағы жүрген жолын анықтасын. Сонда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасы $[x,\ x+\Delta x\,]$ уақыт аралығындағы орташа жылдамдықты анықтайды. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ болғандықтан, $f\,'(x)$ түзуді бойлай қозғалған материалдық нүктенің x уақыттағы лездік жылдамдығын анықтайды.

Жалпы, $f\,'(x)$ туынды $y=\ f(x)$ функциясының x нүктесіндегі өзгеру жылдамдығын өрнектейді.

Мысал 1.2. Биіктіктен еркін түсетін дененің уақыт ішіндегі жүрген жолы $S(x)=\dfrac{gx^2}{2}$ формуласымен анықталады. x = 2 сек. x = 10 сек. болғандағы лездік жылдамдығы табылсын.

Шешуі. Лездік жылдамдық $S(x)=\dfrac{gx^2}{2}$ функциясының туындысы арқылы анықталады: $V(X)=S'(X)=\left(\dfrac{gx^2}{2}\right)'=g\,x$. Мұндағы g = 9,81 м/сек^2, x – уақыт.



Сурет 6.1

Мысалы, $V(2)$ = 9,8 $\dfrac{м}{c^2}$ 2 с = 19,6 м/сек; $V(10)$ = 9,8 м/сек^2 10 сек = 98 м/сек;

б) Туындының геометриялық мағынасы.

$y=f(x)$ функциясының графигінде $M\in AB$,$P\in AB$ (сурет 6.1) нүктелерін алайық.

$P(x+\Delta\,x,\ y\ +\Delta\,y)$ нүктесінің қисық бойлай $M(x,\ y)$ нүктесіне ұмтылғанда PM қиюшының (хорданың) шектік жағдайы AB қисығының $M(x,\ y)$ нүктесіндегі жанамасы деп аталады.

Тікбұрышты үшбұрыш ΔMNP-да: $\dfrac{NP}{MN}=\operatorname{tg}\alpha(\Delta x)$, яғни $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha(\Delta x)$.

Бұдан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha(\Delta x)=\operatorname{tg}\varphi$.

Демек, $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы $f'(x)$, осы функция графигінің $M(x,\ f(x))$ нүктесі арқылы өтетін жанамасының бұрыштық коэффициентіне тең,

$$f'(x) = \mathrm{tg}\varphi = k. \tag{6.2}$$

(6.2) формула туындының геометриялық мағынасын білдіреді.

Онда $(x_0,\ f(x_0))$ нүктесінде функция графигіне жүргізілген M_0T жанаманың теңдеуі

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); \tag{6.3}$$

ал жанамаға осы нүктеде перпендикуляр түзу-нормальдің теңдеуі

$$y - f'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ f'(x_0) \neq 0. \tag{6.4}$$

Бұл түзулер k бағытта $(x_0,\ y_0)$ нүктесінен өтетін $y - y_0 = k(x - x_0)$ түзулер шоғында жатады.

Мысал 1.3. $f(x) = x^2 - 2$ функциясының графигіне $M_0(3;\ 7)$ нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдың теңдеуін табу керек.

Шешуі. $f'(x) = 2x$ болғандықтан, $f'(3) = 6$ екенін ескерсек (6.3) теңдігі бойынша жанаманың теңдеуі $y - (3^2 - 2) = 2\quad 3(x - 3)$ немесе $y = 6x - 11$, ал нормальдың теңдеуі (6.4) формуласы бойынша $y - 7 = -\frac{1}{6}(x - 3)$ немесе $y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{2}$ болады.

в) Туындының экономикалық мағынасы. $y = f(x)$ функциясы x уақытта өндірілген өнім мөлшері болсын. Онда $x + \Delta x$ уақытта өндірілген өнім мөлшері $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ болып, $[x,\ x + \Delta x]$ аралықтағы өндірілген өнім $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ болады. Яғни, Δx уақыттағы орташа еңбек өнімділігі: $z_{\text{орт}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

x уақыт мезетіндегі еңбек өнімділігін табу үшін Δx-ті нөлге ұмтылдыру керек екендігі айқын, яғни $z(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Демек $f(x)$ функциясы x уақытта өндірілген өнім мөлшері болса, $z = f'(x)$ осы x уақыт мезетіндегі еңбек өнімділігін анықтайды.

Мысалы 1.4. Жумысшылар бригадасының өндірген өнімінің көлемі $y = -x^3 + 8x^2 + 100x + 50$ бірлікпен, мұндағы $1 \leq x \leq 8$ сағатпен есептелген жұмыс уақыты. Еңбек өнімділігін, $x = 1$ және $x = 7$ болғанда есептеу керек.

Еңбек өнімділігі туынды арқылы өрнектеледі:

$z(x) = y'(x) = -3x^2 + 16x + 100$.

$z(1) = 113$ (бірлік/сағат), $z(7) = 65$ (бірлік/сағат).

1.3. Функцияның дифференциалдануы мен үзіліссіздігінің арасындағы байланыс

Теорема 6.1. Егер $f(x)$ функциясы кейбір x нүктеде дифференциалданатын болса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. $y = f(x)$ функциясы белгіленген x нүктеде дифференциалдансын:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

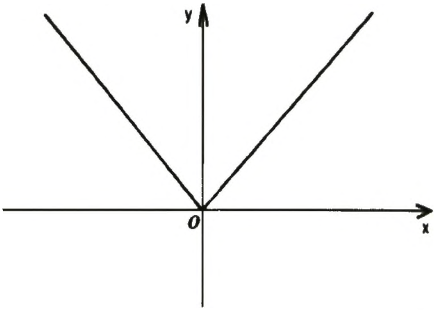
Теорема 5.13 бойынша $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$ немесе

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(x)\quad \Delta x. \qquad (6.1a)$$

Мұндағы $\alpha(x)$ ақырсыз кішкене функция. Осыдан, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = f'(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x)\quad\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0$. Демек, $f(x)$ функция белгіленген, x нүктесінде үзіліссіз.

Кері тұжырым дұрыс емес: x нүктесінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болғанмен, оның ақырлы туындысы мүмкін, яғни дифференциалданбайды.

Мысал 1.5. $y = |x| = \begin{cases} x, \text{егер } x \geq 0 \\ {-}{-}x, \text{егер } x < 0\end{cases}$ болса, функциясының $x = 0$ нүктеде дифференциалданбайтынын көрсету керек (сурет 6.2).



Сурет 6.2

Шешуі. Берілген функция $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз, $x = 0$ нүктеде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{егер } \Delta x \geq 0, \text{болса} \\ -1, \text{егер } \Delta x < 0, \text{болса}\end{cases}$ Осыдан $f'_{0+0}(0) = 1$, $f'_{0-0}(0) = -1$ екендігі көрінеді. Яғни, оң жақ туынды мен сол жақ туынды бар, бірақ олар өзара тең емес. Демек $x = 0$ нүктесінде туынды жоқ, яғни функция дифференциалданбайды.

Анықтама 1.4. Егер $y = f(x)$ функциясының кейбір (a, b) интервалда $f'(x)$ туындысы үзіліссіз болса, онда осы интервалда $f(x)$ функциясын сыптығыр (тегіс) функция деп атайды.

Мысал 1.6. $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$ функция кез келген интервалда сыптығыр функция бола ма?

Шешуі. $f'(x) = 6x + 5$ болғандықтан (Мысал 1.1) бұл кез келген интервалда үзіліссіз функция. Демек, $(-\infty; +\infty)$ интервалда сыптығыр функция.

1.4. Функцияның туындысын табу ережелері

Теорема 6.2. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының белгіленген $x \in (a; b)$ нүктесінде $u'(x)$ және $v'(x)$ туындылары бар болса, онда келесі формулалар орындалады:

$$\text{а) } [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x), \qquad (6.5)$$

$$\text{б) } [u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\quad v(x) + u(x)\quad v'(x), \qquad (6.6)$$

$$\text{в) } [c\cdot u(x)]' = c\cdot u'(x),\ c = \text{const}, \qquad (6.6\text{a})$$

$$\text{г) } \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \qquad (6.7)$$

Дәлелдеуі. а) $[u(x) \pm v(x)]' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$

б) $[u(x) \cdot v(x)]' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot (v+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{[(u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x) \cdot v(x)]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) =$

$= v(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = v(x) \quad u'(x) + u(x) \quad v'(x) +$

$+ 0 \cdot u'(x) = u'(x) \quad v(x) + u(x) \quad v'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x).$

6.5) формуласы бойынша:

в) $[c \quad u(x)]' = c' \cdot u(x) + c \cdot u'(x) = 0 \quad u(x) + c \cdot u'(x) = \mathrm{c} \cdot u'(x)$ өйткені, $\mathrm{c} = \mathrm{const}$ болғанда $c' = 0$.

$$г) \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{(v+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x[v(x)(v(x) + \Delta v)]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \quad \Delta u - u(x) \quad \Delta v}{\Delta x[v^2(x) + v(x) \quad \Delta v)]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x) \cdot \Delta v} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} =$$

$$= \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Салдар 1.1. (6а) формула бойынша

$$\left[\frac{u(x)}{c}\right]' = \frac{1}{c} u'(x).$$

Салдар 1.2. (6.7) формула бойынша

$$\left[\frac{c}{v(x)}\right]' = -c \frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Мысал 1.7. Функциялардың туындысын табу керек:

а) $f(x) = \sqrt{x} + 3$; б) $f(x) = \frac{c}{x}$; в) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$; г) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Шешуі. Мысал 1.1-дің нәтижелерін ескеріп, теорема 6.2 формулаларын қолдансақ:

а) $\left(\sqrt{x} + 3\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' + 3' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $\left(\frac{c}{x}\right)' = c \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}$;

в) $((x+1) \cdot \sqrt{x})' = (x+1)' \cdot \sqrt{x} + (x+1) \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$;

г) $\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \left(\sqrt{x}\right)'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = x^{-\frac{3}{2}} - \ln x \cdot 2x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{3}{2}}(1 - \ln x^2).$

Мұнда, сәйкес, (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), формулалары қолданылды.

Теорема 6.3. (күрделі функцияның туындысы). Егер $u = \varphi(x)$ функциясы x нүктесінде, ал $y = f(u)$ функциясы сәйкес u нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $y = f[\varphi(x)]$ күрделі функция x нүктесінде дифференциалданушы және оның туындысы үшін

$$\{f[(x)]\}' = f'(u) \quad \varphi'(x) \tag{6.8}$$

формула орынды.

Дәлелдеуі. x-ті белгілеп, оған $\Delta x \neq 0$ өсімше берсек, $u = \varphi(x)$ функциясы $\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ өсімше алады. $u = \varphi(x)$ нүктесінде Δu өсімшеге сәйкес $y = f(u)$ функция $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$ өсімше алады.

Теореманың шарты бойынша $y = f(u)$ функциясы $u = \varphi(x)$ нүктесінде дифференциалданушы болғандықтан, Δy өсімше $\Delta y = f'(u) \quad \Delta u + \alpha(\Delta u) \quad \Delta u$ түрінде болады. Мұнда $\alpha(\Delta u)$, $\Delta u \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функция.

Соңғы теңдіктің екі жағын да $\Delta x \neq 0$-ке болсек: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$.

Енді $\Delta x \to 0$ деп шекке көшсек, әрі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$ екендігін ескерсек, соңғы теңдіктен (6.8) формуласы шығады.

Мысал 1.8. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)$ функциясының туындысы табылсын.

Шешуі. $u = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ деп алсақ, бұл күрделі функцияның туындысы (6.8) формуласы бойынша

$$\left[\ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{x}} \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x}}{x\sqrt{x} + 1} = \frac{x\sqrt{x} - 2}{2x\left(x\sqrt{x} + 1\right)}.$$

Теорема 6.4. (Кері функцияның туындысы) $y = f(x)$ функциясы белгіленген x нүктенің кейбір маңайында бірсарынды және үзіліссіз болсын. Егер функцияның x нүктесіндегі туындысы $f'(x) \neq 0$ болса, онда сәйкес y нүктесінің кейбір маңайында анықталған $y = f(x)$функциясына кері $x = f^{-1}(y)$ функциясы бар және оның туындысы

$$x'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{6.9}$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. x нүктенің маңайында $y = f(x)$ функциясы теорема 5.30 дың барлық шарттарын қанағаттандырады, яғни сәйкес y нүктенің кейбір маңайында анықталған, $f(x)$ функциясына кері $x = f^{-1}(y)$ функциясы бар және ол осы маңайда үзіліссіз, бірсарынды.

Көрсетілген y нүктеде $\Delta y \neq 0$ өсімше берсек, оған сәйкес кері функцияның өсімшесі $\Delta x = f^{(-1)}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \neq 0$ болады, себебі кері функцияда қатаң бір сарынды, үзіліссіз функция. Сондықтан, мына тепе-теңдікті жазуға болады:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{6.10}$$

Өзара кері функциялар үзіліссіз және бірсарынды болғандықтан $\Delta y \to 0$ болғанда $\Delta x \to 0$ болады, әрі $\Delta x \neq 0$. $x = f^{-1}(y)$, $\Delta x = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(y)$

болғандықтан $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$ болады, яғни $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ және $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Демек, (6.10) тепе-теңдіктің оң жағын $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$ түрінде жазуға болады. $f'(x) \neq 0$ туындысы бар екенін ескерсек, (6.10) тепе-теңдіктің оң жағындағы шек бар және ол $\frac{1}{f'(x)}$-қа тең.

Oxy тікбұрышты Декарт координаталар жүйесінде $y = f(x)$ және $x = f^{-1}(y) = g(y)$ функцияларының графиктері бір ғана сызық болады. Ал $y = f(x)$ пен $y = g(x)$ функцияларының графиктері $y = x$ түзуіне сәйкес симметриялы болады.

Мысал 1.9. Кері функцияны дифференциалдау ережесін қолданып, $y = \sqrt[3]{x-2}$ функциясының туындысы табылсын.

Шешуі. Берілген функцияға кері $x = y^3 + 2$ функцияның туындысы $x'_y = 3y^2$. Демек, (6.9) формула бойынша $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Теорема 6.5. (логарифмдеп дифференциалдау әдісі). Егер x нүктеде $y = f(x) > 0$ функциясы дифференциалданушы болса, онда $u = \ln y$, функциясының x нүктесіндегі туындысы

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{6.11}$$

немесе

$$f'(x) = f(x)\cdot[\ln f(x)]' \tag{6.11a}$$

формуласымен анықталады.

Дәлелдеуі. x нүктесінде $f(x) > 0$ болғандықтан, оның логарифмі бар. $f(x)$ дифференциалданушы функция болағандықтан, күрделі функцияның туындысы туралы теоремаға сәйкес, $u = \ln f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалдаушы болады. $(\ln y)' = \frac{1\,y'}{y}$ теңдіктен (6.11) формула шығады.

Мысал 1.10. $y = [u(x)]^{v(x)}$, $u(x) > 0$, $u(x) \neq 1$ дәрежелі көрсеткішті функцияның, $u(x)$ және $v(x)$ дифференциалданушы функциялары, туындысы табылсын.

Шешуі. Берілген теңдіктің екі жағында логарифм десек: $\ln y = v(x)\ \ln u(x)$. Бұл теңдіктің екі жағында x бойынша, күрделі функцияның дифференциалдану ережесін пайдаланып, дифференциалдасақ?:

$$(\ln y)'_x = \frac{1}{y}\cdot y' = [v(x)\ \ln u(x)]' = v'(x)\ \ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow y' =$$

$$= y\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].\ \text{Демек,}$$

$$[u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right] \tag{6.12}$$

Ескерту 1.1. (6.12) формуланы $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$ тепе-теңдікті қолданыпта шығаруға болады.

Мысал 1.11. $y = x^{2x}$, $x > 0$ функцияның туындысы табылсын.

Берілген функция (0, +∞) интервалда анықталған, үзіліссіз. Туындысы (6.12) формула бойынша табылады: мұнда $u(x) = x$, $v(x) = 2x$.

$$(x^{2x})' = x^{2x}\left[2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}\right] = 2x^{2x} (\ln x + 1).$$

1.5. Негізгі элементар функциялардың туындылары

1. $$f(x) = c, \ c = \text{const}, \ (c)' = 0 \qquad (6.13)$$

Дәлелдеуі. Туындының анықтамасы бойынша:

$$(c)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0.$$

(Мысал 1.1-ге қараңыз).

2. а) дәрежелі функция: $f(x) = x^n$, $n \in N$, $x \in (-\infty; +\infty)$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (6.14a)$$

Дәлелдеуі. $(x^n) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \cdot \frac{n(n-1)}{2!} - x^{n-2}(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} \cdot (\Delta x)^3 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} (\Delta x)^3 + \cdots + (\Delta x)^n\right) = nx^{n-1},$$

мұнда Ньютон биномы формуласы қолданылды.

б) $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $x \in (0, +\infty)$ $\quad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha^{-1}}$
(6.14)

Дәлелдеуі. $y = x^{\alpha} \Rightarrow \ln y = \alpha \ln x \Rightarrow (\ln y)' = (\alpha \ln x)' \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$, яғни $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha\text{-}1}$

Мысал 1.12. $y = 3x^2 + 5x - \sqrt[3]{x} - 2$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. Қосындының туындысын табу ережесін пайдаланып, (6.14а), (6.14) формулаларды қолдансақ, $y' = (3x^2 + 5x - \sqrt[3]{x} - 2)' = (3x^2)' + (5x)' - (\sqrt[3]{x})' - (2)' =$
$= 3 \ (x^2)' + 5 \ (x)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - 2' = 3 \cdot 2x + 5 - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 0 = 6x + 5 - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

3. Көрсеткішті функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $x \in R$.

$$(a^x)' = a^x \quad \ln a. \qquad (6.15)$$

Дәлелдеуі. Алдымен e^x функциясының туындысын табайық:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x$$

Мұнда $\Delta x \to 0$ болғанда $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ екендігін пайдаландық.

$a^x = e^{x\ln a}$ болғандықтан $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \quad \ln a = a^x \quad \ln a$.

Мысал 1.13. $y = 5^{x^2-3x}$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. Күрделі функцияның туындысы мен көрсеткішті функцияның туындысының формулаларын пайдаланып табамыз: $y' = 5^{x^2-3x} (2x - 3) \cdot \ln 5$

4. Логарифмдік функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $x \in (0; +\infty)$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e. \qquad (6.16)$$

Анықтама бойынша $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ екендігін (Мысал 1.1) көрсеткенбіз.

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ екендігін ескерсек, $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = = \frac{1}{x} \log_a e$.

Мысалы 1.14. $y = 5^{x^2-3x}$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. (6.8), (6.15) формулаларын қолдансақ, $y' = 5^{x^2-3x}\ \ \ln 5\ \ (2x-3)$.

Мысал 1.15. $y = \ln(x^3 + 5x - 3\sqrt{x} + 4)$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. Логарифмдік функцияның туындысы (6.16) формула мен күрделі функцияның туындысы (6.8) формулаларын пайдаланып табамыз:

$$y' = \frac{1}{x^3 + 5x - 3\sqrt{x} + 4} \cdot \left(3x^2 + 5 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$$

5. $y = \sin x$, $x \in R$.

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (6.17)$$

Дәлелдеуі. $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Мұнда бірінші тамаша шек пен $\cos x$ функциясының үзіліссіз функция екендігі пайдаланылды.

Мысал 1.16. $y = \sin 5x$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. (6.17) формула мен күрделі функцияның туындысының (6.8) формуласын қолдансақ: $(\sin 5x)' = \cos 5x\ \ 5$ болады.

6. $y = \cos x$, $x \in R$.

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (6.18)$$

Дәлелдеуі. $(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x\ \ (-1) = -\sin x$.

Мысал 1.17. $y = \cos 7x$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. (6.18) және (6.8) күрделі функцияның туындысы формулалары бойынша: $(\cos 7x)' = -\sin 7x\ \ (7x)' = -7\sin 7$

7. $y = \mathrm{tg}x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (6.19)$$

Дәлелдеуі. $(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Мұнда (6.7) бөліндіден туынды алу формуласын қолдандық.

8. $y = \mathrm{ctg}x$, $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (6.20)$$

Дәлелдеуі. $(\mathrm{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$

$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Мұнда да (6.7) бөліндіден туынды алу формуласын қолдандық.

Мысал 1.18. $y = \mathrm{tg}5x + \mathrm{ctg}3x$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. (6.4) қосындыдан туынды алу, (6.8) күрделі функциядан туынды алу және (6.19) бен (6.20) формулаларды қолдансақ:

$$(\mathrm{tg}5x + \mathrm{ctg}3x)' = (\mathrm{tg}5x)' + (\mathrm{ctg}3x)' = \frac{1\cdot 5}{\cos^2 5x} - \frac{1\cdot 3}{\sin^2 3x} = \frac{5}{\cos^2 5x} - -\frac{3}{\sin^2 3x}.$$

9. $y = \arcsin x, -1 < x < 1; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1; 1). \qquad (6.21)$$

Дәлелдеуі. (–1, 1) интервалда анықталған $y = \arcsin x$ функциясы, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда анықталған $x = \sin y$ функциясына кері функция. Кері функциядан туынды алу формуласы (6.9) бойынша:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. $y = \arccos x,\ x \in (-1; 1),\ y \in (0;\pi).$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (6.22)$$

Дәлелдеуі. (–1; 1) интервалда анықталған $y = \arccos x$ функциясы, (0; π) интервалда анықталған $x = \cos y$ функциясына кері функция. (6.9) кері функциядан туынды алу формуласын қолдансақ:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Мысал 1.19. $y = \arcsin 3x + \arccos 9x$ функциясының туындысы табылсын.

Шешуі. (6.4) қосындыдан туынды алу, (6.8) күрделі функциядан туынды алу және (6.21), (6.22) формулаларды қолдансақ:

$$(\arcsin 3x + \arccos 9x)' = (\arcsin 3x)' + (\arccos 9x)' =$$

$$= \frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} - \frac{(9x)'}{\sqrt{1-(9x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} - \frac{9}{\sqrt{1-81x^2}}.$$

11. $y = \mathrm{arctg}x,\ x \in R, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (6.23)$$

Дәлелдеуі. (–∞, +∞) интервалда анықталған $y = \mathrm{arcctg}x$ функциясы, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда анықталған $x = \mathrm{tg}y$ функциясына кері функция. Сондықтан, (6.9) кері функциядан туынды алу формуласы бойынша:

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

12. $y = \mathrm{arcctg}x,\ x \in R,\ y \in (0;\pi).$

$$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (6.24)$$

Дәлелдеуі. (–∞, +∞) интервалда анықталған $y = \mathrm{arcctg}x$ функциясы, (0; π) интервалда анықталған $x = \mathrm{ctg}y$ функциясына кері функция.

Сондықтан, (6.9) кері функциядан туынды алу формуласын қолдансақ:

$$(\mathrm{arcctg}x)' = \frac{1}{(\mathrm{ctg}\, y)'} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+\mathrm{ctg}^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Ескерту 1.3. (6.24) формуланы $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$ теңдіктен де тікелей шығаруға болады:

$$(\text{arcctg}x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Мысал 1.20. $y = \text{arctg}x^2 + 3\text{arcctg}\sqrt{x}$ функциясының туындысы табылсын.

Шешуі. (6.4) қосындыдан туынды алу, (6.8) күрделі функциядан туынды алу және (6.23), (6.24) формулаларды қолданамыз:

$$(\text{arctg}x^2 + \text{arcctg}\sqrt{x})' = (\text{arcctg}x^2)' + (\text{arcctg}\sqrt{x})' =$$

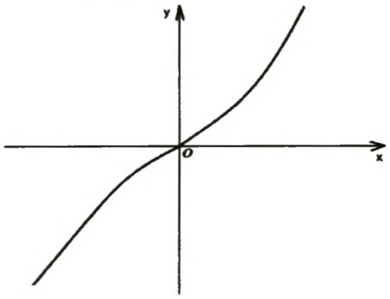
$$= \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

1.6. Гиперболалық функциялар және олардың туындылары

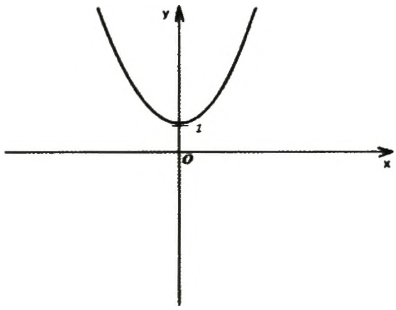
Математика, механика, электротехника және басқа да салаларда гиперболалық функциялар жиі кездеседі:

$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболалық синус (сурет 6.3);

$\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболалық косинус (сурет 6.4);



Сурет 6.3



Сурет 6.4

$\text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гиперболалық тангенс (сурет 6.5);

$\text{cth}x = \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ – гиперболалық котангенс (сурет 6.6).

Гиперболалық функциялар арасындағы негізгі тәуелділіктер:

$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

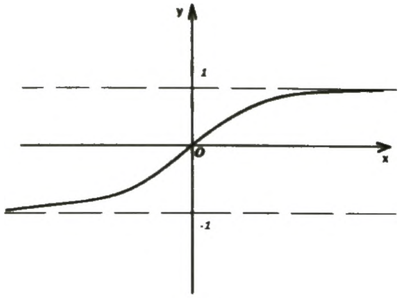
$\text{sh}(x \pm y) = \text{sh}x \cdot \text{ch}y \pm \text{ch}x \quad \text{sh}y$

$\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}x \quad \text{ch}y \pm \text{sh}x \quad \text{sh}y$

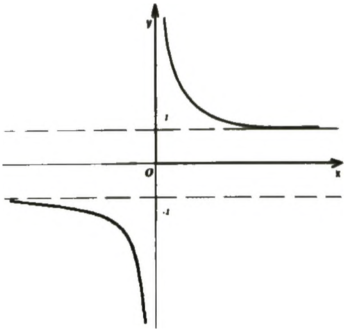
$\text{th}(x \pm y) = \frac{\text{th}x \pm \text{tg}y}{1 \pm \text{th}x \cdot \text{tg}y}$

$\text{sh}2x = 2\text{sh}x.chx$, $\text{ch}2x = \text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x$.

Бұл формулалар гиперболалық функциялардың анықтамаларынан тікелей алынады.



Сурет 6.5



Сурет 6.6

Гиперболалық функциялардың туындыларын табамыз:

$$(\text{sh}x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \text{ch}x;$$

$$(\text{ch}x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = \text{sh}x;$$

$$(\text{th}x)' = \left(\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}\right) = \frac{(\text{sh}x)'\,\text{ch}x-\text{sh}x\,(\text{ch}x)'}{\text{ch}^2x} = \frac{\text{ch}^2x-\text{sh}^2x}{\text{ch}^2x} = \frac{1}{\text{ch}^2x};$$

$$(\text{cth}x)' = \left(\frac{\text{ch}x}{\text{sh}x}\right) = \frac{(\text{ch}x)'\,\text{sh}x-\text{ch}x\,(\text{sh}x)'}{\text{sh}^2x} = \frac{\text{sh}^2x-\text{ch}^2x}{\text{sh}^2x} = \frac{-1}{\text{sh}^2x};$$

Демек: $(\text{sh}x)' = \text{ch}x$; $(\text{ch}x)' = \text{sh}x$; $(\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2x}$; $(\text{cth}x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2x}$

1.7. Дифференциалдау ережелері мен туындылар кестесі

Шығарылған дифференциалдау ережелері мен негізгі элементар функциялардың туындыларының формулаларын кесте түрінде жазайық.

Іс жүзінде күрделі функциялардан туынды алуға тура келеді. Сондықтан, дифференциалдау формулаларын келтіргенде аргумент "x" орнына аралық аргумент $u(x)$ функцияға ауыстырылады.

Дифференциалдау ережелері.

$u(x)$ және $v(x)$ дифференциалданатын функциялар үшін келесі формулалар орынды:

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
2. $[u(x)\quad v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$.
3. $[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x)$, $c = \text{const}$.
4. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $v(x) \neq 0$.

5. $u = u(x)$ функциясы x нүктесінде, $y = f\,(u)$ функциясы $u(x)$ нүктесінде дифференциалданушы болса,

$$y'_x = y'_u \cdot u'(x)$$

6. $y = y(x)$, $x = x(y)$ өзара кері функциялар дифференциалданушы болса,

$$x\,'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

7. $f(x)>0$ дифференциалданушы функция үшін, $[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$.

8. $u(x)>0$ және $v(x)$ дифференциалданушы функциялар үшін,

$$(u^v)' = u^v\left[v'\cdot\ln u + v\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Туындылар кестесі.

1. $(C)'=0, C-\text{const}$.	
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha\in R, x>0$.	**2'**.$(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
$(x)'=1; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\ u'$
3. $(a^x)' = a^x\ln a, a>0, a\neq 1$	**3'**.$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'\cdot(e^u)'= e^u\cdot u'$.
$(e^x)'=e^x$	
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e, (0<a\neq 1, x>0)$	**4'**.$(\log_a u)'=\frac{1}{u}\log_a e\cdot u'$,
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$
5. $(\sin x)' = \cos x$.	**5'**. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.	**6'** $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
7. $(\text{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$,	
$(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, мұнда $k=0,\pm1,\pm2\ ...)$	**7'**. $(\text{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.
8. $(\text{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,	
$(x\neq k\pi$, мұнда $k=0,\pm1,\pm2\ ...)$	**8'**. $(\text{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.
9. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1<x<1)$	**9'**. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ \ u'$.
10. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1<x<1)$	**10'**.$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11. $(\text{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$	**11'**. $(\text{arctg}u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
12. $(\text{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.	**12'**. $(\text{arcctg}u)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
13. $(\text{sh}x)'=\text{ch}x$.	**13'**. $(\text{sh}u)'=\text{ch}u\cdot u'$.
14. $(\text{ch}x)'=\text{sh}x$.	**14'**. $(\text{ch}u)'=\text{sh}u\cdot u'$.
15. $(\text{th}x)'=\frac{1}{\text{ch}^2x}$	**15'**. $(\text{th}u)'=\frac{1}{\text{ch}^2u}\ u'$.
16. $(\text{cth}x)'=\frac{-1}{\text{sh}^2x}$.	**16'**. $(\text{cthu})'=\frac{-1}{\text{sh}^2u}\ u'$.

1.8. Айқындалмаған функция мен параметрлік теңдеулермен берілген функцияны дифференциалдау

а) Егер x пен y айнымалдар арасындағы тәуелділік $F(x;\ y)=0$ теңдеуімен берілсе, яғни y-ке қатысты шешілмесе, онда y-ті x-тің айқындалмаған функциясы деп атайды.

Айқындалмаған функцияның $y'(x)$ туындысын табу үшін, y-ті x-тың функциясы деп қарап, $F(x;\ y)=0$ теңдіктің екі бөлігінде x бойынша дифференциалдап, шыққан теңдіктен $y'(x)$-туындыны табу керек. Мұнда $y'(x)$ туынды x пен y арқылы өрнектеледі.

Ескерту 1.2. $F(x, y) = 0$ теңдеуімен берілген функция үшін $y'(x)$ туындысын табудың басқа әдісі VIII тарауда көрсетіледі.

Мысал 1.21. $x^3 + y^3 - 5xy = 0$ теңдеуімен берілген айқындалмаған функция дифференциалдансын.

Шешуі. Берілген теңдіктік екі бөлігін, y-ті x-тың функциясы деп, дифференциалдаймыз:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 5y - 5x \cdot y' = 0 \Rightarrow y'(3y^2 - 5x) = 5y - 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{5y-3x^2}{3y^2-5x}$$

б) x аргумент пен y функцияның арасындағы тәуелділік $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ $t \in (\alpha; \beta)$ екі теңдеу түрінде берілсін. Мұндағы t көмекші айнымал немесе параметр деп аталады.

Теорема 6.6. Егер $x(t)$ мен $y(t)$ функциялары белгіленген $t \in (\alpha; \beta)$ нүктесінде $x'(t) \neq 0$, $y'(t)$ туындылары бар және осы нүктенің кейбір маңайында $x = x(t)$ функциясына кері $t = \varphi(x)$ функциясы бар болса, онда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{6.25}$$

формуласы орынды.

Дәлелдеуі. (6.9) кері функцияның туындысының формуласы бойынша:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}$$

y функциясы x-тің күрделі функциясы болады, яғни $y = y(t)$, мұнда $t = \varphi(x)$. (6.8) күрделі функциядан туынды алу формуласы бойынша $y'_x = y'_t \cdot t'_x$; t'_x үшін жоғарыдағы теңдікті ескерсек $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$ теңдігі шығады.

Мысал 1.22. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$ параметрлік түрде берілген функцияның туындысы табылсын. (Бұл теңдеулер эллипсті анықтайды).

Шешуі. (6.25) формуласы бойынша $y'_x = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} =-- \frac{b\cos t}{a\sin t} = \frac{b}{a}\text{ctg}t$; $t \neq \pi$, $t \neq 2\pi$.

1.9. Жоғары ретті туындылар

Айқын берілген функцияның жоғары ретті туындылары.

а) Айқын берілген $y = f(x)$ функциясы $(a; b)$ интервалда анықталған және дифференциалданушы болса, яғни осы интервалдың әрбір нүктесінде $f'(x)$ ақырлы туындыға ие болса, онда $y' = f'(x)$ туынды да $(a; b)$ интервалда анықталған функция болады. $f'(x)$ функцияда $(a; b)$ интервалдың кейбір x нүктесінде дифференциалданушы функция болуы мүмкін, яғни x нүктесінде туындысы бар.

$f'(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысын $y = f(x)$функциясының екінші туындысы немесе екінші ретті туындысы деп атайды да $f^{(2)}(x)$ немесе $y^{(2)}(x)$ таңбасымен белгілейді. Осы сияқты $f^{(3)}(x)$-үшінші ретті туынды, $f^{(4)}(x)$-төртінші ретті туынды т.б. ретті туындыларды енгізуге болады.

Анықтама 1.6. $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі n-ретті туындысы деп $(n - 1)$-ретті туындыдан алынған туындыны атайды: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

Анықтама 1.7. X жиында n-ретті ақырлы туындысы бар функцияны n рет дифференциалданушы функция деп атайды.

Мысал 1.23. $y = \cos x$ функциясының 10-ретті және кез келген n-ретті туындылары табылсын

Шешуі. $y' = (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$y^{(2)} = (y^{(1)})' = (-\sin x)' = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

$y^{(3)} = (y^{(2)})' = (-\cos x)' = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

$y^{(4)} = (y^{(3)})' = (\sin x)' = \cos x = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$y^{(10)} = \cos\left(x + 10 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Осы сияқты жалғастыра берсек, кез келген n үшін:

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Бұл теңдік математикалық индукция әдісімен жеңіл дәлелденеді.

Екінші ретті туындының механикалық мағынасы.

Егер $f(x)$ материалдық нүктенің түзу бойлап x уақыттағы жүрген жолы болса, $f'(x)$ туынды материалдық нүктенің x уақыттағы лездік жылдамдығын анықтайтын еді.

Онда $f''(x)$ туынды лездік жылдамдықтың өзгеру жылдамдығы – x уақыттағы үдеуді анықтайды.

Мысалы дененің еркін түсуі $f(x) = \frac{gx^2}{2}$ заңдылықпен анықталғанда лездік жылдамдық $v(x) = f'(x) = gx$, ал үдеу $a = v'(x) = f''(x) = g$.

n-ретті туынды табудың негізгі ережелері,

а) $[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = [u(x)]^{(n)} \pm [v(x)]^{(n)}$ (6.5*а*)

б) $[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \quad v(x) + nu^{(n-1)}(x) \quad v'(x) + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)}(x) \cdot v^{(2)}(x) + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} u^{(n-k)}(x) \quad v^{(k)}(x) + \ldots + nu'(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + u(x) \quad v^{(n)}(x)$ (6.6*б*)

в) $[c \cdot u(x)]^{(n)} = c \cdot [u(x)]^{(n)}$ (6.6*в*)

(6.6*б*) теңдігі Лейбниц формуласы деп аталады.

Лейбниц формуласы тікелей анықтамадан шығады және математикалық индукция әдісімен дәлелденеді.

б) Айқындалмаған функцияның жоғары ретті туындылары

$y = f(x)$ функциясы $F(x; y) = 0$ айқындалмаған түрде берілсін. Бұл теңдікті x бойынша дифференциалдап, y' туынды x пен y арқылы өрнектеледі. Бірінші туынды y'-ті x бойынша дифференциалдап, y'' екінші туынды x, y және y' арқылы өрнектеледі де y'-тің алдынғы өрнегін теңдіктің оң жағына қойсақ, y'' екінші туынды x пен y арқылы өрнектеледі. Осылайша кез келген ретті туынды x пен y арқылы өрнектеледі.

Мысал 1.24. $x^2 + y^2 - 9 = 0$ айқындалмаған функцияның $y^{(3)}$ үшінші ретті туындысы табылсын.

Шешуі. $x^2 + y^2 - 9 = 0$ тендікті x бойынша дифференциалдасақ: $2x + 2y$ $y' = 0$, бұдан $y' = -\frac{x}{y}$; тағы да x бойынша дифференциалдасақ:

$$y^{(2)} = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = \frac{-y - x \cdot \left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^2} = -\frac{9}{y^2}$$

Демек, $y^{(3)} = \frac{9 \cdot 2y' \cdot y}{y^4} = -\frac{18 \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) \cdot y}{y^4} = -\frac{18x}{y^4}$.

в) Параметрлік түрде берілген функцияның жоғары ретті туындылары.

$y = f(x)$ функциясы $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметрлік теңдеулермен берілсе, оның бірінші туындысы

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{6.25}$$

формуламен табылады.

Егер $x(t)$, $y(t)$ функциялары n-ретті туындыларға ие болса, онда:

$$y^{(2)}_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dt}(y'_x) \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

$$y^{(3)}_{x^3} = \frac{d}{dx} y^{(2)}_{x^2} = \frac{d}{dt}(y^{(2)}_{x^2}) \cdot t'_x = \frac{\left(y^{(2)}_{x^2}\right)'_t}{x'_t},$$

$$y^{(4)}_{x^4} = \frac{d}{dx} y^{(3)}_{x^3} = \frac{d}{dt}(y^{(3)}_{x^3}) \cdot t'_x = \frac{\left(y^{(3)}_{x^3}\right)'_t}{x'_t},$$

$$y^{(n)}_{x^n} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}_{x^{n-1}} = \frac{d}{dt}(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}) \cdot t'_x = \frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}. \tag{6.26}$$

Мұнда белгіленген t нүктесінде $x(t) \neq 0$, $x^{(2)}(t) \neq 0$, ..., $x^{(n)}(t) \neq 0$.

Мысалы 1.25. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, функциясының екінші ретті туындысы табылсын.

Шешуі. (6.25) формула бойынша:

$$y'_x = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\,\mathrm{ctg}\, t, \quad t \neq 0, \pi, 2\pi.$$

(6.26) формула бойынша болғанда:

$$y^{(2)}_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\, t\right)'_t}{-a\sin t} = \frac{b \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{a^2 \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}; \quad t \neq 0, \pi, 2\pi.$$

§ 2. Функциялардың дифференциалдары

2.1. Функцияның дифференциалы

$y = f(x)$ функциясы белгіленген x нүктесінде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$ ақырлы туындыға ие болсын; онда (5.12) теорема бойынша $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x, \Delta x)$ немесе

$$\Delta y = f'(x) \quad \Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x \tag{6.27}$$

теңдік орындалады. Мұндағы $\alpha(x, \Delta x)$ функциясы $\Delta x \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функция, яғни $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$.

Демек, функция өсімшесі екі бөліктен тұрады. Бірінші қосылғыш басты бөлік, екінші қосылғыш қосымша бөлік: $\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x$.

Анықтама 2.1. $y = f(x)$ функциясының берілген x нүктесіндегі Δx өсімшеге сәйкес дифференциалы деп, функция өсімшесінің Δx-ке сызықты байланысты басты бөлігін атайды.

Функцияның дифференциалы dy немесе $df(x)$ түрінде белгіленеді. Яғни

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x.$$

$y = x$ функциясы үшін $dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$ екенін ескерсек, соңғы теңдікті

$$dy = f'(x)dx, dx = \Delta x \tag{6.28}$$

түрінде жазуға болады.

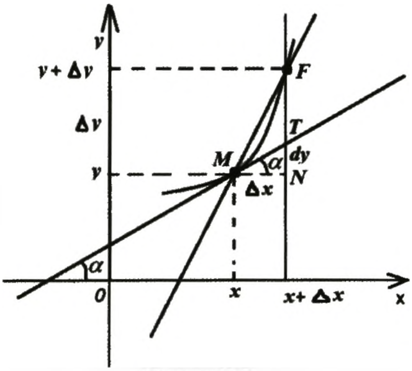
Демек x нүктедегі функцияның дифференциалын табу үшін функцияның осы нүктедегі туындысын агрументтің дифференциалына (өсімшесіне) көбейту керек.

Мысал 2.1. $y = \sin 3x - e^{-5x}$ функциясының берілген x нүктедегі дифференциалы табылсын.

Шешуі. (6.28) формула бойынша:

$$dy = d(\sin 3x - e^{-5x}) = (\sin 3x - e^{-5x})' \cdot dx = (3\cos 3x + 5e^{-5x})dx$$

функцияның дифференциалының геометриялық мағынасы.



Сурет 6.7

Дифференциалдың геометриялық мағынасын анықтайық. $y = f(x)$ функцияның графигіне берілген $M(x; y)$ нүктеде жанама өткізіп, осы жанаманың $x + \Delta x$ нүктедегі ординатасын қарастырайық. (6.7-сурет) $MN = \Delta x$, $NF = \Delta y$ тік бұрышты ΔMNT: $\text{tg}\alpha = \frac{NT}{\Delta x}$, яғни $NT = \text{tg}\alpha \quad \Delta x$

Туындының геометриялық мағынасы $\text{tg}\alpha = f\ '(x)$ болғандықтан $NT = f'(x)$ Δx. Шыққан нәтижені (6.28) теңдікпен салыстырсақ $dy = NT$ болады. Яғни $y = f(x)$ функциясының x нүктедегі дифференциалы $M(x; y)$ нүктедегі жанаманың ординатасының $x + \Delta x$ нүктедегі өсімшесіне тең.

2.2. Дифференциал табудың негізгі ережелері

Туынды мен дифференциалдың арасындағы $dy = f'(x)dx$ байланысты және туынды табудың ережелерін пайдаланып, дифференциал табудың ережелерін оңай шығаруға болады. Мысалы $y = c$ болса $dy = c' \ dx = 0 \ \ dx = 0$ болады.

Теорема 6.7. Егер $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$ дифференциалдар бар болса, онда:

$$\text{а) } d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{6.29}$$

$$\text{б) } d(u \cdot v) = vdu + udv, \tag{6.30}$$

$$\text{в) } d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0) \tag{6.31}$$

Дәлелдеуі. а) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

б) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = u'vdx \pm uv'dx = vdu + udv$;

в) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{1}{v^2}(vu'dx + uv'dx) = \frac{vdu - udv}{v^2}$; $(v \neq 0)$

Теорема 6.8. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ күрделі функцияның дифференциалы

$$dy = f'(u) \cdot du \tag{6.32}$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. $y = f(u)$ және $u = \varphi(x)$ дифференциалданушы функциялар болсын, яғни берілген x нүктеде $\varphi'(x)$ ақырлы туынды бар және сәйкес нүктеде $f'(u)$ ақырлы туынды бар.

Онда (6.8) күрделі функциядан туынды алу ережесі бойынша:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Бұл теңдіктің екі бөлігін де dx-қа көбейтіп, $y'_x dx = dy$ және $u'_x dx = du$ екенін ескерсек $y'_x dx = y'_u u'_x dx$ теңдік $dy = y'_u \ \ du$ түрінде жазылады.

$dy = y'_x dx$ және $dy = y'_u du$ формулаларды салыстырсақ y функциясының бірінші дифференциалы бірдей формуламен анықталады екен. Яғни, аргумент тәуелсіз айнымал ма немесе басқа аргументтің функциясы ма, оған тәуелді емес.

Осы қасиетті бірніші дифференциалдың инварианттылығы (өзгермейтіндігі) деп атайды. $dy = y'_x dx$ пен $dy = y'_u du$ формулалары сырттай ұқсас, бірақ олардың өзгешелігі бар: біріншісінде $dx = \Delta x$, ал екіншісінде $u = u(x)$ болғандықтан $\Delta u \neq du$.

(6.28) дифференциалдың анықтамасы, (6.32) күрделі функцияның дифференциалы, дифференциал табудың ережелері және туындылар кестесінің жәрдемімен дифференциалдар кестесін жасауға болады. $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференциалдаушы функциялар болсын:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \ \ v) = vdu + udv$, дербес жағдайда $d(c \cdot u) = cdu$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$, дербес жағдайда $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{-cdv}{v^2}$;
4. $dy = y'_x \, dx$, $y = f(x)$ болғанда;
5. $dy = y'_u \, du$, $y = f(u)$, $u = u(x)$ болғанда
6. $dc = 0$, $c = \text{const}$ болғанда;
7. $d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha - 1} du$;

8. $d(a^u) = a^u \ \ln a \cdot du,\ a > 0,\ a \neq 1$ болғанда;

8'. $d(e^u) = e^u \ du$;

9. $d(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} \cdot du,\ a > 0,\ a \neq 1,\ u(x) > 0$ болғанда;

9'. $d(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot du,\ u(x) > 0$ болғанда;

10. $d(\sin u) = \cos u \ du$;

11. $d(\cos u) = -\sin u \ du,\ k = 0, \pm 1, \ldots$;

12. $d(\text{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot du$,

$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots$; 13. $d(\text{ctg} u) = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot du$,

$u(x) \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots$;

14. $d(\arcsin u) = \frac{1 \cdot du}{\sqrt{1-u^2}}$, $-1<u(x)<1$; 15. $d(\arccos u) = -\frac{1 \cdot du}{\sqrt{1-u^2}}$, $-1<u(x)<1$;

16. $d(\text{arctg} u) = \frac{1 \cdot du}{1+u^2}$; 17. $d(\text{arcctg} u) = -\frac{1}{1+u^2} du$;

18. $d(\text{sh} u) = \text{ch} u \ du$; 19. $d(\text{ch} u) = \text{sh} u \ du$;

20. $d(\text{th} u) = \frac{1}{\text{ch}^2 u} \ du$; 21. $d(\text{cth} u) = -\frac{1}{\text{sh}^2 u} \cdot du$.

Мысал 2.2. Функциялардың дифференциалын табу керек:

а) $f(x) = e^{-x^2} + \cos 3x$; б) $f(x) = c \cdot \text{tg} 5x$;

в) $f(x) = \arcsin 3x + \text{tg} 6x$; г) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x^2+5}$;

д) $f(x) = e^{-3x} - 4\sqrt{x} + 6$

Шешуі. Дифференциал кестесінің формулаларын қолданып табамыз:

а) $d\left(e^{-x^2} + 2\cos 3x\right) = d(e^{-x^2}) + d(2\cos 3x) = (e^{-x^2})' \ dx + 2(\cos 3x)' dx =$
$= \left(-2x \cdot e^{-x^2} - 6\sin 3x\right) dx$;

б) $d(6\text{tg} 5x) = 6d(\text{tg} 5x) = 6(\text{tg} 5x)' dx = \frac{30}{\cos^2 5x} dx$.

в) $d(\arcsin 3x \cdot \text{tg} 6x) = \arcsin 3x \ \ d(\text{tg} 6x) + \text{tg} 6x \ \ d(\arcsin 3x) =$
$= \left(\arcsin 3x \cdot \frac{6}{\cos^2 6x} + \frac{3 \,\text{tg}\, 6x}{\sqrt{1-9x^2}}\right) dx$.

г) $d\left(\frac{\sin 2x}{x^2+5}\right) = \frac{(x^2+5) d \sin 2x - \sin 2x \cdot d(x^2+5)}{(x^2+5)^2} = \frac{2(x^2+5)\cos 2x - 2x \cdot \sin 2x}{(x^2+5)^2} dx$.

д) $d\left(e^{-3x} - 4\sqrt{x} + 6\right) = (e^{-3x})' dx - \left(4\sqrt{x}\right)' dx + 6' dx = \left(-3e^{-3x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$.

2.3. Дифференциалды жуықтап есептеулерде қолдану

$y = f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын болса, яғни $f'(x) \neq 0$ ақырлы сан, онда Δx-ке сәйкес функцияның өсімшесі

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \ \ \Delta x, \tag{6.27}$$

мұнда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$.

(6.28) теңдік бойынша, $dy = f'(x) \ \ \Delta x$ екендігін ескерсек $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = dy + \alpha(x, \Delta x) \ \ \Delta x$ болып,

$$\Delta y \approx dy \tag{6.29}$$

жуықтау теңдігі алынады. (6.29) жуықтау теңдігі

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \tag{6.30}$$

түрінде жазылады (6.30) формула жәрдемімен $f(x)$ функцияның $x + \Delta x$ нүктедегі мәнін x нүктедегі мәндер арқылы жуықтап өрнектеуге мүмкіндік береді.

Абсолют қате: $|\Delta y - dy| = o(\Delta x)$. (6.30) формула жәрдемімен

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \quad \Delta x, \quad (1+\Delta x)^n \approx 1 + n \quad \Delta x$$

жуықтау теңдіктерін қорытып шығаруға болады.

Шынында да, $f(x) = \sqrt{x}$ функциясында $x = 1$, $x + \Delta x = 1 + \Delta x$ десек, $\sqrt{1+\Delta x} \approx \quad f(1) + f'(1) \quad \Delta x$ немесе

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta x, \tag{6.31}$$

жуықтау теңдігі шығады. Ал $f(x) = x^n$ десек $x = 1$, $x + \Delta x = 1 + \Delta x$ болғанда $(1+\Delta x)^n \approx f(1) + f'(x) \quad \Delta x$, немесе

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n \quad \Delta x, \tag{6.32}$$

Мысал 2.3. а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sqrt[3]{125{,}5}$ мәндері жуықтап есептелсін.

Шешуі. а) (6.31) формула бойынша:

$$\sqrt{1+(-0{,}02)} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}02) = 0{,}99.$$

б) (6.32) формуланы қолдансақ:

$$\sqrt[3]{125{,}5} = \sqrt[3]{125 + 125 \cdot \frac{0{,}5}{125}} = 5\sqrt[3]{1 + \frac{1}{250}} = 5\sqrt[3]{1 + 0{,}004} \approx 5\left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}004\right) = = 5\frac{2}{300} = 5\frac{1}{150}.$$

2.4. Жоғары ретті дифференциалдар

Екі жағдайды қарастырайық:

а) $y = f(x)$ функциясы берілген x нүктесінде дифференциалданатын функция болсын, мұнда аргумент x тәуелсіз айнымал.

Онда $dy = f'(x)dx$ бірінші дифференциал да x-тің функциясы болады, демек, dy функциясынан дифференциал табуға болады.

$y = f(x)$ функциясының берілген x нүктесінде n-ретке дейінгі ақырлы туындылары бар болсын. $y = f(x)$ функциясының бірінші дифференциалынан алынған дифференциал $f(x)$ функциясының x нүктесіндегі екінші дифференциалы деп аталады да $d^2 y$ немесе $d^2 f(x)$ деп белгіленеді. Демек, анықтама бойынша $d^2 y = d(dy)$.

$dx = \Delta x$, яғни dx дифференциал x-қа тәуелді емес:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x) \quad (dx)^2$$

Осы сияқты, $d^3 y = d(d^3 y) = d\,[f''(x) \cdot (dx)^2] = f^{(3)}(x) \cdot (dx)^3$;

$$d^4 y = d(d^3 y) = d\,[f^{(3)}(x) \quad (dx)^3] = f^{(4)}(x) \quad (dx)^4;$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = d\,[f^{(n-1)}(x) \cdot (dx)^{n-1}] = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n$$

Анықтама 2.2. n рет дифференциалданушы $y = f(x)$ функциясының берілген x нүктесіндегі n-ретті дифференциалы деп, $(n - 1)$-ретті дифференциалдан алынған дифференциалды атайды. Яғни

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^n(x) \quad (dx)^n; \; n \in N \tag{6.33}$$

(6.33) формулада n-ге 1, 2, 3, ... мәндер берсек:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\ f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{(dx)^2},\ \dots\ ,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}$$

теңдіктер алынады.

Яғни $f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындылары функцияның сәйкес ретті дифференциалының тәуелсіз айнымалдың дифференциалының сәйкес дәрежелеріне қатынасына тең.

б) $y = f(x)$ функциясында x тәуелсіз айнымал емес, аралықтағы айнымал болсын.

Бұл жағдайда көбейтіндіден дифференциал алу ($d(u\ \ v) = vdu + udv$) формуласын пайдалансақ:

$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))\ \ dx + f'(x)\ \ d(dx) = f^{(2)}(x)dx\ \ dx + f'(x)d^2x$,

яғни

$$d^2y = f^{(2)}(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x \tag{6.34}$$

$n = 2$ болғандағы (6.33) формуламен (6.34) формуланы салыстырсақ, $x = x(t)$ аралық аргумент болғанда қосымша $f'(x)d^2x$ екінші қосылғыш пайда болады. Демек, екіншіден бастап барлық жоғары ретті дифференциалдарда инварианттық қасиет орындалмайды.

Мысал 2.4. d^2 табылсын: а) $y = \cos 3x$; б) $y = e^{-4x}$

Шешуі: а) $y' = -3\sin 3x$, $y'' = -9\cos 3x$ болғандықтан, (6.33) формула бойынша ($n = 2$) $d^2 = -9\cos 3x(dx)^2$

б) $y' = -4e^{-4x}$, $y'' = 16e^{-4x}$

Онда (6.33) формула ($n = 2$) бойынша $d^2 = 16e^{-4x}(dx)^2$ болады.

в) $y = x^3$, $x = t^2 + 4$;

г) $y = \mathrm{tg}x$, $x = t^3 + 2$.

Шешуі. в) $y'_x = 3x^2$, $y''_{xx} = 6x$, $dx = 2tdt$, $d^2x = 2(dt)^2$ болғандықтан, (6.34) формула бойынша $d^2y = 6x(dx)^2 + (3x^2)\ \ d^2x = 6(t^2 + 4)\ \ (2tdt)^2 + 3(t^2 + 4)^2\ 2(dt)^2 = 24(t^4 + 4t^2)dt^2 + 6(t^4 + 8t^2 + 16)dt^2 = (30t^4 + 144t^2 + 96)(dt)^2$

Басқаша шешімі: $y = x^3$, $x = t^4 + 4$ болғандықтан, $y = (t^4 + 4)^3$ деп жазуға болады.Онда (6.33) теңдік бойынша $y''_t = 30t^4 + 144t^2 + 96$ болып, бұдан,

$d^2 = y''_{tt}\ (dt)^2 = (30t^4 + 144t^2 + 96)(dt)^2$

§ 3. Дифференциалданатын функциялар туралы негізгі теоремалар

3.1. Орта мән туралы теоремалар

Теорема 6.9. (Ролль). Егер $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз, $(a; b)$ интервалда дифференциалданатын болса және шеткі нүктелердегі мәндері $f(a) = f(b)$ болса, онда кем дегенде бір $c\ \in (a; b)$ нүкте табылып, бұл нүктеде $f'(c) = 0$ болады.

Дәлелдеуі. $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан Вейерштрасстың екінші теоремасы бойынша, ол осы кесіндіде ең кіші m және ең үлкен M мәндерді қабылдайды.

Егер $m = M$ болса, онда $f(x)$ тұрақты, демек $(a;\ b)$ интервалдың кез келген нүктесінде $f'(c) = 0$.

Енді $m \neq M$ болсын. $f(a) = f(b)$ болғандықтан M немесе m мәндерінің кем дегенде біреуін $f(x)$ функциясы $c \in (a;b)$ нүктесінде қабылдайды. Анықтық үшін ол $M = f(c)$ болсын.

Онда барлық $x \in (a;b)$ үшін $f(x) \leq f(c)$ болады. Осы $c \in (a;b)$ нүктесіндегі туынды,

$$f\ '(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$\Delta x > 0$ болғанда $f(c+\Delta x) - f(c) < 0$ болғандықтан $f'(c) \leq 0$болады, ал $\Delta x < 0$ болғанда $f'(c) \geq 0$ болады. Демек $f'(c) = 0$.

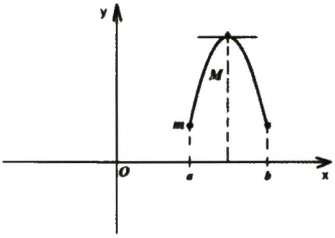
$f(c) = m$ болғанда да теорема осылайша дәлелденеді.

Геометриялық мағынасы: функция графигіне жүргізілген жанама Ox осіне параллель болатын $c \in (a;b)$табылып, бұл нүктеде $f'(c) = 0$болады (сурет 6.8, 6.9, 6.10).

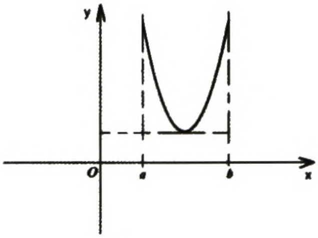
Теорема 6.10. (Коши). Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз, $(a;b)$ интервалда дифференциалданатын және $g'(x) \neq 0, x \in (a;b)$ болса, онда осы интервалда кем дегенде бір $c \in (a;b)$ нүкте табылып,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (6.35)$$

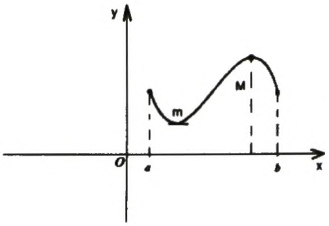
теңдігі орындалады.



Сурет 6.8



Сурет 6.9



Сурет 6.10

Дәлелдеуі. $g(b)-g(a)\neq 0$, өйткені нөлге тең болса, Ролль теоремасы бойынша $c\in(a;b)$ нүктесі табылып, бұл нүктеде g'(c)=0 болады, ал бұл теореманың шартына қайшы.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$$

көмекші функцияны қарастырайық.

$F(x)$ функциясы Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады: [**a, b**] кесіндіде үзіліссіз; (**a, b**) интервалда дифференциалданушы, себебі осы шарттарды қанағаттандырушы $f(x)$ пен $g(x)$ функцияларының сызықтық комбинациясы; $F(a) = F(b) = 0$

Сондықтан, Ролль теоремасы бойынша кем дегенде бір $c\in(a;b)$ нүкте табылып, бұл нүктеде $F'(c)=0$ болады.

$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$ болғандықтан

$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$, яғни $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

немесе $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Теорема 6.11. (Лагранж). Егер $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндіде үзіліссіз, $(a;\ b)$ интервалда дифференциалданатын болса, онда осы интервалда кем дегенде бір $c\ \in(a;\ b)$ нүкте табылып,

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{6.36}$$

теңдігі орындалады.

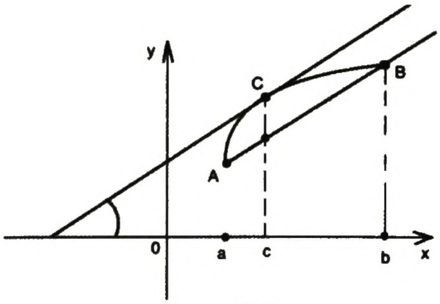
Дәлелдеуі. Лагранж теоремасын Коши теоремасының дербес жағдайы деп қарауға болады. $g(x) = x$ деп алсақ:

$g(b) - g(a) = b - a,\ \ g'(x) = 1,\ \ g'(c) = 1$ болады.

Бұл табылған мәндерді (6.35) формулаға қойсақ: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Алынған (6.36) формуланы Лагранж формуласы немесе ақырлы өсімшелер формуласы деп атайды.

Геометриялық мағынасы: $f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанама $A(a;\ f(a))$ және $B(b;\ f(b))$ нүктелерден өтетін қиюшыға параллель болатын $c\ \in(a;\ b)$ нүкте табылады (сурет 6.11).



Сурет 6.11

(6.36) формуланы басқа түрлерде де жазуға болады. $b - a = \Delta x$, $a = x$ десек $b = x + \Delta x$, $c = x + \theta\ \ \Delta x$, $0 < \theta < 1$ болып, онда (6.36) формула мына түрге келеді.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\ \theta\Delta x)\ \ \Delta x,\ \ 0<\theta<1. \tag{6.36a}$$

Салдар 3.1. Егер кейбір $(a;\ b)$ аралықта $f(x)$ функциясының туындысы $f'(x) = 0$ болса, онда осы аралықта $f(x) = c = \text{const}$ болады.

Дәлелдеуі. $\forall x \in (a;\ b)$ нүктесінде $f'(x) = 0$ болсын. Онда кез-келген $(x_1;\ x_2) \in (a;\ b)$, $x_1 < x_2$ аралықта Лагранж теоремасы бойынша $c \in (x_1;\ x_2)$ нүктесі табылып, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$ теңдігі орындалады. Шарт бойынша $f'(x) = 0$ болғандықтан $f'(c) = 0$, $x_1 < c < x_2$ болады. Демек $f(x_2) = f(x_1)$. Ал x_1, x_2 кез келген нүктелер болғандықтан, $(a;\ b)$ аралықта $f(x) = c = \text{const}$ болады.

Салдар 3.2. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының $(a;\ b)$ аралықтағы туындылары $f'(x) = g\ '(x)$ болса, онда $f(x) - g(x) = c$ болады.

Дәлелдеуі. $\forall x \in (a;\ b)$ нүктесінде $f'(x) = g\ '(x)$ болсын. Онда $f'(x) - g\ '(x) = [f(x) - g(x)]' = 0$, яғни $f(x) - g(x)$ функциясы тұрақты.

Мысал 3.1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1;\ 1]$ – теңдігі дәлелденсін.

Дәлелдеуі. $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ функциясы үшін $\forall x \in (-1;\ 1)$ нүктеде

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Салдар 3.1 бойынша $f(x) = c = \text{const}$. $x = 0$ десек $0 + \frac{\pi}{2} = c$, яғни $c = \frac{\pi}{2}$. $x = \pm 1$ болғанда теңдік тікелей орындалады.

§ 4. Анықталмағандықтарды ашуда туындыларды қолдану. Лопиталь ережесі

$y = f(x)$ функциясының берілген x нүктедегі туындысы Δy және Δx екі ақырсыз кішкене шамалардың қатынасының $\Delta x \to 0$ болғандағы шегі арқылы анықталып еді, яғни $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{0}{0}\right) = f'(x)$.

Енді, керісінше, туынды жәрдемімен $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ негізгі анықталмағандықтарды ашуды қарастырайық.

4.1. $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты ашу

Теорема 6.12 (Лопиталь). $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары берілген $x = a$ нүктесінің кейбір маңайында (a нүктесі кірмеуі де мүмкін) үзіліссіз, дифференциалданатын және $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ болып, әрі осы маңайда $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ және $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ шек бар болсын. Онда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ шек бар және

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6.37}$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. $f(x)$ пен $g(x)$ функцияларын $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ деп анықтасақ, онда бұл функциялар $x = a$ нүктесінде үзіліссіз болады, өйткені

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = f(a), \lim_{x\to a} g(x) = 0 = g(a).$$

Демек, $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары $[a, x]$ кесіндісінде үзіліссіз ($x > a$ немесе $x < a$) және $(a,\ x)$ интервалда дифференциалданатын функциялар. Сондықтан Коши формуласын (6.35) қолдансақ:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)}, \text{ яғни, } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)}, c \in (a; x)$$

теңдігі орындалатын $c \in (a;\ x)$нүктесі табылады. $x \to a$ болғанда, $c \to a$ болады. Олай болса

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Мысал 4.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^{2x}-e^2}$ есептелсін.

Шешуі. (6.37) формуланы қолдансақ,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^{2x}-e^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^{2x}-e^2)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{2e^{2x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+\frac{1}{x})}{2\lim\limits_{x\to 1} e^{2x}} = \frac{2\cdot 1+1}{2e^{2\cdot 1}} = \frac{3\cdot e^{-2}}{2}$$

Салдар 4.1. Лопитель ережесі $x \to \infty$ болғанда да орындалады.

Шынында да, $x = \frac{1}{t}$ десек, (6.37) формула бойынша,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Демек,
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (6.37\ a)$$

Мысал 4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$ есептелсін.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\pi-2\operatorname{arctg} x)'}{(e^{3/x}-1)'} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{e^{3/x}\left(-\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\cdot e^{3/x}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{3}{x}}} = \frac{2}{3}\cdot 1\quad 1 = \frac{2}{3}.$$

Салдар 4.2. Егер $f'(x)$пен $g'(x)$функциялары теорема 6.12 дегі $f(x)$пен $g(x)$ функциялардың шарттарын қанағаттандырса, онда Лопиталь ережесін тағы бір рет қолдануға болады:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a}\frac{f^{(2)}(x)}{g^2(x)} \quad \text{т.с.с.}$$

Мысал 4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{2x^3}$ есептелсін.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(2x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(6x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{12x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(12x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{12}=\frac{1}{12}.$$

Бұл мысалда Лопиталь ережесін үш рет қолдандық.

4.2. $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу

Теорема 6.13 (Лопиталь). $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары берілген $x = a$ нүктесінің кейбір маңайында (a нүктесі кірмеуі де мүмкін) үзіліссіз және дифференциалданатын және $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ болып, әрі осы маңайда $g(x)\neq 0,\ g'(x)\neq 0$ және $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ шегі бар болсын. Онда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ шегі де бар және

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \tag{6.38}$$

теңдігі орындалады.

Бұл тұжырым $x\ \to\ a+, x\ \to\ a-$, болған жағдайларда да орындалады.

Дәлелдеуі. a нүктесінің қарастырылатын маңайында $\alpha < x < a$ (немесе $a\ > x > \alpha$) болатындай α және x нүктелерін алсақ, Коши теоремасы бойынша,

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

теңдігі орындалады, мұндағы $\alpha < c < x$. Соңғы теңдіктің сол бөлігін былайша түрлендіреміз:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}},$$

яғни

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}},$$

бұдан, $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\ \frac{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}\cdot$ (*) теңдік шығады.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ шарттан, шектің анықтамасы бойынша, $\forall\varepsilon > 0$ үшін $a-\alpha$ шаманың аз мәндерінде, барлық $x\ =\ c, \alpha <\ c\ <\ a$ мәндері үшін $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|<\varepsilon$ немесе $l-\varepsilon<\frac{f'(c)}{g'(c)}<l+\varepsilon$ (**) теңсіздігі орындалады. Енді

$$\left(1-\frac{g(a)}{g(x)}\right)/\left(1-\frac{f(a)}{f(x)}\right)$$

қатынасты қарастырамыз. α шаманы соңғы қос теңсіздік орындалатындай етіп белгілеп, x-ті a-ға ұмтылдырамыз. $x \to a$ болғанда $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ болғандықтан,

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}} = 1$$

болады. Демек, ілгері белгіленген $\varepsilon > 0$ үшін, x-тің a-ға жеткілікті жақын мәндерінде $\left|\frac{1-\frac{g(a)}{g(x)}}{1-\frac{f(a)}{f(x)}} - 1\right| < \varepsilon$ немесе $1-\varepsilon < \frac{1-\frac{g(a)}{g(x)}}{1-\frac{f(a)}{f(x)}} < 1+\varepsilon$ қос теңсіздікке ие боламыз. Бұл қос теңсіздікті (**) қос теңсіздікпен мүшелеп көбейтсек,

$$(l-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (l+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

қос теңсіздігін аламыз, әрі қарай (*) теңдікті ескерсек,

$$(l-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (l+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

қос теңсіздігі шығады. ε – кез келген сан болғандықтан, x-тің a-ға жеткілікті жақын мәндерінде соңғы теңсіздіктерден $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g\,(x)} = l$ теңдігі, ал теореманың шартындағы $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ теңдігін ескерсек, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g\,(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ теңдігі шығады.

Ескерту 4.1. Егер теорема шартындағы $l = \infty$ болса, онда бұл жағдайда да (6.38) теңдік орындалады. Шынында $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ теңдіктен $\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ теңдігі шығады. Сонда дәлелденген теорема бойынша $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ болып, бұдан $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ шығады.

Ескерту 4.2. Дәлелденген теорема $x \to \infty$ болғанда да орындалады, яғни $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ болса және $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ бар болса, онда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6.39}$$

Бұл теңдік, $x = \frac{1}{t}$ алмастыруын енгізсек, салдар 4.1 сияқты дәлелденеді.

Мысал 4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{3} = \infty.$

Ескерту 4.3. (6.37), (6.38), (6.39) теңдіктер, оң бөлігіндегі шектер бар болғанда ғана (ақырлы не ақырсыз) орындалатынын атап өтеміз. Яғни, бұл теңдіктердің сол бөлігіндегі шектер бар болып, ал оң жағындағы шектер болмауы да мүмкін.

Мысал 4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)=2$. Ақырлы шек бар, ал бірақ туындыларының қатынасының шегі жоқ. Шынында да, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(2+\cos x)$ болып, ешқандай санға ұмтылмайды, тек 1 мен 3 сандарының арасында тербеледі.

Мысал 4.6. (6.39) формуланы n рет қолдансақ,

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{x^n}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\cdots$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{e^x}=0,$$

$n\in N$.

Мысал 4.7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}7x}{\operatorname{tg}9x}$ табылсын.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}7x}{\operatorname{tg}9x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg}7x)'}{(\operatorname{tg}9x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{7}{\cos^2 7x}}{\frac{9}{\cos^2 9x}}=\frac{7}{9}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 9x}{\cos^2 7x}=$

$$=\frac{7}{9}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{0{,}5(1+\cos 18x)}{0{,}5(1+\cos 14x)}=\frac{7}{9}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 18x}{1+\cos 14x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{7}{9}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 18x)'}{(1+\cos 14x)'}$$

$$=\frac{7}{9}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-18\sin 18x}{-14\sin 14x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin 18x)'}{(\sin 14x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{18\cos 18x}{14\cos 14x}=\frac{-18}{-14}=\frac{9}{7}.$$

Мұнда (6.38) формула бір рет, ал (6.37) формула екі рет қолданылды.

4.3. Әртүрлі түрдегі анықталмағандықтарды ашу

Лопиталь ережесі негізгі анықталмағандықтар деп аталушы $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашуда қолданылады.

$0\quad\infty$, $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықтар түрлендіру арқылы негізгі анықталмағандықтардың біреуіне келтіріледі.

1^∞, 0^0, ∞^0 түріндегі анықталмағандықтар логарифмдеу арқылы негізгі анықталмағандықтардың біреуіне келтіріледі, яғни бұл жағдайларда мына тепе-теңдік қолданылады:

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},f(x)>0\qquad(6.40)$$

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ болсын. Онда:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]\text{ немесе }\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Мысал 4.8. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\ \cdot\operatorname{ctg} x)$ табылсын.

Шешуі.

$$\lim_{x\to 0}(\arcsin x\ \ \operatorname{ctg} x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x)'}{(\operatorname{tg} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos^2 x}=\frac{1}{1}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ болсын. Онда:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\ \dfrac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Мысал 4.9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ табылсын.

Шешуі.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty; \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0; \lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ болған жағдайларда, яғни 1^∞, ∞^0, 0^0 анықталмағандықтарды ашуда (6.40) теңдікті қолданамыз:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} \tag{6.41}$$

Демек, (6.40) түрлендіру бойынша e-нің дәреже көрсеткішінде $0\quad\infty$ түріндегі анықталмағандыққа келтіріледі.

Мысал 4.10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$ табылсын.

Шешуі. Бұл жағдайда 1^∞ түріндегі берілген анықталмағандық (6.41) теңдік бойынша

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}$$

түрінде жазылады.

Мұндағы көрсеткіштегі $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық Лопиталь ережесі бойынша:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(\ln(1+x^2))'}{(e^x-1-x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot2x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{(1+x^2)(e^x-1)}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(2x)'}{\left((1+x^2)(e^x-1)\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{2}{2x(e^x-1)+e^x(1+x^2)}=2.$$

Демек, $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}=e^2$

Мысал 4.11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{4\cos x}$ табылсын.

Шешуі. Бұл ∞^0 түріндегі анықталмағандық (6.41) теңдік бойынша:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{4\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}4\cos x\cdot\ln tgx}=e^{4\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{1/\cos x}},$$

яғни дәреженің көрсеткішінде $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық шықты. Лопиталь ережесін қолданып табамыз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\ln\operatorname{tg}x}{1/\cos x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(4\ln\operatorname{tg}x)'}{(1/\cos x)'}=4\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x\cdot\cos^2x}}{\frac{1}{\cos x}\cdot\operatorname{tg}x}=$$

$$=4\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\operatorname{tg}^2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=4\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}{(\operatorname{tg}^2x)'}=4\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sin x}{\cos^2x}}{2\operatorname{tg}x\ \frac{1}{\cos^2x}}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$$

$$=0.$$

Демек, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{4\cos x}=e^0=1.$

Мысал 4.12. $\lim\limits_{x\to0+}x^{\sin x}$ табылсын.

Шешуі. Бұл 0^0 түріндегі анықталмағандық (6.41) теңдік бойынша $x^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln x}$ түрінде жазылады.

Дәреженің көрсеткішінде 0 ∞ түріндегі анықталмағандық. Оны түрлендіріп есептесек:

$$\lim_{x\to0+}(\sin x\cdot\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2x}}=$$

$$=-\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2x}{x\cdot\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to0+}\frac{(\ \sin^2x)'}{(x\cdot\cos x)'}=-\lim_{x\to0+}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Демек, $\lim\limits_{x\to0+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0+}x^{\sin x\ln x}}=e^0=1.$

§ 5. Тейлор мен Маклорен формулалары және олардың қолданулары

$y = f(x)$ функциясының анықтамасында x-тің мәндері бойынша y-тің мәндерін табу амалдары айтылмаған. Функция $y = x^2 - 5x + 7$ теңдікпен берілсе, функцияның мәні төрт арифметикалық амал жәрдемімен оңай анықталады.

Ал, $y = \ln(1 + x)$, $y = \cos x$ т. б. функциялардың мәндері қалай табылады.

Берілген $y = f(x)$ функциясының мәндерін есептеу үшін, оны n-дәрежелі $P_n(x)$ көпмүшемен алмастырып, есептелінеді. Өйткені арифметикалық төрт амал жәрдемімен көпмүшенің мәні әрқашан да оңай есептелінеді.

Функцияны көпмүше түріне келтіру мүмкіндігін Тейлор формуласы негіздейді.

5.1. Көпмүше үшін Тейлор формуласы

Берілген $f(x)$ функциясы n-дәрежелі $P_n(x)$ көпмүше болсын:

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n. \qquad (6.42)$$

x -тің дәрежелері бойынша жіктеліп жазылған бұл көпмүшені $(x - a)$ ның дәрежелері бойынша жіктейік, мұндағы a берілген сан. Яғни, $P_n(x)$ көпмүшені мына түрге келтірейік:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + A_3(x - a)^3 + \cdots + A_n(x - a)^n. \qquad (6.43)$$

Мұндағы A_0, A_1, A_2, A_3, … , A_n сандары, табылуы керек болған белгісіз коэффициенттер.

Бұл коэффициенттерді табу үшін (6.43) теңдікті x бойынша дифференциалдаймыз:

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - a) + 3A_3(x - a)^2 + \cdots + nA_n(x - a)^{n-1}.$$

$$P_n^{(2)}(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - a) + \cdots + n \cdot (n - 1)A_n(x - a)^{n-2}$$

$$P_n^{(3)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x - a) + \cdots + n \cdot (n - 1).$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n - 1) \cdot (n - 2) \ldots 2 \cdot 1A_n$$

Бұл алынған теңдіктерде және (6.43) теңдікте $x = a$ десек:

$P_n(a) = A_0,$ яғни $A_0 = P_n(a);$

$P_n'(a) = A_1,$ яғни $A_1 = \frac{P_n'(a)}{1!};$

$P_n^{(2)}(a) = 2A_2,$ яғни $A_2 = \frac{P_n^{(2)}(a)}{2!};$

$P_n^{(3)}(a) = 2 \cdot 3A_3,$ яғни $A_3 = \frac{P_n^{(3)}(a)}{3!};$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$P_n^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2\ \ 1A_n$, яғни $A_n = \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}$.

A_0, A_1, A_2, A_3, …, A_n коэффициенттердің бұл табылған мәндерін (6.43) теңдікке қойсақ:

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P_n^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \frac{P_n^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (6.44)$$

(6.44) формула көпмүше үшін Тейлор формуласы деп аталады.

Мысал 5.1. $P_3(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 1$ көпмүшені $(x-1)$ екімүшенің дәрежелері бойынша жіктеу керек.

Шешуі. Мұнда $a = 1, P_3(1) = -3, P_3^{\prime(x)} = -6x^2 + 2x - 3, P_3^{(2)}(x) = -12x + 2$, $P_3^{(3)}(x) = -12$. Сондықтан $P_3'(1) = -7$, $P_3^{(2)}(1) = -10$, $P_3^{(3)}(1) = -12$. Демек, (6.44) формула бойынша:

$$P_3(x) = -3 + \frac{-7}{1!}(x-1) - \frac{10}{2!}(x-1)^2 - \frac{12}{3!}(x-1)^3.$$

5.2. Кезкелген функция үшін Тейлор формуласы

Тейлор формуласы берілген $y = f(x)$ функциясын белгілі бір шарттар орындалғанда көпмүше түрінде жуықтап көрсетіп, жуықтау қатесін бағалауға мүмкіндік береді.

Теорема 6.14 (Тейлор). Егер $f(x)$ функциясының a нүктесінде және оның кейбір маңайында $(n+1)$ –ретке дейінгі туындылары бар болса, онда осы маңайдың кез келген $x \neq a$ нүктесі үшін x пен a нүктелерінің арасында жататын c нүктесі табылып, мына теңдік орындалады:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \qquad (6.45)$$

(6.45) теңдік Тейлор формуласы деп аталады.

$$\varphi(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (6.46)$$

көпмүшені $f\,(x)$ функциясының n-ретті Тейлор көпмүшесі, ал $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x,a)$ айырымды болса, $(n+1)$ –ретті қалдық мүшесі деп атайды:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \qquad (6.47)$$

Лагранж түріндегі қалдық мүше,

$$R_{n+1}(x) = \bar{\bar{0}}[(x-a)^n], \qquad (6.48)$$

Пеано түріндегі қалдық мүше деп аталады.

Дәлелдеуі. (6.45) формуланы дәлелдеу үшін

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

теңдіктің орындалатынын көрсету керек. Көрсетілген маңайдан кез келген x-ті белгілеп, анықтық үшін $x > a$ делік.

$a \leq t \leq x$ шартты қанағаттандыратын t айнымал енгізіп, $[a,x]$ кесіндіде

$$F(t) = f(x) - \varphi(x,t) - \frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \qquad (6.49)$$

көмекші функцияны қарастырайық.

$F(t)$ функциясы $[a,x]$ кесіндіде Ролль теоремасының шарттарын қанағаттандырады: (6.49) теңдіктен және $f(x)$ функциясына қойылған шарттардан $F(t)$ функциясы $[a,x]$ кесіндіде үзіліссіз және дифференциалданушы, өйткені $f(t)$ функциясы және оның $(n+1)$ –ретке дейінгі туындылары $[a,x]$ кесіндіде үзіліссіз;

(6.49) теңдікте $t = a$ десек,

$$F(a) = f(x) - \varphi(x,a) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0;$$

$t = x$ десек,

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(x-x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \\ - \frac{(x-x)^{n-1}R_{n+1}(x)}{(n+1)!} = 0.$$

Демек, $F(a) = F(x) = 0$.

Сондықтан Ролль теоремасы бойынша $[a;\ x]$ кесіндінің ішінде кемінде бір c нүкте табылып, бұл нүктеде

$$F'(c) = 0$$

теңдігі орындалады.

(6.49) теңдіктен $F'(t)$ туындыны табамыз:

$$F'^{(t)} = f'^{(t)} + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}\cdot 2(x-t) - \frac{f^{(3)}(t)}{1!}(x-t)^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot n(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Бұл теңдіктің оң бөлігіндегі мүшелері соңғы екеуінен басқасы өзара жойылады. Сонымен

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^2 + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Соңғы теңдікте $t = c$ десек,

$$F'(c) = 0 = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{(n+1)(x-c)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Бұл теңдіктен:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Лагранж түріндегі қалдықты басқаша жазуға болады. $c \in (a, x)$ болғандықтан $0 < \theta < 1$ сан табылып, $c = a + \theta\,(x - a)$ болады. Сонда

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, 0 < \theta < 1. \qquad (6.47a)$$

Қалдықтың бұл түрінде жазылуы жиірек қолданылады.

(6.45) Тейлор формуласын басқаша жазуға да болады. $x - a = \Delta x$, $x = a + \Delta x$ деп алайық. Сонда (6.45) қалдық Лагранж түрінде болғанда, мына түрге келеді:

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{f'a}{1!}\Delta x + \frac{f^{(2)}a}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}a}{n!}(\Delta x)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(a + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, 0 < \theta < 1 \qquad (6.50)$$

$n = 0$ болғанда (6.50) формуладан Лагранж формуласы шығады:

$$f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + \theta \cdot \Delta x)\ \ \Delta x.$$

Салдар 5.1. Егер $f^{(n+1)}(x)$ функциясы a нүктесінің кейбір маңайынында шенелген функция болса, онда $R_{n+1}(x)$ қалдық мүше $x \to a$ болғанда, $(x - a)^n$ функциядан реті жоғары ақырсыз кішкене функция болады:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\cdot(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) = 0.$$

Демек, $x \to a$ болғанда, $R_{n+1}(x) = \bar{\bar{0}}[(x - a)^n]$

5.3. Маклорен формуласы

(6.45) Тейлор формуласында $a = 0$ болғандағы

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (6.51)$$

формуланы Маклорен формуласы деп атайды.

Маклорен формуласы үшін: Лагранж түріндегі қалдық мүше

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ , 0 < \theta < 1, \qquad (6.52)$$

Пеано түріндегі қалдық мүше

$$R_{n+1}(x) = \bar{\bar{0}}(x^n),\ x \to 0 \text{ болғанда}. \qquad (6.53)$$

Негізгі элементар функциялардың Маклорен формуласы бойынша жіктелуі

1. $f(x) = e^x$

Шешуі. $f(x) = f'(x) = f^{(2)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$. Бұдан $f(0) = f'(0) = f^{(2)}(0) = \ldots \ \ldots = f^{(n)}(0) = 1$; $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$.

Онда (6.51) Лагранж түріндегі қалдығы бар. Жіктелуі:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta\, x \in (0, x), 0 < \theta < 1. \qquad (6.54)$$

(6.54) формуладағы қалдық мүше $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$ үшін кез келген $[-r, r]$ сегментте $\left|e^{\theta x}\right| < e^{r}$ болғандықтан келесі баға орынды:

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^{r}. \tag{6.54a}$$

Ал (6.53) Пеано түріндегі қалдық мүше мына түрде болады:

$$|R_{n+1}(x)| = \bar{\bar{0}}(x^{n}).$$

2. $f(x) = \sin x$.

Шешуі. $f^{(n)}x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$ болғандықтан, $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$ $\begin{cases} 0, & n \text{ жұп болганда} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ тақ болганда} \end{cases}$ Онда (6.51) Маклорен формуласы

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \frac{x^{7}}{7!} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^{n}}{n!} + R_{n+2}(x) \tag{6.55}$$

түрінде болады. Мұнда n – тақ сан. Лагранж түріндегі қалдық мүше

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\sin\left(\theta x + n\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\right), 0 < \theta < 1$$

түрінде болып, кез келген $[-r, r], r > 0$ кесіндіде

$$|R_{n+2}(x)| \le \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}$$

бағалау орынды.

Пеано түріндегі қалдық мүше

$$|R_{n+2}(x)| = \bar{\bar{0}}\,(x^{n}).$$

3. $f(x) = \cos x$.

Шешуі. $f^{(n)}x) = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$ болғандықтан, $f^{(n)}(0) = \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ тақ болганда} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ жұп болганда} \end{cases}$ болады. Онда Маклорен формуласына жіктелуі

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} - \frac{x^{6}}{6!} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^{n}}{n!} + R_{n+2}(x), \tag{6.56}$$

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta x + n\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\right), 0 < \theta < 1$$

Пеано түріндегі қалдық мүше

$$|R_{n+2}(x)| = \bar{\bar{0}}\,(x^{2n+1}).$$

4. $f(x) = (1 + x)^{\alpha}, \alpha \in R$.

Шешуі. $f^{(n)}(x) = [(1 + x)^{\alpha}]^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - n + 1)$ болғандықтан, Маклорен формуласы бойынша

$$(1 + x)\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(a - n + 1)}{n!}x^{n} + $$

$$+\frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(a - n)}{(n + 1)!} + (1 + \theta x)^{\alpha - (n+1)}\cdot x^{n+1}, 0 < \theta < 1. \tag{6.57}$$

Пеано түріндегі қалдық мүше

$$R_{n+1}(x) = \bar{\bar{0}}(x^n), \text{ яғни } \lim_{x\to 0}\frac{R_{n+1}(x)}{x^n} = 0.$$

5. $f(x) = \ln(1 + x)$.

Шешуі. $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $\overset{(2)}{f}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $\overset{(3)}{f}(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$, $\overset{(4)}{f}(x) = \frac{-2\cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}$, ... $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$ болғандықтан, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $\overset{(2)}{f}(0) = -1$, $\overset{(3)}{f}(0) = 2!$, $\overset{(4)}{f}(0) = (-1)^3\, 3!$, ... , $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ болып, Маклорен формуласы бойынша

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \qquad (6.58)$$

Пеано түріндегі қалдық мүше

$$R_{n+1}(x) = \bar{\bar{0}}\,(x^n) \qquad (6.59)$$

Дербес жағдайда $\alpha = n$ натурал сан болғанда, $f^{(n+1)}(x) = 0$ болады, сондықтан, $R_{n+1}(x) = 0$ болады. Яғни бұл жағдайда белгілі Ньютон биномы формуласы шығады:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n. \qquad (6.58)$$

Егер $(a + x)^n$ өрнекті жіктеу керек болса, a^n өрнекті жақшаның сыртына шығарып, (6.58) формуланы қолданамыз:

$$(a + x)^n = a^n\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = a^n\left[1 + \frac{x}{1!}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

Демек, Ньютон биномының жалпы жағдайы Маклорен формуласының дербес жағдайы болады. Жоғарыда келтірілген жіктеулер функцияны Маклорен формуласы бойынша берілген дәлдікпен, көпмүшелермен ауыстыру мүмкін екендігін көрсетеді.

Тейлор және Маклорен формулалары күрделі функцияларды да көпмүшелермен ауыстыруға мүмкіндік береді. Ал көпмүшелерге арифметикалық амалдар қолдану, кез келген нүктеде үзіліссіз болғандықтан оларды есептеу, дифференциалдау мүмкін.

Негізінен Маклорен формуласы функцияларды зерттеуде, Лагранж түріндегі қалдық мүшемен берілсе, ол жуықтап есептеулерде, ал Пеано түріндегі қалдық мүше шектерді есептеуде жиі қолданылады.

5.4. Маклорен формуласын жуықтап есептеулерде және шектерді табуда қолдану

а) Қалдық мүшесі Лагранж түрінде болған Маклорен формуласын қолданып, функция мәнін берілген дәлдікпен есептеуге және есептеу қателігін қалдық мүше арқылы бағалауға мүмкіндік береді.

Мысал 5.2. e саны керекті дәлдікпен есептелсін.

Шешуі. e^x функциясын, оның (6.54) жіктеудегі n-дәрежелі Тейлор көпмүшесімен ауыстырсақ, жуықтау теңдігін аламыз:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Мұндағы абсолют қате

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

e^x функциясын [–1, 1] аралықта қарастырсақ,

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Жуықтау теңдігінде $x = 1$ десек,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

жуық мәнді аламыз. Мұндағы абсолют қате $R_{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}$. 0,001 ге дейінгі дәлдікпен анықтау керек болса, n санын

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001 \text{ немесе } (n+1)! > 3000$$

теңсіздігінен анықтаймыз, яғни $n = 6$. Демек, $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2{,}718$.

Сонымен Маклорен формуласы e санын кез келген дәлдікпен анықтауға мүмкіндік береді.

б) Қалдық мүшесі Пеано түрінде болған Маклорен формуласын қолданып, шектерді табуға болады.

Мысал 5.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3}$ табылсын.

Шешуі. $\sin x$ функциясының (6.55) жіктелуінде $n = 2$ десек,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\bar{\bar{0}}(x^3)}{x^3} - x}{2x^3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3!} + \lim_{x\to 0} \frac{\bar{\bar{0}}(x^4)}{x^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{12} + 0 = -\frac{1}{12}.$$

Мысал 5.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{3x^3 \sin x}$ есептелсін.

Шешуі. e^x, $\sin x, \cos x$ функцияларының (6.54), (6.55), (6.56) Маклорен формуласы бойынша жіктелуінің формулаларын қолдансақ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{3x^3 \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \bar{\bar{0}}(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \bar{\bar{0}}(x^4)}{3x^3\left(x + \bar{\bar{0}}(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + \bar{\bar{0}}(x^4)}{3x^4 + \bar{\bar{0}}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{\bar{\bar{0}}(x^4)}{x^4}}{3 + \frac{\bar{\bar{0}}(x^4)}{x^4}} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + 0}{3 + 0} = \frac{1}{36}.$$

Мұнда (6.54) формулада x орнына $\left(-\frac{x^2}{2}\right)$-ні қойдық.

§ 6. Функцияны зерттеу

Туындыларды қолданып, берілген функцияны зерттеуге және оның графигін сызуға болады.

6.1. Функцияның өсуі мен кемуі

Егер $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)\big(f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)\big)$, мұндағы $h > 0$, қос теңсіздік орындалса, онда $f\ (x)$ функциясы x_0 нүктесінде өспелі (кемімелі) функция деп аталады.

Анықтама 6.1. Егер (a, b) интервалдың кез келген x_1, x_2 нүктелері үшін, $x_1 < x_2$ теңсіздігінен $f(x_1) < f(x_2)\big(f(x_1) > f(x_2)\big)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы (a, b) интервалда өспелі (кемімелі) функция деп аталады, $x_1 < x_2$ болғанда $f(x_1) \geq f(x_2)\big(f(x_1) \leq f(x_2)\big)$ болса, $f(x)$ функциясы кемімейтін (өспейтін) функция деп аталады.

Теорема 6.15 (дифференциалданатын функцияның өсуі мен кемуінің жеткілікті шарты). Егер $(a,\ b)$ интервалдың әрбір нүктесінде $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$ болса, онда $f(x)$ функциясы $(a,\ b)$ интервалда өспелі (кемімелі) функция болады.

Дәлелдеуі. $f'(x) > 0$ болсын. $x_1 < x_2$ теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген $x_1, x_2 \in (a,\ b)$ нүктелерді аламыз. $[x_1, x_2]$ кесіндіге Лагранж теоремасын қолдансақ: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$, мұнда $c \in (x_1, x_2)$. Теореманың шарты бойынша $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Сондықтан $f(x_2) - f(x_1) > 0$ немесе

$$f(x_2) > f(x_1).$$

$f'(x) < 0$ болған жағдайда функцияның кемімелі болуы осы сияқты дәлелденеді.

Теорема 6.16 (қажеттілік шарттары). Егер $(a,\ b)$ интервалда дифференциалданушы функция өспелі (кемімелі) болса, онда кез келген $x \in (a,\ b)$ үшін $f'(x) \geq 0\ (f'(x) \leq 0)$ болады.

Дәлелдеуі. Анықтық үшін $f(x)$ функциясы $(a,\ b)$ интервалда өспелі болсын. Еркімізше $(a,\ b)$ интервалда кез келген x, $x + \Delta x$ нүктелерін алып, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta y)-f(x)}{\Delta x}$ қатынасты қарастырайық. $f(x)$ өспелі функция, демек $\Delta x > 0$ болғанда $x + \Delta x > x$ және $f(x + \Delta x) > f(x)$, ал $\Delta x < 0$ болғанда $x + \Delta x < x$ және $f(x + \Delta x) < f(x)$ болады. Екі жағдайда да $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta y)-f(x)}{\Delta x} > 0$, өйткені бірдей таңбалы шамалардың қатынасы.

Теореманың шарты бойынша $f\ (x)$ функциясы x нүктесінде ақырлы туындыға ие. Сондықтан:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

$f(x)$ функциясы $(a,\ b)$ интервалда кемімелі болған жағдай да осылайша дәлелденеді.

Мысал 6.1. $f(x) = x^3 - 12x + 11$ функциясының өсу және кему аралықтары анықталсын.

Шешуі. Берілген функцияның анықталу аймағы $D(f) = (-\infty; +\infty)$, туындысы $f'(x) = 3x^2 - 12$.

$3x^2 - 12 > 0$ теңсіздіктен: $x^2 > 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} > 2 \Rightarrow |x| > 2$, яғни $x > 2$ немесе $x < -2$. Демек, $(-\infty; -2)$ және $(2; +\infty)$ интервалдарда функция өседі.

$3x^2 - 12 < 0$ теңсіздіктен: $x^2 < 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} < 2 \Rightarrow |x| < 2$, яғни $-2 < x < 2$ болғанда, функция кемиді.

6.2. Функцияның экстремумдері.* Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

1. Функцияның экстремумдері.

Анықтама 6.2. Егер x_0 нүктесінің кейбір маңайындағы кез келген $x \neq x_0$ нүктесі үшін $f(x) < f(x_0)(f(x) > f(x_0))$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының төңіректік максимум (төңіректік минимум) нүктесі деп атайды.

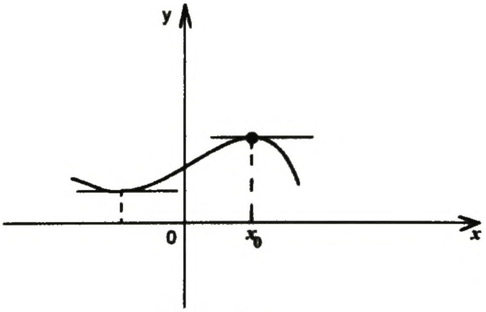
Төңіректік максимум мен минимум нүктелері экстремум нүктелері деп аталады.

Теорема 6.17 (төңіректік экстремумның қажетті шарты). Егер $f(x)$ функциясының x_0 төңіректік экстремум нүктесі болып, осы нүктенің кейбір маңайында $f'(x)$ туындысы бар болса, онда $f'(x_0) = 0$ болады.

Дәлелдеуі. Анықтық үшін x_0 төңіректік максимум нүктесі дейік. Демек, x_0 нүктесінің маңайында $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Онда $\Delta x > 0$ болғанда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0$, ал $\Delta x < 0$ болғанда $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ болады.

Теореманың шарты бойынша x_0 нүктесінде $f'(x_0)$ туынды бар. Жоғарыдағы қатынастарды ескерсек: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x<0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0, \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \leq 0.$
Демек, $f'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) = 0$ теңдіктің геометриялық мағынасы. Дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының төңіректік экстремум нүктесінде оның графигіне жүргізілген жанама $0x$ осіне параллель болады (сурет 6.12).



Сурет 6.12

Екі жағдайды атап өтейік.

а) $f'(x_0) = 0$ болғанмен де x_0 нүктесі

---

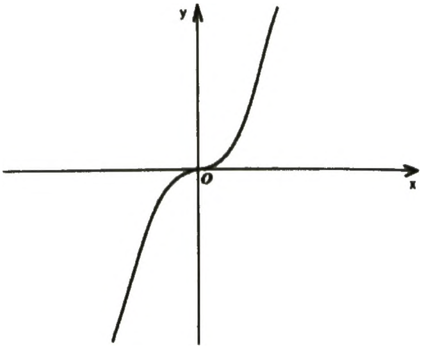
* extremum (лат.) – шеткі.

$f(x)$ функциясының төңіректік экстремум нүктесі болмауы мүмкін.

Мысал 6.2. $f(x) = x^3$ функциясы үшін $x = 0$ нүктесінде $f'(x) = 3x^2 = 0$. Бірақ бұл нүктеде төңіректік максимум да, минимум да жоқ (сурет 6.13).

б) туындысы жоқ нүктелерде де $f(x)$ функциясы төңіректік экстремумға ие болуы мүмкін.

Мысал 6.3. $f(x) = |x|$ функциясының $x = 0$ нүктесінде туындысы жоқ, бірақ бұл нүктеде төңіректік минимумға ие (сурет 6.2).



Сурет 6.13

Анықтама 6.3. Үзіліссіз $f(x)$ функцияның туындысы нөлге айналатын және туындысы жоқ нүктелерін күдікті нүктелер деп атайды. $f'(x_0) = 0$ болатын x_0 нүктесін стационар нүкте деп те атайды.

Теорема 6.18 (Экстремумның бірінші жеткілікті шарты) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің кейбір маңайының барлық нүктелерінде дифференциалданатын функция және x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының күдікті нүктесі болсын. Егер осы маңайда $x < x_0$ болғанда $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) болса, ал $x > x_0$ болғанда $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының төңіректік максимум (төңіректік минимум) нүктесі болады.

Егер x_0 нүктесінің екі жағында да $f'(x)$ таңбасын сақтаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының экстремум нүктесі болмайды.

Дәлелдеуі. x – көрсетілген маңайдың кез келген нүктесі болсын. $f(x)$ функциясы дифференциалданатын болғандықтан, $[x, x_0]$ кесіндіде ол әрі үзіліссіз. Осы кесіндіде $f(x)$ функциясы үшін (6.36) Лагранж формуласын қолдансақ:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \tag{6.55}$$

$x < x_0$ болғанда $f'(x) > 0, x - x_0 < 0$, демек $f(x) < f(x_0)$;

($x < x_0$ болғанда$f'(x) < 0, x - x_0 < 0$, демек $f(x) > f(x_0)$);

$x > x_0$ болғанда $f'(x) < 0, x - x_0 > 0$, демек $f(x) < f(x_0)$;

($x > x_0$ болғанда $f'(x) > 0$, $x - x_0 > 0$, демек $f(x) < f(x_0)$), яғни, x_0 төңіректік максимум (төңіректік минимум) нүктесі.

Егер $f'(x)$ функциясының күдікті x_0 нүктенің оң және сол жақтарында таңбасы бірдей болса, онда (6.55) теңдіктің оң жағы әртүрлі таңбалы болады. Демек, x_0 нүктеде экстремум жоқ.

Мысал 6.4. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 3$ функциясының төңіректік экстремумдары табылсын.

Шешуі. Туындысын табамыз: $y' = x^2 - 4x + 3$. Туындының нақты түбірлерін табамыз: $x^2 - 4x + 3 = 0$, демек, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Туынды барлық жерде үзіліссіз, демек басқа күдікті нүктелер жоқ. Күдікті мәндерді зерттеп, зерттеу нәтижесін суретте белгілейміз. $y' = (x - 1)(x - 3)$ болғандықтан, $x_1 = 1$ нүктесі үшін:

$y'|_{x<1} > 0, y'|_{x>1} < 0$ болғандықтан, $x_1 = 1$ нүктесінде функция төңіректік максимумға ие: $y_{\max}(1) = \frac{13}{3}$;

Екінші күдікті x=3 нүкте үшін, $y'|_{x<3} < 0$, $y'|_{x>3} > 0$ болғандықтан, берілген функция $x_2 = 3$ нүктесінде төңіректік минимумға ие: $y_{\min}(3) = 3$.

Осы зерттеу негізінде функцияның графигі сурет 6.14 түрінде болады.

Теорема 6.19 (экстремумның екінші жеткілікті шарты). Екі рет дифференциалданатын $f(x)$ функциясы үшін $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ болсын. Онда $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) болса, x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының төңіректік максимум (төңіректік минимум) нүктесі болады.

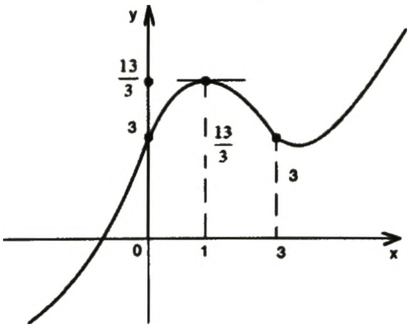
Дәлелдеуі. Анықтық үшін $f''(x_0) > 0$ деп алайық.

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$$ болғандықтан,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ теңсіздік x_0 нүктесінің кішкене маңайында орындалады.

Егер $\Delta x < 0$ болса, $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, ал $\Delta x > 0$ болса, $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ болады, яғни $f'(x)$ туындының таңбасы минустен плюске өзгереді. Демек, теорема 6.4 бойынша x_0 нүктесі төңіректік минимум нүктесі.

Осылайша, $f''(x_0) < 0$ болғанда x_0 нүктесінің кішкене маңайында теңсіздік орындалып, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ теңсіздік орындалып, $\Delta x < 0$ де $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ және $\Delta x > 0$ де $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ болады. Яғни $f'(x)$ туындылық таңбасы плюстен минуске өзгереді. Демек, теорема 6.4 бойынша x_0 нүктесі төңіректік максимум нүктесі.



Сурет 6.14

Мысал 6.5. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + 1$ функциясы екінші туынды жәрдемімен төңіректік экстремумға зерттелсін.

Шешуі. Туындысын тауып, күдікті нүктелерді табамыз.

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2; \; x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Екінші туындыны тауып, күдікті нүктелердегі таңбасын анықтаймыз:

$f^{(2)}(x) = 2x - 3$; $f^{(2)}(1) = 2 \quad 1 - 3 = -1 < 0$, демек $x_1 = 1$ төңіректік максимум нүктесі, $f^{(2)}(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$, $x_2 = 2$ төңіректік минимум нүктесі: $f_{\max}(1) = \frac{17}{12}$ $f_{\min}(2) = \frac{5}{3}$.

2. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, ол үзіліссіз функциялардың қасиеті бойынша (теорема 5.32) осы кесіндіде өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды.

Мұнда үш жағдай болуы мүмкін:

а) $x_0 = a$; б) $x_0 = b$; в) $x_0 \in (a; b)$.

$x_0 \in (a;\ b)$ болғанда x_0 төңіректік экстремум нүктесі. Егер $x_1, x_2, \dots, x_n$ күдікті нүктелер ақырлы жиын құраса, онда:

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}.$$

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}.$$

Мысал 6.6. $f(x) = (x - 2)^2 \quad e^{-x} + 3$ функциясының $[0;\ 5]$ кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері табылсын.

Шешуі. Туындысын тауып, күдікті нүктелерді табамыз:

$f'(x) = 2(x - 2)e^{-x} - (x - 2)^2 \cdot e^{-x} = -e^{-x}(x - 2)(x - 4)$;

$f'(x) = 0 = -e^{-x}(x - 2)(x - 4); \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$.

Функцияның осы күдікті нүктелердегі мәні $f(2) = 3, f(4) = 4e^{-4}$, кесіндінің шеткі нүктелеріндегі мәні $f(0) = 7$ және $f(5) = 9 \cdot e^{-5} + 3$. Яғни, $f_{\substack{\max \\ x\in[0,5]}}(x) = f(0) = 7$, $f_{\substack{\min \\ x\in[0,5]}}(x) = f(2) = 3$.

6.3. Функция графигінің дөңестігі. Иреӊ нүктелері

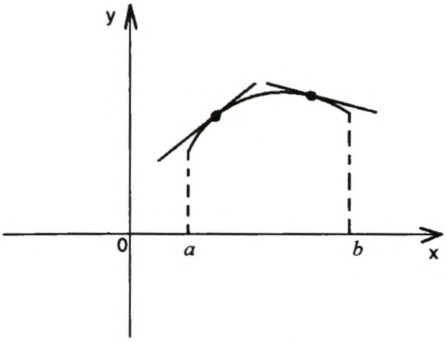
Берілген $y = f(x)$ функциясы (a, b) интервалдың кез келген нүктесінде дифференциалданатын болса, $f(x)$ функциясының графигінің кез келген $M(x, f(x))$ нүктесіне жанама жүргізуге болады, бұл жанама Oy осіне параллель болмайды.

Анықтама 6.5. Егер $f(x)$ функциясының (a, b) интервалдағы графигінің әрбір нүктесі, оның осы интервалдағы кез келген жанамасынан жоғары жатпаса (төмен жатпаса), онда $f(x)$ функциясының графигін (a, b) интервалда дөңес (ойыс) деп айтады (сурет 6.15, сурет 6.16)

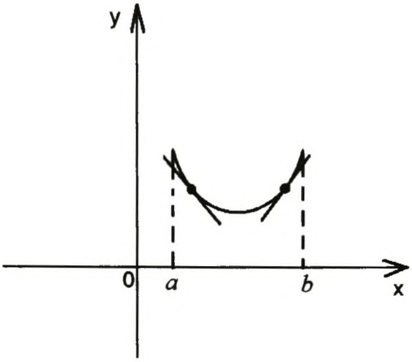
Дөңесті – жоғары бағытталған дөңестік, ойысты – төмен бағытталған дөңестік деп те айтады.

Анықтама 6.6. $f(x)$ үзіліссіз функция графигінің дөңес бөлігін ойыс бөлігінен ажырататын нүкте иреӊ нүктесі деп атайды.

Дөңестік пен ойыстық интервалдары келесі теорема арқылы анықталады.



Сурет 6.15



Сурет 6.16

Теорема 6.20. Егер (a, b) интервалдың әрбір нүктесінде $f''(x)$ бар және $f''(x) \quad < 0$ $(f''(x) > 0)$ болса, онда $f(x)$ функциясының графигі $(a,\ b)$ интервалда дөңес (ойыс) болады.

Дәлелдеуі. Анықтық үшін $f''(x) < 0$ болғанда, функция графигі дөңес болатыны дәлелдейік. $(a,\ b)$ интервалынан еркімізше $x = x_0$ нүктесін белгілеп, $(x_0,\ f(x_0))$ нүктеде функция графигіне жанама жүргізейік. Қисықтың теңдеуі $y = f(x)$, ал жанаманың теңдеуі $y_ж - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, мұндағы $y_ж$ саны x нүктедегі жанаманың ординатасы. Кез келген $x \in \ (a,\ b)$ нүктесіндегі қисық пен жанама ординаталарының айырмасын қарастырайық:

$$y - y_ж = f(x) - f'(x_0)\,(x - x_0) - f(x_0)$$

Бұл теңдіктегі $f(x) - f(x_0)$ айырымға Лагранж формуласын қолдансақ, $f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0)$, мұндағы c нүкте x_0 мен x-тің арасындағы кейбір нүкте (сурет 6.17). Сонымен,

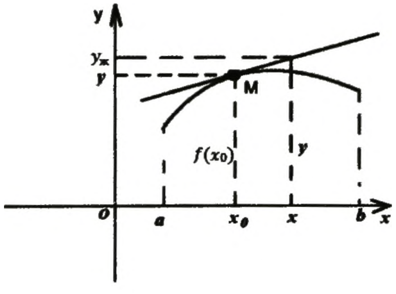
$$y - y_ж = f'(c)\,(x - x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0) =$$

$$=[f'(c) - f'(x_0)]\,(x - x_0)$$

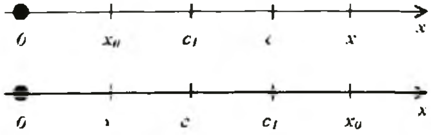
болады. Мұндағы $f'(c) - f'(x_0)$ айырымға (6.36) Лагранж формуласын қайталап қолдансақ,

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)\,(c - x_0).$$

Мұндағы c_1 нүкте x_0 мен c ның аралығында жатады, яғни c_1 нүктесі де да x_0-мен x-тің аралығында орналасқан.



Сурет 6.17



Сурет 6.17а

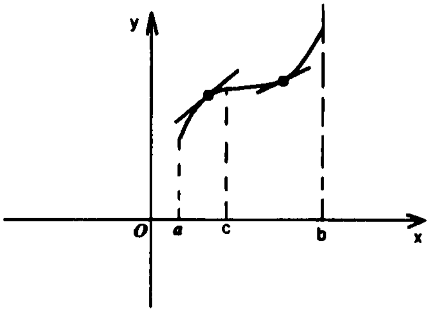
Демек, $y - y_ж = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$.

Мұнда келесі жағдайлардың бірі болуы мүмкін (сурет 6.17а).

а) $x > x_0$ болсын. Онда $x_0 < c < x$ және $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$, ал теореманың шарты бойынша $f''(c_1) < 0$ болғандықтан, $y - y_ж = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) < 0$ немесе $y - y_ж < 0$;

б) $x < x_0$ болсын. Онда $x < c < c_1 < x_0$ және $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, ал теореманың шарты бойынша $f''(c_1) < 0$, сондықтан, $y - y_ж = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) < 0$ немесе $y - y_ж < 0$.

Сонымен $y - y_ж < 0$ теңсіздіктен (a, b) интервалының барлық нүктелері үшін жанаманың ординатасы $y_ж$ берілген қисықтың ординатасы y-тен үлкен екендігі көрінеді, яғни бұл қисық дөңес болады.



Сурет 6.18

$f''(x) > 0$ болғанда қисықтың ойыс екендігі осы сияқты дәлелденеді. Шынында да бұл жағдайда $y - y_ж = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) > 0$ немесе $y - y_ж > 0$ болып, жанаманың ординатасы $y_ж$ берілген қисықтың ординатасы y -тен кіші екендігі шығады, яғни бұл қисық ойыс болады.

Функция графигінің ирең нүктелерін табуға келесі теоремалар пайдаланылады.

Теорема 6.21 (Ирең нүктесі бар болуының қажетті шарты). Егер $f(x)$ функциясының (a, b) интервалында үзіліссіз екінші туындысы $f''(x)$ бар және $x = c$ нүктесі графиктің ирең нүктесі болса, онда $f''(c) = 0$.

Дәлелдеуі. Кері жориық, яғни $f''(c) \neq 0$ дейік. Онда $f''(x)$ үзіліссіз болғандықтан, екінші туынды $x = c$ нүктесінің кейбір маңайында таңбасын сақтайды, яғни функцияның графигі бұл маңайда дөңес немесе ойыс болады. Демек, ирең нүктесі жоқ. Ал бұл тұжырым теореманың шартына қайшы. Сондықтан жоруымыз дұрыс емес, яғни $f''(c) = 0$ (сурет 6.18).

Теорема 6.22 (Ирең нүктесі бар болуының бірінші жеткілікті шарты). $f(x)$ функциясының $x = c$ нүктесінің кейбір маңайында $f''(x)$ екінші ретті туындысы бар және $f''(c) = 0$ болсын. Онда $x = c$ нүктесінің оң және сол жағында $f''(x)$ екінші туындының таңбалары әртүрлі болса, $x = c$ нүктесі функция графигінің ирең нүктесі болады.

Дәлелдеуі. Анықтық үшін $x < c$ болғанда, $f''(x) > 0$, $x > c$ болғанда, $f''(x) < 0$ болсын. Онда c нүктесінің сол жағында график ойыс, ал оң жағында дөңес болады. Демек, $x = c$ графиктің ирең нүктесі.

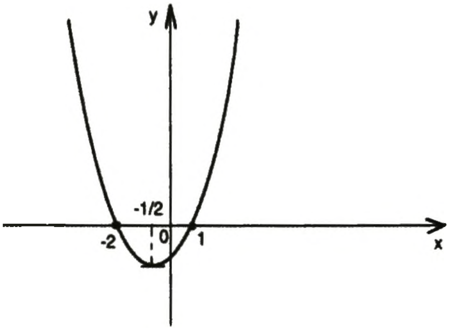
Теорема 6.23 (Ирең нүктесі бар болуының екінші жеткілікті шарты).

Егер $f(x)$ функциясы $x = c$ нүктесінде ақырлы $f^{(3)}(x)$ үшінші туындысы бар және $f^{(2)}(c) = 0$, $f^{(3)}(c) \neq 0$ шарттарды қанағаттандырса, онда $x = c$ графиктің ирең нүктесі болады.

Дәлелдеуі. $f^{(3)}(c) \neq 0$ шарттан $f^{(2)}(c)$ функцияның c нүктесінде өсуші немесе кемуші функция екендігі шығады. $f^{(2)}(c) = 0$ болғандықтан үзіліссіз $f^{(2)}(x)$ бірсарынды функциясы c нүктесінің екі жағында әртүрлі таңбалы болады. Демек, $(c, f(c))$ графиктің ирең нүктесі.

Мысал 6.7. $f(x) = x^2 + x - 2$ функциясы графигінің дөңестік, ойыстық интервалдары және ирең нүктесі табылсын.

Шешуі. Функцияның анықталу аймағы $D(f) = (-\infty, +\infty)$, туындылары: $f'(x) = 2x + 1$; $f^{(2)}(x) = 2 > 0$. x-тің кез келген мәндерінде $f''(x) > 0$ болғандықтан, функцияның графигі $(-\infty, +\infty)$, аймақта ойыс болады. Ирең нүктесі жоқ.

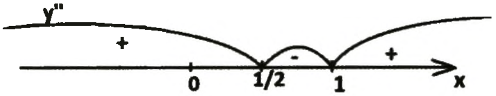


Сурет 6.19

$$f(-2) = f(1) = 0, \ f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0; f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

екендігін ескеріп функцияның графигін саламыз (сурет 6.19).

Мысал 6.8. $f(x) = x(x-1)^3 + 1$ функциясының графигінің дөңестік, ойыстық интервалдары және ирең нүктелері табылсын.



Сурет 6.20

Шешуі. Берілген функцияның $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$ туындыларын тауып, $f^{(2)}(x) = 0$ болатын нүктелерді табамыз: $f'(x) = (x-1)^3 + 3 \cdot x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$;

$$f^{(2)}(x) = 2(x-1)(4x-1) + (x-1)^2 \cdot 4 = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1);\, ;\ f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2},$$

$x_2 = 1$.

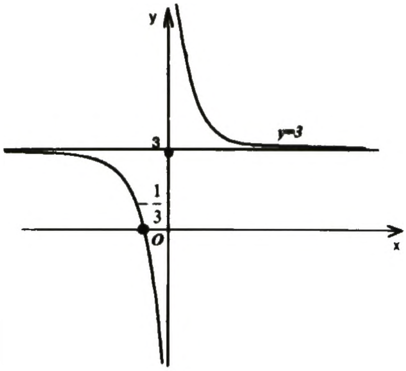
$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ және $(1, \infty)$ интервалдарда $f''(x) > 0$, демек, бұл интервалдарда $f\ (x)$ функциясының графигі ойыс; $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ интервалда $f^{(2)}(x) < 0$ демек функция графигі дөңес; ал $x_1 = \frac{1}{2}$ және $x_2 = 1$ нүктелері графиктің ирең нүктелері.

6.4. Функция графигінің асимптоталары

Анықтама 6.7. Егер $f(x)$ функциясының графигінің бойындағы $M(x, y)$ нүктесі $O(0; 0)$ бас нүктеден алыстаған сайын осы нүкте мен кейбір L түзуінің арасындағы ара қашықтық δ нөлге ұмтылса, онда L түзуін $f(x)$ функциясының графигінің асимптотасы деп атайды.

Асимптоталар горизонталь, вертикаль және көлбеу асимптота болып, үшке бөлінеді.

Анықтама 6.8. Егер $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ немесе $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ болса, $y = b$ түзуін $f(x)$ функциясы графигінің горизонталь асимптотасы деп атайды.

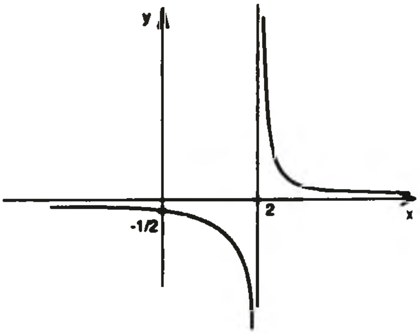


Сурет 6.21

Мысал 6.9. $y = 3$ түзуі $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$ функция графигінің горизонталь асимптотикасы ($\|Ox$) екені көрсетілсін.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3 + \dfrac{1}{x}\right) = 3$ болғандықтан, анықтама 6.8. бойынша $y = 3$ ($\|Ox$) түзуі графикке горизонталь асимптота болады (сурет 6.21).

Анықтама 6.9. Егер $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x® a-0} f(x) = \pm\Gamma$, шектердің кемінде біреуі орындалса, онда $x = a$ түзуін ($\perp Ox$) $f(x)$ функциясы графигінің вертикаль асимптотасы деп атайды.



Сурет 6.22

Мысал 6.10. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ функциясының графигінің вертикаль асимптотасы $x = 2$ екендігі көрсетілсін.

Шешуі. Шынында да $\lim\limits_{x\to2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, болғандықтан, анықтама бойынша $x = 2$ түзуі ($\perp Ox$) вертикаль асимптота болады (сурет 6.22).

Анықтама 6.10. Егер $x \to \infty$ болғанда $f(x)$ функциясын

$f(x) = kx + b + \alpha(x)$, мұндағы $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$ (6.56) түрінде өрнектеу мүмкін болса, онда $y = kx + b$ түзуін $f(x)$ функциясының графигінің көлбеу асимптотасы деп атайды.

Теорема 6.24. $y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының графигінің көлбеу асимптотасы болуы үшін

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ және } b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right] \tag{6.57}$$

шектерінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

Мұнда, $x \to +\infty$ болғанда оң жақ көлбеу асимптота, $x \to -\infty$ болғанда сол жақ көлбеу асимптота үшін қарастырылады.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Анықтық үшін $f(x)$ функция графигінің $x \to +\infty$ болғанда $y = kx + b$ түзуі көлбеу асимптотасы болсын, яғни $f(x)$ үшін (6.56) түріндегі өрнектеу орынды. Онда:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[b + \mathrm{a}(x)\right] = b.$$

Жеткіліктілігі. (6.57)-нің шектері бар болсын. Онда осы шектердің екіншісі бойынша $f(x) - (kx + b)$ айырым $x \to +\infty$ болғанда ақырсыз кішкене функция болады деп тұжырымдауға болады. Осы ақырсыз кішкене функцияны $\alpha(x)$ десек,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

болады.

Осылайша көлбеу асимптота $x \to -\infty$ болған жағдайда да анықталады.

Мысал 6.9. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{2x}$ функция графигінің көлбеу асимптоталары табылсын.

Шешуі. (6.57) формулалар бойынша:

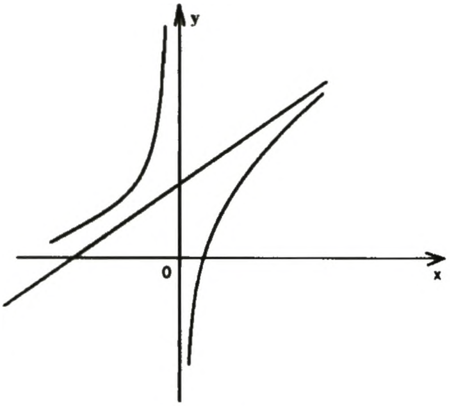
$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{2x^2+3x-5}{2x\cdot x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[\frac{2x^2+3x-5}{2x} - 1\cdot x\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{3x-5}{2x}\right) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2x}\right) = \frac{3}{2}$$

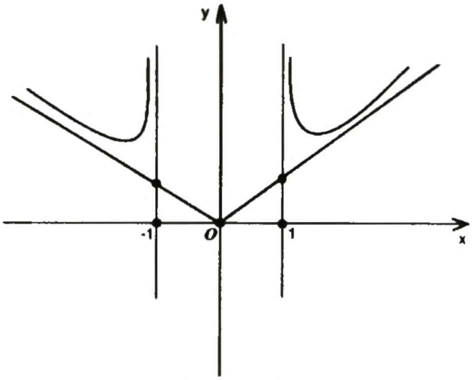
Демек, $y = x + \dfrac{3}{2}$ түзуі берілген функция графигінің $x \to +\infty$ және $x \to -\infty$ болғандағы көлбеу асимптотасы (сурет 6.23).

Мысал 6.10. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ функциясының графигінің асимптоталары табылсын.

Шешуі. Бөлімін нөлге теңестірсек, екі вертикаль асимптота шығады: $x=-1$; $x=1$. (6.57) формулалар жәрдемімен көлбеу асимптоталарды табамыз (сурет 6.24).



Сурет 6.23



Сурет 6.24

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\cdot x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=0.$$

Демек, $y=x$ түзуі оң жақ көлбеу асимптотасы. Одан әрі,

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\cdot|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=-1,$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=0.$$

Сондықтан $y=-x$ түзуі сол жақ көлбеу асимптотасы.

6.5. Функцияны толық зерттеу және оның графигін салу

Функцияның өзгеруін зерттеп, оның графигін салуды мына үлгі бойынша орындау тиімді.

1. Функцияның анықталу аймағы мен үзіліс нүктелерін анықтап, аймақтың шеткі нүктелерінде қандай шекке ұмтылатынын табу;

2. Функцияның жұп-тақтылығын, периодтылығын немесе жалпы түрдегі функция екендігін анықтау;

3. Графиктің координаталық осьтермен қиылысу нүктелерін табу;

4. Вертикаль, горизонталь және көлбеу асимптоталарды табу;

5. Функцияның күдікті нүктелерін (бірінші туынды нөлге айналатын немесе анықталмаған) тауып, өсу және кему аралықтарын, экстремум нүктелерін табу;

6. Функцияның екінші текті күдікті нүктелерін (екінші туынды нөлге айналатын немесе анықталмаған) тауып, дөңестік және ойыстық аралықтарын, ирең нүктелерін табу.

7. Зерттеулерге негізделіп, функцияның графигін салу.

Мысал 6.11. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2\ \ 3}$ функцияны толық зерттеп, графигін салу керек.

Шешуі. Көрсетілген үлгі бойынша зерттейміз.

1. Бөлшектің бөлімін нөлге айналдыратын $x=\pm\sqrt{3}$ нүктелер, функцияның екінші текті үзіліс нүктелері.

Ox осінің басқа нүктелерінде функция үзіліссіз. Демек, функцияның анықталу аймағы:

$$D(f)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$$

Анықталу аймағының шеткі нүктелеріндегі шектер:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-\dfrac{3}{x^2}}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-\dfrac{3}{x^2}}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty;\quad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty;\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty.$$

2. Берілген функция тақ функция, өйткені

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-\frac{x^3}{x^2-3}=-f(x),\quad x,-\,x OD(f).$$

3. Функция графигінің координаталық осьтермен қиылысу, нүктелерін табу үшін

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3}{x^2-3}, \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{x^3}{x^2-3}, \\ x=0. \end{cases}$$

жүйелерді шешу қажет.

Екі жүйе де $x = 0$, $y = 0$ шешімдерге ие. Демек, функция графигі координаталық осьтермен координата бас нүктесінде қиылысады.

4. $x=\sqrt{3}$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі болғандықтан, яғни

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty.$$

$x=+\sqrt{3}$ түзуі вертикаль асимптота болады. Осылайша (симметрия бойынша) $x=-\sqrt{3}$ түзуі де вертикаль асимптота болады. Көлбеу асимптота теңдеуін табайық.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3}{x^2-3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-3}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+3x}{x^3-3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}=0.$$

Сонымен, $y = x$ түзу $x \to +\infty$ болғанда көлбеу асимптота болады. Бас нүктеге қатысты симметрия бойынша бұл түзу $x \to -\infty$ болғанда да асимптота болады.

Функция графигінің горизонталь асимптотасы жоқ, өйткені

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty.$$

5. Функцияның өсу және кему интервалдарын анықтау үшін туындысы мен күдікті нүктелерін табайық:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'=\frac{3x^2\left(x^2-3\right)-x^3(2x-0)}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{x^4-9x^2}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-3\right)^2}.$$

Анықталу аймағының барлық нүктелерінде берілген функцияның туындысы бар. Күдікті нүктелері $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-3\right)^2}=0$ теңдеуден табылады.

Бұл теңдеуді шешсек: $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 3$.

Өсу интервалдары $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} > 0$ теңсіздіктен табылады: $|x| > 3$, яғни $-\infty < x < -3,\ \ 3 < x < +\infty$ болғанда функция өседі.

Кему интервалдары $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} < 0$ теңсіздіктен табылады: $|x| < 3$, яғни $-3 < x < -3$ болғанда функция кемиді. Бірақ, $x = -\sqrt{3},\ \ x = \sqrt{3}$ нүктелерде функция анықталмағандықтан, функцияның кему интервалдары: $(-3;\ -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\ +3)$.

Демек, $x = -3$ төңіректік минимум, $x = 3$ төңіректік максимум нүктесі:

$$y_{\max} = f(-3) = \frac{(-3)^3}{9-3} = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2};$$

$$y_{\min} = f(3) = \frac{3^3}{9-3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

6. Графиктің дөңестік, ойыстық интервалдары мен ирең нүктелерін табу үшін екінші ретті туындысы мен екінші текті күдікті нүктелерін табамыз:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left[\frac{x^4 - 9x^2}{(x^2-3)^2}\right]' = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}.$$

$$\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}).$$

Модулі бойынша жеткілікті кішкене x -тер үшін:

$x < 0$ болғанда,

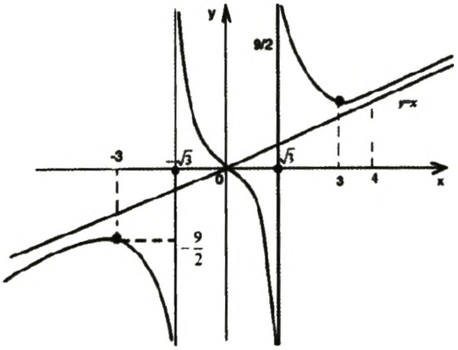
$f''(x) = \dfrac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} > 0$, ал $x > 0$ болғанда $f''(x) = \dfrac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} < 0$,

өйткені $x^2 + 9 > 0$, $(x^2 - 3)^3 < 0$.

Демек, $O(0;\ 0)$ нүктесі ирең нүктесі болады.

Дөңестік аймағы:

$$\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}).$$



Сурет 6.25

Ойыстық аймағы:

$$\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} > 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3};0) \cup (\sqrt{3};+\infty).$$

7. Көмекші кесте құрып, функция графигін саламыз (сурет 6.25).

x	**(−∞, −3)**	**−3**	**(−3; −√3)**	**−√3**	**(−√3; 0)**	**0**	**(0; √3)**	**√3**	**(√3; 3)**	**3**	**(3; +∞)**
y	−	−	−	анықталмаған	+	0	−	анықталмаған	+	+	+
y'	+	0	−	анықталмаған	−	0	−	анықталмаған	−	0	+
y''	−	−	−	анықталмаған	+	0	−	анықталмаған	+	+	+
тұжырымдар	**y өседі график дөңес**	**max нүктесі $y_{max} = -\frac{9}{2}$**	**y кемиді график дөңес**	**$x = -\sqrt{3}$ вертикаль асимптота**	**y кемиді график ойыс**	**ирең нүктесі**	**y кемиді график дөңес**	**$x = \sqrt{3}$ вертикаль асимптота**	**y кемиді график ойыс**	**min нүктесі $y_{min} = \frac{9}{2}$**	**y өседі график ойыс**

Ескертулер:

1. **Функция графигінің $x = y$ көлбеу асимптотасы бар.**
2. **Функция графигі координата осьтерін $O(0; 0)$нүктеде қияды.**

VII тарау. БІР АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ҚИСАБЫ

§ 1. Анықталмаған интеграл

1.1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

(a, b) аралығында анықталған функцияның туындысы $F'(x)$ бойынша $F(x)$ функцияның өзін табу мәселесін қарастырайық.

Анықтама 1.1. $f(x)$ функциясының $(a,\ b)$ аралықтағы алғашқы функциясы деп, осы аралықтың әрбір нүктесінде

$$F'(x) = f(x)$$

теңдігі орындалатын дифференциалданатын $F(x)$ функциясын атайды.

Мысал. 1.1. Функциялардың алғашқы функциясы табылсын:

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}, x \in (-1;\ 1)$; б) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in (0; +\infty)$;

в) $f(x) = 2\cos 2x, x \in (-\infty; +\infty)$; г) $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \neq -1$.

Шешуі: а) $F(x) = \arcsin x$, себебі $f(x) = F'^{(x)} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Бұл функция $(-1; 1)$ интервалда анықталған.

б) $F(x) = \sqrt{x}, x \in (0; +\infty)$ болғанда $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $F(x) = \sin 2x\,, x \in (-\infty; +\infty)$ болғанда $f(x) = F'(x) = 2\cos 2x$.

г) $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1, f(x) = F'^{(x)} = x^{\alpha}$.

$F'(x) = f(x)$ теңдік орындалғанда $(F(x) + C)' = f(x)$ теңдік те орынды, бұдан $f(x)$ функцияның алғашқы функцияларының саны ақырсыз көп екендігі шығады.

Лемма. 1.1. Кейбір X аралықтың барлық нүктелерінде туындысы нөлге тең функция осы аралықта тұрақты.

Дәлелдеуі: X аралықта $f'(x) = 0$ болсын. Онда кез келген $x_1,\ x_2 \in X$ нүктелері үшін Лагранж теоремасы бойынша $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$, $x_1 < c < x_2$.

$f'(c) = 0$ болғандықтан $f(x_2) = f(x_1)$. Бұдан x_1, x_2 нүктелер X аралықтың кез келген нүктелері болғандықтан $f(x)$ функциясы барлық нүктелерде бірдей мән қабылдайтындығы шығады, яғни $f(x) = C = \text{const}$, мұндағы C кез келген сан.

Теорема. 7.1. Егер X аралықта $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $f(x)$ функциясының осы аралықтағы кез келген $\Phi(x)$ алғашқы функциясы,

$$\Phi(x) = F(x) + C\,.$$

түрінде өрнектеледі.

Дәлелдеуі. $F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x)$ болғандықтан $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ болады.

Бұдан лемма 1.1 бойынша $\Phi(x) - F(x) = C$, яғни $\Phi(x) = F(x) + C$

Демек, $F(x) + C$ функциялар жиыны $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларын қамтиды.

Анықтама.1.2. $f(x)$ функциясының X аралықтағы алғашқы функцияларының жиыны $f(x)$ функциясының осы аралықтағы анықталмаған интегралы деп аталады және $\int f(x)\,dx$ таңбасымен белгіленеді:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{7.1}$$

Демек, $F'(x) = f(x)$ болса, (7.1) теңдік орынды. Мұндағы $\int$ – интеграл таңбасы, ал $f(x)dx$ – интеграл астындағы өрнек, $f(x)$ – интеграл астындағы функция, dx – интегралдау элементі деп аталады. Интеграл астындағы функцияның анықталмаған интегралын табу амалын осы функцияны интегралдау деп атайды. Анықтамадан көрінгендей интегралдау мен дифференциалдау амалдары бір-біріне кері амалдар. Сондықтан интегралды дұрыс тапқандығын тексеру үшін шыққан функцияны дифференциалдап, интеграл астындағы өрнек шығатынына көз жеткізу керек.

Мысал. 1.2. Функциялардың анықталмаған интегралдары табылсын:

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $f(x) = \sin 2x$; г) $f(x) = x^n, n > 0$

Шешуі. Мысал 1.1-дегі көрсетілген аралықтарда (7.1) формуласы бойынша:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$;

в) $\int 2\cos 2x = \sin 2x + C$; г) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

Геометриялық тұрғыдан $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы өзара параллель $F(x) + C$ қисықтардың үйірі.

Қандай функциялардың анықталмаған интегралы бар деген сұраққа келесі теорема жауап береді.

Теорема 7.2. (a,b) интервалында үзіліссіз кез келген функцияның осы интервалда анықталмаған интегралы бар.

Дәлелдеуі теорема 7.9-да келтірілген.

1.2. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері

1. $[\int f(x)dx]' = f(x)$ немесе $d[F(x)] = f(x)dx$
2. $\int dF(x) = F(x) + C$.
3. $\int A \cdot f(x)\; dx = A\int f(x)\; dx$, мұнда A – тұрақты шама.

4. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx$.

Кез келген 3- және 4- теңдіктер анықталмаған интегралдың сызықтық қасиеттері деп аталып, тұрақты қосылғышқа дейінгі дәлдікпен анықталған шартты теңдіктер.

5. Интегралдау формуласының инварианттығы. Егер $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ болса, онда

$$\int f(u)\;du = F(u)+C, \tag{7.2}$$

мұндағы $u=u(x)$ кез келген үзіліссіз туындысы бар функция.

1-5 қасиеттердің дәлелдеуін келтірейік:

1. Шынында да анықтама бойынша $(\int f(x)dx)' = f(x)$ болғандықтан d$(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'\,dx = f(x)dx$.

2. Бұл қасиеттің дұрыстығы dF(x)=$F'(x)dx = f(x)dx$ теңдіктерден шығады.

3. d$(\int(Af(x)dx) = (\int Af(x)dx)'dx = Af(x)dx$, әрі $d(A(\int f(x)dx) = Ad(\int f(x)dx) = Af(x)dx$. Сондықтан 3-қасиет кез келген тұрақты қосылғышты дәлдікпен орынды.

4. Теңдіктің оң жағын дифференциалдасақ: $d(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx) = d(\int f(x)dx) \pm d(\int g(x)dx) = f(x)dx \pm g(x)dx = \big(f(x) \pm g(x)\big)dx$. Бұдан $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ функциялардың $f(x){\pm}g(x)$ функция үшін алғашқы функция екендігі көрінеді. Демек 4-қасиет кез келген тұрақты қосылғышты дәлдікпен орынды.

5. $\int f(x)\;dx = F(x)+C$ теңдікте x орнына $u{=}u(x)$ үзіліссіз туындысы бар функциясын қойсақ, $F(u){=}F[u(x)]$ күрделі функция үшін бірінші дифференциалдың инварианттығын ескерсек: $dF(u){=}F'(u)du = f(u)du$. Осы теңдіктен $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$.

Демек, анықталмаған интегралдың формулалары интегралдау айнымалы тәуелсіз айнымал ма, әлде үзіліссіз туындысы бар кез келген функция ма оған тәуелсіз орынды болады.

Дербес жағдайда $u(x) = ax+b$ болса, (7.2) теңдік

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \tag{7.2a}$$

түрінде жазылады.

(7.2) формуланы интегралдау формуласының инварианттығы деп атайды.

1.3. Негізгі анықталмаған интегралдар кестесі

1. $\int 0\cdot dx = C.$

2. $\int 1\cdot dx = x+C.$

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C, (x \neq 0).$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$ **5a.** $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ **7.** $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C, \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right).$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C, \ (x \neq k\pi, k \in Z).$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, (|x| < 1).$

10a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, (|x| < a).$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C.$ **11a.** $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, a \neq 0, x^2 + a > 0.$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a.$ **14.** $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$

15. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C.$

Ескерту 1.1. Интегралдау формуласының инварианттығы (7.2) формулаға сәйкес, кестедегі формулаларда x-тің орнына $u = u(x)$ функциясын қоюға болады. Мысалы, $\int \cos u(x) du(x) = \int d(\sin u(x)) = \sin u(x) + C.$

Интегралдаудың негізгі мақсаты: әртүрлі әдістерді қолданып, кестелік интегралға келтіру.

Мысал 1.3. Интегралдар табылсын:

а) $\int (x^3 + 2x^2 - 4x + 3) dx;$ б) $\int \frac{3x^3+2x^2}{x} dx;$

в) $\int sin^2x \cdot cosxdx;$ г) $\int cos^3xsinxdx.$

Шешуі:

а) $\int (x^3 + 2x^2 - 4x + 3) dx = \int x^3dx + \int 2x^2dx - \int 4xdx + \int 3dx =$
$\int x^3dx + 2\int x^2dx - 4\int xdx + 3\int dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + C;$

б) $\int \frac{3x^3+2x^2}{x} dx = 3\int x^2dx + 2\int xdx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C = x^3 + x^2 + C;$

в) $\int sin^2x \cdot cosxdx = \int sin^2xd(sinx) = \frac{sin^3x}{3} + C;$

г) $\int cos^3xsinxdx = -\int cos^3xd(cosx) = -\frac{cos^4x}{4} + C.$

Мұнда 1-5 қасиеттерден және интегралдар кестесінен пайдаланылды.

§ 2. Интегралдаудың негізгі әдістері

Интегралдау амалы дифференциалдау амалына кері амал. Ал кері амалды орындауда, жалпы, техникалық қиыншылықтар туындайды. Мысалы, интегралдау амалында көбейтіндіні, бөліндіні интегралдау ережелері жоқ.

Сондықтан функцияларды интегралдауда әртүрлі әдістер қолданылады.

2.1. Тікелей интегралдау әдісі

Интеграл астындағы функцияны тепе-тең түрлендіріп, содан соң анықталмаған интегралдың қасиеттері мен кестесіне сүйеніп интегралдауды тікелей интегралдау әдісі деп атайды.

$$f'(u)du = d(f(u)),\ \ u = \phi(x), x \in (a;b) \qquad (7.3)$$

формула интегралдарды есептеуде жиі қолданылады.

Берілген интегралды кестелік интегралға келтіруде дифференциалдың келесі түрлендірулері, дифференциал белгісі астына енгізу амалы деп аталушы, жиі қолданылады:

$$du = d(u+a), a = \text{const};\ du = \frac{1}{a}d(au), a = \text{const};$$

$$du = \frac{1}{a}d(au+b); a,b = \text{const};\ u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2); \qquad (7.3a)$$

$$\cos u \cdot du = d(\sin u); \sin u \cdot du = -d(\cos u);$$

$$\frac{1}{u}du = d(\ln u); \frac{du}{\cos^2 u} = d(\text{tg}u);\ \frac{du}{\sin^2 u} = -d(\text{ctg}u); e^u du = d(e^u).$$

Мысал 2.1. Тепе-тең түрлендіру арқылы, интегралдар кестесіне сүйеніп, анықталмаған интегралдар табылсын:

а) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

в) $\int \text{ctg}^2 x dx$; г) $\int \text{tg}^2 x dx$.

Шешуі. а) $\int \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx =$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C;$$

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\text{ctg}x + \text{tg}x + C;$

в) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = = - \operatorname{ctg} x - x + C;$

г) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C;$

Мысал 2.2. (7.3) формулаға сүйеніп, дифференциалды түрлендіріп, анықталмаған интегралдар табылсын:

а) $\int \frac{dx}{x+4};$ б) $\int (3x+1)^{99} dx;$ в) $\int \sin^2 4x dx;$

г) $\int \cos^2 x dx;$ д) $\int \operatorname{tg} x dx;$ е) $\int \operatorname{ctg} x dx;$

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}};$ з) $\int x e^{x^2} dx.$

Шешуі.

а) $\int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4} = \ln|x+4| + C;$

б) $\int (3x+2)^{90} dx = \int (3x+2)^{90} \frac{d(3x+2)}{3} = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{99+1}}{99+1} + C = \frac{1}{300}(3x+2)^{100} + C;$

в) $\int \sin^2 4x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 8x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx =$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx \cdot \frac{d(8x)}{8} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{16} \sin 8x + C;$

г) $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot \frac{d(2x)}{2} = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C;$

д) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln|\cos x| + C;;$

е) $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C;$

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{2^2 - (\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C;$

з) $\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \frac{d(x^2)}{2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

2.2. Айнымалды ауыстыру (алмастыру) әдісі

Теорема 7.3. $x = \varphi(t)$ функциясы кейбір T аралықта анықталған және дифференциалданатын функция болып, осы функцияның X мәндер жиынында $f(x)$ функциясы, яғни $f[\varphi(t)]$ күрделі функция анықталсын. Егер X жиында $f(x) = F'(x)$ болса, онда

$$\int f(x)dx \ \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \mathrm{F}[\varphi(t)] + C \qquad (7.4)$$

формула орынды болады.

Дәлелдеуі. $f(x)$ функциясы анықталған X жиында $F(x)$ алғашқы функция да анықталған. Демек, $f[\varphi(t)]$ күрделі функция анықталған T жиынында $F[\varphi(t)]$ күрделі функция да анықталған. $F'(x) = f(x)$ екендігін ескерсек

$$\left(F\left[\varphi(t)\right]\right)' = F'\left[\varphi(t)\right]_x \cdot \varphi'(t) = f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)$$

теңдіктер орындалады, яғни $f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)$ функция T жиында $F[\varphi(t)]$ алғашқы функцияға ие болады. Демек, $\int f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right] + C$

$F[\varphi(t)] + C = (F(x) + C)_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx \ \Big|_{x=\varphi(t)}$ екендігін ескерсек,

$$\int f(x)dx \ \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$$

ізделінді теңдік шығады.

Ескерту 2.1. T аралық (a, b) интервал, $(-\infty, a)$ мен $(a, +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$ болуы мүмкін.

(7.4.) формула анықталмаған интегралда айнымалды ауыстыру формуласы деп аталады. (7.4) формулада негізгі айнымал x-ке көшу үшін $x = \varphi(t)$ теңдікті t-ға қатысты шешсек, $t = \varphi^{-1}(x) = \psi(x)$ болады. (7.4) теңдіктің оң бөлігіндегі t айнымалдың орнына $\psi(x)$ функциясын қойсақ, ізделінді анықталмаған интеграл шығады:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt \ \Big|_{t=\psi(x)}$$

Яғни (7.4) формула кері бағытта, оңнан солға қарай қолданылады. Бұл үшін теореманың шарттарына қосымша, $x = \varphi(t)$ функциясы бірсарынды болу керек.

Ескерту 2.2. Көп жағдайларда $t = \psi(x)$ алмастыруын қолдану тиімді.

Мысал 2.3. Интегралдар есептелсін:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(a > 0)$;

в) $\dfrac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$;

б) $e^{\frac{x}{4}}dx$;

г) $\int x^{n-1}e^{x^n}dx$.

Шешуі. а) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}x=a\cos t\\ dx=-a\sin t dt\\ |x|\le a,|t|\le\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int a\sin t\cdot(-a\sin t)dt=$

$$=-a^2\int\sin^2 t dt=-a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=-\frac{a^2}{2}(t-\frac{\sin 2t}{2})+C=-\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Енді бастапқы x айнымалға оралсақ. $\cos t=\frac{x}{a}$, яғни $t=\arccos\frac{x}{a}$.

Демек, $\sin 2t=2\sin t\cdot\cos t=2\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\cos t=2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{x}{a}=$

$=\dfrac{2x}{a}\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{a^2}}=\dfrac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$ Онда:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=-\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+C=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C;$$

б) $\int e^{\frac{x}{4}}dx=\left|\begin{array}{l}x=4t\\ dx=(4t)'dt=4dt\end{array}\right|=4\int e^t dt=4e^t+C=4e^{\frac{x}{4}}=C;$

в) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{l}x=t^6\\ dx=dt^6=6t^5dt\end{array}\right|=\int\dfrac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\dfrac{t^5dt}{t^2(t+1)}=6\int\dfrac{t^3dt}{t+1}.$

Бөлшектің алымын бөліміне бөліп, бүтін бөлігін ажыратсақ:

$$6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\left[\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{t+1}\right]=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C.$$

Алынған өрнектен $t=\sqrt[6]{x}$ теңдігін пайдаланып x айнымалға өтсек:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right]+C;$$

г) $\int x^{n-1}e^{x^n}dx=\left|\begin{array}{c}x=\sqrt[n]{t},t=x^n\\ dx=d\left(t^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\\ n\in N\end{array}\right|=\int t^{\frac{n-1}{n}}\cdot e^t\cdot\frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}dt=$

$$=\frac{1}{n}\int e^t dt=\frac{1}{n}\int e^t dt=\frac{1}{n}e^t+C=\frac{1}{n}e^{x^n}+C.$$

Мысал 2.4. Интегралдар есептелсін:

а) $\int \frac{2x^3}{(x-1)^2}dx$; б) $\int \cos^n x \cdot \sin x dx, \quad n \neq -1$;

в) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$; г) $\int \frac{3xdx}{(x^2+1)^n}, \quad n \neq 1$.

Шешуі. а) $\int \frac{2x^3}{(x-1)^2}dx = \left|\begin{array}{l} t = x-1, \quad x = t+1 \\ dt = dx \end{array}\right| = \int \frac{2(t-1)^3}{t^2}dt =$

$$2\int \left(t - 3 + \tfrac{3}{t} - \tfrac{1}{t^2}\right)dt = 2\left(\tfrac{t^2}{2} - 3t + 3\ln|t| + \tfrac{1}{t}\right) + C = t^2 - 6t + 6lnt + \tfrac{2}{t} + C;$$

$x = t + 1$ екендігін ескеріп, x -ке қайта оралсақ:

$$\int \frac{2x^3}{(x-1)^2}dx = (x-1)^2 - 6(x-1) + 6ln|x-1| + \tfrac{2}{x-1} + C;$$

б) $\int \cos^n x \cdot \sin x dx = \left|\begin{array}{l} t = \cos x, \quad n \neq -1 \\ dt = -\sin x dx \end{array}\right| = -\int t^n dt = -\frac{t^{n+1}}{n+1} + C = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C;$

$n = -1$ болғанда, $\int (\cos x)^{-1} \sin x dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$

в) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \left|\begin{array}{l} t = e^x \\ x = \ln t, \qquad dx = \frac{dt}{t} \end{array}\right| = \int \frac{t-1}{t+1}\frac{dt}{t} = \int \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t}dt =$

$$= 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\ln|t+1| - \ln|t| + C = 2\ln(1+e^x) - x + C;$$

г) $\int \frac{3xdx}{(x^2+1)^n} = \left|\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx, \quad n \neq 1 \end{array}\right| = 3\int \frac{\frac{dt}{2}}{t^n} = \frac{3}{2}\int t^{-n}dt = \frac{3}{2}\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C =$

$$= \frac{3}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C;$$

$n = 1$ болғанда,

$$\int \frac{3xdx}{x^2+1} = \left|\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \end{array}\right| = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}\ln t = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

2.3. Бөліктеп интегралдау әдісі

Бөліктеп интегралдау әдісі екі функцияның көбейтіндісін дифференциалдау формуласын қолдануға негізделген.

Теорема 7.4. Егер X аралықта $U(x)$ пен $V(x)$ дифференциалданатын функциялар болса және $\int V(x)\cdot U'(x)dx$ бар болса, онда осы X аралықта $\int U(x)\cdot V'(x)dx$ интеграл бар және

$$\int U(x)\cdot V'(x)dx = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)U'(x)dx \qquad (7.5)$$

теңдік орынды болады.

(7.5) теңдік анықталмаған интегралдағы бөліктеп интегралдау формуласы деп аталады.

Дифференциалдың анықтамасынан және оның инварианттық қасиеті негізінде (7.5) формуланы.

$$\int U(x)\cdot dV(x) = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)dU(x) \qquad (7.6)$$

түрінде жазуға болады.

Дәлелдеуі. $\left[U(x)\cdot V(x)\right]' = U'(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V'(x)$ теңдіктен $U(x)\cdot V'(x) = \left[U(x)\cdot V(x)\right]' - V(x)\cdot U'(x)$ теңдік шығады.

Бұл теңдіктің екі бөлігін dx-қа көбейтіп интегралдасақ:

$$\int U(x)\cdot V'(x)dx = \int \left[U(x)\cdot V(x)\right]' dx - \int V(x)U'(x)dx.$$

Ал $\int [U(x)\cdot V(x)]' dx = U(x)\cdot V(x)$ екендігін және теореманың шарты бойынша $\int V(x)U'(x)dx$ бар екендігін ескерсек соңғы теңдіктен (7.5) формуласы шығады.

Бұл формула $\int UdV$ интегралды есептеуді $\int VdU$ интегралды есептеуге келтіреді, яғни $\int UdV$ интегралды есептеуден $\int VdU$ интегралды есептеу жеңілдеу болған жағдайда қолданылады.

Бөліктеп интегралдау арқылы табылатын интегралдардың басым бөлігі үш топқа бөлінеді:\

1) $\int p(x)\operatorname{arctg} x dx, \int p(x)\operatorname{arcctg} x dx,\ p(x)\ln x dx,$

$\int p(x)\arccos x dx,$

$\int p(x)\arcsin x dx,$ мұндағы $p(x)$ – көпмүше түріндегі интегралдар. Бұл интегралдарда $dV = p(x)dx$ деп, ал басқа функциялар $U(x)$ арқылы белгіленеді;

2) $\int p(x)e^{kx}dx, \int p(x)\sin kxdx, \int p(x)\cos kxdx,$, мұндағы $p(x)$ – көпмүше, k– кейбір сан, түріндегі интегралдар. Бұл интегралдарда $U=p(x)$, ал $dV=e^{kx}dx$, $dV=\sin kxdx$, $dV=\cos kxdx$ деп белгіленеді;

3)$\int e^{ax}cosbxdx$, $\int e^{ax}sinbxdx$, мұндағы a мен b кейбір сандар, түріндегі интегралдар. Бөліктеп интегралдау формуласын екі рет қолданып, теңдеуді шешу арқылы табылады.

Әрине, бұл үш топ бөліктеп интегралдау әдісімен есептелетін интегралдардың барлығын қамти алмайды.

Мысал 2.5. $\int \ln xdx$ табылсын.

Шешуі. (7.6) формула бойынша:

$$\int \ln xdx = \left| \begin{matrix} U=\ln x, dU = d\ln x = \frac{1}{x}dx \\ dV = dx, V=\int dV = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Мысал 2.6. $\int arctgxdx$ табылсын.

Шешуі. (7.6) формуланы қолдансақ:

$$\int \text{arctg}\, xdx = \left| \begin{matrix} U = \text{arctg}\, x, dU = d(\text{arctg}\, x) = \frac{dx}{1+x^2} \\ dV = dx, V = \int dV = \int dx = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\cdot \text{arctg}x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\text{arctg}x - \int \frac{\frac{d(1+x^2)}{2}}{1+x^2} =$$

$$= x\cdot \text{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\cdot \text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Мысал 2.7. $\int (2x-1)e^{3x}dx$ табылсын.

Шешуі. Бұл интеграл екінші топқа кіреді. (7.6) формула бойынша:

$$\int (2x-1)e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} U = 2x-1;\ dU = d(2x-1) = (2x-1)'dx = 2dx \\ dV = e^{3x}dx;\ V = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{(2x-1)}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\ 2dx = \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\cdot\frac{d(3x)}{3} =$$

$$= \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Мысал 2.8. $\int x^2 \cos xdx$ табылсын.

Шешуі. Берілген интегралды табу үшін (7.6) бөліктеп интегралдау формуласы екі рет қолданылады:

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} U = x^2, dU = d(x^2) = (x^2)' dx = 2x dx \\ dV = \cos x dx,\ V = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx = x^2 \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx.$$

Өз кезегінде,

$$\int x \cdot \sin x dx = \left| \begin{matrix} U = x, dU = dx \\ dV = \sin x dx,\ V = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$-x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

Бұл өрнекті жоғарыдағы интегралдың орнына қойсақ:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C.$$

Мысал 2.9. $\int e^x \sin x dx$ табылсын.

Шешуі. Бұл интеграл үшінші топқа кіреді. Оны табу үшін (7.6) формула екі рет қолданылады.

$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} U = \sin x,\ dU = d(\sin x) = \cos x dx \\ dV = e^x dx,\ V = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$ Өз кезегінде,

$e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} U = \cos x,\ dU = -\sin x dx \\ dV = e^x dx,\ V = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$ Бұл өрнекті жоғарыдағы интегралдың орнына қойсақ:

$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx).$ Яғни,

$2\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) + C.$

Ақырында алынатыны:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Мысал 2.10. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл аталған үш топқа кірмейді. Дегенмен де (7.6) формула жәрдемімен табылады.

$$\int \frac{x dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} U = x,\ dU = dx \\ dV = \frac{dx}{\sin^2 x},\ V = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x \end{matrix} \right| = -x\mathrm{ctg} x + \int \mathrm{ctg} x dx =$$

$$= -x\mathrm{ctg} x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\mathrm{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$

§ 3. Рационал функцияларды интегралдау

Екі көпмүшенің қатынасын рационал функция немесе рационал бөлшек деп атайды. Яғни $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, мұндағы $P_m(x)$, m-дәрежелі көпмүше, $Q_n(x)$ болса, n-дәрежелі көпмүше. Егер $m < n$ болса, $f(x)$ дұрыс рационал бөлшек, $m \geq n$ болса, $f(x)$ бұрыс рационал бөлшек деп аталады. $m \geq n$ болғанда алымын бөліміне бөліп, $f(x)$-ті көпмүше мен дұрыс рационал бөлшектің қосындысына келтіреді:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}.$$

Рационал функциялардың негізгі ерекшелігі олардың интегралы элементар функциялар арқылы өрнектеледі.

3.1. Қарапайым рационал функцияларды интегралдау

$\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ түріндегі дұрыс рационал функцияларды қарапайым рационал функциялар (бөлшектер) деп атайды. Мұндағы $k \geq 2$ натурал сан, A, a, p, q, M, N – нақты сандар, ал $x^2 + px + q$ түбірлері түйіндес комплекс сандар болатын, яғни p^2 - $4q < 0$, квадрат мүше.

Енді осы функциялардың интегралдарын табайық:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{Ad(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

Мұнда кестедегі 4-формуланы қолдандық

II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} \cdot d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$

Мұнда кестедегі 3-формуланы қолдандық

III. $\displaystyle J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} +$$

$$+ \left(N - \frac{MP}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{MP}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{\left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \mathrm{C}.$$

Мысал 3.1. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}$ табылсын.

Шешуі. Берілген функцияда $M = 3, N = 2, p = 2, q = 10$. Жоғарыңдағы жалпы жағдайдағыдай түрлендірсек:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-1}{x^2+2x+10}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx - \int \frac{dx}{x^2+2x+10} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+10)}{x^2+2x+10} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

IV. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, k \geq 2, q - \frac{p^2}{4} > 0$

Берілген интегралды түрлендірсек:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^2\right]^k}dx = M\int \frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^2\right]^k} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^2\right]^k}.$$

Енді $x + \frac{p}{2} = t$ алмастыру жасап, $q - \frac{p^2}{4} = a^2$ деп алсақ, соңғы қосынды келесі түрге келеді:

$$M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Бірінші интеграл оңай есептелінеді:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \int \frac{\frac{1}{2}d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Екінші интегралды есептейік:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right). \qquad (7.7)$$

Соңғы интегралға (7.6) бөліктеп интегралдау формуласын қолдансақ:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} U = t, dU = dt, \qquad dV = \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^k}, \\ V = \displaystyle\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1 \cdot t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = \frac{1 \cdot t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} -$$

$$- \frac{1}{2(1-k)} J_{k-1}.$$

Бұл табылған интегралды (7.7) теңдікке қойсақ:

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \frac{1 \cdot t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)} J_{k-1} \right), \quad \text{яғни}$$

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} + \frac{1 \cdot t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} \right). \tag{7.8}$$

Бұл алынған теңдік рекуренттік формула деп аталып, $k > 1, k \in N$ болғанда J_k интегралды J_{k-1} интеграл арқылы өрнектейді.

Мысал 3.2. $J_3 = \int \frac{dx}{(x^2+2^2)^3}$ табылсын.

Шешуі. Берілген функцияда $k = 3, a = 2$. Сондықтан:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + C;$$

$$J_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} J_1 + \frac{1 \cdot x}{2(2-1)(x^2+4)}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2}\frac{1 \cdot x}{x^2+4}\right) = \frac{1}{8}\left(J_1 + \frac{1 \cdot x}{x^2+4}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot x}{x^2+4}\right) + C;$$

$$J_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} J_2 + \frac{x}{2(3-1)(x^2+4)^2}\right) = \frac{1}{16}\left(3J_2 + \frac{x}{(x^2+4)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2}\right)\right] = \frac{3}{16^2} arctg \frac{x}{2} + \frac{3}{16 \cdot 8} \cdot \frac{1}{x^2+4} +$$

$$+ \frac{x}{16(x^2+4)^2} + C = \frac{3}{256} arctg \frac{x}{2} + \frac{3}{128} \cdot \frac{1}{x^2+4} + \frac{x}{16(x^2+4)^2} + C$$

3.2. Рационал функцияларды интегралдау

Рационал функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ екі көпмүшенің қатынасы. Сондықтан $Q_n(x)$ нақты коэффициентті n-дәрежелі көпмүше болғанда (1.19) формула бойынша көбейткіштерге жіктеп жазуға болады:

$$Q_n(x) = a_0(x-a)^{l_1}...(x-a_k)^{l_k}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{r_s} \tag{7.9}$$

Мұндағы $l_1, l_2, ..., l_k$, $r_1, ..., r_s$ натурал сандар, әрі $l_1 + ... + l_k + 2r_1 + ... + 2r_s = n$, $Q_n(x)-$тің a_1 түбірі l_1 еселі..., a_k түбірі l_k еселі, $c_1 \pm id_1$ комплекс сан r_1 еселі, ... $c_s \pm id_s$ комплекс сан r_s еселі түбірлері – белгілі сандар.

Теорема 7.5. Егер нақты коэффициентті дұрыс $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ рационал функцияның бөлімі $Q_n(x)-$ көпмүше (7.9) түрінде көбейткіштерге жіктелсе, онда

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{l_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{l_1-1}} + ... + \frac{A_{1l_1}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{l_2}} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^{l_2-1}} + ...$$

$$... + \frac{A_{2l_2}}{x-a_2} + ... + \frac{A_{k1}}{(x-a_k)^{l_k}} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^{l_k-1}} + ... + \frac{A_{kl_k}}{x-a_k} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + ...$$

$$... + \frac{B_{22}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + ... + \frac{B_{1r_1}x+C_{1r_1}}{x^2+p_1x+q} + \frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_1x+q_2)^{r_2}} + \frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2-1}} + ...$$

$$+ \frac{B_{2r_2}x+C_{2r_2}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{s1}x+C_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{r_s}} + \frac{B_{s2}x+C_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^{r_s-1}} + ... + \frac{B_{sr_s}x+C_{sr_s}}{x^2+px+q} \tag{7.10}$$

түрінде қарапайым рационал функциялардың қосындысы ретінде жіктеледі. Мұндағы $A_{11}, A_{12}, ..., A_{1l_1}, ..., A_{kl_k}, ..., B_{sr_s}, C_{sr_s}$ анықталуы керек белгісіз нақты сандар.

Дәлелдеуі. (7.10) теңдікті дәлелдеу үшін $A_{11}, A_{12}, ..., A_{1l_1}, ..., A_{kl_k}, ..., B_{sr_s}, C_{sr_s}$ белгісіз сандарды бір мәнді табу мүмкін екендігін көрсету жеткілікті. Ол үшін: (7.10) теңдіктің оң бөлігін $Q_n(x)$ ортақ бөлімге келтіріп, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{S(x)}{Q_n(x)}$ тепе-теңдік аламыз, мұнда $S(x)$ коэффициенттері анықталмаған көпмүше, алынған тепе-теңдікте бөлімдері бірдей болғандықтан, алымдары да тепе-тең болады, яғни $P_m(x)=S(x)$; x-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестіріп, белгісіз коэффициенттерге байланысты сызықтық теңдеулер жүйесі алынады. Осы жүйені шешу арқылы $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1e_1}, \dots, A_{ke_k}, \dots, B_{sr_s}, C_{sr_s}$ белгісіз коэффициенттер бір мәнді анықталады. Бұл әдісті анықталмаған коэффициенттер әдісі деп атайды.

Ескерту 3.1. $P_m(x)\equiv S(x)$ болғандықтан бұл тепе-теңдік x-тің кез келген мәнінде орындалады. Сондықтан x-ке әртүрлі мәндер беріп те белгісіз коэффициенттерді анықтауға болады. Бұл әдісті дербес мәндер әдісі деп атайды.

Ескерту 3.2. Егер $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ рационал функция бұрыс болса, яғни $m\geq n$, онда алымын бөліміне бөліп, бүтін бөлігі ажыратылып, берілген бұрыс рационал функция көпмүше мен дұрыс рационал функцияның қосындысына келтіріледі. Мысалы, $\frac{x^2+5}{x+2}=x-2+\frac{9}{x+2}$

Теорема 7.6. Әрқандай нақты коэффициентті рационал функцияның интегралы бар және ол элементар функция болады.

Дәлелдеуі. Шынында да, әрқандай рационал функция (7.10) формуласы бойынша қарапайым рационал функциялардың қосындысы түрінде өрнектеледі. Ал олардың интегралдары элементар фукциялар. Сондықтан ақырлы сандағы элементар функциялардың қосындысы да элементар функция болады.

Мысал 3.3. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)(x-1)^2}$ табылсын.

Шешуі. Интеграл астындағы функция дұрыс рационал функция, бөлімі $Q_3(x)=(x+2)(x-1)^2$ жай $x_1=-2$ түбірге және $x_2=1$ екі еселі түбірге ие. Сондықтан интеграл астындағы функция (7.10) формула бойынша қарапайым рационал функциялардың қосындысына жіктеледі:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

Бұл теңдіктің оң бөлігін ортақ бөлімге келтіріп, алымдарын теңестіреміз:

$x^2=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2)$ немесе

$x^2=x^2(A+B)+x(-2A+2B-B+C)+(A-2B+2C)$.

x-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестірсек

$A+B=1,\quad -2A+B+C=0,\quad A-2B+2C=0$ жүйе шығады. Бұл жүйені шешсек: $A=\frac{4}{9}, B=\frac{5}{9}, C=\frac{1}{3}$

Демек, $\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{\frac{4}{9}}{x+2}+\frac{\frac{5}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}$

Сондықтан,

$$\int\frac{x^2dx}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{4}{9}\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{5}{9}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{4}{9}|x+2|+\frac{5}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+C.$$

Мысал 3.4. $\int\frac{xdx}{x^3+1}$ табылсын.

Шешуі. Берілген жағдайда $Q_3(x)=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ мұндағы квадрат үшмүшеліктің түбірлері комплекс сандар. (7.10) жіктеу бойынша

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

болып, ортақ бөлім бергеннен кейін алымдарын теңестірсек:

$$x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

болады. Дербес мәндер әдісін қолданамыз.

$x=-1, x=0, x=1$, десек, $-1=A(1-(-1)+1)$ немесе$-1=3A; 0=A(0+1)+C$. 1 немесе $0=A+C$;

$1=A(1-1+1)+(B+C)\cdot 2$, немесе $1=A+2B+2C$; $-1=3A$, $A+C=0$, $A+2B+2C=1$ жүйені шешсек

$$A=-\frac{1}{3}, B=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{3}.$$

Сонымен, $\frac{x}{x^3+1}=-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}$.

Бұл теңдіктің екі бөлігін де интегралдаймыз:

$$\int\frac{xdx}{x^3+1}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}$$

Мұндағы бірінші қосылғыш:

$$-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(x+1)}{x+1}=-\frac{1}{3}\ln|x+1|;$$

Екінші қосылғышты қарастырайық:

$$\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{\left(x^2-2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\int\frac{\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}d\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}+\frac{1}{6}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Бірінші мен екінші қосылғыштарды қоссақ, берілген интеграл:

$$\int\frac{xdx}{x^3+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

3.3. Алғашқы функциясы элементар функция болмайтын функциялар

Теорема 7.2 бойынша (a,b) интервалда үзіліссіз кез келген функцияның алғашқы функциясы бар. Бірақ олар элементар функциялар арқылы өрнектелмеуі мүмкін.

Алғашқы функциясы элементар функция болмайтындығы дәлелденген үзіліссіз элементар функцияларға мысалдар келтірейік.

1. $\Phi(x)=\int\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\Phi(0)=0$ (7.11)

Лаплас интегралы, ықтималдықтар теориясында маңызды орны бар.

2. $\begin{cases} G(x)=\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx, \\ \lim\limits_{x\to 0}G(x)=0 \end{cases}$ (7.12)

$$\begin{cases} S(x)=\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx, \\ \lim\limits_{x\to 0} S(x)=0 \end{cases} \qquad (7.12a)$$

Френель интегралдары оптикада кеңінен қолданылады.

3. $Si(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегралдық синус, $Si(0)=-\frac{\pi}{2}$ (7.13)

$Ci(x)=\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегралдық косинус (7.13a)

4. $li(x)=\int \frac{x}{\ln x}$ – интегралдық логарифм, $\lim\limits_{x\to 0} li(x)=0$ (7.14)

(7.11)-(7.14) бейэлементар функциялар маңызды болғандықтан терең зерттелген, мәндерінің кестесі жасалған және графиктері сызылған.

Элементар және бейэлементар ұғымдарының шартты екендігін атап өтеміз.

Іс жүзінде интеграл астындағы функцияларды Тейлор және Маклорен формулалары бойынша жіктеп, көпмүшемен ауыстырады.

3.4. Алғашқы функциясы элементар функция болатын функциялар

Теорема 7.6 бойынша рационал функцияның алғашқы функциясы элементар функция болады.

Қандай функциялардың алғашқы функциялары элементар функция болады деген сұраққа жауап беру үшін екі айнымалдың рационал функциясы деген ұғымды енгіземіз.

x пен y айнымалдардың m-дәрежелі көпмүшесі деп

$$P_m(x,y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+\cdots+a_{02}y^2+\cdots+a_{m0}x^m+a_{0m}y^m \qquad (7.15)$$

түріндегі өрнекті айтады. Мұндағы $a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}$, бәрі бірдей нөлге тең емес, нақты сандар. $R(x,y)=\frac{P_m(x,y)}{Q_n(x,y)}$ түріндегі функция, яғни m-дәрежелі $P_m(x,y)$ көпмүшенің n-дәрежелі $Q_n(x,y)$ көпмүшеге қатынасы, x және y айнымалдардың рационал функциясы деп аталады.

Егер $x=R_1(t), y=R_2(t)$ болса, яғни x пен y айнымал t-ның рационал функциялары болса, онда $R[R_1(t),R_2(t)]$ өрнек те айнымал t-ның рационал функциясы болады. Рационал функциялардың көбейтіндісі

$$R[R_1(t),R_2(t)]\cdot R_3(t) \qquad (7.15a)$$

өрнек те рационал функция болады.

§ 4. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \qquad (7.16)$$

түріндегі интегралды табу керек болсын. Мұндағы $R(\sin x, \cos x)$ өрнек $\sin x$ пен $\cos x$ функцияларының рационал функциясы.

4.1. Универсал ауыстыру әдісі

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ауыстырумен (7.16) интеграл t-ның рационал функциясына келтіріледі.

Шынында да

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad (7.17)$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \to x = 2\operatorname{arctg} t \to dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Демек,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} \qquad (7.16а)$$

Интеграл астында (7.15а) түріндегі функция, яғни рационал функция. Сондықтан (7.16а) интеграл элементар функцияларда интегралданады.

Мысал 4.1. $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$ табылсын.

Шешуі. $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ауыстыруды қолдансақ (7.17) теңдіктер бойынша

$$\frac{1}{3+\sin x+\cos x} = \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{2(t^2+t+2)}, \text{онда}$$

$$\frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \frac{dt}{t^2+t+2} \quad \text{Демек,}$$

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int \frac{dt}{t^2+t+2}=\int \frac{dt}{t^2+2\cdot t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=$$

$$=\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Универсал ауыстыру көп жағдайларда күрделі және көп есептеуді қажет етеді. Сондықтан кейбір жағдайларға басқа ауыстырулар ұтымды болады.

4.2. $R(\sin x, \cos x)=R(-\sin x; -\cos x)$, яғни $\sin x$ және $\cos x$ функциялардың жұп функциясы.

$t=\operatorname{tg}x$ ауыстыру ұтымды, мұнда

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, x=\operatorname{arctg}t, dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Мысал 4.2. $\int\frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}$ табылсын.

Шешуі. Берілген функция $\sin x$ және $\cos x$ функцияларының жұп дәрежесі. $t=\operatorname{tg}x$ ауыстыру енгізіп, $\sin x, \cos x$ функциялардың t арқылы өрнектесек,

$$\frac{1}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}=\frac{1}{5\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2+9\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}=\frac{1+t^2}{5+9t^2}.$$

Онда, $\int\frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}=\int\frac{(1+t)^2}{5+9t^2}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{5+9t^2}=$

$$=\int\frac{\frac{1}{3}d(3t)}{\left(\sqrt{5}\right)^2+(3t)^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}+C.$$

4.3. $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$ болғанда $t=\sin x$ ауыстыруы, $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$ болғанда $t=\cos x$ ауыстырыуы енгізіледі.

Мысал 4.3. $\int\sin^3 x\cos x dx$ табылсын.

Шешуі. $(-\sin x)^3\cos x=-\sin^3 x\cos x$ болғандықтан $t=\sin x$ ауыстыруы енгізіледі.

$$\int\sin^3 x\cos x dx=\begin{vmatrix}t=\sin x\\ dt=\cos x dx\end{vmatrix}=\int t^3 dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C;$$

Мысал 4.4. $\int\cos^5 x\sin x dx$ табылсын.

Шешуі. $(-\cos x)^5\sin x=-\cos^5 x\sin x$ болғандықтан $t=\cos x$ ауыстыруы енгізіледі.

$$\int\cos^5 x\sin x dx=\begin{vmatrix}t=\cos x\\ dt=-\sin x dx\end{vmatrix}=-\int t^5 dt=\frac{t^6}{6}+C=-\frac{\cos^6 x}{6}+C.$$

4.4. $R(\sin x, \cos x)=\sin^m x\cdot\cos^n x$ болғанда:

а) егер m мен n оң жұп сандар болса, онда

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

түріндегі дәрежелерін төмендету формулары қолданылады;

б) егер m мен n тақ оң сандар болса, онда тақ дәрежеден бірінші дәрежелі көбейткішті ажыратып алып, дифференциал астына енгізіліп интеграл табылады.

Мысал 4.5. $\int \sin^4 x\, dx$ табылсын.

Шешуі. Берілген функцияда $m = 4, n = 0$. Бұл а) жағдай, оны дәрежелерін төмендету формулаларын қолданып интегралдаймыз:

$$\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot \frac{d(2x)}{2} + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x \cdot \frac{d(4x)}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Мысал 4.6. $\int \cos^3 x\, dx$ табылсын.

Шешуі. Берілген функцияда $m = 0, n = 3$. Бұл б) жағдай, тақ дәрежеден бірінші дәрежелі көбейткішті ажыратып интегралдаймыз:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

4.5. $R(\sin x, \cos x) = \sin mx \cdot \sin nx, R(\sin x, \cos x) = \sin mx \cdot \cos nx,$ $R(\sin x, \cos x) = \sin mx \cdot \cos nx$ болғанда,

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = 0{,}5[sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta)],$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0{,}5[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = 0{,}5[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

формулалар қолданылады.

Мысал 4.7. $\int \sin 7x \sin 3x dx$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл (4.5) жағдайға келеді.

$$\int \sin 7x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(7-3)x - \cos(7+3)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 10x) dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 4x \frac{d(4x)}{4} - \frac{1}{2}\int \cos 10x \frac{d(10x)}{10} = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

Мысал 4.8. $\int \sin 5x \cos 3x dx$ табылсын.

Шешуі. Мұнда да 4.5 жағдайға келеді.

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 8x \frac{d(8x)}{8} + \frac{1}{2}\int \sin 2x \frac{d(2x)}{2} = \frac{1}{16}(-\cos 8x) + \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C$$
$$= -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

§ 5. Иррационал және көрсеткішті функцияларды интегралдау

5.1. Квадраттық иррационалдықтарды интегралдау

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx, \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad (7.18)$$

түріндегі интегралдарды квадраттық иррационалдықтар деп атайды.

Бұл интегралдарды табу үшін алдымен түбір астындағы квадрат үшмүшеден толық квадрат ажыратылады:

$ax^2 + bx + \mathrm{c} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$

Содан соң, $t = x + \frac{b}{2a}$ ауыстыру жасалады. Нәтижеде алдыңғы екі интеграл кестелік интегралға келеді, екінші интеграл түрлендіру арқылы рационал функцияның интегралдауға келтіріледі, ал үшінші интеграл екі кестелік интегралдың қосындысы болады.

Мысал 5.1. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+3}}$ табылсын.

Шешуі. $4x^2 + 2x + 3 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = 4\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{16}\right]$ болғандықтан,

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{16}\right]}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{16}\right]}} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{16}}\right| + C.$$

Мысал 5.2. $J = \int \frac{x+2}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx$ табылсын.

Шешуі. $6 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 6) = -[(x+1)^2 - 7] = 7 - (x+1)^2$ болғандықтан, $t = x + 1$ деп ауыстырсақ, $x = t - 1$, $dx = dt$ болады. Сонда

$$J = \int \frac{t-1+2}{\sqrt{7-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{7-t^2}} + \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = \frac{-1}{2}\int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(7-t^2) +$$

$$+\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-t^2}}=-\sqrt{7-t^2}+\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}-\sqrt{6-2x-x^2}+C.$$

5.2. Бөлшекті-сызықтық иррационалдықтарды интегралдау

$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ бөлшекті-сызықтық иррационалдықтың рационал функциясы болсын, яғни $R(x,y), y=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ – екі айнымалдың рационал функциясы болсын. Мұнда a,b,c,d тұрақты нақты сандар, $ad-bc\neq 0, n$ кез келген оң бүтін сан

$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$ ауыстыру енгіземіз. Онда

$$x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n},\qquad dx=\frac{(ad-bc)n\cdot t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt \quad \text{болып,}$$

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt \qquad (7.19)$$

түріне келіп, элементар функцияларда өрнектелетін рационал функцияның интегралы болады.

(7.19) тектес теңдік, теңдіктің сол бөлігінде $\frac{ax+b}{cx+a}$ өрнектің әртүрлі дәрежелері болғанда да орындалады. Яғни,

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{P_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{P_2}{q_2}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{P_s}{q_s}}\right]dx \qquad (7.20)$$

түріндегі интегралдар.

$$t^k=\frac{ax+b}{cx+d}, \qquad (7.21)$$

мұндағы k саны $q_1,q_2,\dots,q_s$ сандарының ең кіші ортақ еселігі, ауыстыру арқылы рационал функцияны интегралдауға келтіріледі.

Мысал 5.3. $\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{1}{(2-x)^2}dx$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл (7.19) теңдіктің сол бөлігіндегі интеграл, мұнда $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{2-x}{2+x}$; $n=3$; $\frac{2-x}{2+x}=t^3$ жаңа айнымал енгізіп, x,dx шамаларды t,dt арқылы өрнектейміз:

$$2\text{-}x=t^3(2+x)\Rightarrow 2-2t^3=x+xt^3\Rightarrow 2-2t^3=x(1+t^3)\Rightarrow x=\frac{2-2t^3}{1+t^3};$$

$$2\text{-}x = 2-\frac{2-2t^3}{1+t^3}=\frac{4t^3}{1+t^3}\Rightarrow\frac{1}{2-x}=\frac{1+t^3}{4t^3}\Rightarrow\left(\frac{1}{2-x}\right)^2=\left(\frac{1+t^3}{4t^3}\right)^2$$
$$=\frac{(1+t^3)^2}{16t^6}.$$

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\frac{(1+t^3)^2}{16t^6};\ dx=\frac{-6t^2(1+t^3)-3t^2(2-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt.$$

Осы табылған өрнектерді берілген интегралға қойсақ:

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{1}{(2-x)^2}dx=\int t\cdot\frac{(1+t^3)^2}{16t^6}\cdot\frac{(-12t^2)}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8t^2}+C=$$
$$=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2}+C.$$

Мысал 5.4. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл (7.20) түріндегі интеграл. Мұнда $\frac{ax+b}{cx+d}=x$, яғни $a=1, b=0, c=0, d=1, \frac{P_1}{q_1}=\frac{1}{3}, \frac{P_2}{q_2}=\frac{2}{3}, \frac{P_3}{q_3}=\frac{1}{6}$ барлығының ортақ бөлімі 6, сондықтан $x=t^6$ ауыстыруды енгіземіз. Сонда $dx=6t^5dt, \sqrt[3]{x}=t^2, \sqrt[3]{x^2}=t^4$ болады. Демек,

$$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int\frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}6t^5dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\int\frac{t^3(t^2+1)+1}{1+t^2}dt=6\int t^3\,dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{3}{2}t^4+6\mathrm{arctg}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

5.3. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ (7.22)
түріндегі интегралдарды есептеу.

Белгілі бір шарттар орындалғанда (7.22) интеграл тиімді ауыстырулар арқылы рационал функцияны интегралдауға келтіріледі.

а) $a>0$ және $b^2-4ac<0$ болғанда.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x \qquad (7.23)$$

Эйлердің бірінші ауыстыруы арқылы интегралданады. Шынында да (7.23) теңдіктің екі бөлігін квадраттасақ $ax^2+bx+c=ax^2-2\sqrt{a}xt+t^2$ болып, бұдан

$$x\left(b+2\sqrt{a}\,t\right)=t^2-c, x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t}.$$

$$dx = \left(\frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}\,t}\right)' dt = \frac{2t\left(b + 2\sqrt{a}\,t\right) - (t^2 - c)\left(2\sqrt{a}\right)}{\left(b + 2\sqrt{a}\,t\right)^2} dt$$
$$= 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t + b\right)^2} dt$$

болады. Бұл өрнектерді (7.22) интегралға қойсақ,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx =$$

$$= \int R\left[\frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}\,t}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t + b}\right] \cdot 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t + b\right)^2} dt.$$

$$R_1(t) = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\,t + b}, R_2(t) = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t + b}, R_3(t) = \frac{2\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t + b)^2},$$

деп белгілесек,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R[R_1(t), R_2(t)]\; R_3(t) dt$$

теңдіктің оң бөлігі интегралданатын рационал функция.

б) $ax^2 + bx + c$ квадрат үшмүше $a > 0$, $x_1 \neq x_2$ нақты түбірлері бар, яғни $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Бұл жағдайда Эйлердің екінші ауыстыруы

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}, \left(\text{немесе}\, t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_2}\right) \qquad (7.24)$$

арқылы (7.22) интеграл рационал функцияны интегралдауға келтіреледі.

Шынында да, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ теңдікті квадарттаса, $a\left(x - x_2\right) = t^2(x - x_1)$ болып, бұдан

$$x = \frac{-ax_2 + x_1t^2}{t^2 - a}. \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a} \cdot t,\;\; dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt$$

өрнектер шығады. Яғни, (7.22) интеграл келесі түрге келеді:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{-ax_2 + x_1t^2}{{}^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a}\right) \frac{2a(x_2 - x_1)}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Бұл рационал функция, оның интегралы элементар функция болады.

в) $a < 0, c > 0$ болғанда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \qquad (7.25)$$

ауыстыруымен (7.22) интеграл рационал функцияны интегралдауға келтіріледі. Ол үшін (7.25) теңдіктің екі бөлігінде квадратқа көтеріп, x-ті t-ның рационал функциясы ретінде анықтаймыз:

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + \sqrt{c}2xt + c,\;\; \text{бұдан}\; x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

x, dx және $ax^2 + bx + c$ өрнектері t айнымалдың рационал функциялары болғандықтан ізделінді. (7.22) интегралыда t-ның рационал функциясын интегралдауға келтіріледі.

$$\text{г)} \int \frac{Q_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad (7.22а)$$

интегралын қарастырайық, мұнда $Q_n(x)$ n-дәрежелі көпмүше, $ax^2+bx+c>0$ болғанда интегралды табу үшін, оны былайша жіктейміз:

$$\int \frac{Q_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}d = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad (7.22б)$$

Мұндағы $Q_{n-1}(x)$ коэффициенттері белгісіз $(n-1)$ – дәрежелі көпмүше, λ – белгісіз коэффициент.

Белгісіз $Q_{n-1}(x)$ көпмүше мен λ коэффициентті табу үшін (7.22б) теңдіктің екі бөлігін де дифференциалдайық:

$$\frac{Q_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-2}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Бұл теңдіктің екі бөлігін де $\sqrt{ax^2+bx+c}$ өрнекке көбейтсек,

$$Q_n(x) = Q_{n-2}(x)(ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(x)(ax+b) + \lambda\,.$$

Енді белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып, яғни x-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестіріп, белгісіз шамаларды табамыз.

Ескерту 5.1. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+C}\right)dx$ түріндегі интегралдарды басқа да ауыстырулар арқылы рационалдауға болады. Түбір астындағы өрнектен толық квадрат ажыратып (5.1-ге қараңыз) $x+\frac{b}{2a}=t$ ауыстыруын енгізсек, онда берілген интеграл $\int \bar{R}\left(t, \sqrt{l^2-t^2}\right)dt, \int \bar{R}\left(t, \sqrt{l^2+t^2}\right)dt, \int \bar{R}\left(t, \sqrt{t^2-l^2}\right)dt$ түріндегі интегралдардың біреуіне келтіріледі. Бұл интегралдар көрсетілген ауыстырулар арқылы:

а) $\int \bar{R}\left(t, \sqrt{l^2-t^2}\right)dt, t = l\sin z$ немесе $t = l\cos z\,,$ (7.26)

б) $\int \bar{R}\left(t, \sqrt{l^2+t^2}\right)dt, t = l\mathrm{tg}\, z$ немесе $t = l\mathrm{ctg}\, z\,,$ (7.27)

в) $\int \bar{R}\left(t, \sqrt{t^2-l^2}\right)dt, t = \frac{l}{\cos z}$ немесе $t = \frac{l}{\sin z}$ (7.28)

жаңа z айнымалдың рационал функцияларын интегралдауға келтіріледі.

Мысал 5.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ табылсын.

Шешуі. Берілген функцияда $a=1>0, b^2-4ac=-16<0$ болғандықтан, (7.23) Эйлердің бірінші ауыстыруып қолданамыз: $\sqrt{x^2+4}=t-x$.

Сонда, $x^2+4=x^2-2xt+t^2$ Осыдан, $x=\frac{t^2-4}{2t}, dx = dt\frac{t^2+4}{2t^2},$

$$\sqrt{x^2+4} = -x+t = -\frac{t^2-4}{2t}+t = \frac{t^2+4}{2t}$$

Осы өрнектерді берілген интегралға қойсақ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{\frac{t^2+4}{2t^2}dt}{\frac{t^2+4}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

Бұл нәтижені кестенің

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, a \neq 0$$

12-формуласынан тікелей алуға да болады.

Мысал 5.6. $\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$ табылсын .

Шешуі. $c = 1 > 0$ болғандықтан, (7.25) ауыстыруын қолданамыз, $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$. Сонда: $1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1; x = \frac{2t-1}{1-t^2}; dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2} \cdot dt;$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}; 1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Алынған өрнектерді берілген интегралға қойсақ:

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dt = \frac{1}{2} \cdot 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt =$$

$$= \int \frac{t^2-t+1}{1-t^2}dt = \int \left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt = -t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right| + C.$$

Мысал 5.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+6}}$ табылсын.

Шешуі. $b^2-4ac = (-5)^2-4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$ болғандықтан (7.24) Эйлердің екінші алмастыруы бойынша, $\sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{(x-3)(x-2)} = t(x-2)$ ауыстыруын қолданамыз. Сонда, $(x-3)(x-2) = t^2(x-2)^2, x-3 = t^2(x-2), x(1-t^2) = 3-2t^2$,

$$x = \frac{3-2t^2}{1-t^2} = \frac{2t^2-3}{t^2-1};$$

$$dx = \frac{(-3+2t^2)'(t^2-1)-(2t^2-3)(t^2-1)'}{(t^2-1)^2}dt =$$

$$= \frac{4t(t^2-1)-2t(2t^2-3)}{(t^2-1)^2}dt =$$

$$= \frac{4t^3-4t-4t^3+6t}{(t^2-1)^2}dt = \frac{2tdt}{(t^2-1)^2}, t = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}},$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} = t\left(\frac{2t^2-3}{t^2-1}-2\right) = \frac{-t}{t^2-1};$$

Осы өрнектерді берілген интегралға қойсақ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+6}} = \int \frac{\frac{2t}{(t^2-1)^2}}{-\frac{t}{t^2-1}}dt = -2\int\frac{dt}{t^2-1} = 2\int \frac{dt}{1^2-t^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}}{1-\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}\right| + C = \ln\left|\frac{x-2+2\sqrt{x^2+5x+6}+x-3}{(x-2)-(x-3)}\right| + C =$$

$$= \ln\left|2x-5+2\sqrt{x^2+5x+6}\right| + C.$$

Мысал 5.8. $J = \int\frac{2(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл (–∞; +∞) аймақта (7.22б) түріндегі интеграл, тұрақты көбейткіш 2-ні интеграл алдына шығарып, интегралды (7.22) түрінде жіктейміз:

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = (Ax+B)\sqrt{x^2+2x+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

Бұл теңдіктің екі бөлігін де дифференциалдасақ,

$$\frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}} = A\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{(Ax+B)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+4}},$$

әрі соңғы теңдіктің екі бөлігін де $\sqrt{x^2+2x+4}$ өрнекке көбейтсек:

$$x^2+1 = A(x^2+2x+4)+(Ax+B)(x+1)+\lambda.$$

Енді белгісіз A, B, λ коэффициенттерін табу үшін x -тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз

$x^2 : 1 = A + A$

$x^1 : 0 = 2A + B + A$

$x^0 : 1 = 4A + B + \lambda.$

Бұл сызықтық жүйені шешсек: $A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}, \lambda = \frac{1}{2}.$

Сонда, берілген интеграл

$$J = 2 \cdot \int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+4} + 2\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} =$$

$$= (x-3)\sqrt{x^2+2x+4} + \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+3}} =$$

$$= (x-3)\sqrt{x^2+2x+4} + \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+3}\right| + C.$$

Мысал 5.9. $J = \int \frac{20dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ түріндегі интеграл. Сондықтан (7.26) түріндегі $x = 3\sin t$ ауыстырын қолданамыз.

Тұрақты көбейткіш 20-ны интеграл белгісі алдына шығарып, интегралды түрлендіреміз:

$$\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}} = \left|\begin{matrix} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t\, dt \end{matrix}\right| = \int \frac{3\cos t\, dt}{(9\sin^2 t + 16)3\cos t} =$$

$$= \int \frac{dt}{9\sin^2 t + 16(\cos^2 t + \quad \sin^2 t)} = \int \frac{dt}{(25\sin^2 t + 16\cos^2 t)} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t\,(25\,\mathrm{tg}^2 t + 16)} = \int \frac{d(\mathrm{tg}\, t)}{25\,\mathrm{tg}^2 t + 16} = \frac{1}{25}\int \frac{d(\mathrm{tg}\, t)}{\mathrm{tg}^2 t + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{20}\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{4}\mathrm{tg}\, t\right) + C.$$

Енді x айнымалға ораламыз:

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Сондықтан,

$$J = 20\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{3-x^2}} = \frac{20}{20}\mathrm{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}} + C = \mathrm{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}} + C\,;$$

Мысал 5.10. $J = \int \frac{2(x^2-x+1)}{3(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ түріндегі интеграл. Сондықтан, (7.27) $x = \mathrm{ctg}\, t$ ауыстыруын қолданамыз.

Тұрақты 2/3 көбейткішті интеграл белгісі алдына шығарып, интегралды түрлендіреміз:

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx = \left|\begin{matrix} x = \mathrm{ctg}t \\ dx = -\frac{dt}{\sin^2 t} \end{matrix}\right| = \int \frac{\mathrm{ctg}^2 t - \mathrm{ctg}\, t + 1}{(\mathrm{ctg}^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(-\frac{dt}{\sin^2 t}\right) =$$

$$= \int (\mathrm{ctg}^2 t - \mathrm{ctg}\, t + 1)(-\sin t)dt = \int \left(\cos t - \frac{1}{\sin t}\right)dt =$$

$$= \int \cos t\, dt - \int \frac{dt}{\sin t} = \sin t - \ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \sin t + \ln\left|\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\right| + C$$

x аргументіне өту үшін тригонометрияның формулаларын пайдаланамыз:

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2 t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \mathrm{ctg}\frac{t}{2} = \frac{\cos t + 1}{\sin t} = \mathrm{ctg}\, t + \frac{1}{\sin t} = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Сондықтан,

$$J = \frac{2}{3}\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{2}{3\sqrt{x^2+1}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Мысал 5.11. $J = \int \frac{\sqrt{6}dx}{(x^2+2)(\sqrt{x^2-1})}$ табылсын.

Шешуі. Берілген интеграл $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ түріндегі интеграл. Сондықтан, (7.28) $x = \frac{1}{\cos t}$ ауыстыруын енгіземіз. Тұрақты $\sqrt{6}$ көбейткішті, интеграл алдына шығарып, интегралды түрлендіреміз.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)(\sqrt{x^2-1})} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t\, dt}{1 + 2\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{\cos t\, dt}{3 - 2\sin^2 t} = \int \frac{d \sin t}{3 - 2\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int \frac{d\sin t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin t}{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sin t} \right| + c_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\sin t}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\sin t} \right| + c_1.$$

Енді x аргументке өтеміз:

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \cos t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}{\frac{1}{\cos t}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

екендігін ескерсек.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)(\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{x^2-1}} \right| + c_1.$$

Сондықтан, $J = \int \frac{\sqrt{6}dx}{(x^2+2)(\sqrt{x^2-1})} = \ln \sqrt{\left| \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{x^2-1}} \right|} + c.$

5.4. Дифференциалдық биномды интегралдау

Дифференциалдық бином деп $x^m(a + bx^n)^p$ функциясын атайды. Мұндағы $a \neq 0, b \neq 0$ нақты сандар, ал m, n, p -рационал сандар.

$$\int x^m\,(a+bx^n)^P dx \qquad (7.29)$$

дифференциалдық биномның интегралын қарастырайық.

Теорема 7.6. (Чебышев П. А.)

Дифференциалдық биномның интегралы келесі үш жағдайда ғана рационал функцияны интегралдауға келтіріледі:

1. p бүтін сан; $x = t^k$ ауыстыруы қолданылады, мұндағы k саны m және n бөлшектерінің ең кіші ортақ еселігі;

2. $\frac{m+1}{n}$ бүтін сан; $a+bx^n = t^s$ ауыстыруы қолданылады, мұндағы s саны p бөлшектің бөлімі;

3. $\frac{m+1}{n}+p$ бүтін сан; $ax^{-n}+b = t^s$ ауыстыруы қолданылады, мұндағы s саны p бөлшектің бөлімі.

Дәлелдеуі. (7.29) интегралды $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$ ауыстыруы арқылы түрлендірсек:

$$\int x^m\,(a+bx^n)^P dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^P\, t^{\frac{m+1}{n}-1}\, d = \frac{1}{n}\int (a+bt)^P\, t^q dt \qquad (7.29a)$$

мұндағы $q = \frac{m+1}{n} - 1$ рационал сан.

1. p – бүтін сан болсын. Сонда q рационал сан болғандықтан, оны қысқаша $\frac{r}{s}$ деп белгілесек, соңғы интеграл иррационал функцияның интегралына келтіріледі:

$$\int (a+bt)^P\, t^q dt = \int R\left(t, t^{\frac{r}{s}}\right) dt.$$

Ал бұл интеграл $t = z^s$ ауыстыруымен рационалданады.

2. $\frac{m+1}{n}$ бүтін сан болсын. Онда $q = \frac{m+1}{n} - 1$ саны да бүтін сан болады. $p = \frac{r}{s}$ рационал сан болсын, мұндағы r мен $s > 0$ бүтін сандар.

Бұл жағдайда $(a+bt^n)^P t^q$ дифференциалдық бином $R\left[t, (a+bt)^{\frac{1}{s}}\right]$ иррационал функциясына келтіріледі: $(a+bt^n)^P t^q = R\left[t, (a+bt)^{\frac{1}{s}}\right]$

Демек,

$$t = \frac{z^s - a}{b}, x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, z^s = a + bt = a + bx^n$$

ауыстыруы жәрдемімен (7.29) интеграл рационалданады.

3. $\frac{m+1}{n}+p$ бүтін сан болсын. Онда $\frac{m+1}{n} + 1 + p = q + p$ бүтін сан болады, $p = \frac{r}{s}$ рационал сан, мұнда r мен $s > 0$ бүтін сандар. Бұл жағдайда дифференциалдық биномды түрлендіріп,

$$(a+bt^n)^P t^q = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^P \cdot t^{P+q} = R\left(t, \frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

теңдігін аламыз. Демек $z^s = \frac{a+bt}{t} = \frac{a+bx^n}{x^n}$ ауыстыруын қолдансақ, (7.29) интеграл рационалданады.

Мысал 5.11. $\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx$табылсын.

Шешуі. Интеграл астындағы функция дифференциалдық бином, мұнда $m =-\frac{2}{3}, a = 1, b = 1, n = \frac{2}{3}, p = -1$. $p =-1$ бүтін сан, яғни бірінші жағдай.

$t = x^n = x^{\frac{2}{3}}$ ауыстыруын енгізіп, иррационал функцияны интегралдауға келтіреміз:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx = \left|\begin{matrix} t = x^{\frac{2}{3}}, dt = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx \\ x = t^{\frac{3}{2}}, dx = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \int t^{-1}(1+t)^{-1}\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{3}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-1}\,dt;$$

Ягни $q =-\frac{1}{2}$. Енді $t = z^2, dt = 2zdz$ ауыстыруын енгізсек,

$$\frac{3}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-1}\,dt = \frac{3}{2}\int z^{-1}(1+z^2)^{-1}2zdz = 3\int\frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= 3\,\mathrm{arctg}\,z + C = 3\mathrm{arctg}\,\sqrt{t} + C = 3\mathrm{arctg}\,x^{\frac{1}{3}} + C$$

Демек, $\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}\,dx = 3arctgx^{\frac{1}{3}} + C.$

Мысал 5.12. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$ табылсын.

Шешуі. Интеграл астындағы функция $x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ дифференциалдық бином. Мұнда $m = 3, n = 2, p =-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = 2$ бүтін сан, ал $q = \frac{m+1}{n} - 1 = 1$ бүтін сан болғандықтан, берілген интегралға екінші жағдайдағы ауыстыру формуласын қолданамыз:

$x^2 = t$ десек, онда $x = t^{\frac{1}{2}}, dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$ болып,

$$\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int t(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Соңғы интегралды рационалдыру үшін $1-t = z^2$ ауыстыруын енгіземіз. Сонда $t = 1-z^2, dt =-2zdz$ болады. Демек,

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int t(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\int(1-z^2)z^{-1}\ \ 2zdz = -\int(1-z^2)\,dz =$$

$$= \frac{z^3}{3} - z + C = \frac{z}{3}(z^2-3) + C = \frac{\sqrt{1-t}}{3}(-t-2) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2) + C.$$

Мысал 5.13. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ табылсын.

Шешуі. Интеграл астындағы функция дифференциалдық бином: $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1-x^4)^{-\frac{1}{4}}dx,$ мұнда $m = 0, n = 4, p =-\frac{1}{4}, \frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0$ болғандықтан, үшінші жағдайдағы $x^{-4} + 1 = t^4$ ауыстыруын енгіземіз:

$$x = (t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, dx = t^{-3}(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt, \sqrt[4]{1+x^4} = tx = t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Сондықтан,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt}{t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2-1}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right| + C.$$

5.5. $\int R(e^x)dx$ (7.30) түріндегі көрсеткішті функцияларды интегралдау.

(7.30) түріндегі интегралдар $t = e^x$ ауыстыруы арқылы рационал функцияларды интегралдауға келтіріледі. Шынында да, $t = e^x$ десек, $x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$ болып, (7.30) интеграл $\int \frac{R(t)}{t}dt$ түрге келеді.

Мысал 5.14. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+4}$ табылсын.

Шешуі. Бұл (7.30) түріндегі интеграл. $t = e^x$ ауыстыруын енгізсек, рационал функция шығады. Осы айнымалы t –ға байланысты функцияны интегралдап, қайтадан x айнымалыға ораламыз:

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+4} = \left|\begin{matrix} t = e^x, x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{matrix}\right| = \int \frac{t^2dt}{t(t+4)} = \int \frac{tdt}{t+4} =$$

$$= \int \frac{(t+4)-4}{t+4}dt = \int \left(1 - \frac{4}{t+4}\right)dt = \int dt - 4\int \frac{d(t+4)}{t+4} =$$

$$= t - 4\ln|t+4| + C = e^x - 4\ln(e^x+4) + C.$$

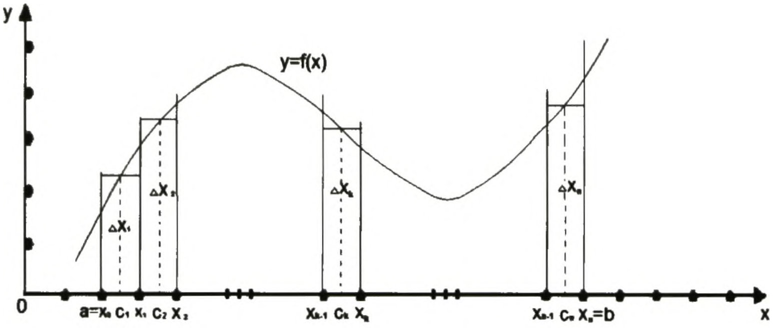
§ 6. Анықталған интеграл және оны есептеу

6.1. Анықталған интеграл және оның негізгі қасиеттері

$f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде анықталған және шенелген болсын. $[a;b]$ кесіндісін еркін түрде $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ шарттын қанағаттандырушы $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ нүктелермен n бөлікше кесінділерге бөлеміз. Әрбір $[x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$ бөлікше кесіндіде еркімізше бір c_k нүктесін алып, бұл бөлікшенің ұзындығын $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ деп белгілеп,

$$\sigma_n = \sigma_n(x_k, c_k) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \cdots f(c_k)\cdot\Delta x_k \quad (7.31)$$

түріндегі қосынды құрамыз. Бұл қосынды $f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі x_k, c_k нүктелерге сәйкес интегралдық қосындысы (Риман мағынасында) деп аталады. (сурет 7.1).



Сурет 7.1

Анықтама 6.1. (7.31.) интеграл қосындының $d = \max\Delta x_k \to 0 (n \to \infty)$ болғандағы J ақырлы шегі бар болса және ол шек $\{x_k\}, \{c_k\}$ нүктелерін таңдауға тәуелсіз болса, онда J саны $f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісі бойынша анықталған интегралы деп аталады және $\int\limits_a^b f(x)dx$ таңбамен белгіленеді.

$$\text{Демек,} \qquad J = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max\Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} f(c_k)\cdot\Delta x_k \qquad (7.32)$$

Мұндағы a және b сандары интегралдың сәйкес төменгі және жоғарғы шектері, x– интегралдау айнымалы, $f(x)$– интеграл астындағы функция деп аталады.

"ε- δ" тілінде де анықталған интегралды анықтауға болады.

Анықтама 6.2. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $d < \delta$ болғанда, c_k нүктелерді таңдауға тәуелсіз, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k - J\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда J саны $f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісі бойынша анықталған интегралы деп аталады.

Бұл екі анықтама өзара эквивалент анықтамалар.

f функциясының интегралдық қосындысы $\sigma_r = \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k$ түрінде жазылғандықтан интегралдау айнымалын кез келген әріппен белгілеуге болады:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

Мысал 6.1. Анықтамаға сүйеніп $\int_a^b cdx, c = \text{const}, a < b$, есептелсін.

Шешуі. $[a; b]$ кесіндіні $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1}, x_n = b$ нүктелермен еркімізше n бөлікке бөліп, (7.31) интегралдық қосынды құраймыз. $f(x) = c$ болғандықтан, әрбір бөлікшеде c_k нүктелерді кез келген таңдауда интегралдық қосынды

$$\sigma_n = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + \cdots + c\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k =$$

$$= c[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \cdots + (b - x_n)] = c(b - a)$$

болады. Яғни, интегралдық қосынды қалайша бөлуге және әрбір бөлікшеде c_k нүктелерді алуға байланысты емес. Демек, $d = \max\Delta x_k \to 0$ болғанда да сол шамаға тең болады.

Сондықтан, анықтама бойынша

$$\int_a^b cdx = \lim_{d\to 0(n\to\infty)} \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c(b - a)$$

Мысал 6.2. Анықтамаға сүйеніп $\int_a^b e^x dx$ есептелсін.

Шешуі. $[a;\ b]$ кесіндіні өзара тең n бөлікке бөлеміз:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x,\ \Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Әр бөлікшеде c_k нүкте ретінде сол шеткі нүктені алып, (7.31) интегралдық қосындыны құрамыз:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= e^a \cdot \Delta x + e^{a+\Delta x} \cdot \Delta x + \cdots + e^{a+(n-1)\Delta x}\ \ \Delta x\\ &= e^a\left(1 + e^{\Delta x} + \cdots + e^{(n-1)\Delta x}\right) \cdot \Delta x.\end{aligned}$$

Мұндағы жақша ішіндегі өрнек еселігі $e^{\Delta x}$ болған геометриялық прогрессия, оның бірінші мүшесі бірге тең, демек,

$$\sigma_n = e^a \cdot \frac{e^{a\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \cdot \Delta x = e^a(e^{n\Delta x} - 1) \cdot \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1},$$

$n \cdot \Delta x = b- a$, Лопиталь ережесі бойынша

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)'}{(e^{\Delta x} - 1)'} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{e^{\Delta x}} = 1$$

болғандықтан, $\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x\to 0}} \sigma_n = e^a \cdot (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a$ немесе $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$ болады.

Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері:

1°. Егер $a = b$ болса, келісім бойынша:

$$\int_a^a f(x)dx = o. \tag{7.33}$$

2°. Егер $a > b$ болса, анықтама бойынша

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{7.34}$$

Келесі теңдіктердегі және теңсіздіктердегі интегралдар бар болсын.

3° a, b, c нүктелері қандай ретте орналасса да,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{7.35}$$

Дәлелдеуі. 1) $a < c < b$ болсын. (7.31) интегралдық қосындының шегі бөліктеу нүктелеріне тәуелсіз болғандықтан, c нүктесін кез келген бөліктеудің бір нүктесі, мысалы $c = x_m$, деп аламыз. Сонда интегралдық қосындыны екі қосылғышқа бөлеміз:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(c_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Соңғы теңдікте $d \to 0$ деп шекке көшсек, (7.33) теңдік шығады.

2) $a < b < c$ болсын. Онда 1) жағдай бойынша $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ болады. (7.34) теңдік бойынша $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$ болады да, соңғы теңдіктен (7.35) теңдік алынады.

Басқа жағдайлар да осы сияқты дәлелденеді.

4° Тұрақты көбейткішті анықталған интеграл белгісінің алдына шығаруға болады:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, \; A=\text{const}. \tag{7.36}$$

Дәлелдеуі. Шынында да, анықталған интегралдың анықтамасы бойынша

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} Af(c_k)\Delta x_k = A \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = A \int_a^b f(x)dx.$$

5°. Функциялардың алгебралық қосындысының анықталған интегралы қосылғыштардың анықталған интегралдарының алгебралық қосындысына тең:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (7.37)$$

Дәлелдеуі. Анықталған интегралдың анықтамасы бойынша:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) \pm g(c_k)]\Delta x_k =$$

$$= \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \pm \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Ескерту 6.1. 5° қасиет ақырлы санды функциялардың алгебралық қосындысы үшін де орындалады.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)dx \quad (7.37а)$$

4° мен 5° қасиеттер анықталған интегралдың сызықтық қасиеті деп аталады.

6°. Егер $[a;\ b]$ кесіндінің барлық нүктелерінде $f(x) \geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ болады.

Дәлелдеуі. Шынында да $f(c_k) \geq 0, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, n$ болғандықтан $f(x)$ функциясы үшін $[a;\ b]$ кесіндіде кез келген интегралдық қосынды теріс болмайды. Сонда, $\lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq 0$, демек $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7°. Егер $[a;\ b]$ кесіндінің барлық нүктелерінде $f(x) \leq g(x)$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \qquad (7.38)$$

Дәлелдеуі. $g(x) - f(x) \geq 0$ функцияға 6° бағалауды қолдансақ:

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0, \text{ яғни } \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

8°. $[a;\ b]$ кесіндіде интегралданушы $f(x)$ функциясы үшін

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (7.39)$$

теңсіздігі орынды.

Дәлелдеуі. $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ айқын теңсіздіктерді мүшелеп интегралдасақ, 7° қасиет бойынша

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Осы қос теңсіздік (7.39) теңсіздікке пара-пар.

Салдар 1.1. $[a; b]$, $a < b$, кесіндіде $|f(x)| < c$ болса, онда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le c(b-a). \tag{7.40}$$

Дәлелдеуі. Шынында да, $|f(x)| < c$ және (7.38) (7.39) теңсіздіктерден:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b cdx = c\int_a^b dx = c(b-a)$$

Ескерту 6.2. Егер f функциясы $[a; b]$ кесіндіде интегралданса, онда $|f|$ функциясы да осы кесіндіде интегралданады ([1], 334 б.). Керісінше, $|f|$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде интегралданса, f функциясы осы кесіндіде интегралданбауы мүмкін. Мысалы, $f(x)=\begin{cases} -1, x - \text{рационал} \\ 1, x \ \ \text{иррационал} \end{cases}$ функциясы кез келген $[a; b]$ кесіндіде интегралданбайды, ал $|f| = 1$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде интегралданады.

9°. Егер $[a; b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының ең кіші мәні m және ең үлкен мәні M болса, онда:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{7.41}$$

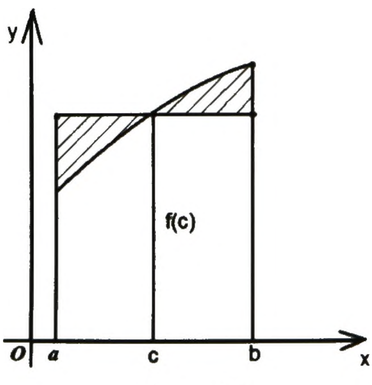
Дәлелдеуі. Шарт бойынша, кез келген $x \in [a; b]$ үшін $m \le f(x) \le M$ теңсіздіктері орынды. Бұл теңсіздіктерді мүшелеп интегралдасақ, (7.38) теңсіздік бойынша:

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx,$$

$m\int_a^b dx = m(b-a)$, $M\int_a^b dx = M(b-a)$ екенін ескерсек, соңғы теңсіздіктерден (7.41) теңсіздік шығады.

10°. **Теорема 7.7.** (орта мән туралы). Егер $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда осы кесіндіде c нүкте табылып, мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \tag{7.42}$$



Сурет 7.2

Дәлелдеуі. Шарт бойынша $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз болғандықтан, Вейерштрастың екінші теоремасы бойынша $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ сандары табылып $m \leq f(x) \leq M$ теңсіздіктері орынды болады.

Онда (7.41) теңсіздіктер орындалады,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Демек, $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$.

Үзіліссіз функцияның (Теорема 5.29) аралық мән туралы тұжырымына сәйкес $c \in [a; b]$ нүкте табылып, бұл нүктеде $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$ болады.

Ескерту 6.3. Орта мән туралы теорема, $[a; b]$ кесіндіде $f(x) \geq 0$ болса, қарапайым геометриялық мағынаға ие: анықталған интегралдың шамасы табаны $b - a$, биіктігі $f(c)$ болатын тіктөртбұрыштың ауданына тең (сурет 7.2).

6.2. Анықталған интегралды есептеу

$f(x) = \begin{cases} -1, x - \text{рационал} \\ 1, x - \text{иррационал} \end{cases}$ шенелген функция болса да кез келген кесіндіде интегралданбайды.

Демек, $f(x)$ функциясының шенелгендігі оның интегралдануын қамтамасыз етпейді. Сондықтан функция интегралдануы үшін қосымша қасиеттерге ие болуы керек.

1. Үзіліссіз функциялардың интегралының бар болуы

Теорема 7.8. (функция интегралдануының жеткілікті шарты).

Егер $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде интегралданады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз. Демек, ол Кантор теоремасы бойынша осы кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз.

Яғни, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|x'' - x'| < \delta$ шартын қанағаттандырушы кез келген $x', x'' \in [a; b]$ нүктелер үшін

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (7.43)$$

теңсіздігі орындалады.

Осы $\delta > 0$ саны

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

теңсіздіктің орындалуын қамтамасыз ететіндігін көрсетеміз.

τ бөліктеу $[a;\ b]$ кесіндіні ұзындығы $\Delta x_k \le d < \delta$ теңсіздігі орындалатын $[x_{k-1}, x_k]$ бөлікшелерге бөлсін. Әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ бөлікшеге орта мән туралы теорема (7.7)-ні қолдансақ,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = f(c_k^*)\ \Delta x_k,\ x_{k-1} \le c_k^* \le x_k,\ k = 1, 2, \dots, n$$

Барлық бөлікшелер үшін бұл теңдіктерді қоссақ:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(c_k^*)\Delta x_k = \sigma_n^*.$$

Енді әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ бөлікшеде кезкелген c_k нүктесін аламыз. Сонда

$$\sigma_n - \int_a^b f(x)dx = \sigma_n - \sigma_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - \sum_{k-1}^{n} f(c_k^*)\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[f(c_k) - f(c_k^*)\right]\Delta x_k,$$

$|c_k - c_k^*| \le \Delta x_k \le d < \delta$ болғандықтан, (7.43) теңсіздікті ескерсек,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

теңсіздігі шығады.

Теорема 7.8а. $[a;\ b]$ кесіндіде бірсарынды функциялар мен бөлікті-үзіліссіз, яғни бірінші текті үзіліс нүктелері ақырлы, функциялар да интегралданушы функциялар болады.

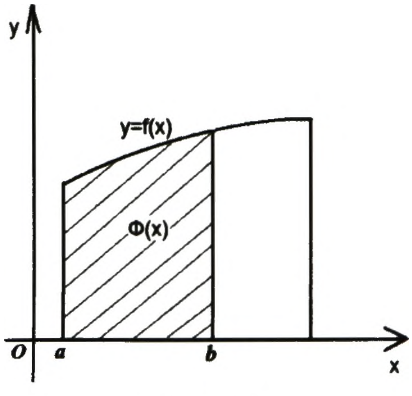
([1], гл. 13, §2)

2. Кезкелген үзіліссіз функцияның алғашқы функциясының бар болуы

$f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндіде интегралданатын болсын. Онда ол кез келген $x \in [a;\ b]$ нүктесі үшін $[a;\ x]$ кесіндіде интегралданады.

Әрбір $x \in [a;\ b]$ санына $\int_a^x f(t)dt$ мәні сәйкес келетіндіктен

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (7.44)$$



Сурет 7.3

интегралдың жоғарғы айнымал шегіне тәуелді функция (сурет 7.3).

Теорема 7.9. Егер $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда $\Phi'(x) = f(x)$.

Дәлелдеуі. $\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$ екенін көрсетеміз. Кез келген $x \in [a;\ b]$ айнымалды белгілеп, $x + \Delta x \in [a;\ b]$ болатындай Δx өсімше береміз, яғни,
$a < x + \Delta x \leq b$ Онда $\Phi(x)$ функция жаңа мән қабылдайды: $\Phi(x+\Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt$ (7.35) теңдікке сәйкес $\Phi(x + \Delta x) = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ болады.
Орта мән туралы (7.42) формула бойынша:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\,\Delta x.$$

Теореманың шарты бойынша $f(x)$ үзіліссіз.

Сондықтан,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x),$$

өйткені c нүктесі x пен $x + \Delta x$ арасында жатады.

Демек (7.44) теңдікпен анықталған **Ф**(x) функция $f(x)$ функциясының $[a;\ b]$ кесіндідегі алғашқы функциясы болады екен.

3. Ньютон-Лейбниц формуласы

Теорема 7.10. Егер $f(x)$ фукнциясы $[a;\ b]$ кесіндіде үзіліссіз, ал $F(x)$ функциясы осы кесіндіде оның қандайда бір алғашқы функциясы, яғни $F\,'(x) = f(x)$ болса, онда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{7.45}$$

формула орынды.

(7.45) формула Ньютон-Лейбниц формуласы деп аталады.

Дәлелдеуі. $F\,(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының $[a;\ b]$ кесіндіде алғашқы функциясы болсын.

Теорема 7.9 бойынша **Ф**$(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ функциясы да алғашқы функция.

Екі алғашқы функцияның айырымы тұрақты сан. Сондықтан,

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + c.$$

Бұл теңдікте $x = a$ десек, $F(a) + c = 0$, $c = -F(a)$; $x = b$ десек, $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Мұндағы t-ның орнына x-ты қойсақ (7.45) формула шығады.

Шартты түрде $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ немесе $F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$ түрінде жазады.

Сонымен (7.45) Ньютон-Лейбниц формуласы:

а) анықталған интеграл мен анықталмаған интегралдың арасында байланыс орнатты;

б) үзіліссіз функциялар үшін анықталған интегралды есептеудің қарапайым тәсілін көрсетті.

Мысал 6.3. Ньютон-Лейбниц формуласын қолданып анықталған интегралдар есептелсін:

а) $\int\limits_2^3 3x^2dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/4} \cos 2xdx$.

Шешуі. а) $f(x) = 3x^2$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $F(x) = x^3$ функциясы. (7.45) Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша:

а) $\int\limits_2^3 3x^2dx = 3\int\limits_2^3 x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19;$

б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_{-1}^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2};$

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

Теорема 7.11. Егер $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, ал $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha; \beta]$ кесіндіде үзіліссіз және $\varphi'(t)$ туындысы бар болып, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ шарттарын қанағаттандырса, онда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt \qquad (7.46)$$

айнымалды ауыстыру формуласы орынды болады.

Дәлелдеуі. (7.45) Ньютон-Лейбниц формуласы бойына $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, мұндағы $F(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз және $f(x)$ функциясының кейбір алғашқы функциясы. Енді $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ күрделі функцияны қарастырайық. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)] \quad \varphi'(t) = f\,[\varphi(t)] \quad \varphi'(t),$$
яғни $\Phi(t)$ функциясы $[\alpha;\ \beta]$ кесіндіде $f[\varphi(t)] \quad \varphi'(t)$ функциясы үшін алғашқы функция. Сондықтан (7.45) формула бойынша

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] = F(b) - F(a) = \int f(x)dx.$$

Мысал 6.4. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx$ есептелсін.

Шешуі. $x = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ ауыстыруын енгіземіз. Бұл ауыстыру теорема 7.11-дің барлық шарттарын қанағаттандырады. Біріншіден, $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$ функциясы $[0;\ a]$ кесіндіде үзіліссіз, екіншіден, $x = a\sin t$ функциясы $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндіде үзіліссіз және $x' = a\cos t$ туындыға ие, әрі t айнымал 0-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін өзгергенде 0-ден a-ға дейін өседі де, $\varphi(0) = 0$ және $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$. $dx = (a\sin t)'dt = a\cos dt$ болғандықтан (7.46) формуланы қолдансақ:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2dx} = \left| \begin{matrix} x = a\sin t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ dx = a\cos tdt \end{matrix} \right| =$$

$$= a^4 \int_0^{\pi/2} sin^2t \cdot cos^2tdt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2} sin^2 2tdt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Ескерту 6.4. (7.46) формуланы қолданғанда теорема 7.11 шарттарының орындалуын мұқият тексеру керек

Мысал 6.5. $\int_0^{\pi} dx$ есептелсін.

Шешуі. Бұл интегралды тікелей есептеуге болады:

$$\int_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi.$$

Басқаша (7.46) формуланы қолданып есептесек:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \left| \begin{matrix} t = \mathrm{tg}x, \mathrm{tg}\,0 = 0,\ \mathrm{tg}\,\pi = 0 \\ x = \mathrm{arctg}\,t,\ dx = \dfrac{dt}{1 + t^2} \end{matrix} \right| = \int_0^0 \frac{dt}{1 + t^2} = 0$$ Бұл дұрыс нәтиже емес, себебі $\pi \ne 0$, қатенің себебі $\mathrm{tg}x$ функциясы $x = \frac{\pi}{2}$ нүктеде үзілісті.

Теорема 7.12. Егер $U(x)$, $V(x)$ функциялар мен олардың туындылары $U'(x)$, $V'(x)$ функциялары $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда

$$\int_a^b U(x)dV(x) = U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)dU(x) \qquad (7.47)$$

формула орынды болады.

(7.47) формула анықталған интегралда бөліктеп интегралдау формуласы деп аталады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша $U(x)$, $V(x)$ функциялары $[a; b]$ кесіндіде үзіліссіз дифференциалданушы, сондықтан

$$[U(x)\quad V(x)]' = U(x)\quad V'(x) + U'(x)\cdot V(x).$$

Бұл теңдіктен $[a; b]$ кесіндіде $U(x)\quad (x)$ функциясы үшін үзіліссіз $U(x)$ $'(x) + U'(x)\quad (x)$ функциясы алғашқы фукнция. Демек, теңдіктің екі бөлігі де үзіліссіз функциялар, яғни олар интегралданушы функциялар. Соңғы теңдіктің екі бөлігін де интегралдасақ

$$\int_a^b [U(x)\cdot V(x)]'dx = \int_a^b [U(x)\cdot V'(x) + U'(x)\cdot V(x)]'dx$$

Интегралдың анықтамасын, оның негізгі қасиеттерін және $dU(x) = U'(x)dx$, $dV(x) = V'(x)dx$ екенін ескерсек $U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b = \int_a^b U(x)dV(x) + \int_a^b V(x)dU(x)$ болып, бұдан (7.47) формула шығады.

Мысал 6.6. $\int_0^2 \ln(1+x)dx$ есептелсін.

Шешуі. (7.47) формула бойынша:

$$\int_0^2 \ln(1+x)dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln(1+x),\ dV = dx \\ dU = \dfrac{1}{1+x}dx, V = \int dV = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln|1+x|\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{xdx}{1+x} = 2\ln 3 - \int_0^2 \frac{1+x-1}{1+x}dx =$$

$$= \ln 3^2 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = \ln 9 - \int_0^2 dx + \int_0^2 \frac{d(1+x)}{1+x} =$$

$$= \ln 9 - x\Big|_0^2 + \ln(1+x)\Big|_0^2 = \ln 9 - 2 + \ln 3 = 3\ln 3 - 2.$$

§ 7. Анықталған интегралдың кейбір қолданулары

Анықталу аймағы $[a;\ b]$ кесіндісінде болған тәуелсіз айнымал x-ке байланысты аддитивті A шаманың мәнін табу керек болсын. Яғни A шаманың $[a;\ b]$ кесіндісіндегі барлық мәні бөлікшелердегі мәндерінің қосындысына тең.

Аддитивті A шама негізінен екі тәсілмен табылады.

Бірінші тәсіл – интегралдық қосындылар тәсілі. Мұнда:

1. $[a;\ b]$ кесінді $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен n бөлікке бөлінеді. Осыған байланысты A шама Δx_k бөлікшелерге сәйкес ΔA_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) элементар қосылғыштарға бөлінеді, $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots + \Delta A_n$.

2. Әрбір элементар қосылғышты сәйкес бөлікшенің ұзындығы мен есептің шартымен анықталған кейбір функцияның осы бөлікшедегі кез келген нүктесіндегі мәнінің көбейтіндісі түрінде жазылады, яғни $\Delta A_k \approx f\,(c_k)\Delta x_k$.

ΔA_k -ның жуық мәнін тапқанда әртүрлі ықшамдаулар жасалады. Нәтижеде A-ның жуық мәні интегралдық қосынды түрінде алынады:

$$A \approx f\,(c_1)\Delta x_1 + f\,(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f\,(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k$$

3. A шаманың дәл мәні интегралдық қосындының шегіне тең:

$$A = \lim_{\substack{d\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{c}_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Екінші тәсіл – “дифференциал тәсілі” Бұл “интегралдық қосындылар тәсілінің” ықшамдалған түрі. Мұнда жоғарғы ретті ақырсыз кішкене шамалар есепке алынбайды:

1) $[a;\ b]$ кесіндіде кез келген x нүктені алып, $[a,\ x]$ айнымал кесіндіні қараймыз. Бұл кесіндіде A шама x-тің функциясы болады, яғни $A = A(x)$.

2) x айнымалға Δx өсімше беріп, $x + \Delta x \in [a;\ b]$, ΔA өсімшенің бас бөлігі dA дифференциалды табамыз. $dA = f\,(x)dx$, $dx = \Delta x$, мұндағы $f\,(x)$ есептің шарты бойынша анықталған функция.

3) $\Delta x \to 0$ болғанда $dA \approx \Delta A$ деп есептеп, $A = A(b)$ шаманы табамыз:

$$A = A(b) = \int_a^b f(x)dx$$

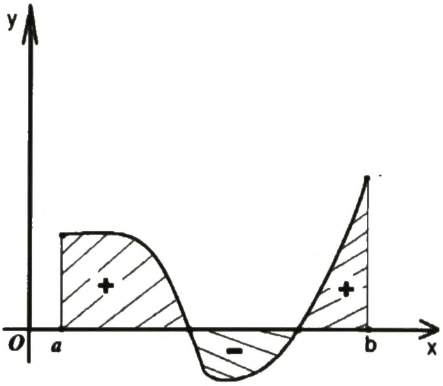
7.1. Жазық фигуралардың ауданын табу

1. Тікбұрышты координаталарда фигураның ауданын табу

Анықтама 7.1. Тікбұрышты декарт координаталар жүйесінде үзіліссіз $y = f\,(x) \geq 0$ фукнцияның графигі және $y = 0,\ \ x = a,\ x = b$ түзулермен шенелген фигураны қисықсызықты трапеция деп атайды.

Осы қисықсызықты трапецияның S ауданын есептейік.

S ауданды дифференциал тәсілін қолданып табайық: кез келген $x \in [a; b]$ нүктені алып, $S = S(x)$ деп есептейміз; x айнымалға $\Delta x = dx$, $x + \Delta x \in [a; b]$ өсімше берсек, $S = S(x)$ функция ΔS өсімше алады, бұл табаны $[x, x + \Delta x]$ болатын қисықсызықты трапеция болып, $\Delta x \to 0$ болғанда $dS = f(x)dx$ болады. Яғни табаны dx, биіктігі $f(x)$ болған тіктөртбұрыштың ауданына жуықтап тең болады. Сонда қисықсызықты трапецияның ауданы (сурет 7.4) келесі теңдікпен анықталады:



Сурет 7.5

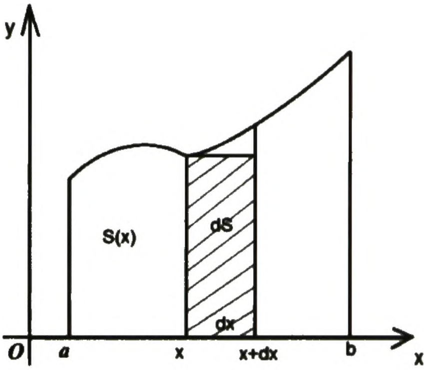
$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (7.48)$$

Егер $[a, b]$ кесіндіде $f(x) \leq 0$ болса, онда (сурет 7.5)

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (7.48a)$$

(7.48), (7.48a) формулаларды біріктірсек:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$



Сурет 7.4

Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ кесіндіде оң да, теріс те мәндерді қабылдаса, онда үзіліссіз $f(x)$ қисық $y = 0$, $x = a$, $x = b$ түзулермен шенелген фигураның ауданы. (7.48), (7.48a) формулаларды ескерсек:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (7.49)$$

формуламен есептеледі.

Мысал 7.1. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, синусоида және Ox осімен шенелген фигураның ауданы табылсын.

Шешуі. $0 \leq x \leq \pi$ болғанда $\sin x \geq 0$, ал $\pi \leq x \leq 2\pi$ болғанда $\sin x \leq 0$ екендігін ескерсек, (7.48), (7.48a), (7.49) формулалары бойынша

$$S = \int_0^\pi \sin x dx + \left|\int_0^{2\pi} \sin x dx\right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx.$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -(-1 + 1) = -2.$$

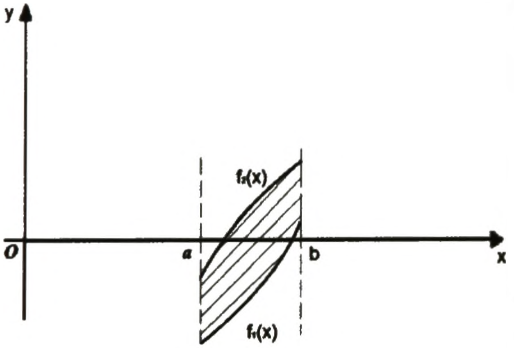
Демек, $S = 2 + |-2| = 4$.

Егер фигура $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, мұнда $f_2(x) \geq f_1(x)$, үзіліссіз функциялардың графигімен және $x = a$, $x = b$, түзулермен шенелген болса, онда фигураның ауданы

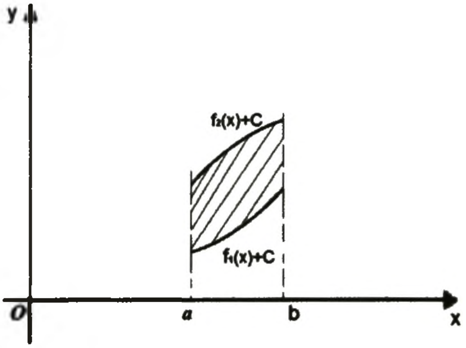
$$S = \int_a^b |f_2(x)| dx - \int_a^b |f_1(x)| dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \qquad (7.50)$$

формуламен есептеледі.

Дәлелдеуі. Шынында да $[a;\ b]$ кесіндіде $f_2(x) \geq 0$, $f_1(x) \geq 0$ үзіліссіз функциялар үшін (7.50) формуланың орындалуы айқын. Ал, егер $f_1(x)$, $f_2(x)$ үзіліссіз функциялар оң да, теріс те мәндерді қабылдап, $f_1(x) \leq f_2(x)$ шартын қанағаттандырса, онда $f_1(x) + C \geq 0$, $f_2(x) + C \geq 0$ болатындай етіп C тұрақты санын қоссақ (сурет 7.6), бұл функциялар үшін (7.50) теңдігі орындалады. Ал $f_1(x) + C$, $f_2(x) + C$ функциялардың графиктерімен (сурет 7.7) және $x = a$, $x = b$ түзулермен шенелген фигураның ауданы өзгермейді, яғни S-ке тең, себебі екі функцияның графиктері де бірдей C шамаға параллель көшірілді.



Сурет 7.6



Сурет 7.7

(7.50) формула бойынша:

$$S = \int_a^b [f_2(x) + C] dx - \int_a^b [f_1(x) + C] dx =$$

$$= \int_a^b [(f_2(x) + C) - (f_1(x) + C)] dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

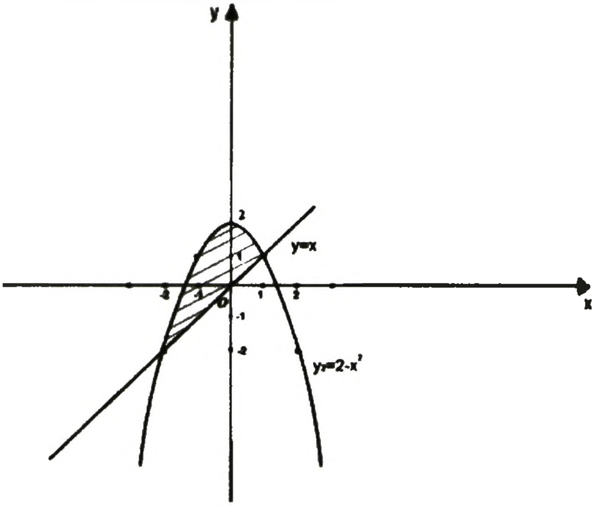
Мысал 7.2. $y = f_1(x) = x$ және $y = f_2(x) = 2 - x^2$ функцияларының графиктерімен шенелген фигураның ауданы табылсын (сурет 7.8).

Шешуі. Интегралдау шектерін табу үшін екі сызықтың қиылысу нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Бұл жүйенің шешімдері $a = x_1 = -2$, $b = x_2 = 1$. Енді (7.50) формуланы қолданып ізделінді ауданды табамыз:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[(2 - x^2) - x \right] dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \quad \text{кв бірлік..}$$



Сурет 7.8

Ескерту 7.1. Егер қисықсызықты трапеция $y = c$, $y = d$ түзулер, Oy осі және $x = \varphi(y) \geq 0$ үзіліссіз функцияның графигімен шенелген болса, онда қисықсызықты трапецияның ауданы:

$$S = \int_{c}^{d} \varphi(y) dy. \qquad (7.51)$$

Дәлелдеуі (7.48) формуланы дәлелденгендей жүргізіледі.

Мысал 7.3. $x = \sqrt{y}$ және $x = y^2$ функциялардың графиктерімен шенелген фигураның ауданы табылсын (сурет 7.9).

Шешуі. Интегралдау шектерін анықтау үшін келесі жүйені шешеміз

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y} = y^2 \Rightarrow y - y^4 = y(1 - y^3) = 0,$$

Демек, $c = y_1 = 0$, $d = y_2 = 1$.

Онда (7.51) формула бойынша:

$$S = \int_0^1 \sqrt{y} dy - \int_0^1 y^2 dy = \int_0^1 \left[\sqrt{y} - y^2 \right] dy = \left[\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{кв.б}$$

Ескерту 7.2. Егер қисықсызықты трапецияның жоғарғы шекарасы $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, параметрлік түрде берілсе және $[\alpha, \beta]$ кесіндіде $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ функциялары үзіліссіз болса, онда:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,dt, \tag{7.52}$$

мұнда: $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Шынында да, (7.48) теңдікте $x = \varphi(t)$ ауыстыруын енгізсек:

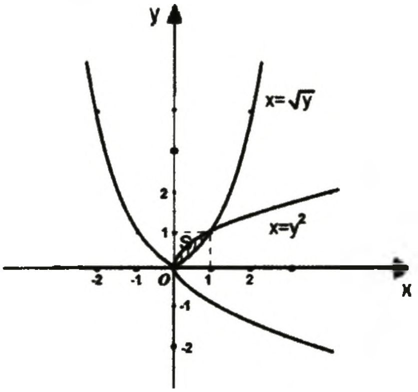
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi(t)dt \\ \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \end{matrix} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$$

Мысал 7.4. Теңдеуі $x = R \cdot \cos t$, $y = R \sin t$, $0 < t \leq 2\pi$, параметрлік түрде берілген дөңгелектің ауданы анықталсын.

Шешуі. Берілген теңдеулерді квадраттап қоссақ, $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбердің теңдеуі шығады. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ болғанда қисықсызықты трапеция $a = 0$, $b = R$, Ox осі және $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ функциясының графигімен шекараланған дөңгелектің ауданының $\frac{1}{4}$ бөлігі болады.

$t = 0$ болғанда, $x(0) = a = R$

$t = \frac{\pi}{2}$ болғанда, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = b = 0$



Сурет 7.9

Демек, (7.52) формула бойынша:

$$\frac{S}{4} = \int_{\pi/2}^{0} R\sin tR(-\sin t)dt = -R^2\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 tdt = R^2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 tdt = R^2\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt == \frac{R^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi R^2}{4}.\text{Демек}, S = \pi R^2.$$

Ескерту 7.3. Егер жазық фигура күрделі болса, яғни Oy осіне параллель түзулер фигураның шекарасын екіден көп нүктелерде қиып өтсе, онда бұл фигураны (7.48), (7.49), (7.50), (7.51) формулаларын қолданатындай етіп, (сурет 7.10) бөліктерге бөлеміз: $S = S_1 + S_2 + S_3$

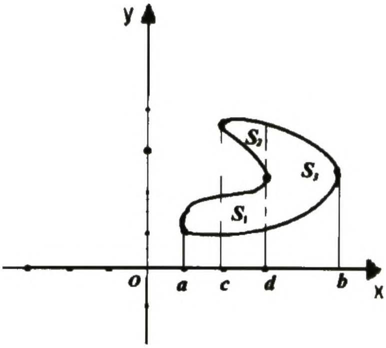
2. Қисықсызықты сектордың ауданы

Полярлық координаталарда AB қисығы

$$\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

теңдеуімен берілсін, мұнда $\rho(\varphi)$ функция $[\alpha, \beta]$ кесіндіде үзіліссіз болсын.

Анықтама 7.2. AB қисығымен және полярлық осьпен α мен β бұрыштар жасайтын, полярлық радиустармен шенелген жазық фигура қисықсызықты сектор деп аталады.

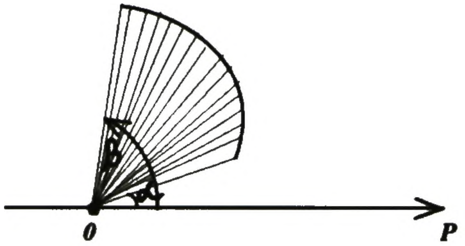


Сурет 7.10

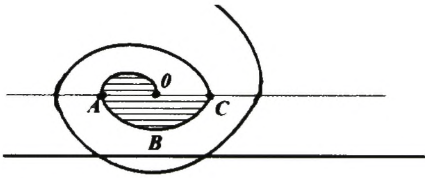
Теорема 7.14. Үзіліссіз ρ(φ) функцияның графигі φ = α және φ = β полярлық радиустармен шенелген қисықсызықты сектордың ауданы:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (7.53)$$

Дәлелдеуі. Интегралдық қосындылар тәсілін қолданамыз. [α, β] кесіндіні $\alpha_0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \cdots < \varphi_n = \beta$ сәулелермен n бөлікке бөлеміз (Сурет 7.11). Әрбір $[\varphi_{k-1}, \varphi_k], k = 1, 2, \dots, n$ дербес кесіндіде кез келген c_k нүктені таңдап, радиусы $\rho(c_k)$ болатын дөңгелек сектор құрамыз. Нәтижеде “Желпінгіш” тәрізді фигура алынып, бұл фигураның ауданы жуықтап S қисықсызықтық сектордың ауданына тең болады:



Сурет 7.11



Сурет 7.12

$$S \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho^2(c_k)\Delta\varphi_k\text{, мұндағы } \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}.$$

Ал бұл (7.53) интегралға сәйкес интегралдық қосынды.

Шарт бойынша ρ(φ) функциясы [α; β] кесіндіде үзіліссіз, сондықтан $\rho^2(\varphi)$ функциясы да осы кесіндіде үзіліссіз, яғни интегралданушы функция. Демек, $\max\{\Delta\phi_k\} \to 0$,

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\substack{\max\{\Delta\varphi_k\}\to 0\\ k=1,n}}\sum_{k=1}^{n}\rho^2(c_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Мысал 7.5. $\rho = a\varphi$, $a > 0$ (Архимед спиралы) функцияның графигінің бірінші айналымы және полярлық осьпен шенелген фигураның ауданы есептелсін (Сурет 7.12).

Шешуі. Айнымал φ шама 0 ден 2π-ге дейін өзгергенде, полярлық радиус *OABC* қисықсызықты секторды шенеуші қисықты сызады. $\rho = a\varphi$ функциясы $[0, 2\pi]$ кесіндіде үзіліссіз. Сондықтан ізделінді аудан (7.52) формула бойынша:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

7.2. Қисық сызық доғасының ұзындығы

1. Тікбұрышты координаталардағы қисық доғасының ұзындығы

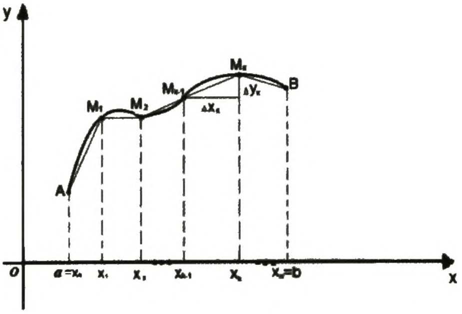
$[a, b]$ кесіндіде үзіліссіз $y = f(x)$ функциясының графигі *AB* қисық болсын. *AB* қисықты $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}, M_k, \ldots, M_n = B$ нүктелерімен n бөлікке бөлеміз. Осы нүктелерді қосқанда шығатын сынық сызықтың периметрін P_n деп алайық. Яғни $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\Delta P_k$, мұндағы $\Delta P_k = |M_{k-1}, M_k|$, ал осы буындардың ең үлкенін $d = \max\limits_{k=i,n}\{\Delta P_k\}$ деп белгілейміз.

Анықтама 7.3. Кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $d < \delta$ болатын әрқандай сынық сызық үшін $|L\text{-}P_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда L саны P_n периметрдің шегі деп аталады.

$L = \lim\limits_{d\to 0} P_n$ саны *AB* доғаның ұзындығы деп аталады.

Егер ақырлы шек $L = \lim\limits_{d\to 0} P_n$ бар болса, берілген *AB* қисығы – түзуленетін қисық, L – ол қисықтың ұзындығы деп аталады.

Теорема 7.15. Егер $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз туындысы $f'(x)$ бар болса, *AB* доғасы түзуленеді, ал оның ұзындығы



Сурет 7.13

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{7.54}$$

формула бойынша анықталады.

Дәлелдеуі. Еркінше алынған және $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ шартын қанағаттандыратын $x_0, x_1, x_2, \ \ldots\ , x_n$ нүктелерімен $[a; b]$

кесіндісін $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ бөлікше кесінділерге бөліктейміз де, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $d = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$ $\Delta y = f(x_k) - f(x_{k-1})$ деп белгілейміз (сурет 7.13).

Сонда, Пифагор теоремасы бойынша

$$\Delta P_k = |M_{k-1}M_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k.$$

Лагранж теоремасы бойынша:

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(c_k), c_k = [x_{k-1}, x_k].$$

Демек, $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

Онда, толық сынықтың ұзындығы $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\ \Delta x_k$ болады.

Бұл қосынды $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясы үшін интегралдық қосынды. Шарт бойынша $f'(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндіде үзіліссіз, сондықтан $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясы да үзіліссіз, яғни интегралданушы функция. Демек,

$$\lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\ \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Мысал 7.6. $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбердің ұзындығы анықталсын.

Шешуі. Алдымен шеңбердің бірінші ширекте жатқан (1/4) бөлігінің ұзындығын есептейміз. AB доғасының теңдеуі $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, бұдан $y = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Онда, (7.54) формула бойынша

$$\frac{1}{4}L = \int_0^R \sqrt{1 + (-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}})^2} dx = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}} dx = \int_0^R \frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\arcsin\frac{x}{R} =$$

$= R \arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R\frac{\pi}{2}$. Демек, шеңбердің толық ұзындығы $L = 2\pi R$.

Ескерту 7.3. Егер қисықтың теңдеуі $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ параметрлік түрде берілсе, мұндағы $\varphi(t)$, $\psi(t)$ үзіліссіз функциялар, үзіліссіз $\varphi'(t) \ne 0$, $\psi'(t)$ туындыларға ие, әрі $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ болса, онда AB доғасының ұзындығы

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2} \cdot dt \qquad (7.54a)$$

формуламен анықталады.

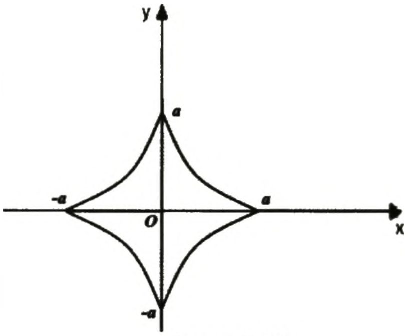
Шынында да, бұл жағдайда берілген параметрлік теңдеулер кейбір үзіліссіз $y = f(x)$ және үзіліссіз $f'(x)$ туындысы бар функцияны анықтайды.

(7.54) формулада $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ ауыстыруын жасап, $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, әрі $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ екенін ескерсек,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right]^2} \cdot \phi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

Мысал 7.7. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ астроиданың ұзындығы есептелсін.

Шешуі. Астроида координаталық осьтерге сәйкес симметриялы болғандықтан, алдымен оның бірінші ширекте орналасқан 1/4 доғасын есептейміз (сурет 7.14).



Сурет 7.14

$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ екендігін ескеріп, (7.54а) формуланы қолдансақ,

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t \cdot \cos^2 t dt} =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t} dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}; \; L = 6a \text{ болады.}$$

Ескерту 7.4.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

өрнек доға дифференциялы деп аталады.

2. Полярлық координаталардағы қисық доғасының ұзындығы

Полярлық координаталарда доғаның теңдеуі $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ түрінде берілсін. Полярлық координаталардан тікбұрышты координаталарға өту формулалары $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ екендігін және $\rho = \rho(\varphi)$ екендігін ескерсек, бұл өту формулалары φ параметрдің функциялары болады, яғни

$$x(\varphi) = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi,\ y(\varphi) = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi.$$

Бұл теңдіктерді φ айнымал параметр бойынша дифференциалдасақ:

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cdot\cos\varphi - \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi,\quad y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cdot\sin\varphi + \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi.$$

Теорема 7.16. Егер ρ(φ) функциясы [α; β] кесіндіде үзіліссіз және осы кесіндіде үзіліссіз ρ'(φ) туындыға ие болса, онда бұл доғаның ұзындығы

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi \tag{7.55}$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша ρ(φ), ρ'(φ) функциялары үзіліссіз, сондықтан $x'^2(\varphi)$, $y'^2(\varphi)$ функциялары да [α; β] кесіндіде үзіліссіз. Сонда (7.54) формула бойынша,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\varphi)\cdot\cos^2\varphi - 2\rho'(\varphi)\cdot\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi +}$$

$$\overline{+\rho^2(\varphi)\sin^2\varphi + \rho'^2(\varphi)\sin^2\varphi + 2\rho'(\varphi)\cdot\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + d\varphi} =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}d\varphi$$

Мысал 7.8. ρ = $a\varphi$, $a > 0$ (Сурет 7.12) Архимед спиралының бірінші айналым доғасының ұзындығы есептелсін.

Шешуі. Бірінші айналым φ полярлық бұрыш 0-ден 2π-ге дейін өзгергенде пайда болады. Демек, (7.55) формула бойынша ізделінді доға ұзындығы:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi = \left| \begin{matrix} U = \sqrt{\varphi^2 + 1}; dU = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}d\varphi \\ dV = d\varphi; \quad V = \varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= a[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}d\varphi] = a[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\,\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2 + 1 - 1}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}d\varphi] =$$

$$= a[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi] = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} =$$

$$= a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} - \frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2 + 1} - \frac{\varphi^2}{2}\ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right| + \ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right|\right]\left|\begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix}\right] =$$

$$= a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|\right]\Bigg|_0^{2\pi} = a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\right|2\pi +$$
$$+\sqrt{4\pi^2+1}\left|\right].$$

Мұнда бөліктеп интегралдау тәсілі қолданылып,

$$L = a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Bigg|_0^{2\pi} - L + a\left[\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|\right]\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$ теңдеуден

$L = \frac{1}{2}a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|\right]$ теңдігі алынды.

7.3. Айнымал күштің атқаратын жұмысы

Қозғалыс бағытымен бағыттас кейбір F күштің әсерімен M материалдық нүктенің Ox осінің $x = 0$ нүктесінен $x = b$ нүктесіне дейінгі жылжығандағы атқаратын жұмысын қарастырайық.

Егер F = const болса, онда $A = F \quad (b - a)$ болатындығы белгілі.

$F = F(x)$ үзіліссіз айнымал күш болсын.

Интегралдық қосындылар тәсілін қолданамыз: $[a, b]$ кесіндісін еркімізше $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots x_n = b$ шартты қанағаттандырушы $x_1, x_2, \ldots,$ x_{n-1} нүктелермен n бөлікке бөлеміз. $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots n$ бөлікше кесіндінің ұзындығын Δx_k деп, әрбір бөлікшеде кез-келген c_k нүктесін алып, Δx_k жолдағы жұмысты жуықтап $\Delta A_k = F\ (c_k) \quad \Delta x_k$ шамамен алмастырамыз, яғни әрбір дербес бөлікшеде $F = F\ (c_k)$ тұрақты деп аламыз, Δx_k шамалар жеткілікті кішкене болғанда

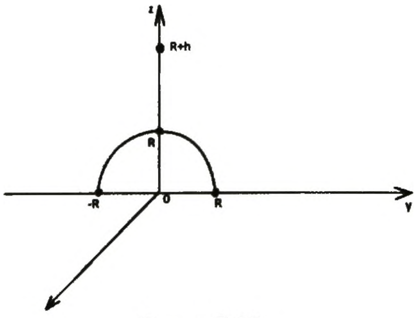
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} F(c_k) \quad \Delta x_k$$

қосынды F күштің барлық $[a, b]$ кесіндідегі орындаған жұмысын жуықтап анықтайды. A_n қосында үзіліссіз $F\ (x)$ функциясы үшін $[a, b]$ кесіндідегі интегралдық қосынды болғандықтан, $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$ болғанда $\lim\limits_{\max \Delta x_{k\to 0}} A_r = A$ шек бар, яғни

$$A = \int_a^b F(x)dx \qquad (7.56)$$

Мысал 7.9. Массасы m денені жер бетінен тік h биіктікке көтеру үшін атқарылатын A жұмыс анықталсын.

Шешуі. Жердің массасын $m_ж$ десек, жердің денені тарту күші F Ньютон заңы бойынша, $F(z) = G\frac{m \cdot m_ж}{z^2}$, $R \le z \le R + h$,



Сурет 7.15

мұндағы z денеден жердің центріне дейінгі қашықтық. $z = R$ болғанда $F(R) = mg = P$, яғни дененің ауырлығына $G\cdot m\cdot m_ж$ тең. Демек $F(R) = \frac{Gm\cdot m_*}{R^2} = P$, бұдан $G\cdot m\cdot m_ж = P\cdot R^2$ және $F(z) = \frac{PR^2}{z^2}$; $R \le z \le R+h$ (сурет 7.15).

Сондықтан (7.56) формула бойынша,

$$A = \int_R^{R+h} F(z)dz = \int_R^{R+h} PR^2 \frac{dz}{z^2} = PR^2 \frac{1}{2}\Bigg|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}. \qquad (7.56\text{ a})$$

7.4. Ауырлық центрінің координаталары

1. Материалдық нүктелер жүйесінің ауырлық центрі

Oxy жазықтықта берілген $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ... $A_n(x_n, y_n)$ материалдық нүктелердің сәйкес түрде массалары m_1, m_2, ... m_n болсын.

$x_i\, m_i$ $(y_i m_i)$ көбейтінді m_i массаның Oy (Ox) осіне сәйкес статистикалық моменті деп аталатындығы механикадан белгілі. $C(x_c,\ y_c)$ нүктесі берілген жүйенің ауырлық центрі болса ([5], мысал 1.11), оның координаталары

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i},$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \qquad (7.57)$$

формулалармен анықталады.

Бұл формулалар әртүрлі фигуралар мен денелердің ауырлық центрін табуға қолданылады.

2. Жазықтықтағы сызықтың ауырлық центрі

Oxy жазықтықта материалдық AB сызығы $y = f(x)$, $a \le x \le b$, теңдеумен берілсін.

Материалдық сызықтың сызықтық тығыздығы (ұзындық бірлігінің массасы) μ болсын. AB сызықтың ұзындықтарын ΔS_1, ΔS_2, ... , ΔS_n болатын n бөлікшеге бөлеміз. Онда әрбір бөлікшенің массасы $\Delta m_i = \mu\ \ \Delta S_i$ болады. Әрбір ΔS_i бөлікшеде абсциссасы ξ_i кез келген нүкте алып, массасы $\mu\ \ \Delta S_i$ болатын $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ материалдық нүктені бейнелесек және (7.57) формулаларға x_i орнына ξ_i, y_i орнына $f(\xi_i)$, m_i массасы орнына $\mu \cdot \Delta S_i$ мәндерді қойсақ, AB доғаның ауырлық центрін жуықтап есептейтін формулалар аламыз:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \mu \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu \Delta S_i}, y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \mu \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu \Delta S_i}$$

Егер $y = f(x) \in C' [a; b]$, яғни үзіліссіз туындыға ие болса, онда $\max\Delta S_i \to 0$ болғанда, жоғарыдағы өрнектердің алымындағы және бөліміндегі интегралдық қосындылардың шегіне тең болады. Яғни доғаның ауырлық центрінің координаталары анықталған интегралдармен өрнектеледі:

$$x_c = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} x ds}{\int\limits_{\alpha}^{\beta} ds} = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, y_c = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) ds}{\int\limits_{\alpha}^{\beta} ds} = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, \qquad (7.58)$$

Мысал 7.10. $x^2 + y^2 = R^2$, $y < 0$ жарты шеңбердің ауырлық центрінің координаталары табылсын.

Шешуі. $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$

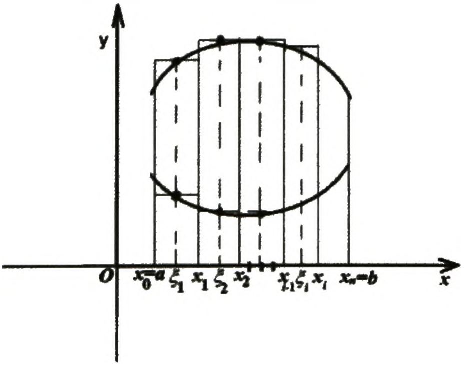
болғандықтан, (7.58) формулалар бойынша:

$$x_c = \frac{R\int\limits_{-R}^{R} \frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}}{\int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}} = \frac{-R\sqrt{R^2-x^2}\Big|_{-R}^{R}}{R\arcsin x\Big|_{-R}^{R}} = \frac{0}{\pi R} = 0,$$

$$y_c = \frac{-\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dx}{\pi R} = \frac{-R\int\limits_{-R}^{R} dx}{\pi R} = \frac{-2R^2}{\pi R} = -\frac{2R}{\pi}$$

3. Жазық фигураның ауырлық центрі

Материалдық жазық фигура $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ сызықтармен шенелген және беттік тығыздығы, яғни бірлік беттің массасы, $\gamma = \text{const}$ болсын. Берілген фигураны $x = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ... , $x = x_n = b$ түзулермен, ендерін Δx_1, Δx_2, ... , Δx_n



Сурет 7.16

жолақтарға бөлеміз. Әрбір Δx_i енді $[x_{i-1},\ x_i]$ бөлікшеден $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_1}{2}$ нүкте алып, биіктігі $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ болған тік төртбұрышпен, енін Δx_i болған жолақшамен ауыстырсақ, онда жолақшаның массасы жуықталып,

$$\Delta m_i \approx \gamma\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\quad \Delta x_i\ \ (i = 1, 2, \ldots n)$$

шамаға тең болады. Онда әрбір жолақшаның ауырлық массасы жуықталып, сәйкес тік төртбұрыштың центрінде болады:

$$(x_i)_c \approx \xi_i, (y_i)_c \approx \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}$$

Енді әрбір жолақшаны материалдық нүктемен алмастырсақ (сурет 7.16), бұл нүктенің массасы жолақшаның массасына тең және жолақшаның ауырлық центріне жинақталған, (7.57) формулалар бойынша берілген фигураның ауырлық центрінің жуық мәнін аламыз:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_1 \gamma\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\cdot \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)\right]\cdot \gamma\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\cdot \Delta x_i}$$

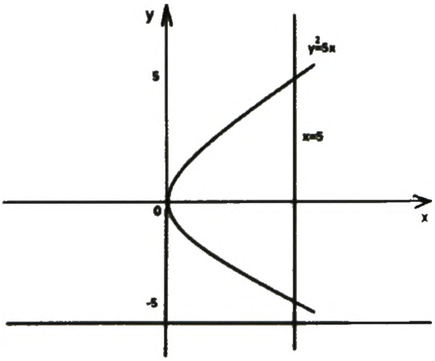
Егер $f_1(x), f_2(x) \in C\,[a;\,b]$ және осы кесіндіде $f_2(x) \neq f_1(x)$ болса, $\Delta x_i \to 0$ болғанда фигураның ауырлық центрінің дәл координаталарына ие боламыз:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}{\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx},\quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left[f_2(x) + f_1(x)\right]\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}{\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx} \qquad (7.59)$$

Бұл формулалардан көрінгендей γ = const болса, ол оның ауырлық центріне әсерін тигізбейді.

Мысал 7.11. $y^2 = 5x$ параболаны $x = 5$ түзуімен қиғандағы сегменттің ауданы анықталсын.

Шешуі. Бұл жағдайда $f_2(x) = \sqrt{5x}$, $f_1(x) = -\sqrt{5x}$ (сурет 7.17). Сондықтан, (7.59) бойынша,



Сурет 7.17

$$x_c=\frac{2\int\limits_0^5 x\sqrt{5x}dx}{2\int\limits_0^5 \sqrt{5x}dx}=\frac{\left.\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right|_0^5}{\left.2\sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^5}=\frac{\frac{4}{5}\cdot 5^3}{\frac{3}{4}\cdot 5^2}=\frac{3}{5}\cdot 5=3$$

Сегмент Ox осіне симметриялы болғандықтан $y_c = 0$. Демек ауырлық центрі $C(3;\,0)$ нүктесі.

§ 8. Меншіксіз интегралдар

Анықталған интегралды анықтағанда $[a,\ b]$ ақырлы кесіндіде шенелген $f(x)$ функциясын қарастырған едік. Енді осы екі шарттың біреуі орындалмаған жағдайларды қарастырайық.

8.1. Шекаралары ақырсыз меншіксіз интегралдар (бірінші текті меншіксіз интеграл)

$f(x)$ функциясы $[a;\ +\infty)$ аралығында анықталған және кез келген ақырлы $[a;\ b]$ кесіндісінде, мұндағы $b \in (a;\ +\infty)$, Риман бойынша интегралданатын функция болсын, яғни $\int\limits_a^b f(x)dx$ бар.

Анықтама 8.1. Егер $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ ақырлы шек бар б олса, онда бұл шек $f(x)$ функциясының $[a;\ +\infty)$ аралығы бойынша (бірінші текті) меншіксіз интегралы деп аталады да, былайша жазылады:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (7.60)$$

(7.60) шегі бар болса, онда меншіксіз интеграл бар немесе жинақты делінеді. Егер шек жоқ болса, онда меншіксіз интеграл жоқ немесе жинақсыз делінеді. Геометриялық мағынасы: $f(x)\geq 0$ болғанда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл $f(x)$ функцияның графигі, $x = a$, $x=b$, $y = 0$ түзулермен шенелген қисықсызықты трапецияның ауданын анықтаса, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралды $f(x)$ функцияның графигі $x = a$, $y = 0$ түзулермен шенелген фигураның ауданы деп есептеуге болады.

Осы сияқты басқа да ақырсыз интервалдар үшін меншіксіз интегралдар анықталады:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx; \qquad (7.61)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (7.62)$$

(7.62) теңдікті былайша түсіну керек: егер оң жақтағы екі меншіксіз интеграл жинақты болса, онда сол жақтағы интеграл да жинақты. Мұндағы $c \in (-\infty; +\infty)$ кез келген сан.

Мысал 8.1. Меншіксіз интегралдар есептелсін немесе жинақсыз екендігі анықталсын:

а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x+1}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{2} e^{4x}dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{1}\cos 2x dx$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+9}$

Шешуі. а) (7.60) теңдікті қолданып, интегралдасақ,

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b} x^{-2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{2}^{b}\right] = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\right) = -\left(0-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

б) (7.61) теңдікті қолданып, интегралдасақ,

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{d(x+1)}{x+1} = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln|x+1|\,\Bigg|_{2}^{b}\right] = \lim_{b\to+\infty}[\ln(b+1)-\ln 1] = \infty.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақсыз.

в) (7.61) теңдікті қолданып, интегралдасақ,

$$\int\limits_{-\infty}^{2} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{2} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{2} e^{4x}\frac{d(4x)}{4} = \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left[e^{4x}\Bigg|_{a}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}(e^{4\cdot2}-e^{4a}) = \frac{1}{4}(e^8-0) = \frac{e^8}{4}.$$

г) (7.61) теңдікті қолданып, интегралдасақ,

$$\int\limits_{-\infty}^{1}\cos 2x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}\cos 2x\frac{d(2x)}{2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_{a}^{1}\right] =$$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{a\to-\infty} (\sin 2 - \sin 2a)$. Мұндағы $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin 2a$ шек жоқ, сондықтан берілген интеграл жинақсыз.

д) Алдымен (7.62) теңдікті қолданып, әрі қарай (7.61), (7.62) теңдіктерін ескеріп, интегралдасақ,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+3^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+3^2} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+3^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]\Bigg|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]\Bigg|_{0}^{b} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \frac{a}{3}\right] + \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{1}{3}\pi.$$

Жинақтылықтың кейбір белгілері

Теорема 7.17. (салыстыру белгісі). Егер $[a; +\infty)$ аралықта $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары үзіліссіз болса және $0 \le f(x) \le g(x)$ шартты қанағаттандырса, онда: $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ жинақты болса, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ жинақты; $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз болса, $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. $F(R) = \int\limits_{a}^{R} f(x)dx$, $G(R) = \int\limits_{a}^{R} g(x)dx$ белгілеулер енгізейік. $0 \le f(x) \le g(x)$ болғандықтан, анықталған интегралдың (7°) қасиеті бойынша $0 \le F(R) \le G(R)$, $R \ge a$, болады. Әрі $F(R)$, $G(R)$ функциялары $[a; +\infty)$ аралықта кемімейтін функциялар.

Шынында да, егер $a \le R_1 \le R_2$ болса, онда $\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x)dx \ge 0$. Демек,

$$F(R) = \int\limits_{a}^{R_2} f(x)dx = \int\limits_{a}^{R_1} f(x)dx + \int\limits_{R_1}^{R_2} f(x)dx \ge \int\limits_{a}^{R_1} f(x)dx = F(R_1)$$

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ жинақты болсын, яғни $G(R)$ функциясының $R \to \infty$ болғанда ақырлы шегі бар. Осыдан, $G(R)$ функция кемімейтін болғандықтан, $[a; +\infty)$ аралықта шенелген функция болады. Онда $F(R) \le G(R)$ болғандықтан $F(R)$ функциясы да $[a; +\infty)$ аралықта шенелген, демек дәл жоғарғы шекарасы бар. $\mathrm{Sup}F(R) = J$ болсын, онда дәл жоғарғы шекараның анықтамасы бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $R_\varepsilon \ge a$ табылып, $0 \le J - F(R_\varepsilon) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. $F(R)$ функциясы $[a; +\infty)$ аралықта кемімейтін функция болғандықтан кез келген $R > R_\varepsilon$ үшін $F(R) \ge F(R_\varepsilon)$ теңсіздігі орындалады. Демек, $R \ge R_\varepsilon$ болғанда $0 < J - F(R) < \varepsilon$. Сонымен, $R \ge R_\varepsilon$ болғанда $|F(R) - J| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, яғни $\lim\limits_{R\to\infty} F(R) = J$. Демек, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақты.

Енді $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз болсын. Онда $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ жинақты десек, жоғарыда дәлелденгендей $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл жинақты болады, яғни $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ жинақсыз.

Мысал 8.2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+2x)}$ интеграл жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. $f(x)=\frac{1}{x^2(1+2x)}$ интеграл астындағы функцияны $g(x) = \frac{1}{x^2}$ функциямен салыстырсақ, $[1; +\infty)$ аралықта $\frac{1}{x^2(1+2x)} < \frac{1}{x^2}$ болғандықтан және $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интеграл жинақты болғандықтан теорема (7.17) бойынша, берілген интеграл жинақты.

Келесі белгілерді дәлелдеусіз келтіреміз.

Теорема 7.18. Егер $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ жинақты болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақты болады.

Бұл жағдайда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолют жинақты, ал $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақты болып, $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ жинақсыз болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ шартты жинақты интеграл деп аталады.

Мысал 8.3. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ интеграл жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. Интеграл астындағы функция айнымал таңбалы функция.

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|.$$ Бірақ,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right] = 0 + 1 = 1.$$

Яғни, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ жинақты. Демек, берілген интеграл абсолют жинақты.

Теорема 7.19. Егер $[1; +\infty)$ аралықта $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ үзіліссіз функциялары үшін $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < +\infty$ болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ жэне $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралдардың екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз болады.

Мысал 8.4. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{x^4+2}{x^4+1}dx$ жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. $f(x) = \ln\frac{x^4+2}{x^4+1}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$ деп алсақ,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^4+2}{x^4+1}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^4+1}\right)}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^4+1}}{\frac{1}{x^4}} = 1$$

болғандықтан берілген интеграл жинақты болады. Мұнда Теорема 7.18 тұжырымынан, әрі $x \to +\infty$ болғанда $\ln\left(1+\frac{1}{x^4+1}\right) \sim \frac{1}{x^4+1}$ екендігі және

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{x^{-4+1}}{-4+1}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{3}$$ жинақты екендігі пайдаланылды.

Теорема 7.20. (Дирихле белгісі). Егер $[a; +\infty)$ аралығында $\Phi(x)$ функциясы шенелген және үзіліссіз $\Phi'(x)$ туындыға ие болса, ал $g(x)$ функциясы осы аралықта дифференциалданушы және кемімелі болып $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ шартын қанағаттандырса, онда $\int\limits_a^{+\infty} \Phi'(x)g(x)dx$ жинақты болады.

Мысалы 8.5. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ Френель интегралы жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. Берілген $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ интегралы мен $\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2 dx$ интегралының жинақталу сипаты бірдей болғандықтан екінші интегралды жинақтылыққа зерттеу жеткілікті.

$\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_1^{+\infty} x \cdot \sin x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$ интегралында $\Phi'(x) = x \sin x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ деп алсақ, Дирихле белгісінің шарттары орындалатыны көрінеді.

$$\Phi(x) = \int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2 d(x^2) = -\frac{1}{2}\cos x^2,$$

$|\Phi(x)| = \left|-\frac{1}{2}\cos x^2\right| \le \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Демек, берілген интеграл жинақты.

8.2. Шенелмеген функциялардың меншіксіз интегралдары (екінші текті меншіксіз интеграл)

$f(x)$ функциясы $[a; b)$ аралықта үзіліссіз, ал $x = b$ нүктесінде ақырсыз үзіліске ие, әрі әрбір $[a, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, кесіндіде интегралданушы болсын.

Анықтама 8.2. Егер $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ ақырлы шегі бар болса, онда бұл шек $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісі бойынша екінші текті меншіксіз интегралы деп аталады да, былайша жазылады:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,. \tag{7.63}$$

Осы сияқты $f\ (x)$ функциясы $x = a$ нүктесінде ақырсыз үзіліске ие болса,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \tag{7.64}$$

Егер $f\ (x)$ функциясы аралықтағы $c \in (a;\ b)$ нүктесінде ақырсыз үзіліске ие болса, онда $[a,\ b]$ кесінді бойынша екінші текті меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{7.65}$$

теңдікпен анықталынады.

Мұндағы оң бөліктегі бірінші қосылғыш (7.63) теңдікпен, екінші қосылғыш (7.64) теңдікпен есептелінеді.

Мысал 8.6. $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ интеграл жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ функция $[0,\ 9]$ кесіндінің $x = 1$ нүктесінде ақырсыз үзіліске ие. Сондықтан берілген интегралды жинақтылыққа зерттеу үшін (7.65) теңдікті қолданып, екі қосылғышқа бөліп, бірінші қосылғышқа (7.63) теңдікті, екінші қосылғышқа (7.64) теңдікті қолдансақ:

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} (x-1)^{-\frac{1}{3}}d(x-1) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{9} (x-1)^{-\frac{1}{3}}d(x-1) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_{1+\varepsilon}^{9} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(1-\varepsilon-1)^{\frac{2}{3}} - (0-1)^{\frac{2}{3}}\right] + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(9-1)^{\frac{2}{3}} - (1+\varepsilon-1)^{\frac{2}{3}}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - (-1)^2\right] + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2^2 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2}(-1) + \frac{3}{2}\cdot 4 = \frac{9}{2};$$

Екінші текті меншіксіз интегралдар үшін де бірінші текті меншіксіз интегралдар жинақтылығының алғашқы үш белгісі сияқты белгілер орынды. Осы белгілерді дәлелдеусіз келтіреміз.

Теорема 7.21а (Салыстыру белгісі)

Егер $[a;\ b)$ аралықта $f\ (x)$ пен $g(x)$ функциялары үзіліссіз болып, $0 \le f\ (x) \le g(x)$ шартын қанағаттандырса, ал $x = b$ осы функциялардың ақырсыз үзіліс нүктесі болса, онда $\int_a^b g(x)dx$ интегралы жинақты болса, $\int_a^b f(x)dx$ интеграл да жинақты; $\int_a^b f(x)dx$ интеграл жинақсыз болса, $\int_a^b g(x)dx$ интегралы да жинақсыз болады.

Теорема 7.22а. Егер $[a;\ b]$ аралықта $\int_a^b |f(x)|dx$ интеграл жинақты болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интеграл да жинақты болады.

Бұл жағдайда $\int_a^b f(x)dx$ абсолют жинақты интеграл деп аталады.

Ал берілген $\int_a^b f(x)dx$ жинақты болып, $\int_a^b |f(x)|dx$ жинақсыз болса, онда берілген интеграл шартты жинақты деп аталады.

Мысал 8.7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ интеграл жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі: $f(x)\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ функциясы $(0;\ 1]$ аралықта үзіліссіз. $x = 0$ нүктесі ақырсыз үзіліс нүктесі. $\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ теңсіздік орынды. Ал

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1^{\frac{1}{2}}-\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) = 2.$$

Яғни жинақты. Демек, теорема 7.21а бойынша берілген интеграл да жинақты.

Теорема 7.23а. Егер $f\,(x)$, $g(x)$ функциялары $[a;\ b)$ аралықта үзіліссіз, $x = b$ олардың ақырсыз үзіліс нүктесі болса және $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < \infty$ шегі бар болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ және $\int_a^b g(x)dx$ интегралдардың екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз болады.

Мысал 8.8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^3 x}$ интеграл жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. $f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$ функциясы [0, 1] кесіндіде бір ғана $x = 0$ нүктеде үзіліске ие. $g(x) = \frac{1}{x^3}$ функцияны қарастырайық. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\right] = \infty$$

жинақсыз.

Ал, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 = 1^3 = 1$ болғандықтан, берілген интеграл да жинақсыз.

Мысал 8.9. Интегралдар жинақтылыққа зерттелсін:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$

Шешуі: а) $f(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$ функциясы үшін $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясын алсақ, екі функция үшін де $x = 0$ ақырсыз үзіліс нүктесі және $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$ Ал $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ интеграл жинақты:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = 2.$$

Сондықтан Теорема 7.23а бойынша $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}}$ жинақты.

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ функциясы үшін $g(x) = \frac{1}{x^2}$ функциясын алсақ, $x = 0$ нүктесі (x), $g(x)$ функциялары үшін де ақырсыз үзіліс нүктесі.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty.$$

Яғни, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ жинақсыз. Онда, теорема 7.23а бойынша $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$ интеграл да жинақсыз.

Мысал 8.10. (Екінші космостық жылдамдық туралы мәселе). Денені жердің тарту өрісінен шығаратын бастапқы жылдамдық (екінші космостық жылдамдық) анықталсын.

Шешуі. Жер бетінен массасы m денені h биіктікке тік көтеру үшін атқарылатын жұмыс

$$A = \int_{R}^{R+h} F(x)dx = \int_{R}^{R+h} C\frac{m_\partial \cdot m_ж}{x^2}dx = \frac{PRh}{R+h}$$

екендігі белгілі (мысал 7.9).

Денені планетааралық кеңістікке шығару дегеніміз, оны $h = \infty$ биіктікке көтеру дегені. Ол үшін атқарылатын жұмыс:

$$\lim_{h\to\infty} A = \int_{R}^{+\infty} F(x)dx = \lim_{h\to\infty}\frac{PRh}{R+h} = \lim_{h\to\infty}\frac{h \cdot PR}{h\left(1+\frac{R}{h}\right)} = PR = mgR, \qquad (7.66)$$

мұндағы m дененің массасы, g-еркін түсу үдеуі (үйкеліс, басқа планеталардың тартуы есептелмейді). Бұл (7.66) жұмыс дененің кинетикалық энергиясының өзгеруімен атқарылады. Демек, бастапқы уақытта дененің кинетикалық энергиясы осы жұмыстан кем болмауы керек, яғни

$$\frac{mV^2}{2} \geq mgR \text{ немесе}$$

$$V \geq \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 6400000}\ м/сек = 148000\ м/сек = 11{,}2\ км/сек.$$

Егер дененің бастапқы жылдамдығы 11,2 км/сек болса, онда оның траекториясы парабола болады. $V > 11{,}2$ км/сек болса, траекториясы гипербола болады, $V < 11{,}2$ км/сек болса, траекториясы эллипс болып, не жерге құлайды, немесе жердің жасанды серігі болып, сол орбитада айнала береді.

§ 9. Анықталған интегралдарды жуықтап есептеу

Үзіліссіз $f(x)$ функциясының $\int_a^b f(x)dx$ анықталған интегралын есептеу керек болсын.

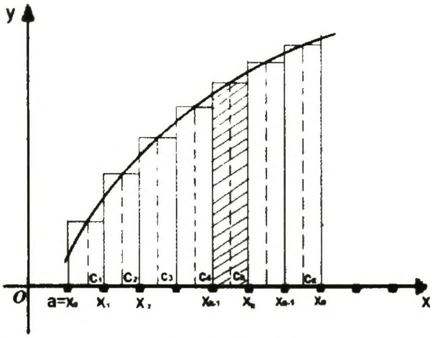
Егер $f(x)$ функциясының $[a;\ b]$ кесіндідегі $F(x)$ алғашқы функциясы белгілі болса, онда интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша есептеледі. Алғашқы функцияны табу кейде өте күрделі мәселе. Тіпті кейбір үзіліссіз функциялардың алғашқы функциясы элементар функциялар арқылы өрнектелмейді. Мұндай жағдайларда және $f(x)$ функциясы график немесе кесте тәсілімен берілгенде жуықтап есептеу формулалары қолданылады. Бұл жуықтап есептеулер жәрдемімен анықталған интегралдың мәні жоғары дәлдікпен табылады.

Жуықтап есептеудің жиі қолданылатын үш тәсілін қарастырайық.

9.1. Тіктөртбұрыштардың квадратуралық формуласы



Сурет 7.18

$y = f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция болсын. $\int_a^b f(x)dx$ интегралды есептеу керек. $[a;\ b]$ кесіндіні $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен әрқайсысының ұзындығы Δx болатын өзара тең n бөлікке бөлеміз. Онда $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, $x_k = x_0 + \Delta x\ \ k$, $k = 1$, 2, ... n болады (сурет 7.18). Әрбір бөлікше кесіндінің ортасын $c = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ деп алып, $f(c_k)$ мәндерді есептейміз де, $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k$ интегралдық қосынды құрамыз. Оның мәні берілген интегралдың жуық мәні болады:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \qquad (7.67)$$

Бұл формула орташа тіктөртбұрыштар формуласы деп аталады.

(7.67) жуық теңдіктің абсолют қатесі, $f\ (x)$ екі рет дифференциалданушы функция болғанда

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\max_{a\le x\le b}\left|f^{(2)}(x)\right| \qquad (7.68)$$

формуламен бағаланады, яғни мұнда

$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right|$.

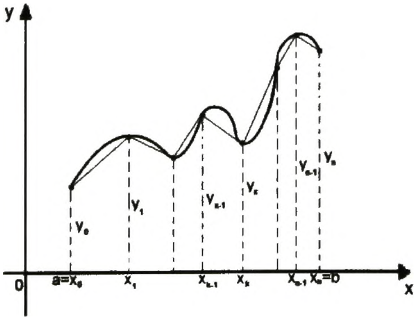
Мұндағы тұрақтылар дәл анықталған шамалар.

Дербес жағдайда, $f\ (x) = kx + b$ болғанда $R_n = 0$ болады.

Егер $f\ (x)$ функциясы үзіліссіз бірінші туындыға ие болса,

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3}{4n^2}\cdot\max_{a\le x\le b}|f\ (x)| \qquad (7.69)$$

формуламен бағаланады.



Сурет 7.19

9.2. Трапециялардың квадратуралық формуласы

$y = f\ (x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндіде үзіліссіз болсын. $[a;\ b]$ кесіндіні $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ нүктелерімен әрқайсысының ұзындығы Δx болатын өзара тең

n бөлікке бөлеміз. Онда $\Delta x = \frac{b-a}{c}$, $x_k = a + k \quad \Delta x$, $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots n$ болады. $y = f(x)$ функциясының графигінің әрбір бөлікше аралыққа сәйкес келетін доғасын және осы доғалардың ұштарын қосатын хордалармен алмастырамыз. Яғни берілген қисықсызықты трапецияның орнына n тік бұрышты трапецияларды аламыз (сурет 7.19). Мұнда фигура ауданы тік төртбұрыштардан құралған n сатылы фигура ауданына қарағанда ізделініп отырған ауданды дәлірек анықтайтынын геометриялық тұрғыдан көруге болады.

Бұл тікбұрышты трапециялардың табандары

y_k, y_{k+1}, ал биіктігі $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Сонда:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x == \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \cdots + \frac{y_k + y_{k+1}}{2}\Delta x + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x$$

немесе

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots + y_{n-1}\right) \qquad (7.70)$$

Егер $f\ (x)$ функциясы үзіліссіз бірінші туындыға ие болса, онда абсолют қате

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^2}{4n} \cdot \max_{a \le x \le b}\left|f'(x)\right| \qquad (7.71)$$

формуламен бағаланады.

(7.70) формула трапециялар формуласы деп аталады. Егер $f\ (x)$ функциясы үзіліссіз екінші туындыға ие болса, онда абсолют қате:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{a \le x \le b}\left|f''(x)\right| \qquad (7.71a)$$

формула жәрдемімен бағаланады. Мұндағы тұрақтылар дәл анықталған шамалар. $y = kx + b$ функциясы үшін (7.71) формулаға сәйкес $R_n = 0$ болады ([4], Т. 1, XII тарау).

9.3. Параболалардың квадратуралық (Симпсон) формуласы

$[a; b]$ кесіндісін саны жұп, $2n$ өзара тең дербес бөлікшелерге бөлеміз.

$y = f(x)$ функциясының графигінің $[x_k, x_{k+2}]$, $k = 0, 1, \dots n-2$ аралығындағы доғасын $M_k(x_k, y_k)$, $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$, $M_{k+2}(x_{k+2}, y_{k+2})$ үш нүкте арқылы өтетін осі Oy оське параллель $y = Ax^2 + Bx + C$ парабола доғасымен алмастырамыз.

Мұндағы A, B, C коэффициенттері параболаның берілген M_k, M_{k+1}, M_{k+2} нүктелері арқылы өту шартынан анықталады. Осылай алынған параболалық трапециялардың қосындысы ізделінді интегралдың жуық мәнін береді.

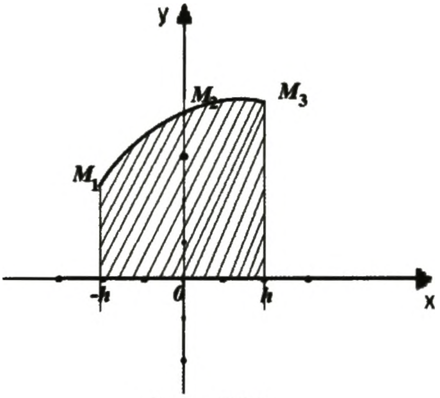
Лемма. $y = Ax^2 + Bx + C$ парабола, Ox осі, $x = x_k$ мен $x = x_{k+2}$ түзулерімен шенелген параболалық трапецияның ауданы

$$S = \frac{h}{3}(y_k + 4y_{k+1} + y_{k+2}),\ k = 1, 2, \dots n-2 \qquad (7.72)$$

формуламен анықталады.

Мұндағы, $h = x_{k+1} - x_k$. $k = 0, 1, 2, \dots n-1$; $x_{k+2} - x_k = 2h$, $k = 0, 1, 2, \dots n-2$.

Дәлелдеуі. Алдымен, жоғарыдан $y = Ax^2 + Bx + C$, параболаның графигін, төменнен $[-h, h]$ кесіндімен және $x_k = -h$ пен $x_{k+2} = h$ түзулермен шенелген параболалық трапецияның S ауданын қарастырайық.



Сурет 7.20

Ыңғайлы болуы үшін $k = 0$ деп алайық.

Яғни, $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$ (сурет 7.20). Онда:

$y(x_0) = y(-h)$ болғанда $y_0 = Ah^2 - Bh + C$;

$y(x_1) = y(0)$ болғанда $y_1 = C$;

$y(x_2) = y(h)$ болғанда $y_2 = Ah^2 + Bh + C$.

$$\begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 = C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases} \qquad (7.73)$$

теңдеулер жүйесінің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} h^2 & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ h^2 & h & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} h^2 & -h \\ h^2 & h \end{vmatrix} = -2h^3 \neq 0$$

болғандықтан, жүйенің жалғыз (A, B, C) шешімі бар. Демек, қисықсызықты трапецияның ауданы

$$S = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{bx^2}{3} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + Ch - \frac{A(-h)^3}{3} - \frac{B(-h)^2}{2} - C(-h) = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch =$$

$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Егер (7.72) теңдіктегі $y_0 + 4y_1 + y_2$ қосындысын есептесек, ол $2Ah^2 + 6C$ болады. Олай болса $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$, яғни, (7.72) теңдік $k = 0$ үшін дұрыс. (7.72) формула, табаны $[x_k, x_{k+2}]$, $x_{k+2} - x_k = 2h$ болатын кез келген параболалық трапеция үшін дұрыс екендігін көру қиын емес. Шынында да, параболалық трапецияны оның табаны координата бас нүктесіне сәйкес симметриялы болатындай етіп, өзіне-өзін параллель көшіргеннен оның ауданы өзгермейді. Осылай алынған параболалық трапеция ауданы (7.72) формуламен анықталады.

Енді негізгі есепке оралсақ (Сурет 7.21), (7.72) формула бойынша

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots$$
$$+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})]$$

немесе түрлендіріп жазсақ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})$$
$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})]. \tag{7.74}$$

(7.74) теңдік Симпсон формуласы деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясы $[a;\, b]$ кесіндісінде үзіліссіз екінші ретті туындыға ие болса, онда абсолют жуықтау қателігі

$$|R_{2n}(f)| \le \frac{1}{180}\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot\max_{a\le x\le b}\left|f^{(2)}(x)\right| \tag{7.75}$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

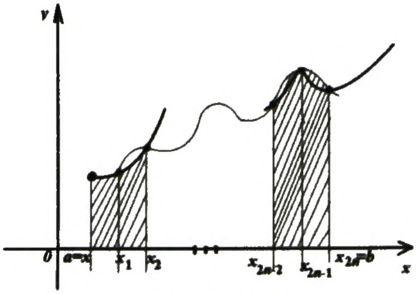
Ал $f(x)$ функциясы $[a;\, b]$ кесіндісінде үзіліссіз төртінші ретті туындыға ие болса, онда абсолют жуықтау қателігі

$$|R_{2n}(f)| \le \frac{1}{180}\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right| \tag{7.76}$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Егер $f(x)$ үшінші дәрежелі көпмүше болса, онда (7.76) теңсіздікке сәйкес $|R_{2n}(f)|$ болады.

(7.75), (7.76) теңсіздіктердегі тұрақтылар дәл анықталған шамалар. ([4], Т. 1, XII тарау).



Сурет 7.21

Мысал 8.11. $\int_0^2 \frac{x^3}{2}dx$ интеграл Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша және [0; 2] кесіндіні өзара тең 4 бөлікке бөліп, тіктөртбұрыштар, трапециялар, Симпсон формулалары бойынша жуықтап есептелсін.

Шешуі. Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша берілген интегралдың дәл мәні:

$$\int_0^2 \frac{x^3}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{8}(2^4-0^4)=2.$$

Енді жуықтап есептеулерді қарастырайық.

$$a = x_0 = 0,\ b = x_4 = 2;\ \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Онда мәндер кестесі:

	x	$y = \frac{x^3}{2}$		x	$y = \frac{x^3}{2}$	
	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$		$x_3 = \frac{3}{2}$	$y_3 = \frac{27}{16}$	
	$x_1 = \frac{1}{2}$	$y_1 = \frac{1}{16}$		$x_4 = 2$	$y_3 = 4$	
	$x_2 = 1$	$y_2 = \frac{1}{2}$				

а) (7.67) тіктөртбұрыштар формуласы бойынша,

$$C_0 = \frac{1}{4}, f(C_1) = \frac{1}{128}; \qquad C_2 = \frac{3}{4}, f(C_2) = \frac{27}{128};$$

$$C_3 = \frac{5}{4}, f(C_3) = \frac{125}{128}; \qquad C_4 = \frac{7}{4}, f(C_4) = \frac{343}{128};$$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{2} dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{128} + \frac{27}{128} + \frac{125}{128} + \frac{343}{128}\right) = \frac{3{,}875}{2} = 1{,}9375.$$

Абсолют қате: $R = |2 - 1{,}9375| = 0{,}0625$.

б) (7.70) трапециялар формуласы бойынша,

$$\int_0^2 \frac{x^3}{2} dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+4}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{27}{16}\right) = 2{,}125,$$

Абсолют қате: $R = 0{,}125$.

в) (7.74) Параболалар (Симпсон) формуласы бойынша,

$$\int_0^2 \frac{x^3}{2} dx \approx \frac{2}{6 \cdot 2}\left[0 + 4 + 4\left(\frac{1}{16} + \frac{27}{16}\right) + 2\frac{1}{2}\right] = 2.$$

Абсолют қате: $R = 0$.

VIII тарау. БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ҚИСАБЫ

Жаратылыстану, техника және экономиканың көптеген мәселелері бірнеше айнымал шамалардың арасындағы тәуелділікті қарастыруға келтіреледі. Бұл тәуелділікте айнымал шамалдардың біреуінің мәні басқа айнымал шамалардың мәндері арқылы толық анықталады. Осындай тәуелділіктерді зерттеу үшін бірнеше айнымалды функциялар ұғымын енгізіп, бұл функцияларды зерттеу тәсілдерін қарастыру керек.

Табиғаттағы барлық құбылыстар, негізінен, уақытқа және кеңістіктегі орнына байланыста екендігін, яғни кемінде төрт айнымал шама арасындағы тәуелділікке негізделгендігін атап өтуге болады.

§ 1. Бірнеше айнымалды функциялар

1.1. *m* өлшемді координаталық кеңістік және *m* өлшемді евклидтік кеңістік

Анықтама 1.1. $x_1, x_2, \dots, x_m$ нақты сандардың барлық $(x_1, x_2,\dots, x_m)$ реттелген тізбелерінің жиыны m өлшемді координаталық кеңістік деп аталады.

Координаталық кеңістік A^m белгісімен, реттелген сандар тізбесін $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ түрінде белгілеп, оны A^m кеңістік нүктесі немесе векторы деп атайды. Мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_m$ сандары x нүктесінің (векторының) координаталары деп аталады.

Анықтама 1.2. A^m координаталық кеңістікте кез келген $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ екі нүктенің ара қашықтығы

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} \tag{8.1}$$

теңдігімен анықталса, онда A^m евклидтік кеңістік деп аталады.

Евклидтік кеңістік R^m деп белгіленеді.

(8.1) формула жазықтықтағы және кеңістіктегі тікбұрышты Декарт координаталар жүйелеріндегі екі нүкте арасындағы қашықтықтың жалпыланған түрі.

Анықтама 1.3. x пен y векторларының қосындысы деп

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m) \tag{8.2}$$

векторын, ал x пен y векторларының айырымы деп

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_m - y_m) \tag{8.3}$$

векторын атайды; α саны мен x векторының, немесе, x векторы мен α санының көбейтіндісі деп

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_m) \tag{8.4}$$

векторын айтады.

Бұл (8.2), (8.3), (8.4) амалдар үшін келесі қасиеттер орындалады (α, β сандар; $x, y \in R^m$):

1) $x + y = y + x$; 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x - y = x + (-1)\, y$; 4) $\alpha x + \alpha y = \alpha\,(x + y)$;
5) $\alpha x + \beta\, y = (\alpha + \beta)x$; 6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$
7) 1 $x = x$.

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \qquad (8.5)$$

саны x векторының ұзындығы немесе нормасы деп аталады.

Анықтама 1.4. R^m кеңістіктегі x пен y векторларының скаляр көбейтіндісі деп

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m \qquad (8.6)$$

санды атайды.

(8.6) скаляр көбейтінді келесі қасиеттерге ие:

1) $(x, x) \geq 0$, мұндағы теңдік $x = 0$ болғанда, тек сонда ғана орындалады;

2) $(x, y) = (y, x)$; 3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$, мұндағы $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$.

Бұл қасиеттер тікелей анықтамадан шығады. Скаляр көбейтінді үшін келесі қатыстар орындалатынын атап өтейік:

$$1)\ (x, y) = |x||y| \cdot \cos\varphi,\ \ 0 \leq \varphi \leq \pi; \qquad (8.7)$$

Мұндағы φ – x пен y векторларының арасындағы бұрыш.

$$2)\ |x + y| \leq |x| + |y| \text{ немесе } \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2} \qquad (8.8)$$

Бұл теңсіздік Минковский теңсіздігі деп аталады.

$$3)\qquad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \qquad (8.9)$$

өйткені $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, $|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| \leq |x - y| + |x|$ немесе $|x| - |y| \leq |x - y|$, $|y| - |x| = -(|x| - |y|) \leq |x - y|$, ал бұдан $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$, яғни (8.9) теңсіздік шығады.

(8.8), (8.9) қатыстар үшбұрыш теңсіздіктері деп аталады.

1.2. R^m евклид кеңістігіндегі маңызды жиындар

$D = \{M(x_1, x_2, \ldots, x_m)\} \subset R^m$ болсын.

1°. $D \subset R^m$ жиынының әрбір $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нүктесінің координаталары ...

$$\rho(A, M) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_m - a_m)^2} < R \qquad (8.10)$$

теңсіздікті қанағаттандырса, онда D жиын центрі $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нүктесі, радиусы R болған ашық m-өлшемді шар деп аталады.

2°. $D \subset R^m$ жиынның әрбір M нүктесінің координаталары

$$\rho(A, M) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_m - a_m)^2} \leq R \qquad (8.11)$$

теңсіздікті қанағаттандырса, онда D жиын центрі $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нүктесі, радиусы R болған тұйық m-өлшемді шар деп аталады.

3°. $D \subset R^m$ жиынның әрбір M нүктесінің координаталары

$$\rho(A, M) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_m - a_m)^2} = R \qquad (8.12)$$
теңдікті қанағаттандырса, онда D жиын центрі $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нүктесі, радиусы R болған m-өлшемді сфера деп аталады.

4°. Центрі $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нүктесі, радиусы $\varepsilon > 0$ болған ашық шар A нүктесінің ε-маңайы деп аталады. A нүктесі кіретін кез келген ашық жиын A нүктесінің маңайы деп аталады.

5°. $D \in R^m$ жиынының әрбір $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктесінің координаталары $|x_1 - a_1| < d_1, |x_2 - a_2| < d_2, \dots, |x_m - a_m| < d_m$ теңсіздіктерді қанағаттандырса, мұндағы $d_1, d_2, \dots, d_m$ – кейбір оң сандар, онда D жиыны $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нүктесінің тіктөртбұрышты маңайы, немесе центрі $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ болған m өлшемді ашық координаталық параллелопипед деп аталады. Келесі тұжырым орынды: A нүктесінің кез келген ε-маңайы кейбір тіктөртбұрышты маңайды өз ішіне алады және, керісінше, кез келген A нүктесінің тіктөртбұрышты маңайы кейбір ε-маңайды өз ішіне алады. Шынында да $\varepsilon > 0$ үшін $d_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, i = \overline{1, m}$ ал $d_i > 0$ үшін $\varepsilon = \min\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ деп алынады.

6°. $M \in D$ болып, M нүктесі кейбір $\varepsilon > 0$ маңайымен D жиынында жатса, онда M нүктесі D жиынының ішкі нүктесі деп аталады.

7°. N нүктесі, өзінің кейбір $\varepsilon > 0$ маңайының нүктелерімен D жиынында жатпаса, онда N нүктесі D жиынының сыртқы нүктесі деп аталады.

8°. N нүктесі D жиынының ішкі де, сыртқы да нүктесі болмаса, ол D жиынының шекара нүктесі деп аталады.

D жиынының шекара нүктесі M бұл жиынға жатуы да, жатпауы да мүмкін.

Мысалы, центрі A нүктесінде, радиусы R-ге тең m-өлшемді сфераның кез келген нүктесі центрі A нүктесінде радиусы R-ге тең m-өлшемді тұйық шардың да, ашық шардың да шекаралық нүктесі болады. Тұйық шарға шекаралық нүктелер кіреді, ал ашық шарға шекаралық нүктелер кірмейді.

9°. $D \subset R^m$ жиынының кез келген нүктесі оның ішкі нүктесі болса, онда D жиынды ашық жиын деп атайды.

10°. $D \subset R^m$ жиынының барлық шекаралық нүктелері осы D жиынға кірсе, онда оны тұйық жиын деп атайды.

11°. R^m кеңістіктің A нүктесінің кез келген ε-маңайында D жиынның ең болмағанда A дан басқа бір нүктесі болса, онда A нүктесін D жиынының **шек нүктесі** деп атайды. Енді 9° жағдайды былайша тұжырымдауға болады:

Егер $D \subset R^m$ жиынының барлық шек нүктелері осы жиынға кірсе, онда D тұйық жиын болады. Яғни, D тұйық жиын болуы үшін, оның барлық шек нүктелері осы D жиынға кіруі қажетті және жеткілікті.

12°. $D \subset R^m$ жиынды **өз ішіне алатын** m-өлшемді шар табылса, онда D шенелген жиын деп аталады.

13°. R^m кеңестікте координаталары t параметр бойынша $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \le t \le \beta$ үзіліссіз функцяилармен аныкталған нүктелер жиыны үзіліссіз L қисық деп аталады.

14°. $D \subset R^m$ жиынының кез келген екі нүктесін нүктелері толығымен осы жиында жататын қисықпен байланыстыру мүмкін болса, онда D-байланысты жиын деп аталады.

15°. R^m кеңестіктегі әрқандай ашық және байланысты жиын D аймақ деп аталады.

16°. D аймаққа оның шекаралық нүктелерін біріктірсек, ол тұйық D аймақ деп аталады.

Мысал 1.1. Центрі $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нүктесінде, радиусы R-ге тең ашық m-өлшемді шар

$$Ш(A; R): (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 < R^2$$

шенелген, байланысқан және ашық жиын, яғни R^m кеңестікте шенелген аймақ.

Мысал 1.2. Центрі $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нүктесінде, радиусы R-ге тең R^m кеңістіктегі m-өлшемді сфера

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 = R^2$$

тұйық және шенелген жиын.

Мысал 1.3. Центрі $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нүктесінде, радиусы R-ге тең тұйық m-өлшемді шар

$$\overline{Ш}(A; R): (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 \leq R^2,$$

R^m кеңістіктегі шенелген тұйық аймақ.

Мысал 1.4. $R^m \backslash Ш(A; R)$ жиын R^m кеңістікте шенелмеген жиын.

Мысал 1.5. Екі қиылыспайтын аймақтың жиынтығы **байланыспаған** жиын.

1.3. Бірнеше айнымалды функция ұғымы

Жазуды және игеруді жеңілдету мақсатында алдымызда қарастырылатын мәселелер көбінесе $m = 2$, қажет болғанда $m = 3$ үшін келтіріледі және x_1, x_2, x_3 координаталары сәйкес түрде x, y, z арқылы белгіленеді.

Анықтама 1.5. Егер $D \in R^m$ жиынының әрбір $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктесіне белгілі f ереже бойынша анық бір $f(M)$ нақты саны сәйкес қойылса, онда D жиында анықталған $u = f(M)$ фукнциясы берілген делінеді.

D – функцияның анықталу жиыны, берілген M нүктесіне сәйкес $f(M)$ саны функцияның M нүктесіндегі дербес мәні, ал барлық дербес мәндер жиынтығы $\{f(M)\}$ функцияның өзгеру жиыны деп аталады. M нүктесінің координаталары $x_1, x_2, \dots, x_m$ болғандықтан $u = f(M)$ функциясын $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ түрінде де белгілейді, яғни

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$m = 2$ болғанда $z = f(M) = f(x, y)$ белгілеуі, ал $m = 3$ болғанда $z = f(M) = f(x, y, z)$ белгілеуі қолданылады.

Анықтама 1.5'. $D = \{(x, y)\} \subset R^2$ реттелген нақты сандар жиыны, $E \subset R$ нақты сандар жиыны болсын. Кез келген $(x, y) \in D$ реттелген сандар жұбы үшін белгілі f ереже бойынша анық бір $z \in E$ саны сәйкес қойылса, онда z шамасы x, y айнымалдардың функциясы деп аталады.

Функция $f : D \to E$ немесе $z = f(x, y)$ түрінде жазылады. Мұндағы x, y – тәуелсіз айнымалдар (аргументтер), z – тәуелді айнымал (функция), D – функцияның анықталу жиыны, $f(x_0, y_0)$ – функцияның (x_0, y_0) нүктесіндегі дербес мәні деп аталады.

Егер (D, f) жұбы берілсе, онда функция берілген делінеді.

Ескерту 1.1. Кез келген өлшемді кеңістікте де функция осы сияқты анықталады.

$z = f(x, y)$ функциясын (мұндағы $(x, y) \in D$) Oxy координаталық жазықтықтағы $M(x, y)$ нүктенің функциясы деп қарастыруға болады. Дербес жағдайларда функцияның анықталу аймағы барлық жазықтық, немесе оның кейбір сызықтармен шенелген бөлігі болуы мүмкін.

$D \subset R^2$ үшін R^m үшін ілгері енгізілген бірнеше жаңа ұғымдарды анықтайық.

Анықтама 1.6. Аймақты шенеуші сызық аймақтың шекарасы деп аталады.

Анықтама 1.7. Аймақтың шегарада жатпайтын нүктелерін оның ішкі нүкелері деп атайды; яғни M ішкі нүкте өзінің кейбір маңайымен аймақта жатады.

Анықтама 1.8. Барлық нүктелері ішкі нүктелер болған аймақ ашық аймақ деп аталады.

Анықтама 1.9. Ашық аймақ пен оның шекарасы біріксе, ол тұйық аймақ деп аталады.

$z = f(x, y)$ немесе $f(M)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі дербес мәні $z_0 = f(x_0, y_0)$ немесе $z_0 = f(M_0)$ деп белгіленеді.

Екі айнымалды функцияның геометриялық кескіні

Екі айнымалды функцияны геометриялық тұрғыдан түсіндіруге болады. $Oxyz$ координаталар жүйесінде D аймақтың әрбір $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіне $M(x_0, y_0, z_0)$, нүктесі сәйкес келеді, мұндағы $z_0 = f(x_0, y_0)$, M нүктесінің аппликатасы.

Осындай барлық нүктелердің жиыны $Oxyz$ кеңістікте кейбір бетті анықтайды. Бұл бет $z = f(x, y)$ функциясының графигі деп аталады.

Екі айнымалды функция да, бір айнымалды функция сияқты, кестелік, графиктік және аналитикалық (формула) түрде берілуі мүмкін. Әдетте, аналитикалық түрде берілген функция жиірек қарастырылады.

Екі айнымалды функцияларға мысалдар келтірейік.

Мысал 1.6. Функциялардың анықталу және мәндер аймақтары анықталсын:

а) $z = x^2 + y^2 + 1$; б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; в) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$;

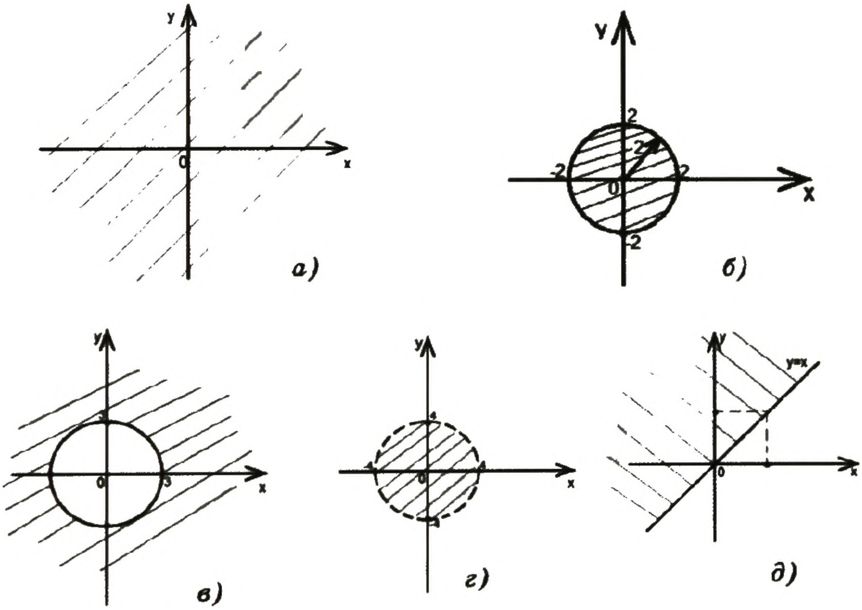
г) $z = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$; д) $z = \sqrt{y - x}$

Шешуі. а) Берілген функция көпмүше болғандықтан оның анықталу аймағы барлық Oxy жазықтығы, яғни $D = \{(x, y) \in R^2\}$ (сурет 8.1а). Ал, мәндер аймағы, x пен y жұп дәрежелі болғандықтан, $E = [1, +\infty)$.

б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ функциясының анықталу аймағы $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, немесе $x^2 + y^2 \leq 4$ теңсіздігін қанағаттандыратын $(x, y) \in R^2$ нүктелер жиыны, яғни центрі $O(0;\ 0)$ нүктесінде, радиусы $R = 2$ болатын дөңгелек. Мәндер аймағы $E = [0, 2]$ (сурет 8.1б).

в) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ функциясының анықталу аймағы $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$, немесе $x^2 + y^2 \geq 9$ теңсіздігін қанағаттандыратын Oxy жазықтығындағы нүктелер жиыны, яғни центрі $O(0;\ 0)$, радиусы $R = 3$ болатын, $x^2 + y^2 < 9$ дөңгелекте жатпайтын Oxy жазықтығының барлық нүктелері. Мәндер жиыны: $E = [3, +\infty)$ (сурет 8.1в).

г) $z = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ функциясының анықталу аймағы $16 - x^2 - y^2 > 0$ немесе $x^2 + y^2 < 16$ теңсіздігін қанағаттандыратын Oxy жазықтығының барлық нүктелері, яғни центрі $O(0;\ 0)$ нүктесіндегі, радиусы $R = 4$ болатын ашық дөңгелек. Мәндер жиыны: $E = (0, 1/4)$ (сурет 8.1г).

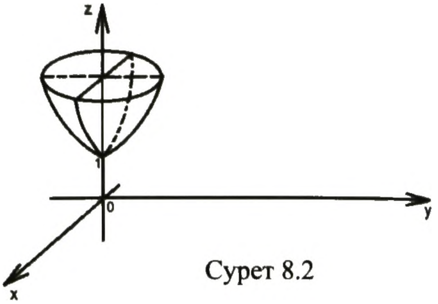


Сурет 8.1

д) $z = \sqrt{y - x}$ функциясының анықталу аймағы $y - x \geq 0$ немесе $y \geq x$ теңсіздігін қанағаттандыратын Oxy жазықтығының нүктелері (сурет 8.1д):

Мысал 1.6 a-дағы $z = x^2 + y^2 + 1$ функциясының графигі, айналу параболоиды болады (сурет 8.2).

Ескерту 1.2. Егер функциялық тәуелділік нақты физикалық шамалардың арасында болса, онда анықталу аймағы физикалық айнымал шамалардың табиғатына байланысты болады. Мысалы тіктөртбұрыштың ауданы $f(x,y) = xy$ формуласымен анықталады. Мұндағы x тіктөртбұрыштың табаны, y биіктігі. Бұл жағдайда $D(f) = \{(x, y), x > 0,\ y > 0\}$.



Сурет 8.2

§ 2. Бірнеше айнымалды функцияның шегі

Екі және одан көп айнымалды функциялар үшін функцияның шегі және үзіліссіздігі ұғымдары бір айнымалды функцияның шегі және үзіліссіздігі сияқты енгізіледі. Мұнда тек x және x_0 шамалары M және M_0 нүктелерімен, ал $|x - x_0|$ өрнегі (8.1) $\rho(M, M_0)$ өрнегімен ауыстырылады.

Анықтама 2.1. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмір табылып, барлық $\boldsymbol{n} \geq N$ нөмірлер үшін

$$\rho(M_0, M_n) = \sqrt{(x_1^{(n)} - x_1^{(0)})^2 + (x_2^{(n)} - x_2^{(0)})^2 + \ldots + (x_m^{(n)} - x_m^{(0)})^2} < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ нүктесі табылса, онда $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ нүктесі $\left\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)})\right\}$ нүктелер тізбегінің шегі деп аталады.

Шегі бар тізбек жинақталушы тізбек деп аталады.

Екі айнымалды $u = f(M)$, $M(x, y)$, функциясын қарастырайық.

$u = f(M)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің кейбір маңайында анықталсын. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі бұл маңайда жатуы да, жатпауы да мүмкін.

Анықтама 2.2. (Гейне) Егер M_0 нүктесіне жинақталушы кез келген $\{M_n\}$, $M_n \neq M_0$ нүктелер тізбегі үшін функцияның сәйкес мәндерінің $\{f(M_n)\}$ тізбегі b санына жинақталса, онда b саны $f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп аталады және $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$ немесе $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = b$ деп жазылады.

"ε – δ" тілінде функцияның шегі былайша анықталады.

Анықтама 2.3. (Коши). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $0 < \rho(M_0, M) < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $M(x, y) \in D(f)$ нүктелері үшін $|f(M) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b саны $f(M)$

функциясының M_0 нүктесіндегі (немесе $M \to M_0$ болғандағы) шегі деп аталады да. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(M)=b$ немесе $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$ деп жазылады.

Анықтама 2.4. (Коши) Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $\rho(0, M) > \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $M(x, y) \in D(f)$ нүктелері үшін $|f(M)-b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b саны $f(M)$ функциясының $M \to \infty$ болғандағы шегі деп аталады да, $\lim\limits_{M\to\infty} f(M)=b$ деп жазылады.

Анықтама 2.2 мен анықтама 2.3 өзара эквивалентті екендігін дәлелдеу бір айнымалды функциядағыдай. Тек x_0 мен x айнымалдар M_0 мен M нүктелері мен, $|x - x_0|$ және $|x_n - x_0|$ айырмалар $\rho(M, M_0)$ және $\rho(M_n, M_0)$ арақашықтықтармен, ал $\{f(x_n)\}$ санды тізбек $\{f(M_n)\}$ санды тізбекпен ауыстырылады.

Мысал 2.1. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ функциясының $M_0(4;\ 2)$ нүктесіндегі шегін табайық.

Шешуі. Берілген функция Oxy координаталық жазықтықтың барлық нүктелерінде анықталған. M_n нүктелердің M_0 нүктеге ұмтылушы кез келген $\{M_n\}$ тізбегі үшін $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n^2 + y_n^2) = 2\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 + \lim\limits_{n\to\infty} y_n^2 = 2\cdot 4^2 + 2^2 = 36$

Мысал 2.2. $f(x,y) = \frac{2x-y}{x+y}$ функциясының $M_0(0;\ 0)$ нүктесінде шегі жоқ екендігін көрсетілсін.

Шешуі. Берілген функция $\boldsymbol{x + y = 0}$ түзуінің нүктелерінен басқа $\boldsymbol{Oxy}$ жазықтығының нүктелерінде анықталған. $M_n\left(\frac{1}{n};0\right)$ және $M_n^{'}\left(0;\frac{1}{n}\right)$ нүктелер тізбегі $M_0(0;\ 0)$ нүктесіне жинақталады. Онда $\lim\limits_{n\to\infty} f(M_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}+0} = 2$, және

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n^{'}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 0-\frac{1}{n}}{0+\frac{1}{n}} = -1.$$

Демек, анықтама 2.2 шарттары орындалмады, яғни $M_0(0;\ 0)$ нүктесіне жинақталушы екі тізбектің мәндер жиыны тізбегінің шегі әртүрлі. Сондықтан $M_0(0;\ 0)$ нүктесінде берілген функцияның шегі жоқ.

Екі айнымалды функция шегінің анықтамасын пайдаланып, бір айнымалды функциялардың шектерінің негізгі теоремаларын екі айнымалды функцияларға көшіруге болады.

Теорема 8.1. $f(M)$ мен $g(M)$ функциялары D аймағында анықталған және $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=B$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=C$ шектері болсын. Онда:

1) $\lim\limits_{M\to M_0}\left[f(M)\pm g(M)\right]=B\pm C$;

2) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\cdot g(M)=B\cdot C$;

3) $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{B}{C}$ $\quad(C\neq 0)$ теңдіктер орынды.

Дәлелдеуі бір айнымалды функциядағыдай (теорема 5.14), тек x пен x_0 шамалары M мен M_0 нүктелерімен ауысады.

Анықтама 2.5. Егер

$$\lim_{M\to M_0}\alpha(M)=0 \tag{8.14}$$

болса, онда $\alpha(M)$ функциясы $M=M_0$ нүктесінде (немесе $M\to M_0$ болғанда) ақырсыз кішкене функция деп аталады.

Мысал 2.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{2y}=0$ екіндігін дәлелдейік.

Шешуі. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{2y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin xy}{xy}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}=\dfrac{1}{2}0\cdot 1=0.$

Теорема 8.2. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A=\text{const}$ болуы үшін $\alpha(M)=f(M)-A$ функциясының M_0 нүктесінде ақырсыз кішкене функция болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ болсын. Онда $\lim\limits_{M\to M_0}\alpha(M)=$ $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)-A)=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)-A=A-A=0.$

Жеткіліктілігі. $\lim\limits_{M\to M_0}\alpha(M)=0$ болсын. Онда $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=\lim\limits_{M\to M_0}(A+\alpha(M))=A+\lim\limits_{M\to M_0}\alpha(M)=A+0=A.$

Екі айнымалды ақырсыз кішкене функцияларды салыстыру да бір айнымалды ақырсыз кішкене функцияларды салыстыру сияқты.

$\alpha=\bar{o}(\beta)$ белгісі M_0 нүктесінде $\alpha(M)$ функциясы $\beta(M)$ функциясына қарағанда жоғарғы ретті ақырсыз кішкене функция екендігін білдіреді, яғни $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)}=0.$

§ 3. Бірнеше айнымалды функцияның үзіліссіздігі

Анықтама 3.1. $D \in R^m$, $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right) \in D$ болсын. Егер $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ немесе

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ x_2 \to x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right) \tag{8.15}$$

теңдігі орындалса, онда $f(M)$ функциясы M_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

(8.15) теңдігі үзіліссіздік ұғымының шек негізіндегі анықтамасы.

3.1. Екі айнымалды функцияның үзіліссіздігі

$m = 2$ болған жағдайды қарастырайық.

$f(M)$ функциясы $D \subset R^2$ аймақта анықталған, $M_0 \in D$ болып, M_0 нүктесінің кез келген δ-маңайында D жиынның нүктелері бар болсын.

Анықтама 3.2. Егер $f(M)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктедегі шегі бар және ол шек осы функцияның M_0 нүктесіндегі мәніне тең болса, онда $f(M)$ функциясы M_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады, яғни

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \text{ немесе } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \qquad (8.15\ a)$$

Анықтама 3.2-ні тізбектер тілінде былайша беруге болады:

Анықтама 3.2 *а* (Гейне). $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \in D$ кез келген тізбек үшін $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M_0$ болғанда

$$\lim_{n \to M_0} f(M_n) = f(M_0), \text{ немесе } \lim_{\substack{x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0}} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0) \qquad (8.15б)$$

теңдігі орындалса, онда f $M)$ функциясы (M_0) нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

"ε – δ" тілінде $f(M)$ функциясының M_0 нүктедегі үзіліссіздігі былайша анықталады.

Анықтама 3.2б (Коши). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $\rho(M_0, M) < \delta$ теңсіздігін қанағаттандырушы барлық $M \in D$ нүктелер үшін $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $f(M)$ функциясы M_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Қабылданған таңбаларды пайдалансақ анықтама 3.2 а былайша жазылады: $\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in D, \rho\left(M_0, M\right) < \delta\right) : \left|f\left(M\right) - f\left(M_0\right)\right| < \varepsilon$ Кейініректе $z = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі үзіліссіздігінің басқаша жазылуы жиі қолданылады.

$z = f$ $M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі толық өсімшесі деп

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

шаманы атайды.

$M_0(x_0, y_0)$ және $M(x, y)$ нүктелері үшін $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$ белгілеулерін енгізсек, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ түрінде өрнектеледі.

Анықтама 3.2в. Егер $z = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі толық өсімшесі $M \to M_0$ болғанда ақырсыз кішкене функция, яғни

$$\lim_{M\to M_0} \Delta z = \lim_{M\to M_0} [f(M) - f(M_0)] = 0, \text{ немесе } \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0 \qquad (8.15в)$$

болса, онда $z = f(M)$ функциясы M_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

$$\lim_{M\to M_0} \Delta z = 0 \text{ шартынан } \lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \qquad (8.15б)$$

болатындығы айқын көрінеді.

Мысал 3.1. $z = x^2 - y^2$ функцияның Oxy жазықтығының кез келген $M(x, y)$ нүктесінде үзіліссіз екендігін көрсетейік.

Шешуі. Берілген $M(x, y)$ нүктесіндегі толық өсімшесі
$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2] - (x^2 - y^2) = 2x \quad \Delta x - 2y \quad \Delta x + (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2$

Бұл теңдіктен $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ болғанда $\Delta z \to 0$ болатындығы айқын. Демек, анықтама 3.2в бойынша берілген функция кез келген белгіленген $M(x, y)$ нүктесінде үзіліссіз.

Анықтама 3.3. $f(M)$ функциясының үзіліссіз болмаған нүктелері, оның үзіліс нүктелері деп аталады.

3.2. Нүктеде үзіліссіз бірнеше айнымалды функциялардың негізгі қасиеттері

Теорема 8.3. Егер $f(M)$ және $g(M)$ функциялары $M_0 \in D \subset R^2$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \quad g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M_0) \neq 0)$ функциялары да M_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі бір айнымалды функциялар (теорема 5.25) сияқты дәлелденеді. Тек x орнына M, x_0 орнына M_0 нүктелері, $|x - x_0|$ орнына $\rho(M_0, M)$ ара қашықтық жазылады.

Теорема 8.4. Егер $z = f(M)$ функциясы $M_0 \in D \subset R^2$ нүктесінде үзіліссіз, әрі $f(M_0) \neq 0$ болса, онда M_0 нүктесінің кейбір δ-маңайы табылып, бұл маңайдың барлық нүктелерінде $f(M_0)$ санның таңбасы сақталады.

Теорема 8.5. (күрделі функцияның үзіліссіздігі) $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ функциялары $(u_0, v_0) \in D \subset R^2$ нүктесінде үзіліссіз, ал $z = f(x, y)$ функциясы сәйкес $(x_0, y_0) \in D \subset R^2$, мұндағы $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, нүктесінде үзіліссіз болсын. Онда $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ күрделі функция (u_0, v_0) нүктесінде үзіліссіз болады.

Бұл теоремалар бір айнымалды функциялар үшін сәйкес теоремалар (теоремалар 5.26, 5.27, 5.28) сияқты дәлелденеді.

Ескерту 3.1. Айнымалдар саны екіден көп болған жағдайда да теорема орынды болады.

3.3. Тұйық аймақта үзіліссіз функциялардың негізгі қасиеттері

Бір өлшемді R^1 кеңістіктегі кесіндінің R^m кеңістіктегі үйлесімі – тұйық аймақ. Сондықтан кесіндідегі бір айнымалды үзіліссіз функциялардың қасиеттерінің жалпыланған түрі бірнеше айнымалды үзіліссіз функциялар үшін тұйық аймақта орынды болады.

Теорема 8.6. Егер $z = f(M)$ функциясы шенелген D тұйық аймақта үзіліссіз болса, онда: а) $f(M)$ функциясы D аймақта шенелген, яғни $c > 0$ саны табылып, D аймақтың барлық нүктелерінде $|f(M)| < c$ теңсіздік орындалады;

б) M_1 және M_2 нүктелері табылып, бұл нүктелерде $f(M)$ функциясы өзінің дәл жоғарғы және дәл төменгі шекараларын қабылдайды, яғни $f(M_1) = \sup\limits_{M \in D} f(M) = \max\limits_{M \in D} f(M), f(M_2) = \inf\limits_{M \in D} f(M) = \min\limits_{M \in D} f(M)$;

в) Ең болмағанда бір нүкте табылып, бұл нүктеде $\max f(M)$ мен $\min f(M)$ арасындағы кез келген мәнді қабылдайды.

§ 4. Бірнеше айнымалды функцияның туындылары мен дифференциалдары

4.1. Дербес туындылар

$z = f M)$ функциясы белгіленген $M(x, y)$ нүктесінің кейбір маңайында анықталған болсын. M нүктесіндегі x айнымалға көрсетілген маңайдан шықпайтындай Δx өсімше берейік те, y айнымалды өзгеріссіз қалдырайық, яғни, $M(x, y)$ нүктесінен $M_1(x + \Delta x, y)$ нүктесіне өтейік. Сонда функцияның алатын сәйкес өсімшесі

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

шама $M(x, y)$ нүктесіндегі x айнымал бойынша дербес өсімшесі деп аталады. Осы сияқты y айнымал бойынша алатын дербес өсімше

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Анықтама 4.1. Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} \right)$ шек бар болса, онда ол шек $z = f(M)$ функциясының белгіленген $M(x, y)$ нүктесіндегі x айнымал (y айнымал) бойынша дербес туындысы деп аталады және $z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \left(z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ белгілеулердің біреуімен белгіленеді.

Анықтамадан көрінгендей, x бойынша дербес туындыны тапқанда (y бойынша дербес туындыны) y белгіленген шама (x белгіленген шама) деп алынады.

Демек, дербес туындылар бір айнымалды функциялардың туындыларының формулалары мен ережелерін қолдану арқылы есептеледі.

Ескерту 4.1. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, функциясының $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктесіндегі x_k, $k = \overline{1, m}$, айнымал бойынша дербес туындысында x_k-ны айнымал деп, ал $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m$ белгіленген шама ретінде қарап, бір айнымалды функцияның туындысы ретінде есептеледі.

Мысал 4.1. Берілген функциялардың $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары табылсын:

а) $z = x^3 - 2xy^2 + y^2$; б) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; в) $z = x^3 \sin y$.

Шешуі. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 2y$.

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$.

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \cdot \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y$.

Мысал 4.2. Берілген функциялардың $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ дербес туындыларын табайық:

а) $u = 2x^2 y z - xy^2 \cos z + \sqrt{x} \sin y \cdot \operatorname{tg} z$;

б) $u = x^3 \cos y + 2y^2 \operatorname{tg} z - x\cos y + z^2 x$

Шешуі. а) $\frac{\partial u}{\partial x} = 4xyz - y^2 \cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin y \operatorname{tg} z$,

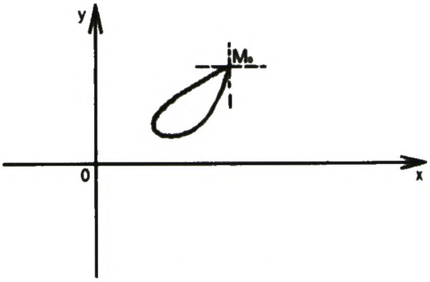
$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 z - 2xy\cos z + \sqrt{x} \cos y \cdot \operatorname{tg} z$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2 y + xy^2 \sin z + \frac{\sqrt{x}\sin y}{\cos^2 z}$.

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \cos y - \cos y + z^2$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x^3 \sin y + 4y\operatorname{tg} z + x\sin y$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\cos^2 z} + 2zx$.



Сурет 8.3

Ескерту 4.2. Анықтама 4.1. бойынша дербес туындылар $M(x, y)$ ішкі нүктелер үшін анықталды. $M(x, y)$ шекаралық нүкте болғанда $\Delta_x z(\Delta_y z)$ анықталмауы мүмкін, өйткені $M_1(x + \Delta x, y)$, $(M_2(x, y + \Delta y))$ нүктесі $\Delta x \neq 0$ $(\Delta y \neq 0)$ болғанда аймақта жатпауы мүмкін. Бұл жағдайда, егер ішкі $M(x, y)$ нүктесінде дербес туынды бар болса, онда M_0 шекаралық нүктедегі дербес туынды $\lim\limits_{M \to M_0} z'_x(M)$ шек бар болса, анықтама бойынша

$$z'_x(M_0) = \lim_{M \to M_0} z'_x(M)$$

түрінде анықталады (сурет 8.3).

Екі айнымалды функцияның дербес туындыларының геометриялық мағынасы

$z = (x,\ y)$ функциясының графигі кеңістіктегі кейбір бет болатындығы белгілі. $y = y_0 = \text{const}$ десек $z = (x,\ y_0)$ функциясының графигі осы бетпен $y = y_0$ жазықтығының қиылысу сызығы.

Бір айнымалды функцияның туындысының геометриялық мағынасын (6.2) ескерсек, $f'_x(x,\ y_0) = \text{tg}\alpha$, мұндағы α – Ox осімен $z = f\,(x,\ y_0)$ сызығының $M_0(x_0,\ y_0)$ нүктесіндегі жанамасының арасындағы бұрыш. Осы сияқты $f'_y(x_0,\ y) = \text{tg}\beta$, мұндағы β – Oy осімен $z = f\,(x_0,\ y)$ сызығының $M_0(x_0,\ y_0)$ нүктесіндегі жанамасының арасындағы бұрыш.

4.2. Дифференциалданатын функция ұғымы

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ өрнегі $z = f(M)$ функциясының $M(x,\ y)$ ішкі нүктедегі x және y айнымалдардың Δx және Δy өсімшелеріне сәйкес толық өсімшесі екендігі белгілі.

Анықтама 4.2. $z = f(M)$ функциясының $M(x,\ y)$ нүктесінде толық өсімшесі

$$\Delta z = A\quad \Delta x + B\quad \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\quad \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\quad \Delta y \qquad (8.16)$$

түрінде өрнектелсе, онда $z = f\,(M)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданушы деп аталады.

Мұндағы A және B, Δx және Δy өсімшелеріне тәуелсіз сандар, ал $\alpha(\Delta x,\ \Delta y)$ және $\beta(\Delta x,\ \Delta y)$ функциялары $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функциялар.

Бір айнымалды функция кейбір нүктеде дифференциалданатын болса, онда сол нүктеде функция үзіліссіз және туындысы бар болатыны белгілі. Және керісінше, берілген нүктеде функцияның туындысы бар болса, онда ол бұл нүктеде дифференциалданатын функция болады.

Екі айнымалды функциялар үшін осы шарттардың қолданылуын қарастырайық.

Теорема 8.7 ***а*****.** (дифференциалданудың қажетті шарттары). Егер $z = f\,(M)$ функциясы $M(x,\ y)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда функция бұл нүктеде үзіліссіз және $f'_x(x,\ y), f'_y(x,\ y)$ дербес туындыларына ие болады, әрі $f'_x(x, y) = A,\quad f'_y(x, y) = B$ теңдіктері орынды.

Дәлелдеуі. Егер $f\,(M)$ функциясы $M\,(x,\ y)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда (8.16) теңдігінен $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$ екендігі шығады, яғни функция бұл нүктеде үзіліссіз.

$f\,(M\,)$ функциясы $M(x,\ y)$ нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан (8.16) теңдік орынды. $\Delta y = 0$ десек (8.16) теңдік $\Delta_x z = A\ \Delta x + \alpha(\Delta x,\ 0)\quad \Delta x$ түріне келеді. Бұл теңдіктің екі бөлігін Δx-қа бөліп, $\Delta x \to 0$ деп шекке көшсек

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[A+\alpha(\Delta x,0)]=A.$$

Демек, M нүктесінде $f'_x(x, y) = A$.

Осы сияқты, $\Delta x = 0$ десек, (8.16) теңдік $\Delta_y z = B\ \Delta y + \beta(0,\ \Delta y)\cdot\ \Delta y$ түріне келіп, бұдан

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}[B+\beta(0,\Delta y)]=B.$$

Бұл, теоремаға кері тұжырым, дұрыс емес. Яғни $M(x,\ y)$ нүктесінде $f\ (M)$ функциясының үзіліссіздігінен немесе $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ дербес туындылардың барлығынан функция дифференциалданушы болмайды.

Мысалы, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ функциясы (0, 0) нүктесінде үзіліссіз, бірақ бұл нүктеде дербес туындыларға ие емес. Шынында да, $\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$, ал бірақ , $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ функциясының $\Delta x\to 0$ болғанда шегі жоқ. Демек, $f'_x(0{,}0)$ жоқ. Осы сияқты $f'_y(0{,}0)$ дербес туындысы да болмайды. Берілген функция (0, 0) нүктесінде дербес туындыларға ие болмағандықтан, берілген нүктеде дифференциалданбайды.

$$f(x,y)=\begin{cases}0, Ox \text{ және Oy осьтерінде,}\\ 1, Oxy \text{ жазықтықтың басқа нүктелерінде}\end{cases}$$

функциясы $O(0,\ 0)$ нүктесінде дербес туындыларға ие $f\ (x,\ 0)\equiv 0$, $f\ (0,\ y)\equiv 0$ болғандықтан, $f'_x(0{,}0) = 0$ және $f'_y(0{,}0) = 0$. Бірақ $f\ (x,\ y)$ функциясы бұл нүктеде үзіліссіз емес.

Теорема 8.7б. (дифференциалданудың жеткілікті шарттары) Егер $z = f\ (M)$ функциясының $M(x,\ y)$ нүктесінің кейбір δ-маңайында f'_x, f'_y дербес туындылары бар және бұл дербес туындылар $M(x,\ y)$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f\ (M)$ функциясы $M(x,\ y)$ нүктесінде дифференциалданушы болады.

Дәлелдеуі. $M(x,\ y)$ нүктесін және оның δ-маңайын белгілеп алайық. x және y айнымалдарға осы δ-маңайынан шықпайтындай Δx және Δy өсімшелерін берейік. Сонда функцияның

$$\Delta z = f\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$$

толық өсімшесін

$$\Delta z = [f\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y + \Delta y)] + [f\ (x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y)] \quad (8.16)$$

түрінде жазуға болады. $f\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y + \Delta y)$ өрнегін $f\ (x,\ y + \Delta y)$ тек бір x айнымалды функцияның өсімшесі деп қарауға болады. Мұндағы $y + \Delta y$ белгіленген тұрақты сан. Шарт бойынша, бұл функция $f'_x(x,\ y + \Delta y)$ туындысына ие. 6.11 Лагранж теоремасы бойынша

$$f\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y + \Delta y) = f'_x(x+ \theta_1\ \ \Delta x,\ y + \Delta y)\cdot \Delta x,\ \ 0 < \theta_1 < 1$$

Осы сияқты талқылап, $f\ (x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y)$ айырым үшін

$$f\ (x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y) = f'_y(x,\ y + \theta_2\ \ \Delta y)\ \ \Delta y,\ \ 0 < \ \theta_2 < 1$$

теңдігі алынады.

Шарт бойынша, f'_x, f'_y дербес туындылары $M(x,\ y)$ нүктесінде үзіліссіз. Сондықтан

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x + \theta_1\ \ \Delta x,\ y + \Delta y) = f'_x(x\ ,\ y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(\,(x, y+\theta_2\ \ \Delta y\,) = f'_y(x\,,\,y).$$

Бұл теңдіктерден

$$f'_x(x+\theta_1\ \ \Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x, y)+\alpha(\Delta x, \Delta y),$$
$$f'_y(x, y+\theta_2\ \ \Delta y\,) = f'_y(x, y)+\beta(\Delta x, \Delta y)$$

екендігі шығады. Мұндағы $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ және $\beta(\Delta x, \Delta y)$ функциялары $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функциялар. Алынған бұл өрнектерді (8.16) теңдігіне қойсақ

$$\Delta z = f'_x(x, y)\ \ \Delta x + f'_y(x, y)\ \ \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y \qquad (8.17)$$

екендігі табылады. Ал, бұл теңдік $f\,(x,y)$ функциясы $M(x,\ y)$ нүктесінде дифференциалданатын функция екендігін көрсетеді.

Салдар 4.1. $f'_x(x,\ y)$ және $f'_y(x,\ y)$ дербес туындылары $M(x,\ y)$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f\ (x, y)$ функциясы да осы нүктеде үзіліссіз.

Анықтама бойынша (8.16) теңдік арқылы функцияның берілген нүктеде дифференциалдануын анықтау едәуір қиындықтар тудырады. Бұл мәселені теорема 8.7б. жеңілдетеді, себебі дербес туындылардың нүктедегі үзіліссіздігін көрсету оңайлау.

Ескерту 4.3. Үш және одан да көп айнымалды функциялардың нүктедегі дифференциалдануы екі айнымалды функция сияқты енгізіледі.

4.3. Күрделі функциялардың туындылары

Күрделі функциялардың үш түрін қарастырайық.

4. $z = f\ (x, y)$ екі айнымалды функция берілген. Өз кезегінде $x = x(t)$, $y = y(t)$, яғни t тәуелсіз айнымалды функциялар болсын. Онда $z = f\ [x(t),\ y(t)]$ функциясы тәуелсіз айнымал t-ның функциясы болып, ал x пен y аралық айнымалдар болады.

Теорема 8.8. Егер $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялары t нүктесінде дифференциалданушы, ал $z = f\ (x,\ y)$ функциясы $M[x(t),\ y(t)]$ нүктесінде дифференциалданушы болса, онда $z = f\ [x(t),\ y(t)]$ күрделі функциясы да t нүктесінде дифференциалданушы болады және күрделі функцияның туындысы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (8.18)$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. t айнымалға Δt өсімше берсек $x(t)$ мен $y(t)$ функциялары Δx және Δy өсімшелер алады, ал $z = f\ (x, y)$ функция өз кезегінде

$$\Delta z = f\ (x+\Delta x y+\Delta y) - f\ (x, y)$$

өсімше алады. Шарт бойынша $z = f\ (x,\ y)$ функциясы $M(x,\ y)$ нүктесінде (мұндағы $x = x(t)$, $y = y(t)$), дифференциалданушы. Сондықтан (8.17) теңдік бойынша функцияның өсімшесін

$$\Delta z = f'_x(x, y)\ \ \Delta x + f'_y\ (x, y)\ \ \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\ \ \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\ \ \Delta y$$

түрінде жазуға болады. Мұндағы $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ функциялары $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функциялар.

$\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ болғанда $\alpha(0, 0) = 0$, $\beta(0, 0) = 0$ деп анықтайық.

Δz үшін алынған теңдіктің екі бөлігін Δt-ға бөлсек,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (8.19)$$

теңдігін аламыз. Шарт бойынша: $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$, әрі $x(t)$, $y(t)$ функциялары t нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан, олар t нүктесінде үзіліссіз, яғни $\Delta t \to 0$ болғанда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ болып, $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ екендігі шығады. Сондықтан (8.19) теңдігінің $\alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}$ қосылғыштары $\Delta t \to 0$ болғанда (8.19) теңдіктің оң бөлігінің шегі бар болады, демек, сол бөлігінің де шегі бар, яғни $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$, және $\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt}$ немесе $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Мысал 4.3. $z = x \quad \sin\frac{x}{y}$ функциясының $x = 5 + 6t$, $y = \sqrt{1 + t^3}$ болғандағы туындысы табылсын.

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}, \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}. \frac{dx}{dt} = 6, \frac{dy}{dt} = \frac{3t^2}{2\sqrt{1 + t^3}}$$

болғандықтан (8.18) формула бойынша

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)\cdot 6 - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{3t^2}{2\sqrt{1 + t^3}}$$

2. Егер $z = f(x, y)$ функциясында $y = \varphi(x)$ болса, онда $z = f[x, \varphi(x)]$ функциясы x-тің күрделі функциясы болады.

(8.18) формулада $t = x$ деп алсақ, $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$; немесе $\frac{dx}{dx} = 1$ екендігін ескерсек,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (8.20)$$

Дербес жағдайда $y(x)$ функциясы айқындалмаған $f(x, y(x)) = 0$ түрінде берілсе, оның туындысы, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ бұдан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f'_x}{f'_y} \qquad (8.20а)$$

Мысал 4.4. $z = x^3 + \sqrt{y}$, $y = \sin^2 x$ күрделі функцияның туындысы табылсын.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$ болғандықтан (8.20) формуласы бойынша

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{y}}2\sin x\cdot\cos x = 3x^2 + \frac{2\sin x\cdot\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x}} = 3x^2 + \cos x$$

4. Енді жалпы жағдайды қарастырайық. $Z = f(x, y)$ екі айнымалды функция, өз кезегінде x және y айнымалдар екі немесе одан да көп айнымалдарға тәуелді, мысалы $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ болсын. Онда $z = f\,[x(u, v), y(u, v)]$ функциясы u және v айнымалдардың күрделі функциясы, ал x және y аралық айнымалдар болады.

Теорема 8.9. Егер $x(u, v)$ және $y(u, v)$ функциялары (u, v) нүктесінде, ал $z=f\,(x, y)$ функциясы (x, y) нүктесінде, мұндағы $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, дифференциалданушы болса, онда $z = f\,[x(u, v), y(u, v)]$, күрделі функция (u, v) нүктесінде дифференциалданушы болады және күрделі функцияның осы (u, v) нүктедегі дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \tag{8.21}$$

формулалармен анықталады.

Дәлелдеуі. u айнымалға Δu өсімше беріп, v айнымалды өзгертпей қалдырсақ, онда $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ функциялары сәйкес түрде $\Delta_u x$, $\Delta_u y$ дербес өсімшелер алады, ал дифференциалданушы $z = f\,(x, y)$ функцияның алатын өсімшесін (8.17) теңдік бойынша

$$\Delta_u z = f_x'\Delta_u x + f_y'\Delta_u y + \alpha(\Delta_u x, \Delta_u y)\Delta_u x + \beta(\Delta_u x, \Delta_u y)\Delta_u y$$

түрінде жазуға болады. Бұл теңдіктің екі бөлігін де $\Delta u \neq 0$ өсімшеге бөліп, $\Delta u \to 0$ болғанда шекке көшсек,

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u z}{\Delta u} = f_x'(x,y)\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + f_y'(x,y)\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} +$$
$$+\lim_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta_u x,\Delta_u y)\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u x}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\beta(\Delta_u x,\Delta_u y)\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u y}{\Delta u}$$

теңдік орындалады. Шарт бойынша $x(u, v)$, $y(u, v)$ функциялары (u, v) нүктесінде, $f(x,y)$ функциясы сәйкес (x, y) нүктесінде дифференциалданушы функциялар болғандықтан, және

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u z}{\Delta u}=\frac{dz}{du},\ \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u x}{\Delta u}=\frac{dx}{du},\ \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},$$
$$\lim_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta_u x,\Delta_u y)=0, \quad \lim_{\Delta u\to 0}\beta(\Delta_u x,\Delta_u y)=0$$

теңдіктерді ескерсек $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u z}{\Delta u}$ үшін алынған теңдік $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$ түріне келеді.

Осы сияқты u айнымалды өзргертпей қалдырып, v айнымалға Δv өсімше берсек, жоғарыдағыдай талқылау жәрдемімен $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$ теңдік алынады.$x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_m), i = \overline{1,m}$

Ескерту 4.4. R^m кеңістікте $\boldsymbol{x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_m), i = \overline{1,m}}$ функциялары белгіленген $\boldsymbol{(t_1, t_2, \dots, t_m)}$ нүктесінде дифференциалданушы болса, ал $\boldsymbol{u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)}$ сәйкес $\boldsymbol{(x_1, x_2, \dots, x_m)}$ нүктесінде, мұндағы $\boldsymbol{x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_n), i = \overline{1,m}}$, дифференциалданушы функция болса, онда (8.21) формуласының жалпылануы мына түрде болады:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, j=\overline{1,n} \tag{8.22}$$

Мысал 4.5. $z = e^{x^2+y^3}$, $x = 2u + 3v$, $y = -5u + 4v$ күрделі функцияның дербес туындылары табылсын.

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^3} \cdot 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^3} \cdot 3y^2, \frac{\partial x}{\partial u} = 2, \frac{\partial x}{\partial v} = 3, \frac{\partial y}{\partial u} = -5, \frac{\partial y}{\partial v} = 4$$

өрнектерді (8.21) формулаға қойсақ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3} \cdot 2 + 3y^2 e^{x^2+y^3} \ (-5) = 4xe^{x^2+y^3} - 15y^2 e^{x^2+y^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = e^{x^2+y^3} \ 2x \cdot 3 + 3y^2 e^{x^2+y^3} \cdot 4 = 6xe^{x^2+y^3} + 12y^2 e^{x^2+y^3}.$$

4.4. Айқындалмаған функцияның туындысы

$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциясы

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = 0$$

айқындалмаған түрде берілсін.

Теңдіктің екі бөлігінен де айнымалдар бойынша, оларды параметр деп есептеп, дербес туындылар алсақ, (8.21), (8.22) формулалар бойынша

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \ i = \overline{1, m}$$

теңдіктер алынады. Бұл теңдіктерден:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-F'_{x_i}}{F'_u}, i = \overline{1, m} \qquad (8.22a)$$

Мысал 4.6. Айқындалмаған түрде берілген $x^2 + y^2 + \cos(z + xy) = 0$ функциясының дербес туындылары табылсын.

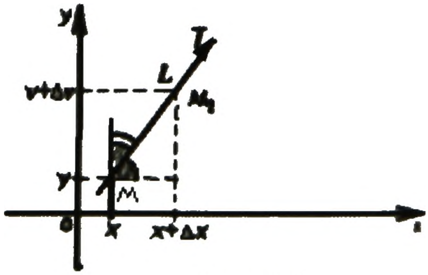
Шешуі. x бойынша дербес туынды алсақ: $2x - \sin(z + xy)(z'_x + y) = 0$; y бойынша дербес туынды алсақ: $2y - \sin(z + xy)(z'_y + x) = 0$;

Бұл теңдіктерден: $z'_x = \dfrac{2x - y\sin(z + xy)}{\sin(z + xy)}$, $z'_y = \dfrac{2y - x\sin(z + xy)}{\sin(z + xy)}$

4.5. Бағыт бойынша туынды. Градиент

$M(x, y)$ нүктесінің кейбір маңайында анықталған $z = f\ (M)$ функцисын және осы нүктеден шығатын $\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ векторын қарастырайық.

$M(x, y)$ нүктесіндегі функцияның $\bar{l}$ бағытта өзгеру жылдамдығын сипаттайтын бағыт бойынша туынды ұғымын енгіземіз.



Сурет 8.4

$M(x, y)$ нүктесі арқылы бағыты $\bar{l}$ векторымен бағыттас L түзуін өткіземіз және бағытталған түзуде $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктесін аламыз (сурет 8.4).

$\Delta l = MM_1$, деп белгілесек, M_1 нүктесі сурет 8.4-дегідей орналасса $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, ал M_1 нүктесі M нүктесінің басқа жағына орналасса, $\Delta l = -\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot z = f(M)$ функциясының алатын өсімшесі:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Аныктама 4.3. $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ қатынастың $\Delta l \to 0$ ($M_1 \to M$) болғандағы шегі бар болса, онда ол шек $z = f(M)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі $\bar{l}$ бағыт бойынша туындысы деп аталады және

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial \bar{l}}$$

түрінде белгіленеді.

Енді $z = f(M)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданушы функция болсын. Онда функцияның L түзуін бойлап алатын өсімшесі

$$\Delta_u z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

түрінде болады. Мұндағы α_1 және β_1 функциялар $\Delta l \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функциялар.

Теңдіктің екі бөлігін да Δl-ге бөліп, $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos\beta = \Delta l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \Delta l \sin\alpha$ екендігін ескерсек:

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\cos\beta + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\cos\alpha + \beta_1(\Delta x,\Delta y)\cos\beta.$$

Бұл теңдікте $\Delta l \to 0$ болғанда шекке көшсек

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \tag{8.23}$$

$z = f(M)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі $\bar{l}\{\cos\alpha, \cos\beta\}$ бағыты бойынша туындысының формуласы алынады.

Дербес жағдайда $\alpha = 0$ болса, $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\beta = 0$ болса, $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial z}{\partial y}$ болады.

Аныктама 4.4. $z = f(M)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі градиенті деп координаталары $M(x, y)$ нүктесіндегі $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылар болған векторды атайды. Градиент

$$\text{grad}z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\} \tag{8.24}$$

деп белгіленеді. Осылайша $u = f(x, y, z)$ функциясының $M(x, y, z)$ нүктесіндегі $\bar{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ бағыты бойынша туындысы

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma$$

формуласымен, ал градиенті

$$\text{grad}z = \left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\}$$

түрінде аныкталады.

Мысал 4.7. $z = x^2y + xy^2$ функциясының $M(1; 2)$ нүктесіндегі $\overline{MM_1}$ бағыты, мұндағы $M_1(2; 3)$, бойынша туындысын және градиентін табу керек.

Шешуі. $\overline{MM_1}$ векторының бағыттаушы косинустарын табамыз: $\overline{MM_1} = \{2 -1,\ 3 - 2\} = \{1;\ 1\}$ болғандықтан, $|\overline{MM_1}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\bar{l} = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$, яғни, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Сондықтан (8.23) формуласы бойынша $\overline{MM_1}$ векторы ($\bar{l}$ вектор) бойынша алынған туынды:

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta = (2xy + y^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} \frac{1}{\sqrt{2}} +$$

$$+(x^2 + 2xy^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = (4+4)\frac{1}{\sqrt{2}} + (1+4)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{13}{\sqrt{2}}.$$

(8.24) формуласы бойынша

$$\mathrm{grad}z(M) = \left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M\right\} = 8\bar{i} + 5\bar{j}$$

§ 5. Бірнеше айнымалды функцияның толық дифференциалы

5.1. Дифференциалдың анықтамасы

Егер $z = f(M)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданушы болса, оның толық өсімшесі

$$\Delta z = A \quad \Delta x + B \quad \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \quad \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \quad \Delta y \qquad (8.16)$$

түрінде өрнектеледі. Мұндағы $\alpha(\Delta x, \Delta y$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ функциялары $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функциялар.

Анықтама 5.1. $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданушы $z = f(M)$ функциясының толық dz дифференциалы деп $M(x, y)$ нүктесіндегі Δz толық өсімшенің Δx және Δy өсімшелерге байланысты сызықты бөлігін атайды.

Яғни

$$dz = A \quad \Delta x + B \quad \Delta y.$$

Теорема 8.6 бойынша $A = f_x'(x, y)$, $B = f_y'(x, y)$ екендігін ескерсек,

$$dz = f_x'(x, y)\,\Delta x + f_y'(x, y)\,\Delta y.$$

x және y тәуелсіз айнымалдардың дифференциалдары деп, олардың өсімшесін атаймыз:

$$dx = \Delta x,\ dy = \Delta y.$$

Сонда функцияның толық дифференциалы келесі түрде жазылады:

$$dz = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy \qquad (8.23)$$

немесе $dz = d_x z + d_y z$, мұндағы $d_x z = f_x'(x, y)dx$, $d_y z = f_y'(x, y)dy$ өрнектері $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі x және y бойынша дербес дифференциалдары деп аталады.

Егер $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, функциясы белгіленген $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нүктесінде дифференциалданушы болса, яғни айнымалдардың $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ өсімшелеріне сәйкес функцияның Δu толық өсімшесі

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_m\Delta x_m + \alpha_1(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$$
$$\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \cdot \Delta x_n \qquad (8.16а)$$

түрінде өрнектелсе, (мұндағы A_1, ... , A_m тұрақты сандар, α_1, ... , α_m функциялары $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ... , $\Delta x_m \to 0$ болғанда ақырсыз кішкене функциялар), онда Δu толық дифференциал

$$du = f_{x_1}' dx_1 + f_{x_2}' dx_2 + \cdots + f_{x_m}' dx_m \qquad (8.23а)$$

түрінде болатынын атап өтейік.

Мұндағы $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ... , $dx_m = \Delta x_m$

Мысал 5.1. Функциялардың толық дифференциалдары табылсын: а) $z = 4x^2y^3$; б) $u = 2x^{yz}$

Шешуі. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2$ болғандықтан (8.23) бойынша

$$dz = 8xy^3 \cdot dx + 12x^2y^2dy.$$

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2yz \cdot x^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2z \cdot x^{yz} \quad \ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2y \quad x^{yz} \quad \ln x$ болғандықтан (8.23а) формуласын қолдансақ

$$du = 2yz \cdot x^{yz-1}dx + 2z \cdot x^{yz} \quad \ln x dy + 2y \cdot x^{yz} \quad \ln x dz.$$

Мұнда $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.

5.2. Толық дифференциалдың жуықтап есептеулерде қолданылуы

(8.16) және (8.23) теңдіктерін ескерсек

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y) \quad \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y$$

айырым $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ болғанда $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (мұндағы ρ саны $M(x, y)$ және $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктелері арасындағы ара қашықтық) шамасына салыстырғанда **жоғары ретті** ақырсыз кішкене шама. Шынында да

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - dx}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right) = 0$$

болады. Өйткені α мен β ақырсыз кішкене функциялар, ал $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leq 1, \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leq 1$. Осыдан $\Delta z - dz = \bar{\bar{o}}(\rho)$ немесе $\Delta z = dz + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$. Бұдан $\Delta z \approx dz$, немесе

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{df}{dx}(x, y) \quad \Delta x + \frac{df}{dy}(x, y) \quad \Delta y \qquad (8.24)$$

жуықтап есептеу формуласы алынады.

Мысал 5.2. $1{,}02^{3{,}01}$ жуықтап есептелсін.

Шешуі. $z = x^y$ функцияны қарастырайық. Берілген санды $(1 + 0{,}02)^{3+0{,}01}$ түрінде жазсақ, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y = 3$, $\Delta y = 0{,}01$. $(x + \Delta x)^{y+\Delta y} = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $f(x,y) = x^y$ екендігін ескерсек (8.24) формула $z = x^y$ функциясы үшін

$$(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + y \quad x^{y-1}\,\Delta x + x^y \ln x\,\Delta y$$

түрінде жазылады. x, y, Δx, Δy мәндерін бұл жуықталған теңдікке қойсақ,

$$1{,}02^{3{,}01} \approx 1^{3} + 3\cdot 1\cdot 0{,}002 + 1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$$

Микрокалькулятор жәрдемімен есептегенде $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$. Толық дифференциал жәрдемімен жуықтап есептеудің абсолют және салыстырмалы қателерінің шекараларын анықтауға болатынын атап өтуге болады.

5.3. Толық дифференциал тұлғасының инварианттығы

Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін пайдаланып, $z = f(x,y)$ функциясы дифференциалы түрінің, x және y айнымалдарының тәуелсіз болуына, немесе тәуелсіз айнымалдардың функциялары болуына байланыссыз сақталауын (инварианттығын) көрсетуге болады.

$z = f(x,y)$, x және y тәуелсіз айнымалдар, функциясының толық дифференциалы (8.23) формуласы бойынша $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ болады.

Енді $z = f(x,y)$, мұндағы $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ яғни $z = f\,[x(u, v), y(u, v)] = F(u, v)$, (мұндағы u және v тәуелсіз айнымалдар), күрделі функцияны қарастырайық (8.21), (8.23) формулалары бойынша

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du +$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}du + \frac{\partial y}{\partial v}du\right).$$

Жақшаларда тұрған өрнектер $x = x(u, v)$ және $y = y(u, v)$ функцияларының dx және dy толық дифференциалдары. Демек, бұл жағдайда да

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Бұл дәлелденген қасиеттен кез келген u және v дифференциалданушы функциялар үшін (тәуелсіз функциялар болуы шарт емес) келесі ережелердің орындылығы шығады:

$$d(C \quad u) = C \quad du,\ C = \text{const},$$

$$d(u \cdot v) = u \quad dv + v\,du,$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

5.4. Дифференциалдың геометриялық мағынасы. Беттің жанама жазықтығы және нормалі

Бір айнымалды функцияның нүктедегі дифференциалының геометриялық мағынасы осы нүктедегі "жанаманың ординатасының" өсімшесін анықтағандай, екі айнымалды функцияның дифференциалының геометриялық мағынасы – беттің берілген нүктесіндегі "жанама жазықтықтың аппликатасының" өсімшесін анықтайды.

$z = f(x, y)$ функциясы кейбір $D \subset R^2$ аймақтың (x_0, y_0) нүктесінде дифференциалданушы болсын. Бұл функцияның графигі $Oxyz$ кеңістікте кейбір S бетті анықтайды.

Ілгеріде көрсетілгендей $f_x'(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\alpha$, мұндағы α – Ox осімен $z = f(x, y_0)$ сызығының $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі (l_1) жанамасының арасындағы бұрыш, ал $f'_y(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\beta$, мұндағы β – Oy осімен $z = f(x_0, y)$ сызығының $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі (l_2) жанамасының арасындағы бұрыш.

l_1 және l_2 жанамалар анықтайтын жазықтық S бетінің $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтығы деп аталады.

Осы ω жанама жазықтығының теңдеуін шығарайық. Жазықтық $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ нүктесінен өткендіктен оның теңдеуі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

түрінде болады. Бұл теңдеуді

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \qquad (*)$$

түріне келтірейік, мұндағы $\frac{A}{-C} = A_1$, $\frac{B}{-C} = B_1$ A_1 мен B_1 сандарын табу үшін l_1 және l_2 жанамалардың теңдеуін жазамыз:

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0), \; y = y_0, \qquad (l_1)$$

$$z - z_0 = f'_y((x_0, y_0)(y - y_0), \; x = x_0. \qquad (l_2)$$

l_1 жанамасының барлық нүктелері ω жазықтығында жатқандықтан, олардың координаталары (*) теңдеуін қанағаттандырады. Бұл жағдайды

$$\begin{cases} z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \\ z - z_0 = A_1(x_0, y_0) + B_1(x - x_0) \end{cases}$$

жүйе түрінде жазуға болады. Бұл жүйеден $A_1 = f_x'(x_0, y_0)$. Осы сияқты l_2 жанамасының барлық нүктелері ω жазықтығында жатқандықтан

$$\begin{cases} z - z_0 = f_y'(x_0, y_0)(x - x_0) \\ x = x_0 \\ z - z_0 = A_1(x_0 - y_0) + B_1(y - y_0) \end{cases}$$

жүйе алынады. Бұдан $B_1 = f_y'(x_0, y_0)$. A_1 мен B_1-дің бұл табылған мәндерін (*) теңдеуге қойсақ, жанама жазықтықтың

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (8.25)$$

теңдеуі алынады.

Беттің M_0 нүктесінен өтуші және осы нүктедегі беттің жанама жазықтығына перпендикуляр түзу беттің **нормалі** деп аталады.

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық шартын пайдаланып (4.75а) нормалдың

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (8.26)$$

канондық теңдеуі алынады.

Егер S беті $F(x,\ y,\ z)=0$ теңдеуімен берілсе, айқындалмаған функциядан дербес туындылар алу ережесі бойынша

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{-F'_x(x_0,y_0)}{F'_z(x_0,y_0)},f'_y(x_0,y_0)=\frac{-F'_y(x_0,y_0)}{F'_z(x_0,y_0)}$$

болғандықтан (8.25), (8.26) формулаларына сәйкес

$$F'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0)\cdot(z-z_0)=0 \qquad 8.25а)$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x\ (x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y\ (x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z\ (x_0,y_0)} \qquad (8.26а)$$

түрінде болады.

Ескерту 6.1. Ерекше нүктелер үшін, яғни дербес туындылар нөлге айналатын немесе ең болмағанда дербес туындылардың біреуі жоқ нүктелерді қарастырмаймыз.

Мысал 5.3. $z=x^2+y^2+1$ параболоидтың $M_0(1;\ -1;\ 3)$ нүктесіндегі жанама жазықтықтың және нормальдың теңдеулерін жазайық.

Шешуі. Берілген бет үшін $z'_x=f'_x(x,\ y)=2x$, $z'_y=f'_y=2y$, $f'_x\ (1;-1)=2$,

$f'_y(1;-1)=-2$. (8.25) формула бойынша жанама жазықтықтың теңдеуі.

$$z-3=2(x-1)-2(y+1) \text{ немесе } 2x-2y-z-1=0$$

Ал (8.26) формула бойынша нормалдың теңдеуі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

§ 6. Жоғарғы ретті дербес туындылар және толық дифференциалдар

6.1. Жоғарғы ретті дербес туындылар

$z=f\ (M)$ функциясы $M(x,\ y)$ нүктесінің кейбір маңайында анықталған және оның осы маңайдың әрбір нүктесінде $f'_x\ (x,y)$ және $f'_y\ (x,y)$ дербес туындылары бар болсын. Бұл жағдайда дербес туындылар M нүктесінің осы маңайында x және y айнымалдардың функциясы болады. Бұларды бірінші ретті дербес туындылар деп атайды.

Анықтама 6.1. $z'_x=f'_x(x,\ y)$ және $z'_y=f'_y(x,\ y)$ функциялардың $M(x,\ y)$ нүктесінде x және y айнымалдар бойынша дербес туындылары бар болса, оларды f (M) функциясының осы нүктедегі екінші ретті дербес туындылары деп атайды және былайша белгілейді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}(x,y) = f''_{xx}(x,y) = z''_{x^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = z''_{xy}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = z''_{y^2}(x,y)$$

$f''_{xy}(x,y)$ және $f''_{yx}(x,y)$ екінші ретті туындылар аралас дербес туындылар деп аталады.

Екінші ретті дербес туындылардан x және y айнымалдар бойынша алынған дербес туындылар үшінші ретті дербес туындылар деп аталады. Осы сияқты кез келген жоғарғы ретті дербес туындылар анықталады.

Осы сияқты $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциясының M $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нүктесіндегі f'_{x_k}, $k = \overline{1,m}$ бірінші ретті дербес туындыларынан x_i, $i = \overline{1,m}$, айнымалдар бойынша алынған дербес туындалыр $f''_{x_k x_e}$ екінші ретті дербес туындылар деп аталады. Осылайша үшінші, төртінші, т.с.с. дербес туындылар анықталады.

Мысал 6.1. Функциялардың екінші ретті дербес туындылары табылсын: а) $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2$; б) $u(x,y,t) = e^{xyt}$

Шешуі. а) Алдымен бірінші ретті дербес туындыларды тауып, содан соң екінші ретті дербес туындыларды табамыз:

$z'_x = 3x^2 - 4xy$; $z'_y = -2x^2 + 6y$; $z''_{xx} = 6x - 4y$; $z''_{xy} = -4x$; $z''_{yx} = -4x$; $z''_{yy} = 6$

б) Біртіндеп дифференциалдасақ:

$u'_x = yte^{xyt}$; $u'_y = xte^{xyt}$; $u'_t = xye^{xyt}$; $u''_{xx} = y^2t^2e^{xyt}$; $u''_{xy} = u''_{yx} = t(1 + xyt)e^{xyt}$;

$u''_{xt} = u''_{tx} = y(1 + xyt)e^{xyt}$; $u''_{yt} = u''_{ty} = x(1 + xyt)e^{xyt}$; $u''_{yy} = x^2t^2e^{xyt}$;

$u''_{tt} = x^2y^2e^{xyt}$;

Мысал 6.2. $z = x^2y^3$ функциясының үшінші ретті дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. Біртіндеп дифференциалдап табамыз:

$u'_x = 2xy^3$; $u'_y = 3y^2x^2$; $u''_{xx} = 2y^3$; $u''_{xy} = u''_{yx} = 6xy^2$; $u''_{yy} = 6x^2y$;

$u'''_{xxx} = 0$; $u'''_{xxy} = 6y^2$; $u'''_{xyx} = u'''_{yxx} = 6y^2$; $u'''_{xyy} = u'''_{yxy} = 12xy$; $u'''_{yyy} = 6x^2$

Екі мысалда да (6.1а, 6.2) аралас дербес туындылар өзара тең, яғни $f''_{xy} = f''_{yx}$ Жалпы айтқанда, аралас туындылардың мәндері туынды алудың ретіне байланысты.

$$\text{Мысалы, } f(x,y) = \begin{cases} 2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \text{болғанда;} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \text{болғанда.} \end{cases}$$

функциясы (0; 0) нүктесінде $f''_{xy}(x, y)$ және $f''_{yx}(x, y)$ туындыларға ие, бірақ олар өзара тең емес. Шынында,

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2y(x^4-y^4)+8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \text{болғанда} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \text{болғанда} \end{cases},$$

Демек, f''_{xy} (0; 0) = $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,0+\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = -2$. Осы сияқты есептеулер жүргізсек f''_{yx} (0; 0) = 2. Сонымен f''_{xy} (0; 0) ≠ f''_{yx} (0; 0).

f''_{xy} (x, y) = f''_{yx} (x, y) болатынын келесі теорема анықтайды.

Теорема 8.10. Егер f''_{xy} $(x;\ y)$ және f''_{yx} $(x;\ y)$ туындылар $M(x,\ y)$ нүктесінің кейбір δ-маңайында бар болса және $M(x,\ y)$ нүктесінің өзінде үзіліссіз болса, онда $M(x, y)$ нүктесінде олар өзара тең, яғни f''_{xy} $(x; y) = f''_{yx}$ $(x; y)$.

Дәлелдеуі. $A = [f\ (x + \Delta x, y + \Delta y) - f\ (x + \Delta x, y)] - [f\ (x, y + \Delta y) - f\ (x, y)]$ өрнегін қарастырайық. Мұндағы Δx және Δy кез келген сондай кішкене сандар, $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктесі $M(x, y)$ нүктесінің δ-маңайында жататын болады.

$\varphi(x) = f\ (x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y)$ көмекші функциясын енгізсек, A өрнегін $[x,\ x + \Delta x]$ кесіндісінде дифференциалданатын бір айнымалды $\varphi(x)$ функциясының өсімшесі деп қарастыруға болады, яғни

$$A = \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$$

Сондықтан бұл айырымға Лагранж теоремасын қолдансақ,

$$A = \Delta\varphi = \varphi'(x + \theta_1\ \Delta x) \quad \Delta x =$$

$$=[f'_x\ (x + \theta_1 \cdot \Delta x, y + \Delta y) - f'_x\ (x + \theta_1\ \Delta x, y)]\Delta x,\ 0 < \theta_1 < 1.$$

Жақша ішіндегі өрнекті $[y,\ y + \Delta y]$ кесіндіде дифференциалданатын бір y айнымалды $f'_x\ (x + \theta_, \cdot \Delta x, y)$ функцияның өсімшесі деп қарауға болады. Лагранж теоремасын y айнымал бойынша тағы бір рет қолдансақ,

$$A = f''_{xy}\ (x + \theta_1\ \Delta x, y + \theta_2\ \Delta y)dxdy, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$$

теңдігі алынады.

Екінші жағынан, егер

$$\psi(y) = f\ (x + \Delta x, y) - f\ (x, y)$$

көмекші функция енгізсек, жоғарыдағыдай түрлендіріп

$$A = \Delta\psi = \psi(y + \Delta y) - \psi(y)$$

өрнегі алынады. Бұл айырымға да Лагранж теоремасын қолдансақ:

$$A = f''_{yx}\ (x+ \theta_4\ \Delta x, y + \theta_3\ \Delta y)\Delta y \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta_3, \theta_4 < 1.$$

A үшін алынған екі өрнекті салыстырсақ,

$$f''_{xy}\ (x + \theta_1\ \Delta x, y + \theta_2\ \Delta y) = f''_{yx}\ (x + \theta_4\ \Delta x, y + \theta_3\ \Delta y)$$

теңдігі алынады.

Енді бұл теңдікте Δx → 0 және Δy→ 0 деп шекке көшсек,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}\,(\boldsymbol{x} + \theta_1\ \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \theta_2\ \Delta\boldsymbol{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}\,(\boldsymbol{x} + \theta_4\ \Delta\boldsymbol{x}, y + \theta_3\Delta\boldsymbol{y})$$

немесе f''_{xy} $(x, y) = f''_{yx}$ (x, y) екендігі шығады. Осы сияқты n-ретті дербес аралас туындылар үшін де теорема 8.10 тұжырымы орынды болады.

6.3. Жоғарғы ретті дифференциалдар

$z = f\ (M)$ функциясы $M(x,\ y)$ нүктесінде дифференциалданушы болса, онда функцияның M нүктесіндегі бірінші ретті толық дифференциалы

$$dz = f_x'\ (x, y)dx + f_y'\ (x, y)dy \qquad (8.23)$$

болатындығы анықталған.

Ыңғайлы болуы үшін дифференциалды d әрпінен басқа δ әрпімен де белгілейік (мысалы δx, δy, δz)

f_x' $(x,\ y)$ және f_y' $(x,\ y)$ функциялары $M(x,\ y)$ нүктесінде дифференциалданушы болсын, ал (8.23) теңдіктегі dx және dy тұрақты шамалар деп қарастырайық.

Онда dz тек x және y айнымалдардың $M(x,\ y)$ нүктесіндегі дифференциалданушы функциясы болады немесе оның дифференциалы,

$$\delta(dz) = \delta\left[f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy\right] =$$
$$= \left[f_x'\ (x,y)dx + f_y'\ (x,y)dy\right]_x' \delta x + \left[f_x'\ (x,y)dx + f_y'\ (x,y)dy\right]_y' \delta y \qquad (8.27a)$$

Анықтама 6.2. $z = f\ (M)$ функциясының $M(x,\ y)$ нүктесіндегі екінші ретті дифференциалы деп M нүктесіндегі dz дифференциалдан алынған $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ болғандағы $\delta(dz)$ дифференциалды атайды және $d^{2}z$ түрінде белгілейді.

Өз кезегінде $\delta(d^2z)|_{\substack{\delta x=dx\\ \delta y=dy}}$ үшінші ретті дифференциал деп аталады. Жалпы, $z = f\ (M)$ функциясының $M(x,\ y)$ нүктесіндегі n-ретті дифференциалы үшін мына формула орынды:

$$d^nz = \delta(d^{n-1}z)|_{\substack{\delta x=dx\\ \delta y=dy}} \qquad (8.27)$$

(8.27a) теңдігі жәрдемімен екінші ретті дифференциалдың өрнегін табайық:

$$d^2z = \delta(dz)|_{\substack{\delta x=dx\\ \delta y=dy}} = \left(f_x'dx + f_y'dy\right)\Big|_x' dx + \left(f_x'dx + f_y'dy\right)\Big|_y' dy =$$
$$= f_{xx}''(dx)^2 + f_{yx}''dydx + f_{xy}''dxdy + f_{yy}''(dy)^2$$

Егер f_{xy}'' және f_{yx}'' функциялар үзіліссіз болса, онда теорема 8.10 бойынша $f_{yx}'' = f_{xy}''$ болады. Демек,

$$d^2z = f_{x^2}''(dx)^2 + 2f_{xy}''dxdy + f_{y^2}''\ (dy)^2$$

Осы сияқты,

$$d^3z = f_{x^3}^{(3)}(dx)^2 + 3f_{x^2y}^{(3)}\ (dx)^2dy + 3f_{xy^2}^{(3)}dx(dy)^3 + f_{y^3}^3(dy)^3,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$d^nz = f_{x^n}^{(n)}\ (dx)^n + nf_{x^{n-1}y}^{(n)}\ (dx)^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{2!} f_{x^{n-2}y^2}^{(n)}\ (dx)^{n-2}\ (dy)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} f_{x^{n-k}y^k}^{(n)} \cdot (dx)^{n-k}\ (dy)^k + \ldots + f_{y^n}^{(n)}(dy)^n \qquad (8.27a)$$

d^nz үшін (8.27a) формула n -дәрежелі екі мүшені (биномды) Ньютон формуласы бойынша жіктеуіне ұқсас. Сондықтан еске сақтауды оңайлату үшін бұл формула мына түрде жазылады:

$$d^nz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) \qquad (8.27б)$$

Мысал 6.3. $z = x^2y^3$ функциясының екінші ретті және үшінші ретті дифференциалдарын табайық.

Шешуі. Мысал 6.2-дегі $z = x^2y^3$ функциясының екінші ретті және үшінші ретті дербес туындыларының өрнектерін ескере отырып, (8.27б) формула бойынша, табамыз:

$$d^2z = 2y^3(dx)^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2y(dy)^2;$$
$$d^3z = 3\cdot 6y^2(dx)^2dy + 3\cdot 12xydx(dy)^2 + 6x^2(dy)^3.$$

§ 7. Бірнеше айнымалды функциялар үшін Тейлор және Маклорен формулалары

Бір айнымалды функция сияқты екі айнымалды функцияны да дәрежелі көпмүше мен кейбір қалдық мүшенің қосындысы түрінде өрнектеуге болады.

7.1. Тейлор формуласы

Екі айнымалды функция үшін келесі теореманы дәлелдейміз.

Теорема 8.11. Егер $z = f\ (M)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінің кейбір δ-маңайында $(n + 1)$ ретке дейінгі дербес туындыларымен бірге үзіліссіз, әрі $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктесі осы δ-маңайда жатса, онда M нүктесіндегі $\Delta f = f\ (M_1) - f\ (M)$ функция өсімшесі үшін

$$\Delta f = df(x,y) + \frac{d^2f(x,y)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(x,y)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1 \quad (8.28)$$

теңдік орынды болады.

(8.28) формула $z = f\ (x, y)$ функциясы үшін Тейлор формуласы деп аталады. Мұндағы d^kz, $k = \overline{1, n+1}$ дифференциалдар (8.27а) формулалармен анықталады.

Дәлелдеуі. t айнымалдың күрделі функциясы

$$F(t) = f\ (x + t\cdot\Delta x, y + t\ \ \Delta y),\ 0 \le t \le 1$$

түріндегі көмекші функция енгізейік. Бұл функция [0, 1] кесіндіде $(n + 1)$ - ретті туындыға ие. $F(t)$ функциясын t бойынша дифференциалдаймыз:

$$F'(t) = f_x'(x + t\cdot\Delta x, y + t\cdot\Delta y)\Delta x + f_y'\ (x + t\cdot\Delta x, y + t\cdot\Delta y)\Delta y =$$
$$= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x + t\cdot\Delta x, y + t\cdot\Delta y),$$

$$F''(t) = f_x''\ (x + t\ \ \Delta x, y + t\cdot\Delta x)(\Delta x)^2 + 2f_{xy}''(x + t\cdot\Delta\ x, y + t\ \ \Delta y)\Delta x\ \ \Delta y +$$
$$+ f_{yy}''\ (x + t\cdot\Delta x, y + t\ \ \Delta y)(\ \Delta y)^2 = (\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y)f\ (x + t\ \ \Delta x, y + t\cdot\Delta y)$$

Әрі қарай, индукция бойынша

$$F^{(n)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\ (x + t\cdot\Delta x, y + t\cdot\Delta y)$$
$$F^{(n+1)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\ (x + t\cdot\Delta x, y + t\cdot\Delta y)$$

Екінші жағынан, $F(t)$ бір айнымал t-ның функциясы болғандықтан Маклорен формуласын (6.51) қолданып, $t = 1$ болғанда

$$F(1) = F(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1 \quad (8.29)$$

теңдікті аламыз. Бірақ,

$$F(1) = f\,(x + \Delta x, y + \Delta y) = f\,(M_1), F\,(0) = f\,(x, y) = f\,(M)$$

$$F'(0) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f\,(x, y) = df\,(x, y),$$

$$F^{(2)}(0) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,(x, y) = d^2 f\,(x, y),$$

....

$$F^{(n)}(0) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\,(x, y) = d^n f\,(x, y),$$

$$F^{(n+1)}\,(0) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\,(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) = d^n f\,(x, y) =$$
$$= d^{n+1} f\,(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y),\ 0 < \theta < 1$$

теңдіктер орынды.

Осы теңдіктерді ескере отырып, (8.29) формула бойынша

$$F(1) - F(0) = f\,(M_1) - (M) = \Delta f = df\,(x, y) + \frac{d^2 f(x,y)}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d^n f(x,y)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1$$

теңдігі, яғни (8.28) формуласы алынды. m айнымалды. $m \geq 3$ функциялар үшін Тейлор формуласының үйлестігі (8.28) сияқты түрде болады.

Ескерту 7.1. $n = 0$ болғанда (8.28) формуладан Лагранждың ақырлы өсімшелер формуласы шығады.

$n = 2$ болғанда (8.28) Тейлор формуласы келесі түрде тарқатылып жазылады:

$$f\,(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) = f\,(x, y) + f'_x\,(x, y)\Delta x + f'_y\,(x, y)\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f^{(2)}_{xx}(x,y)\cdot(\Delta x)^2 + 2f^{(2)}_{xy}(x,y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y + f^{(2)}_{yy}(x,y)\cdot(\Delta y)^2\right] + \alpha_3(\Delta\rho)^3 \quad (8.29a)$$

Мұндағы $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \alpha_3 = 0$.

Кез келген n үшін де Тейлор формуласы осы сияқты тарқатылады.

7.2. Маклорен формуласы

$x = 0, y = 0$ болса (8.28), Тейлор формуласы

$$\Delta f = f\,(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f\,(0, 0) =$$
$$= df\,(0, 0) + \frac{d^2 f(0,0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(0,0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\theta\ \Delta x,\ \theta\Delta y)}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1 \quad (8.30)$$

түрге келеді. (8.30) теңдік Маклорен формуласы деп аталады. $n = 2$ болғанда Маклорен формуласының тарқатылған түрі мынадай болады:

$$f\,(\Delta x, \Delta y) = f\,(0, 0) + f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \frac{1}{2!}\left[f^{(2)}_{xx}(0,0)\cdot(\Delta x)^2 +\right.$$
$$\left. + 2f^{(2)}_{xy}(0,0)\cdot\Delta x\cdot\Delta y + f^{(2)}_{yy}(0,0)\cdot(\Delta y)^2\right] + \alpha_3(\Delta\rho)^3 \quad (8.30a)$$

мұндағы $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \alpha_3 = 0$.

7.3. Кез келген $m \geq 3$ айнымалды функциялар үшін Тейлор және Маклорен формулалары

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, нүктесіндегі $m \geq 3$ айнымалды функциялар үшін де (8.29) және (8.30) формулаларға үйлестік формулалары осы сияқты алынады.

Мұнда Тейлор формуласы $M_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m)$, $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нүктелері үшін

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= df(M) + \frac{d^2 f(M)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(M)}{n!} +$$
$$+ \frac{d^{n+1} f(x_1 + \theta\Delta x, x_2 + \theta\Delta x_2, \ldots, x_m + \theta\Delta x_m)}{(n+1)!},$$
$$0 < \theta < 1. \qquad (8.31)$$

Ал Маклорен формуласы $M_1(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$, $M(0, 0, \ldots, 0)$ нүктелері үшін

$$\Delta u = f(0 + \Delta x_1, 0 + \Delta x_2, \ldots, 0 + \Delta x_m) - f(0, 0, \ldots, 0) =$$
$$= f\,M_1) - f(M) = df(0) + \frac{d^2 f(0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(0)}{n!} +$$
$$+ \frac{d^{n+1} f(\theta\Delta x_1, \theta\Delta x_2, \ldots, \theta\Delta x_m)}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1. \qquad (8.32)$$

Бұл формулаларды тарқатып жазсақ, Тейлор формуласы

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_1, x_2, \ldots, x_m) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1}$$
$$f(x_1 + \theta\Delta x_1, x_2 + \theta\Delta x_2, \ldots, x_m + \theta\Delta x_m),\ 0 < \theta < 1 \qquad (8.31a)$$

түрінде, ал Маклорен формуласы мына түрде жазылады:

$$\Delta u = f(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m) - f(0, 0, \ldots, 0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(0, 0, \ldots, 0) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(\theta\Delta x_1, \theta\Delta x_2, \ldots, \theta\Delta x_m),$$
$$0 < \theta < 1 \qquad (8.32a)$$

Мысал 7.1. $f(x, y) = x^y$ функциясының $M(1, 1)$ нүктесінің маңайында Тейлор формуласы бойынша жіктелуі екінші ретті мүшеге дейін жазылсын.

Шешуі. (8.28) формуланы пайдаланамыз. Алдымен үшінші ретке дейінгі дербес туындыларды табамыз: $f'_x(x, y) = yx^{y-1}$; $f'_y(x, y) = x^y \ln x$; $f^{(2)}_{x_2}(x, y) = y(y-1)x^{y-2}$; $f^{(2)}_{xy}(x, y) = (1 - y\ln x)x^{y-1}$; $f^{(2)}_{y^2}(x, y) = x^y \ln^2 x$; $f^{(3)}_{y^3}(x, y) = y(y-1)$

$(y-2)x^{y-3}$; $f^{(3)}_{x^2y}$ $(x, y) = [2y - 1 + y(y-1)\ln x]x^{y-2}$; $f^{(3)}_{xy^2}$ $(x, y) = (y\ln^2 x + 2\ln x)x^{y-1}$; $f^{(3)}_{y^3}$ $(x, y) = x^y\ln^3 x$.

Енді бірінші және екінші ретті дербес туындылардың $M(1, 1)$ нүктесіндегі мәндерін есептейміз: $f(1, 1) = 1$; $f'_x(1, 1) = 1$; $f'_y(1, 1) = 0$; $f^{(2)}_{x^2}$ $(1, 1) = 0$; $f^{(2)}_{xy}$ $(1, 1) = 1$; $f^{(2)}_{y^2}$ $(1, 1) = 0$.

Осы мәндерді ескеріп, бірінші және екінші дифференциалдардың $M(1, 1)$ нүктесіндегі мәндерін жазамыз,

$$df\,(1, 1) = dx,\ d^2 f\,(1, 1) = 2dxdy$$

Онда ізделінді жіктеу

$$f\ x, y) = f\,(1, 1) + df\,(1, 1) + \tfrac{1}{2} d^2 f\,(1, 1) + R_2(1 + \theta dx, 1 + \theta dy) =$$

$= 1 + dx + dxdy + R_2(1 + \theta dx, 1 + \theta dy)$, ал мұндағы $dx = x - 1$, $dy = y - 1$, $0 < \theta < 1$, түрінде жазылады.

Ал

$$R_2(x,y) = \frac{1}{6}d^2 f(x,y) = \frac{x^y}{6}\Bigg[\frac{y(y-1)(y-2)}{x^3}(dx)^3 +$$

$$+ 3\frac{2y - 1 + y(y-1)\ln x}{x^2}(dx)^2 dy + 3\frac{y\ln^2 x + \ln x}{x}dx(dy)^2 + \ln^3 x(dy)^3\Bigg].$$

Жіктелуді тапқанда x орнына $(1 + \theta dx)$ өрнегі, ал y орнына $(1 + \theta dy)$ өрнегі қойылады.

Мысал 7.2. $f\,(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функциясы Маклорен формуласы бойынша төртінші ретті мүшелеріне дейін жіктелсін.

Шешуі. ***f*** функциясының төртінші ретке дейінгі дифференциалдарын (8.27б) формуламен табамыз.

$$f\,(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}},\ df\,(x, y) = \tfrac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx - 2ydy),$$

$$d^2 f\,(x,y) = -\tfrac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx - 2ydy)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}[-2(dx)^2 - 2(dy)^2],$$

$$d^3 f\,(x, y) = -\tfrac{3}{8}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2xdx - 2ydy)^3 + \tfrac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \times$$

$$\times (-2xdx - 2ydy)[-2(dx)^2 - 2(dy)^2],$$

$$d^4 f\,(x,y) = -\tfrac{15}{16}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{7}{2}}(-2xdx - 2ydy)^4 +$$

$$+\frac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2xdx - 2ydy)^2[-2(dx)^2 - 2(dy)^2] -$$

$$-\tfrac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}[-2(dx)^2 - 2(dy)^2].$$

Мұнда $x = y = 0$, $dx = x$, $dy = y$ деп алсақ, $f\,(0, 0) = 1$, $df\,(0, 0) = 0$, $d^2 f\,(0, 0) = -(x^2 + y^2)$, $d^3 f\,(0, 0) = 0$, $d^4 f\,(0, 0) = -3(x^2 + y^2)$ болады.

Бұл мәндердің жәрдемімен ізделінді төртінші ретті жіктелуді жазамыз:

$$f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+\frac{1}{3!}d^3f(0,0)+\frac{1}{4!}d^4f(0,0)=$$
$$=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2-\dots$$

§ 8. Бірнеше айнымалды функциялардың экстремумдері

8.1. Симметриялық квадраттық тұлғалар туралы қисқаша мәліметтер

Егер $u=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциясы берілген $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болса, онда оның екінші ретті дифференциалы

$$d^2u=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2u(M)}{\partial x_i\partial x_k}dx_idx_k \qquad (8.33)$$

түрінде өрнектелетінін анықтаған едік.

Ал екінші ретті дербес туындылар M нүктесінде үзіліссіз болса теорема 8.10 бойынша $\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2u}{\partial x_k\partial x_i}$ теңдігі орындалады.

Анықтама 8.1. (8.33) екінші ретті d^2u дифференциалға сәйкес

$$\Phi_m=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}t_it_k\text{, мұнда } a_{ik}=a_{ki}, \qquad (8.34)$$

түріндегі өрнек t_1, t_2, ... , t_m айнымалдарға байланысты симметриялық квадраттық тұлға деп аталады.

Әрбір (8.34) түріндегі симметриялық квадраттық тұлға

$$\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm}\end{matrix}\right\| \qquad (8.34a)$$

түріндегі квадрат матрицамен анықталады.

$$A_1=a_{11}, A_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \dots, A_m=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm}\end{vmatrix}$$

анықтауыштар (8.34) симметриялық квадраттық тұлғаның бас минорлары деп аталады.

Анықтама 8.2. Егер (8.34) симметриялық квадраттық тұлға, барлығы бірдей нөлге тең емес x_1, x_2, ... , x_m мәндері үшін $\Phi_m>0$ ($\Phi_m<0$) болса, онда Φ_m оң анықталған (Φ_m теріс анықталған) квадраттық тұлға деп аталады.

Анықтама 8.3. Егер (8.34) симметриялық квадраттық тұлға не оң анықталған, не теріс анықталған болса, онда ол анық таңбалы симметриялық квадраттық тұлға деп аталады.

Анықтама 8.4. Егер (8.34) симметриялық тұлғаның мәндерінің ішінде оң сандар да, теріс сандар да болса, онда айнымал таңбалы симметриялық квадраттық тұлға деп аталады.

Φ_m квадраттық тұлғаның матрицасының бас минорларынан келесі сандарды құрамыз:

$$A_1, \frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_2}, \dots, \frac{A_m}{A_{m-1}} \tag{8.35}$$

Сильвестр белгісі. (8.34) симметриялық квадраттық тұлға оң анықталған (теріс анықталған) болуы үшін (8.35) сандардың барлығының оң болуы (теріс болуы) қажетті және жеткілікті.

([4] 14 Т, §6)

8.2. Функцияның экстремумы. Экстремумның бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары

$z = f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің кейбір маңайында анықталған болсын.

Анықтама 8.5. Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің кейбір маңайы табылып, бұл маңайдың кез келген $M(x, y)$ нүктесі үшін $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$) теңсіздігі орындалса, онда $z = f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде төңіректік максимумге (минимумге) ие делінеді.

Төңіректік максимум және төңіректік минимум нүктелерін функцияның экстремум нүктелері деп атайды. $z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесін $\Delta z = f(M) - f(M_0)$ деп белгілесек, $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде экстремумға ие болуы үшін, $\Delta z \le 0$ (төңіректік максимум) $\Delta z \ge 0$ (төңіректік минимум), шарттарының біреуі орындалуы керек.

Осы екі шарттың біреуі орындалса, онда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде экстремумға ие.

Теорема 8.12. (Экстремумның қажетті шарттары). Егер $f(x, y)$функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде экстремумға ие және осы нүктеде бірінші ретті дербес туындылары бар болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде бірінші ретті дербес туындылары нөлге тең болады, яғни

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{8.36}$$

Дәлелдеуі. $y = y_0$ десек, $f(x, y_0)$ белгіленген төңіректе анықталған бір ғана, x-айнымалдың функциясы болады. Шарт бойынша бұл функция x_0 нүктесінде экстремумға ие, сондықтан бір айнымалды функцияның экстремумының қажетті шарты бойынша $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Осы сияқты $f(x_0, y)$ бір айнымалды функцияны қарастырсақ , $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(8.36) шарттар эксремумның жеткілікті шарты бола алмайды.

Мысалы $z=x^2-y^2$ функциясының $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$ дербес туындылары (0, 0) нүктесінде нөлге тең, бірақ (0, 0) нүктесінің ешқандай маңайында, өзінің таңбасын сақтамайды: егер $x = 0$ болса $z < 0$, ал $y = 0$ болса $z > 0$ болады. $z = x^2 - y^2$ функциясының графигі гиперболалық параболоид (сурет 4.57).

Сондықтан (8.36) тек қажетті шарттар. Бұл шарттар орындалатын нүктелерді күдікті нүктелер немесе стационар нүктелер деп атайды.

Салдар 8.1. Егер $z = f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ дифференциалданушы және осы нүктеде эксремумға ие болса, онда $df(M_0) = 0$ немесе $\operatorname{grad} f(M_0) = 0$.

Ескерту 8.1. Егер $z = f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ үзіліссіз болып, дифференциалданушы функция болмаса да, осы нүктеде функция экстремумға ие болуы мүмкін.

Мысалы, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясы (0, 0) нүктесінде үзіліссіз және минимумға ие, бірақ бұл нүктеде функция дифференциалданбайды.

$m > 2$ болғанда, экстремумның қажетті шарттары былайша тұжырымдалады:

Теорема 8.12а. Егер $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциясы $M_0\left(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \dots \overset{0}{x_m},\right)$ нүктесінде дифференциалданушы және осы нүктеде функцияның төңіректік экстремумы бар болса, онда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) = 0 \qquad (8.36а)$$

теңдіктер орынды.

Бұл тұжырым Теорема 8.12 сияқты дәлелденеді.

Теорема 8.13. (Экстремумның жеткілікті шарттары) $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ стационар нүкте мен оның кейбір маңайында екінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар және $\Delta = AC - B^2$ болсын, мұндағы $A = f_{xx}^{(2)}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}^{(2)}(x_0, y_0)$,

онда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде:

а) $\Delta > 0$, $A < 0$ болғанда төңіректік максимум бар;
$\Delta > 0$, $A > 0$ болғанда төңіректік минимум бар;

б) $\Delta < 0$ болғанда экстремум жоқ.

Дәлелдеуі. а) $\Delta > 0$, $A > 0$ (немесе $A < 0$) болсын. Шарт бойынша $f_x'(x_0, y_0) = f_y'(x_0, y_0) = 0$. $n = 1$ болғандағы (8.28) Тейлор формуласы бойынша $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі $f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі

$$\Delta f = \frac{1}{2!}[A_1(\Delta x)^2 + 2B_1\Delta x\Delta y + C_1(\Delta x)^2]. \qquad (8.37)$$

Мұндағы $A_1 = f_{xx}^{(2)}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $B_1 = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $C_1 = f_{yy}^{(2)}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $0 < \theta < 1$. Шарт бойынша екінші ретті дербес туындылар M_0 нүктесінде үзіліссіз болғандықтан,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} A_1 = f_{xx}^{(2)}(x_0, y_0) = A > 0 \text{ (немесе } A < 0)$$

және $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (A_1C_1 - B_1^2)=f_{xx}^{(2)}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}^{(2)} (x_0, y_0) - \left[f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0\right]^2 = \Delta > 0.$

Демек, жеткілікті кішкене Δx және Δy өсімшелер үшін $A_1>0$ (немесе $A_1<0$) $A_1C_1 - B_1^2 = \Delta_1 > 0$ болады.

$A_1 \neq 0$ болғандықтан (8.37) теңдікті

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{A_1}[A_1^2(\Delta x)^2 + 2A_1B_1\Delta x\Delta y + A_1C_1(\Delta y)^2]$$

немесе толық квадратқа толтырып,

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{A_1}[A_1\Delta x + B_1\Delta y)^2 + (A_1C_1 - B_1^2)(\Delta y)^2]$$

түрінде жазуға болады.

Квадрат жақша ішіндегі өрнек теріс емес, сондықтан, егер $A_1>0$ ($f_{xx}^{(2)}(x_0,y_0)>0$) болса, онда $\Delta f \geq 0$ болады, демек M_0 нүктесінде төңіректік минимум бар; егерде $A_1 < 0$ ($f_{xx}^{(2)}$ $(x_0, y_0) < 0$) болса, $\Delta f \leq 0$ болады, демек M_0 нүктесінде төңіректік максимум бар.

б) Енді $\Delta = AC - B^2 < 0$ болсын. $Cx^2 + Bx + A$ квадрат үшмүшелікті қарастырайық. $B^2 - AC > 0$ болғандықтан, $Cx_1^2 + 2Bx_2 + A > 0$, $Cx_2^2 + 2Bx_2 + A > 0$ теңсіздіктері қанағаттандыратын x_1 және x_2 сандарын көрсетуге болады.

$f(x,\ y)$ функциясының M_0 нүктесіндегі толық өсімшесі (8.37) түрінде жазамыз. Екінші ретті дербес туындылары үзіліссіз болғандықтан.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(C_1x_1^2 + 2B_1x_1 + A_1) = C_1x_1^2 + 2Bx_1 + A > 0$$

Демек, M_0 нүктесінің δ-маңайы табылып, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктесі осы маңайда жатса, онда мына теңсіздік орындалады:

$$C_1x_1^2 + 2B_1x_1 + A_1 > 0. \qquad (*)$$

Енді M_0 нүктесінің кез келген δ_1 маңайын, мұнда $\delta_1 \leq \delta$ қарастырайық. $M_0(x + t, y + t x_1)$ нүктесі осы δ_1-маңайда жататындай $t > 0$ санын таңдауға болады. (8.37) теңдікте $\Delta x = t$, $\Delta y = t x_1$ десек (*) теңсіздік бойынша, функцияның толық өсімшесі үшін

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}t^2\ [C_1x_1^2+2B_1x_2+A_1] > 0$$

теңсіздігі алынады.

x_2 мәні үшін де, осы сияқты талқыласақ , M_0 нүктесінің кейбір δ_1-маңайында $M_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктесі табылып, бұл нүкте үшін

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0$$

болады.

Яғни $f(x, y)$ функциясының өсімшесі M_0 нүктесінің кішкене маңайында таңбасын сақтай алмайды. Демек M_0 нүктесінде экстремум жоқ.

Ескерту 8.2. Егер $\Delta = AC - B^2 = 0$ болса, $f(x, y)$ функциясының M_0 күдікті нүктесінде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін.

Ескерту 8.3. $m \geq 2$ болғанда экстремумның жеткілікті шарттарын басқаша да тұжырымдауға болады.

Теорема 8.13а. Егер $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, функциясының стационар нүктесінің кейбір δ-маңайында бір рет дифференциалданушы, $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нүктесінде екі рет дифференциалданушы болса, онда:

а) екінші дифференциал $d^2f(M_0)$ оң анықталған квадратты тұлға болса, M_0 нүктесінде функцияның төңіректік минимумы бар;

б) $d^2f(M_0)$ теріс анықталған квадраттық тұлға болса, M_0 нүктесінде функцияның төңіректік максимумы бар;

в) $d^2f(M_0)$ айнымал таңбалы квадраттық тұлға болса, онда M_0 нүктесінде функцияның төңіректік экстремумы жоқ.

Дәлелдеуі. $z = f(x, y)$ яғни $m = 2$ үшін көрсетейік. а) және б) тұжырымдарының дұрыстығы теорема 8.13а мен Сильвестр белгісін салыстыру арқылы көрсетіледі.

в) Тұжырымды дәлелдеу үшін $\Delta = AC - B^2 = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2 < 0$ болғанда $d^2f(M_0)$-ге сәйкес

$$\Phi_2(\Delta x, \Delta y) = f''_{xx}(M_0) \cdot (\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(M_0) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(M_0)(\Delta y)^2 \qquad (8.35а)$$

квадраттық тұлғаның айнымал таңбалы болуын көрсету керек.

Ол үшін $f''_{xx}(M_0) \neq 0$ және $f''_{xx}(M_0) = 0$ жағдайлары жекелеп қарастырамыз. $f''_{xx}(M_0) \neq 0$ жағдайда $\Phi_2(1; 0) = f''_{xx}(M_0)$ және $\Phi_2\left(-\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}, 1\right) = \frac{\Delta}{f''_{xx}}$ (болғандықтан, бұлар әртүрлі таңбалы болады, өйткені $\Delta < 0$. $f''_{xx}(M_0) = 0$ болғанда (8.35а) квадраттық тұлға

$$\Phi_2(\Delta x, \Delta y) = 2f''_{xy}(M_0) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(M_0)(\Delta y)^2 =$$
$$\Delta y\left[2f''_{xy}(M_0) \cdot \Delta x + f''_{yy}(M_0) \cdot \Delta y\right] \qquad (8.35б)$$

түрге келеді және $f''_{xx}(M_0) = 0$, $\Delta < 0$ шарттардан $f''_{xy}(M_0) \neq 0$ екендігі шығады.

Егер $f''_{yy} = 0$ болса, (8.35б) квадраттық тұлға айнымал таңбалы болады, өйткені $\Phi_2(1;\ 1) = 2f''_{xy}(M_0)$ және $\Phi_2(1;\ -1) = -2f''_{xy}(M_0)$ әртүрлі таңбалы сандар.

Егер де $f''_{yy}(M_0) \neq 0$ болса, (8.35б) квадраттық тұлға айнымал таңбалы болады, өйткені

$$\Phi_2\left(-\frac{f''_{yy}(M_0)}{f''_{xx}(M_0)}, 1\right) = 3f''_{yy}(M_0) \text{ және } \Phi_2\left(\frac{f''_{yy}(M_0)}{f''_{xx}(M_0)}, -1\right) = -f''_{yy}(M_0)$$

әртүрлі таңбалы сандар.

Ескерту 8.4. $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - \left[f''_{xy}(M_0)\right]^2 = 0$ болған жағдайда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде төңіректік экстремум бар болуы да және жоқ болуы да мүмкін.

Мысал 8.1. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 4$ функциясын экстремумға зерттеу керек.

Шешуі. Берілген функция Oxy жазықтығының барлық нүктелерінде үзіліссіз дифференциалданушы функция. Оның күдікті нүктелерін – стационар нүктелерін (8.36) жүйе арқылы табамыз:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 3 = 0 \\ z'_y = -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}.$$

Енді осы стационар $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ нүктедегі екінші дербес туындыларды табамыз:

$$A = z^{(2)}_{xx} = 2, B = z^{(2)}_{yy} = -1, C = z^{(2)}_{yy} = 2, \Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$

Демек, $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ нүктеде $A = 2 > 0$ болғандықтан функция төңіректік минимумға ие: $z_{\min} = \frac{5}{3}$.

Мысал 8.2. $z = x^2 - y^2 + 3$ функциясын экстремумға зерттеу керек.

Шешуі. Бұл функция жазықтың барлық нүктелерінде кез келген ретті дифференциалданушы функция.

(8.33) жүйе $f'_x = 2x = 0$, $f'_y = -2y = 0$ түрінде болып, шешімі (0, 0) стационар нүкте (күдікті нүкте) болады. $A = f^{(2)}_{xx} = 2$, $B = f^{(2)}_{xy} = 0$, $C = f^{(2)}_{yy} = -2$ болғандықтан, $\Delta = 2(-2) - 0 = -4 < 0$. Яғни (0, 0) нүктесінде функцияның экстремумы жоқ.

Мысал 8.3. $z = x^4 + y^4 + 5$ функциясын эксремумға зерттеу керек.

Шешуі. Бұл функция да Oxy жазықтығының барлық нүктелерінде кез келген ретті дербес туындыларға ие.

$f'_x = 4x^3 = 0$, $f'_y = 4y^3 = 0$ жүйені шешсек (0, 0) нүктесі стационар нүкте болады. Бұл нүктеде

$$A = f^{(2)}_{xx}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 12x^2\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,\ B = f^{(2)}_{xy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,\ C = f^{(2)}_{yy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 12y^2\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

болғандықтан $\Delta = 0$ болады. Ескерту бойынша бұл нүктеде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін. Бұл жағдайда экстремум бар, өйткені $z \geq 5$, ал $z(0, 0) = 5$. Демек, $z_{\min}(0, 0) = 5$.

Мысал 8.4. $z = x^3 + y^3$ функциясын экстремумға зерттеу керек.

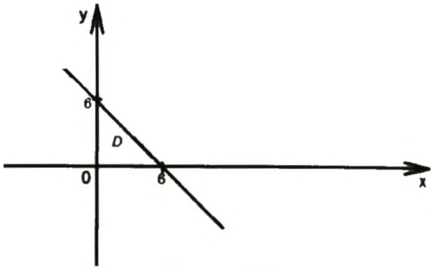
Шешуі. Берілген функция Oxy жазықтығының барлық нүктелерінде кез келген ретті дербес туындыларға ие: $f'_x = 3x^2$, $f'_y = 3y^2$, $f^{(2)}_{xx} = 6x$, $f^{(2)}_{xy} = 0$, $f^{(2)}_{yy} = 6y$.

$3x^2 = 0$, $3y^2 = 0$ жүйесін шешсек, (0, 0) нүктесі стационар нүкте болады. Бұл нүктеде $f^{(2)}_{xx} = 0$, $f^{(2)}_{xy} = 0$, $f^{(2)}_{yy} = 0$ болғандықтан $\Delta = 0$. $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) = x^3 + 1$ яғни $x > 0$ болғанда $z > 0$, ал $x < 0$ болғанда $z < 0$. Демек, $M_0(0, 0)$ нүктесінің кез келген маңайында функция мәндерінің таңбасы әртүрлі болады. Демек, экстремум жоқ.

8.3. Бірнеше айнымалды функцияның тұйық аймақтағы ең үлкен және ең кіші мәндері

$z = f(x, y)$ функциясы шенелген $\bar{D} = D \cup \Gamma$ тұйық аймақта анықталған және үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданушы функция болсын.

Теорема 8.3а бойынша f функциясы $\bar{D}$ аймақта өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін стационар нүктелерде немесе аймақтың шекарасындағы нүктелерде қабылдайды.



Сурет 8.5

Мысал 8.5. $z = x^2y(2-x-y)$ функциясының $x = 0, y = 0, x + y = 6$ түзулерімен (сурет 8.5) шенелген $\bar{D}$ тұйық аймақтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. D аймақ – үшбұрыш ішіндегі стационар нүктелерді табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2 - x - 2y)$$

Дербес туындыларды нөлге теңеп, x және y шамаларға қысқартамыз, өйткені үшбұрыштың ішінде $x > 0, y > 0,$ $\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases}$ Бұл жүйені шешсек $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}$. Яғни $M_0\ (1;\ \frac{1}{2})$.

Бұл стационар нүкте үшбұрыштың ішінде жатады.

$$z_0(x_0, y_0) = 1^2 \cdot \frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\ ;$$

Үшбұрыштың $x = 0$ және $y = 0$ қабырғаларында $z = 0$. $x + y = 6$ қабырғасындағы ең үлкен және ең кіші мәндерді табамыз. Бұл қабырғада $y = 6 - x, 0 \le x \le 6$ және $z = z(x) = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x), -48x + 12x^2 = 0, 12x(x - 4) = 0$. Стационар нүктелерді $z'(x) = 0$ немесе $-48x + 12x^2 = 0, 12(x - 4)$ теңдеуден табамыз. Бұл теңдеуден $x = 4$, өйткені $x = 0$, шекаралық нүкте. $x = 4$ болғанда $z = -4 \cdot 16(16 - 4) = -128$. Сонымен, z функциясының берілген үшбұрыштағы ең үлкен және ең кіші мәндерін оның келесі мәндерінің ішінен іздейміз: үшбұрыш ішіндегі $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ нүктеде $z = \frac{1}{4}; x = 0$ және $y = 0$ қабырғаларда және олардың ұштарында $z = 0$; $x + y = 6$ қабырғасының (4; 2) нүктесінде $z = -128$. Демек берілген функция $z = \frac{1}{4}$ ең үлкен мәнін ішкі $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ нүктесінде, $z = -128$ ең кіші мәнін $x + y = 6$ қабырғасының (4; 2) нүктесінде қабылдайды.

8.3. Функцияның шартты экстремумы

Математика және оның қолдануларында аргументтері өзара байланыс теңдеулері деп аталушы кейбір қосымша шарттар (байланыс теңдеулері) арқылы байланысқан бірнеше айнымалды функцияның экстремумын табуға арналған есептер жиі кездеседі. Мұндай экстремумдар шартты экстремумдар деп аталады.

Келесі есепті қарастырайық. Ауданы $2a$-ға тең қаңылтырдан көлемі ең үлкен, параллелопипед пішінді ашық қорап жасау керек.

Қораптың енін, ұзындығын және биіктігін сәйкес x, y, z арқылы белгілесек есеп $V = xyz$ функциясының

$$xy + 2xz + 2yz = 2a$$

шарты орындалатындай максимумын табуға саяды. Егер қорап жабық болатын болса, онда

$$2xy + 2xz + 2yz = 2a$$

қосымша шарт орындалуы керек.

Алдымен, айнымалдары бір шарт арқылы байланысқан екі айнымалды функцияның шартты экстремумы туралы мәселені қарастырайық

1. $$z = f(x, y) \qquad (8.38)$$

функциясының x және y айнымалдар

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (8.39)$$

байланыс теңдеуін қанағаттандыратын, максимумы мен минимумы табылсын. $f(x, y), \varphi(x, y) = 0$ функцияларын шартты экстремум нүктесінің кейбір маңайында дифференциалданатын функциялар деп есептейміз.

(8.39) теңдікті y-ке қатысты шешу мүмкін болса, мысалы $y = \psi(x)$, онда бұл функцияны $f(x, y)$ өрнекке қойсақ, $z = f[x, \psi(x)] = \Phi(x)$ бір айнымалды функция шығады. Бұл функцияның экстремум нүктесі x-ті тауып, байланыс теңдеуінен x-ке сәйкес келетін y-ті анықтап, есептің шешімін табамыз.

(8.39) байланыс теңдеуін y-ке немесе x-ке қатысты шешуге болмаса да қойылған есепті шешуге болады.

Теорема 8.14. (Шартты экстремумның қажетті шарты). Егер $f(x, y)$ және $\varphi(x, y)$ функциялары (8.38), (8.39) есептің $M(x, y)$ шартты экстремум нүктесінің кейбір маңайында дифференциалданатын функциялар болса, онда $M(x, y)$ нүктесінде

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad (8.40)$$

теңдіктері орындалады.

Дәлелдеуі. (8.39) теңдіктен y айнымалды x айнымалдық функциясы деп есептеп, $\frac{dz}{dx}$ туындысын табамыз:

(8.38)-ден y-ті x-тің функциясы деп алсақ,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Экстремум нүктелері үшін қажетті шарт

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (8.41)$$

теңдігі орындалауы тиіс. (8.39) байланыс теңдеуінен x бойынша туынды алсақ,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad (8.42)$$

теңдігі алынады. (8.42) теңдікті қазірше белгісіз λ санға көбейтіп, нәтижесін (8.41) теңдікке қоссақ $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0$, немесе.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (8.43)$$

(8.39) теңдік барлық экстремум нүктелерінде орындалады. Енді λ санын $\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ теңдігі орындалатындай етіп таңдасақ (анықтық үшін күдікті нүктелерде $\varphi'_y\neq 0$ деп алайық), онда (8.43) теңдіктен $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$ теңдігі шығады.

Сонымен шартты экстремум нүктелерінде үш белгісізі бар келесі үш теңдеу жүйесі қанағаттандырылады:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\varphi(x,y)=0$$

(8.40) жүйеден x,y және λ табылады. Мұнда λ белгісізі тек көмекші роль атқарады. Бұдан кейін оның қажеті болмайды.

(8.40) жүйенің сол бөлігі.

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \qquad (8.44)$$

функциясының сәйкес x,y,λ айнымалдары бойынша дербес туындылары екендігі көрінеді.

$F(x,y,\lambda)$ – Лагранж функциясы, λ – Лагранж көбейткіші, ал шартты экстремум есебіне қолданылған бұл әдіс – Лагранж көбейткішінің әдісі деп аталады.

(8.40) теңдеулер жүйесі шартты экстремумның қажетті шартын құрайды.

Яғни (8.40) жүйені қанағаттандыратын x,y және λ мәндерінде (8.38), (8.39) есептің шартты экстремумы болуы да, болмауы да мүмкін.

Табылған $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ стационар нүктесінде (8.38), (8.39) есептің шартты экстремумы бар немесе жоқ екенін білу үшін (8.44) Лагранж функциясының екінші дифференциалының таңбасын зерттеу ыңғайлы. Мұнда $\boldsymbol{dy}$ дифференциалы $\boldsymbol{dx}$-ке тәуелді болатынын ескеру керек.

(8.44) Лагранж функциясының құрылымынан $\varphi(x,y)=0$ байланыс шарты орындалғанда $f(x,y)$ және $F(x,y,\lambda)$ функцияларының экстремумдары дәлме дәл келеді. Өйткені

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=F(x+\Delta x,y+\Delta y,\lambda)-F(x,y,\lambda).$$

Теорема 8.15. (Шартты экстремумның жеткілікті шарттары). $f(x,y)$ және $\varphi(x,y)$ функцияларының $M(x,y)$ стационар нүкте мен оның кейбір маңайында екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болсын.

Онда, егер $F(x,y,\lambda)$ Лагранж функциясының екінші ретті дифференциалы:

а) квадраттық тұлға $d^2F(M)>0$ болса, (8.38), (8.39) есеп $M(x,y)$ нүктесінде шартты минумумге ие;

б) квадраттық тұлға $d^2F_{(M)} < 0$ болса (8.38), (8.39) есеп $M(x,y)$ нүктесінде шартты максимумға ие.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша f, F функциялары $M(x,y)$ стационар нүктесінде екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар. Лагранж функциясының құрылымы бойынша $\Delta z = f(x+\Delta x, x+\Delta x) - f(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y, \lambda) - F(x,x,\lambda)$, яғни (8.39) байланыс шарты орындалғанда $f(x,y)$ және $F(x,y,\lambda)$ функцияларының экстремумдары дәлме дәл келеді. Онда экстремумның жеткілікті шартын алу үшін d^2F екінші ретті диффенренциалдың анық таңбалығын талап ету керек. Ол үшін Сильвестр белгісі бойынша (8.36) сандардың таңбаларын анықтау керек.

Бұл жағдайда (8.39) байланыс шарты орындалғанда $d^2F > 0$ $(d^2F < 0)$ болғанда (8.38) функция, $M(x,y)$ стационар нүктеде шартты минимумге (шартты максимумға) ие болады.

2. Айнымалдар саны $m \geq 3$ болатын функциялар үшін шартты экстремум есебін Лагранж көбейткіштері әдісімен шешу.

Лагранж көбейткіші әдісін айнымалдар саны $m \geq 3$ болған жағдайға да қолдануға болады.

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{8.45}$$

функциясының келесі байланысқан теңдеулерді

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases} \tag{8.46}$$

қанағаттандыратын $(n < m)$ экстремумдарын табу керек болсын.

Ол үшін Лагранж функциясын былайша жазамыз:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) + \\ + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) + \dots + \lambda_n\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{8.47}$$

Мұндағы λ_i, $i = \overline{1,n}$, Лагранж көбейткіштері.

Теорема 8.14 (қажетті шарт) тұжырымы сияқты $F(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ функциясының $x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымалдар бойынша дербес туындыларын тауып, оларды нөлге теңестіреміз:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} + \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} + \dots + \lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} = 0 \end{cases} \tag{8.48}$$

(8.46), (8.48) теңдеулер жүйесінен, $x_1, x_2, \dots, x_m$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ белгісіздерді табамыз.

(8.46), (8.48) теңдеулер жүйесі (8.45), (8.46) шартты экстремум есебінің қажетті шарттарын құрайды. Табылған $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ стационар нүктесі (8.45) функция (8.46) байланыс шарттары орындалғанда шартты экстремум нүктесі болуы үшін d^2F екінші ретті дифференциалды зерттеу керек. $d^2F > 0$ ($d^2F < 0$) болғанда M нүктесінде шартты минимум (шартты максимум) болады.

Бұл тұжырым Теорема 8.15 сияқты дәлелденеді.

Мысал 8.6. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ функциясының $x + x + z - 1 = 0$ байланыс шарты орындалғандағы шартты экстремумын табу керек.

Шешуі. Лагранж функциясын (8.47) құрып, дербес туындыларын табамыз:

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 + \lambda(x + y + z - 1);$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda.$$

(8.48) қажетті шарттарды ескерсек $M_0(x_0, y_0, z_0)$ күдікті нүктенің координаталары $x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{\lambda}{2}$.

$x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0$ байланыс шартынан $\lambda = -\frac{2}{3}$ шығады. Демек, $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ күдікті нүкте. Екінші дифференциал

$$d^2F = 2[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$$

болғандықтан, Сильвестр белгісі бойынша барлық x, y, z-тер үшін квадраттық тұлға оң таңбалы. Демек, $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ шартты минимум нүктесі және функцияның осы нүктедегі мәні

$$u_{\min}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

8.4. Эмпирикалық формулалар түсінігі. Ең кіші квадраттар әдісі

Тәжірибе негізінде құрылған аналитикалық өрнектер эмпирикалық формулалар деп аталады.

Әртүрлі зерттеулерде $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ тәжірибе негізінде алынған нүктелердің Oxy жазықтығында орналасуына қарай аналитикалық түрде $y = f(x)$ функциясының түрін анықтау қажет болады.

Негізгі мақсат-ауытқу сандарының квадраттарының қосындысы

$$S(f) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - y_i]^2 \tag{8.49}$$

шамасын ең аз ету. Бұл әдісті ең кіші квадраттар әдісі деп атайды.

Бұл мәселені шешу екі сатыдан тұрады:

1) $y = f(x)$ функциясының түрін анықтау;

2) $f(x)$ функциясындағы белгісіз параметрлерді анықтау. $S(f)$ шамасының орнына $\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - y_i]$ немесе $\sum_{i=1}^{n}|\delta_i| = \sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - y_i|$ шамаларын алуға да болар еді.

Бірінші жағдайда тәжірибелік нүктелердің әртүрлі үлестірiлiмiне қарамастан $\sum_{i=1}^{n}\delta_i$ шамасы аз, тіпті нөл де болуы мүмкін, өйткені оң ауытқуларды теріс ауытқулар азайтып жіберуі мүмкін. Екінші жағдайда $\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|$ үшін мұндай кемшілік болмайды, бірақ оны дифференциалдауға болмайды.

$y(x)$ функциясы

$$y = ax + b \tag{8.50}$$

түрінде болсын дейік. Онда (8.49) функция

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

түрінде болады. Осы екі айнымалды функция a және b айнымалдардың қандай мәндерінде ең кіші мәнді қабылдайтынын анықтайық.

Мұндағы x_i және y_i , $i = \overline{1, n}$, берілген сандар, ал a және b коэффициенттері анықталуы керек болатын белгісіз сандар.

Сонымен, қойылған есеп, $S(a, b)$ екі айнымалды функцияны минимумға зерттеуге келтірілді. (8.33) шарттар бойынша (қажетті шарттар) стационар нүктелерді табамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{array}{l} -2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]x_i = 0 \\ -2\sum\limits_{i=1}^{n}[]y_i - (ax_i + b) = 0 \end{array}$$

Бұл жүйені былайша жазуға болады:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b_n \tag{8.51}$$

(8.51) жүйе ең кіші квадраттар әдісінің нормалды жүйесі деп аталады. Осы жүйені шешіп (a, b) стационар нүктені табамыз.

Теорема 8.15 бойынша (a_0, b_0) нүктесіндегі жеткілікті шарттың орындалуын тексереміз. Ол үшін (a_0, b_0) стационар нүктесіндегі

$$A = S_{aa}^{(2)}(a_0, b_0), B = S_{ab}^{(2)}(a_0, b_0), A = S_{bb}^{(2)}(a_0, b_0)$$

екінші туындылардың мәнін тауып, $\Delta = AC - B^2$ шаманың таңбасын анықтаймыз.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n$$

болғандықтан,

$$\Delta = 4n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 > 0$$

$\frac{\partial^2 s}{\partial a^2} > 0$ болғандықтан $M(a,b)$ нүктесінде, теорема 8.13 бойынша, $S(a,b)$ функциясы минимумға ие болады.

Бұл есепті Сильвестр белгісін қолданып та шешуге болады.

Мысал 8.7. Мұнайдың бағасы x (ақшалай бірлік) және мұнай компанияларының акцияларының индексі y (шартты бірлік) келесі түрде берілген.

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

x және y айнымалдардың арасында сызықтық тәуелділік бар деп ұйғарып, ең кіші квадраттар әдісін қолданып $y = ax + b$ түріндегі Эмпирикалық (тәжірибелік) формула анықталсын.

Шешуі. Есептесу ақшасын табуға қажет $\sum_{i=1}^{6} x_i, \sum_{i=1}^{6} y_i, \ \sum_{i=1}^{6} x_i y_i, \sum_{i=1}^{6} x_i^2$ шамаларды табамыз. Аралық есептеулерді көмекші кесте ретінде келтіреміз.

x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2
17,28	537	9279,36	298,5984
17,05	534	9104,70	290,7025
18,30	550	10065,00	334,8900
18,80	555	10434,00	353,4400
19,20	560	10752,00	368,6400
18,50	552	10212,00	342,2500
109,13	3288	59847,06	1988,5209

Бұл белгілі кесте негізінде (8.51) нормаль теңдеулер жүйесі мына түрде болады.

$1988{,}5209a + 109{,}13b = 59847{,}06$

$109{,}13a + 6b = 3288$

Бұл жүйенің шешімі $a = 12{,}078$, $b = 328{,}32$

$y = 12{,}078x + 328{,}32$

ізделінді тәуелділікті береді.

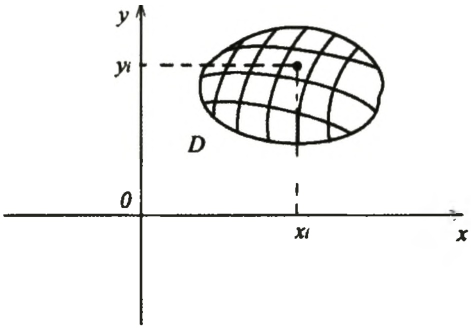
Сонымен, мұнайдың бағасы бір ақша бірлігіне өскенде мұнай компанияларының акцияларының индексі орташа 12,078 бірлікке өседі.

IX тарау. БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ҚИСАБЫ

§ 1. Екі еселі интегралдар

Анықталған интегралдың екі айнымалды функция үшін жалпылауы екі еселі интеграл болып табылады.

1.1. Екі еселі интегралдың анықтамасы және бар болу шарттары



Сурет 9.1

Кейбір $D \subset Oxy$ тұйық шенелген аймақта анықталған және шенелген $z = f(x,y)$ функциясы берілсін. Бұл аймақтың L шекара сызығы ақырлы $y = f(x)$ немесе $x = \varphi(y)$ теңдеулерімен берілген үзіліссіз функциялар болсын. Мысалы, қабырғаларының теңдеулері $y = kx + b$ және $x = a$ түзулерімен шенелген үшбұрыш, $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ жартылай шеңберлермен шенелген дөңгелек.

D аймақты кез келген тәсілмен ортақ ішкі нүктелері жоқ, ақырлы $D_1, D_2, \dots, D_n$ бөлікшелерге бөлеміз. Бұл бөлікшелердің аудандарын, сәйкес, $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ арқылы белгілейміз (сурет 9.1).

Әрбір D_i, $i=\overline{1,n}$ бөлікшеде кез келген $M_i(x_i, y_i)$ нүктені таңдап, $f(x,y)$ функциясының D аймақтағы Риман интегралдық қосындысы деп аталатын

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i \tag{9.1}$$

қосынды құрамыз (сурет 9.2).

D_i аймақтың $d(D_i)$ диаметрі деп, $d(D_i) = \sup\limits_{\substack{N' \in D_i \\ N'' \in D_i}} (N', N'')$ шаманы атаймыз, ал λ арқылы D_i бөлікшелердің диаметрлерінің ең үлкенін, яғни $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} |d(D_i)|$, белгілейміз.

Анықтама 1.1. Егер $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i = I$ ақырлы шек бар болса, ол шекті $f(x,y)$ функциясының D аймақ бойынша екі еселі Риман интегралы деп атайды және

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x,y) dS = \iint_D f(M) dS = \iint_D f(x,y) dx dy \quad (9.2)$$

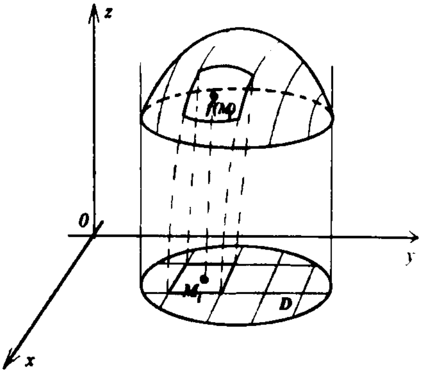
символдарының біреуімен белгілейді.

Бұл жағдайда D – интегралдау аймағы, $f(x,y)$ – D аймақта интегралданушы функция, x және y интегралдау айнымалдары, dS немесе $dx \cdot dy$ – аудан элементі деп аталады.

$f(x,y)$ функциясының шенелген болуы екі еселі интеграл бар болуының қажетті шарты. өйткені, кейбір шенелген функциялардың екі еселі интегралы болмайды. Мысал ретінде

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, x \text{ және } y \text{ рационал сандар,} \\ 0, x \text{ және } y \text{ иррационал сандар.} \end{cases}$$

екі айнымалды функциясын қарастырайық.



Сурет 9.2

Анықтама бойынша $D = \langle (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \rangle$ болғанда, $f(x,y)$ функциясының D аймақта екі еселі интегралы болмайды. Өйткені x және y айнымалдар рационал сандар болғанда интегралдық қосынды $\sigma \neq 0$, ал иррационал сандар болғанда $\sigma = 0$ болады.

Теорема 9.1. (жеткілікті шарт). Егер $f(x,y)$ функциясы шенелген тұйық D аймақта шенелген, және осы аймақтың теңдеулері $y = f(x)$ немесе $x = \varphi(y)$ үзіліссіз функциялар болатын ақырлы қисықтардың нүктелерінен басқа нүктелерде үзіліссіз болса, онда $f(x,y)$ функциясы D аймақта интегралданушы функция болады. ([1],XVI, §1).

Салдар 1.1. Егер $f(x,y)$функциясы шенелген тұйық D аймақта үзіліссіз болса, онда функция осы аймақта интегралданушы.

Ескерту 1.1. Анықтама 1.1-ден (9.2) шектің бар болуы D аймақты бөлу тәсіліне және әрбір бөлікшеде $M(x_i, y_i)$ нүктесін таңдауға байланысты еместігін атап өтеміз. Сондықтан, интегралдық қосындыны құрғанда бөлу тәсілін және әрбір бөлікшеде нүктені таңдауды есептеуге қолайлы етіп алу керек.

1.2. Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері

Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері анықталған интегралдың сәйкес қасиеттері сияқты тұжырымдалады.

1° Егер K кез келген тұрақты сан болып, және $f(x,y)$ функциясы D аймағында интегралданушы болса, онда $K \cdot f(x,y)$функциясы да D аймақта интегралданушы және

$$K \iint_K f(x,y) dx dy = K \iint_D f(x,y) dx dy.$$

2° Егер $f(x,y)$ және $g(x,y)$ функциялары D аймақта интегралданушы болса, онда олардың алгебралық қосындысы да D аймақта интегралданады және

$$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

1° және 2° қасиеттер екі еселі интегралдың сызықтық қасиеттері деп аталады. Бұл қасиеттерді біріктіріп жазсақ

$$\iint\limits_D [\alpha \cdot f(x,y) \pm \beta \cdot g(x,y)]dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$ мұнда α, β – кез келген сандар.

3°. Егер D тұйық аймағы ортақ ішкі нүктелері жоқ кез келген D' және D'' аймақтардың бірігуі болса, яғни $D = D' \cup D''$, және $f(x,y)$ функциясы D' пен D'' аймақтарда интегралданушы болса, онда бұл функция D-аймақта интегралданады және

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy.$$

қасиет екі еселі интегралдың аддитивтілік қасиеті деп аталады.

4°. Егер D аймақта $f(x,y) \geq 0$ болса, онда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$ болады.

Егер D тұйық аймақта интегралданушы $f(x,y)$ және $g(x,y)$ функциялары үшін осы аймақтың барлық нүктелерінде $f(x,y) \leq g(x,y)$ болса, онда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

5°. Егер $f(x,y)$ және $g(x,y)$ функциялары D тұйық аймақта интегралданатын болса, онда осы аймақта $f(x,y) \cdot g(x,y)$ функциясы да иинтегралданатын болады.

6° Егер $f(x,y)$ функциясы D тұйық аймақта интегралданатын болса, онда $|f(x,y)|$ функциясы да осы аймақта интегралданатын болады және

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)dxdy|$$

1° – 6° қасиеттер шек анықтамасына сүйеніп дәлелденеді.

7°. Орта мән формуласы. Егер $f(x,y)$ функциясы D тұйық байланысты аймақта үзіліссіз болса, онда осы аймақта $M(x_0,y_0)$ нүктесі табылып, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S$ теңдігі орындалады.

Мұндағы S саны D аймағының ауданы. Бұл теңдіктен

$$f(x_0,y_0) = \frac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{S} \qquad (9.3)$$

(9.3) теңдігі орта мән формуласы деп аталады.

8°. Егер $f(x,y)$ функциясы шекарасы L құракты-тегіс D тұйық аймағында үзіліссіз болса, онда ол L мен оның тұйықтамасы D/L аймақтарында интегралданады, және $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D/L} f(x,y)dxdy$ теңдігі орындалады.

Шынында да, $f(x,y)$ функциясы D тұйық аймақта үзіліссіз болғандықтан

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D/L} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{L} f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D/L} f(x,y)dxdy + 0 = \iint\limits_{D/L} f(x,y)dxdy$$

1.3. Екі еселі интегралды қайталама интегралға келтіру

а) **D тұйық аймақ тіктөртбұрыш болған жағдай.** D аймақтың L шекарасының қабырғалары координаталық осьтерге параллель болсын.

Теорема 9.2. $f(x,y)$ функциясы $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$ тіктөртбұрышта интегралданушы, яғни

$$\int\limits_{D} f(x,y)dxdy \tag{9.4}$$

интеграл бар және әрбір $x \in [a,b]$ үшін

$$J(x) = \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy \tag{9.5}$$

анықталған интеграл бар болсын. Онда оның

$$\int\limits_{a}^{b} J(x)dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy$$

қайталама интеграл деп аталатын интегралы бар болады және

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy \tag{9.6}$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. D тік төртбұрышын $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ және $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_k = d$ нүктелерінің жәрдемімен $D_{ij} = \{(x,y) | x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k}$ бөлікше тіктөртбұрыштарға бөлеміз. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ деп алып, m_{ij} және M_{ij} арқылы D_{ij} бөлікше тік төртбұрыштағы $f(x,y)$ функциясының дәл төменгі және дәл жоғарғы шекараларын белгілейміз. Сонда D_{ij} тіктөртбұрышта

$$m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij} \tag{9.7}$$

қос теңсіздік орынды болады.

Бұл теңсіздікте $x = \xi_i$ деп алып, мұндағы $\xi_i - [x_{i-1}, x_i]$ кесіндідегі кез келген нүкте, содан соң (9.7) теңсіздігін $[y_{j-1}, y_j]$ кесіндісінде y бойынша интегралдаймыз. Сонда $m_{ij} \ \Delta y_i \leq \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}\Delta y_i$ теңсіздігі алынады.

Енді бұл теңсіздікті барлық j-лер, $j = \overline{1,k}$, бойынша қоссақ, (9.5) белгілеуін қолдана отырып

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \leq J(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_i$$

теңсіздігі алынады. Әрі қарай бұл қос теңсіздікті Δx_i-ге көбейтіп, барлық i-лер, $i = \overline{1,n}$, бойынша қоссақ,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^{n} J(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_i \quad (9.8)$$

қос теңсіздігі шығады.

D_{ij} бөлікше тіктөртбұрыштардың диаметрлерінің (диагональдарының) ең үлкені $\lambda \to 0$ дейік. Бұл жағдайда $\max\{\Delta x_i\}$ нөлге ұмтылады. Онда (9.8) теңсіздіктеріндегі шеткі қосындылар – төменгі және жоғарғы Дарбу қосындылары – (9.4) екі еселі интегралға ұмтылады. Сондықтан (9.8)-дің ортасындағы мүше де, $\lambda \to 0$ болғанда, (9.4) екі еселі интегралға ұмтылады. Бірақ бұл шек анықталған интегралдың анықтамасы бойынша

$$\int_a^b J(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Сонымен қайталама интегралдың бар болуы және (9.6) теңдік дәлелденді.

Ескерту 1.2. Егер теорема 9.2-де x пен y айнымал орындарын ауыстырсақ, онда

$$\int_c^d f(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

қайталама интегралдың бар болуы және

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \quad (9.9)$$

теңдіктің орынды екендігі дәлелденді.

(9.6) және (9.9) формулаларының жәрдемімен (9.4) екі еселі интеграл қайталама интегралға келтіріледі. Мысалы (9.9) формулада, алдымен y-ті тұрақты деп алып x бойынша интегралдайды да, алынған нәтижені y бойынша интегралдайды. Яғни, кезекпен, екі анықталған интеграл есептелінеді.

Мысал 1.1. $\iint\limits_D 2(x+y^3)dxdy,$

мұндағы $D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 2\}$, екі еселі интегралды есептеу керек.

Шешуі. Берілген интегралды (9.6) формула бойынша

$$\iint\limits_D 2(x+y^3)dxdy=2\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^2(x+y^3)dy$$

түрінде жазылады, мұнда ішкі интегралда x тұрақты деп есептейміз:

$$\int\limits_0^2(x+y^3)dy=\left(xy+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=2x+\frac{2^4}{4}=2x+4.$$

Алынған функцияны x бойынша $[1;2]$ кесіндісінде интегралдаймыз:

$$\iint\limits_D 2(x+y^3)dxdy=2\int\limits_1^2(2x+4)dx=[2(x^2+4x)]|_1^2=$$

$$=2[(2^2+4\cdot 2)-(1^2+4\cdot 1)]=2\cdot(12-5)=14.$$

Енді осы интегралды (9.9) формуланы қолданып, тікелей төмендегіше есептейік:

$$\iint\limits_D 2(x+y^3)dxdy=2\int\limits_0^2 dy\int\limits_1^2(x+y^3)dx=2\int\limits_0^2\left(\frac{x^2}{2}+y^3x\right)\Bigg|_1^2 dy=$$

$$=2\int\limits_0^2\left[\left(\frac{2^2}{2}+2y^3\right)-\left(\frac{1^2}{2}+y^3\right)\right]dy=2\int\limits_0^2\left(\frac{3}{2}+y^3\right)dy=$$

$$=2\left[\frac{3}{2}y+\frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_0^2=2\left(\frac{3}{2}\cdot 2+\frac{2^4}{4}\right)=2(3+4)=14$$

б) D қисықсызықты аймақ болған жағдай.

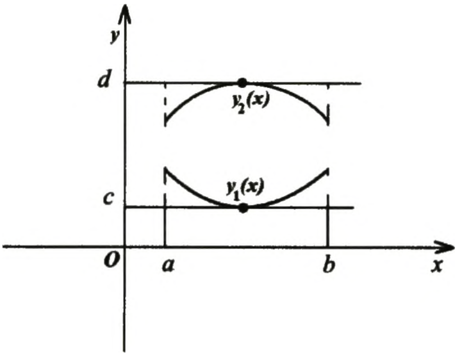
Анықтама 1.2. D аймағының ішкі нүктелерінен өтетін $x=\alpha(y=\beta)$ түзулері оның шекарасын екі нүктеден артық нүктелерде қимаса, онда D аймағы Oy осінің бағыты бойынша (Ox осінің бағыты бойынша) дұрыс аймақ деп аталады. Егер D аймағы Ox және Oy осьтерінің бағыттары бойынша дұрыс болса, онда ол дұрыс аймақ деп аталады.

Теорема 9.3. $f(x,y)$ функциясы $D=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ y_1(x)\leq y\leq y_2(x)\}$, мұндағы $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, аймақта анықталған, осы аймақта екі еселі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ интегралы бар және әрбір

$x \in [a,b]$ үшін $J(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ анықталған интегралы бар функция болса, онда $\int\limits_a^b J(x)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ қайталама интегралы бар және

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (9.10)$$

теңдігі орындалады.



Сурет 9.3

Дәлелдеуі. $c=\min\limits_{[a,b]} y_1(x), d=\max\limits_{[a,b]} y_2(x)$ деп алайық және D аймақты $D'=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$, тік төртбұрыштың ішіне орналастырайық. D' тік төртбұрышта (сурет 9.3).

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), (x,y)\in D \\ 0, (x,y)\in D'\backslash D \end{cases}$$

көмекші функцияны қарастырайық. Бұл функция теорема 9.3 шарттарын қанағаттандырады. Шынында да ол D аймақта интегралданады, өйткені $f(x,y)$ функциясымен дәлме-дәл келеді, және $D'\backslash D$ аймақта да интегралданады, өйткені мұнда нөлге тең. Демек екі еселі интегралдың 3° қасиеті бойынша:

$$\iint\limits_{D'} F(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy \quad \text{және} \iint_{D'\backslash D} F(x,y)dxdy=0.$$

Соңғы теңдіктерден

$$\iint\limits_{D'} F(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy \qquad (9.11)$$

екендігі шығады. Әрі, әрбір $x\in[a,b]$ үшін

$$\int\limits_c^d F(x,y)\,dy=\int\limits_c^{y_1(x)} F(x,y)dy+\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)dy+\int\limits_{y_2(x)}^{d} F(x,y)dy$$

интегралы бар, өйткені оң бөліктегі үш интеграл да бар. Шынында да $[c,y_1(x)]$ және $[y_2(x),d]$ кесінділері D аймақтың сыртында жатыр, ал бұл кесінділерде $F(x,y)=0$. Демек, оң бөліктегі бірінші және үшінші қосылғыштар нөлге тең, ал екінші қосылғыш шарт бойынша бар, өйткені $[y_1(x), y_2(x)]$ кесіндісінде $F(x,y) = f(x,y)$. Сондықтан,

$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \,(9.12)$$

Сонымен, $F(x,y)$ функциясы үшін теорема 9.2 шарттарының барлығы орындалады. Демек, бұл функция үшін D' төртбұрышындағы екі еселі интеграл қайталама интегралға келтіріледі

$$\iint_{D\prime} F(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dxdy.$$

Осы теңдіктен және (9.11), (9.12) теңдіктерден

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy,$$

яғни, (9.10) формула алынады.

(9.10) формула Oy-бағыты бойынша дұрыс аймақ үшін шығарылды.

Ескерту 1.3. Егер D аймағы Ox осі бағытында дұрыс болса, теорема 9.3 шартында x пен y орындарын ауыстырсақ, тұжырым

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

қайталама интеграл бар және

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (9.13)$$

теңдігі орындалады деп өзгереді.

Егер D аймағы дұрыс аймақ болса,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

теңдіктері орындалады. Мұндағы $x_1(y), x_2(y)$ функциялары сәйкес $y_1(x), y_2(x)$ функцияларына кері функциялар.

Ескерту 1.4. Егер $a < \xi < b$ болып, $y_1(x) = \varphi(x), x \in [a, \xi]$, $y_1(x) = \psi(x), x \in [\xi\,, b]$ болса, онда (9.10) формула былайша жазылады:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^\xi dx \int_{\varphi(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int_\xi^b dx \int_{\psi(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (9.10a)$$

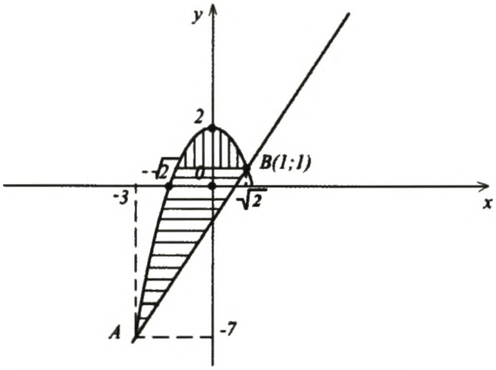
Осы сияқты $c < \eta < d$ болып, $x_1(y) = \mu(y), y \in [c, \eta]$, $x_1(y) = \nu(y), y \in [\eta, d]$ болса, онда (9.13) формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^{\eta} dy \int\limits_{\mu(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx + \int\limits_{\eta}^{d} dy \int\limits_{\nu(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (9.13а)$$

түрінде жазылады.

Мысал 1.2. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ екі еселі интегралды есептеу керек, мұндағы D аймағы $y = 2 - x^2, y = 2x - 1$ сызықтармен шенелген.

Шешуі. D аймақты құрамыз. Бірінші сызық төбесі (0, 2) нүктесінде Oy осіне сәйкес симметриялы парабола. Екінші сызық түзу. Бұл теңдеулерді жүйе ретінде шешіп, олардың қиылысу нүктелерінің координаталарын табамыз: $A(-3;\ -7)$, $B(1;\ 1)$ (сурет 9.4). (9.10) формуланы қолдансақ:



Сурет 9.4

$$\iint\limits_D (x-y)\,dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy = \int\limits_{-3}^{1} \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right]\Bigg|_{-3}^{1} = 4\frac{1}{15}.$$

Енді осы интегралды x пен y орындарын ауыстырып есептейік. Берілген сызықтардың теңдеулерін x-ке байланысты шешсек: $x = \pm\sqrt{2-y}$, $x = \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$.

$-7 \le y \le 1$ болғанда $-\sqrt{2-y} \le x(y) \le \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$, ал $1 \le y \le 2$ болғанда $-\sqrt{2-y} \le x(y) \le \sqrt{2-y}$

Онда (9.13а) формула бойынша:

$$\iint\limits_D (x-y)\,dxdy = \int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{y+1}{2}} (x-y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2+y}} (x-y)dx =$$

$$= \int\limits_{-7}^{1} \left[\frac{x^2}{2} - yx\right]\Bigg|_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{y+1}{2}} dy + \int\limits_{1}^{2} \left[\frac{x^2}{2} - yx\right]\Bigg|_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2+y}} dy =$$

$$= \int_{-7}^{1}\left(\frac{y^2}{8}+\frac{y}{4}+\frac{1}{8}-\frac{y^2}{2}-\frac{y}{2}-1+\frac{y}{2}-y\sqrt{2-y}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(-2y\sqrt{2-y}\right)dy=$$

$$= \int_{-7}^{1}\left(-\frac{3}{8}y^2+\frac{y}{4}-\frac{7}{8}-y\sqrt{2-y}\right)dy-2\int_{1}^{2}y\sqrt{2-y}dy=$$

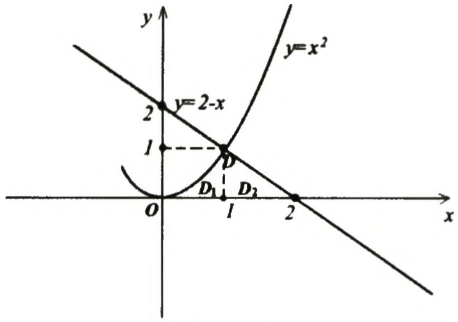
$$= \left[\int y\sqrt{2-y}dy\left|\begin{matrix}2-y=t^2\\ y=2-t^2\\ dy=-2tdt\end{matrix}\right|=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{2-y}\right)^3+2\left(\sqrt{2-y}\right)^5\right]=$$

$$= \left[-\frac{3}{8}\frac{y^3}{3}+\frac{1}{4}\frac{y^2}{2}-\frac{7}{8}y+\frac{4}{3}\left(\sqrt{2-y}\right)^3-2\left(\sqrt{2-y}\right)^5\right]\Bigg|_{-7}^{1}+$$

$$+(-2)\left[-\frac{4}{3}\left(\sqrt{2-y}\right)^3+2\left(\sqrt{2-y}\right)^5\right]\Bigg|_{1}^{2}=\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{7}{8}+\frac{4}{3}-2\right)-$$

$$-\left(-\frac{7^3}{8}+\frac{49}{8}+\frac{49}{8}+\frac{4}{3}\cdot 3^3-2(-2)^5\right)\left[\frac{4}{3}-2\right]=394\frac{2}{3}.$$

Мысал 1.3. $\iint\limits_{D} 20(x+2y)dxdy$ екі еселі интегралды есептеу керек. Мұндағы D аймағы $y=x^2, y=0, x+y-2=0$ сызықтармен шенелген тұйық аймақ.



Сурет 9.5

Шешуі. Сурет 9.5-те D интегралдау аймағы көрсетілген. Бұл Ox осі бағытында дұрыс аймақ. Берілген екі еселі интегралды есептеу үшін (9.13) формуланы пайдаланамыз:

$$\iint\limits_{D} 20(x+2y)dxdy = 20\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}(x+2y)dx=20\int_{0}^{1}dy\left[\frac{x^2}{2}+2yx\right]\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y}=$$

$$=20\int_{0}^{1}\left[\frac{(2-y)^2}{2}+4y-2y^2-\frac{y}{2}-2y^{\frac{3}{2}}\right]dy=20\left[\frac{(y-2)^3}{6}+\frac{7y^2}{2\cdot 2}-\frac{2y^3}{3}-2\cdot 2\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5}\right]\Bigg|_{0}^{1}$$

$$=$$

$$=20\left(-\frac{1}{6}+\frac{8}{6}+\frac{7}{4}-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)=20\cdot\frac{29}{20}=29$$

D аймақ Oy бағытында да дұрыс аймақ, бірақ жоғарғы шекарасы екі сызықтың бірігуінен тұрады. Бұл жағдайда сурет 9.5 тегідей $D=D_1\cup D_2$ деп алып, (9.10a) формуланы қолдануға болатынын атап өтеміз.

$$\iint\limits_{D} 20(x+2y)dxdy = 20\iint\limits_{D_1}(x+2y)dxdy + 20\iint\limits_{D_2}(x+2y)dxdy =$$

$$= 20\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x+2y)dy + 20\int_1^2 dx\int_0^{2-x}(x+2y)dy =$$

$$= 20\int_0^1 dx[xy+y^2]_0^{x^2} + 20\int_0^2 dx[xy+y^2]|_0^{2-x} =$$

$$= 20\int_0^1 (x^3+x^4)dx + 20\int_1^2 [2x-x^2+(2-x)^2]dx =$$

$$= 20\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 + 20\left[x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{(x-2)^3}{3}\right]\Bigg|_1^2 = 20\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+$$

$$+20\left(4-1-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}\right) = 20\cdot\frac{9}{20}+20\cdot 1 = 29.$$

1.4. Екі еселі интегралда айнымалдарды ауыстыру

$f(x,y)$ функциясы кейбір тұйық шенелген D аймақты үзіліссіз болсын. Онда бұл функция D аймақта интегралданушы, яғни

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \qquad (9.14)$$

екі еселі интеграл бар. Енді

$$x = x(u,v), y = y(u,v), \qquad (9.15)$$

ауыстырулары жәрдемімен u және v айнымалдарға өтейік. (9.15) теңдіктерінен u, v айнымалдары x және y айнымалдар арқылы бір мәнді анықталсын деп алайық:

$$u = u(x,y), v = v(x,y), \qquad (9.16)$$

(9.16) теңдіктер жәрдемімен D аймағының әрбір $M(x,y)$ нүктесіне Ouv тік бұрышты координаталар жүйесінде кейбір $M^*(u,v)$ нүктесі сәйкес келеді. $M^*(u,v)$ нүктелер жиыны тұйық шенелген D^* аймақты құрайды.

(9.15) координатларды алмастыру формулалары, ал (9.16) кері алмастыру формулалары деп аталады.

Жасалған ұйғарымдар бойынша, егер $x(u,v)$ және $y(u,v)$ функциялары D^* аймақты үзіліссіз бірінші ретті туындыларға ие болса және анықтауыш

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (9.17)$$

болса, онда (9.14) интеграл үшін

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f[x(u,v), y(u,v)] \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv \qquad (9.18)$$

айнымалдарды ауыстыру формуласы орынды болады. (9.17) анықтауыш функционалдық анықтауыш немесе $x(u,v)$, $y(u,v)$ функциялардың u және v айнымалдары бойынша Якобианы деп аталады.

Бұл айтылғандарды былайша тұжырымдауға болады.

Теорема 9.4. Егер (9.15) алмастыру тұйық шенелген D аймақты, тұйық шенелген D^* аймаққа өзара бір мәнді бейнелесе, D^* аймақта (9.15) функцияларының, бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары болып, оның якобианы $J(u,v) \neq 0$ және $f(x,y)$ функциясы D аймақта үзіліссіз болса, онда (9.18) айнымалдарды ауыстыру формуласы орынды болады ([4], Т 11, §5).

Дербес жағдайда $\boldsymbol{Oxy}$ тік бұрышты координаталар жүйесінен $\boldsymbol{O\varphi\rho}$ тік бұрышты полярлық координаталар жүйесіне өткенде $\boldsymbol{u = \varphi, v = \rho}$ болып, (9.15) ауыстыру формулалар, $\boldsymbol{x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi}$ түрінде жазылады.

Онда Якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho\sin^2\varphi - \rho\cos^2\varphi = -\rho,$$

ал $|J| = \rho$ болады.

Сондықтан (9.18) ауыстыру формуласы:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f[x(\rho;\varphi); y(\rho;\varphi)] \cdot \rho d\rho d\varphi \cdot \qquad (9.18\ a)$$

Мысал 1.4. $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ екі еселі интегралды есептеу керек, мұндағы D аймақ $x^2+y^2 \leq R^2$ дөңгелектің бірінші ширегі.

Шешуі. Полярлық коодинаталарға $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, мұнда $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, формулалар жәрдемімен көшіп, (9.18а) формуланы қолдансақ,

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{D^*} \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} \cdot \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} [\rho^3]|_0^R d\varphi = \frac{R^3}{3}[\varphi]|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{6}.$$

1.5. Екі еселі интегралдың кейбір қолданулары

Әртүрлі қолдануларда негізгі мәселе (9.2) теңдіктегі

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta S_i \qquad (9.19)$$

интегралдық қосындыларды қолайлы түрде құруға тіреледі.

1. Қисықсызықты цилиндрдің көлемін есептеу

Төменгі жағынан D шенелген тұйық аймақпен, жоғарғы жағынан $z = f(x,y) > 0$ бетпен, бүйір жағынан бағыттаушысы D аймақтың шекарасы, жасаушылары Oz осіне параллель цилиндрмен шекараланған дене қисықсызықты цилиндр деп аталады.

D аймақты кез келген тәсілмен аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ болатын бөлікшелерге бөліп, әр бөлікшеде $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,n}$ нүктені таңдасақ, бөлікшеге сәйкес элементар цилиндрдің көлемі $\Delta v_i \approx f(M_i)\cdot \Delta S_i$ болып, жалпы көлемнің жуық мәнін анықтайтын (9.19) түріндегі

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta S_i$$

интегралдық қосындыны аламыз. $f(x,y)$ үзіліссіз болғанда $\lambda = \max\mathrm{diam}\{\Delta S_i\} \to 0$ деп шекке көшсек,

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta S_i = \iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)dxdy \qquad (9.20)$$

Мысал 1.5. $y = x^2, y = 1, x + y + z = 4, z = 0$ (сурет 9.6) беттермен шенелген дененің көлемін табу керек.

Шешуі. Берілген дене қисықсызықты цилиндр, жоғарыдан $x + y + z = 4$ жазықтығының бөлігімен, төменнен Oxy жазықтықтың $y = x^2$ парабола мен $y = 1$ түзуінің арасындағы D бөлігімен шенелген, жасаушылары Oz өсіне параллель. (9.20) формула бойынша, дененің көлемі,

$$V = \iint_D zdxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y)dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(4-y)x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy = 2\int_0^1 (4-y)\sqrt{y}dy = \frac{68}{15}.$$

Басқаша ретпен интегралдасақ,

$$V = \iint_D zdxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (4 - x - y)dx = \int_{-1}^{1} \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{7}{2}-x\right)-(4-x)x^2+\frac{x^4}{2}\right]dx=\frac{68}{15}.$$

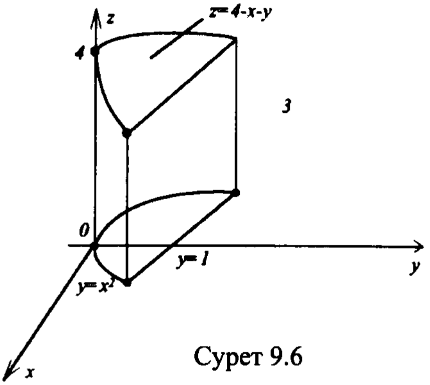
2. *Жазық фигураның (пішіннің) ауданын есептеу.*

(9.20) формулада $z = 1$ деп есептесек,

$$S$$

теңдігі, яғни D пішіннің ауданының сандық мөлшері алынады.

Мысал 1.6. $y = x^2$ және $y = 1$ сызықтармен шенелген D пішіннің ауданын есептеу керек.



Сурет 9.6

Шешуі. Мысал 1.4-те $z = 1$ десек (9.21) формула жәрдемімен берілген пішіннің ауданы алынады:

$$S=\iint\limits_{D} 1\cdot dxdy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx=\int_{0}^{1}x|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int_{0}^{1}(\sqrt{y}+\sqrt{y})dy=2\int_{0}^{1}y^{\frac{1}{2}}dy=2\cdot\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{4}{3}.$$

Басқаша ретте интегралдасақ,

$$S=\int\limits_{D}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy=\int_{-1}^{1}y|_{x^2}^{1}dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

3. *Беттің ауданын есептеу*

Oxyz кеңістікте S беті

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D \qquad (9.21)$$

теңдеуімен берілсін, мұндағы D – шегарасы құрақты тегіс тұйық аймақ. Әрі $f(x,y)$ функциясының $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ дербес туындылары D аймақта үзіліссіз болсын. D аймақты құрақты-тегіс сызықтар арқылы ортақ ішкі нүктелері жоқ N бөлікке бөлеміз, яғни $D=\bigcup_{j=1}^{N} D_j$ әрбір D_j, $j=\overline{1,N}$ бөліктің кез келген (x_j, y_j) нүктесіне S беттің $P_j(x_j, y_j, z_j)$ нүктесі сәйкес келеді. P_j нүктесі арқылы S бетінен жанама жазықтығын жүргіземіз. D_j бөлікшенің шекарасы бағыттаушы сызық, жасаушылары Oz өсіне параллель болатын цилиндрлік бет жүргіземіз. Ол бет ω_j жанама жазықтығынан ω_j^* бөлігін кеседі. Осы бөліктің ауданы $|\omega_j^*|$ болсын.

Анықтама 1.2. S бетінің ауданы деп,

$$|S| = \lim_{\max d\,(D_j)\to 0}\sum_{j=1}^{n}|\omega_j^*|$$

шекті атайды.

ω_j жанама жазықтығының теңдеуі (8.25) бойынша

$$(z-z_j) - f_x'(x_j,y_j)(x-x_j) - f_y'(x_j,y_j)(y-y_j) = 0$$

түрінде жазылады. Бұл жазықтықтың нормалі (8.26) бойынша

$$\overline{n_j} = \{-f_x'(x_j,y_j), -f_y'(x_j,y_j), 1\}$$

болғандықтан, S бетінің P_j нүктедегі $\overline{n_j}$ нормалі мен Oz осінің арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos(\overline{n_j}{}^\wedge, Oz) = \frac{\overline{k}\cdot\overline{n_j}}{|\overline{k}|\cdot|\overline{n_j}|} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2(x_j,y_j)+f_y'^2(x_j,y_j)}}$$

D_j бөлікше жанама жазықтықтың ω_j^* бөлігінің Oxy жазықтығына проекциясы болғандықтан, оның ауданы $|D_j| = |\omega_j^*|\cdot\cos(\overline{n_j}{}^\wedge, Oz)$, ал бұдан алдыңғы теңдікті пайдалансақ,

$$|\omega_j^*| = |D_j|\cdot\frac{1}{\cos(\overline{n_j}{}^\wedge, Oz)} = |D_j|\sqrt{1+f_x'^2(x_j,y_j)+f_y'^2(x_j,y_j)},$$

болады. Демек анықтама 1.2 бойынша, S беттің ауданы

$$|S| = \lim_{\max d(D_j)\to 0}\sum_{j=1}^{N}|\omega_j^*| = \lim_{\max d(D_j)\to 0}\sum_{j=1}^{N}|D_j|\sqrt{1+f_x'^2(x_j,y_j)+f_y'^2(x_j,y_j)} =$$

$$=\iint_D \sqrt{1+\left[f_x'^2(x_j,y_j)\right]^2+\left[f_y'^2(x_j,y_j)\right]^2}\,dxdy. \tag{9.22}$$

Осы сияқты S беті $x = F(y,z)$, $(y,z)\in D'$ теңдеуімен берілсе

$$|S| = \iint_{D'} \sqrt{1+[F_y'(y,z)]^2+[F_z'(y,z)]^2}\,dydz, \tag{9.22a}$$

ал S беті $y = \Phi(x,z)$, $(x,z)\in D'$ теңдеуімен берілсе

$$|S| = \iint_D \sqrt{1+[\Phi'_x(x,z)]^2+[\Phi'_y(x,z)]^2}\,dxdz \tag{9.22б}$$

формулалары орынды болады.

Мысал 1.7. $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфераның S ауданын табу керек.

Шешуі. Сфераның жоғарғы жартысы (сурет 9.7).

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

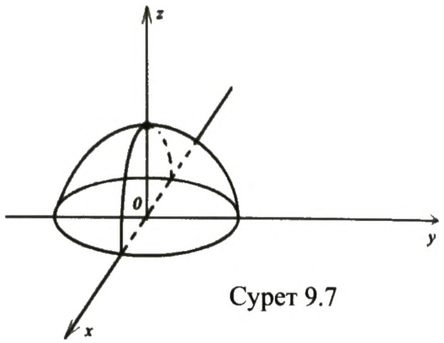
бетінің ауданын есептейміз.

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$
$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

болғандықтан (9.22) формуладағы интеграл астындағы функция

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

түрінде болады. D интегралдау аймағы $x^2 + y^2 \leq R^2$ шарттан анықталады. Сонымен (9.22) формула бойынша



Сурет 9.7

$$\frac{S}{2} = \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy\right)dx$$

теңдікке ие боламыз. Ішкі интегралды табу үшін $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ полярлық координаталарға өтсек, D интералдау аймағының шекарасының теңдеуі $\rho = R$ шеңбер болады. Сонымен,

$$S = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho\right)d\varphi = 2R\int_0^R \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}\right]_0^R d\varphi =$$
$$= 2R\int_0^R Rd\varphi = 2R^2[\varphi]|_0^{2\pi} = 4\pi R^2$$

4. Жазық фигураның массасын есептеу

Кейбір D аймақта үзіліссіз $\rho(x,y)$ тығыздықпен таркатылған. m массаны есептеу керек болсын. Қабылданған үлгі бойынша D аймақты кез келген тәсілмен аудандары ΔS_i болатын D_i, $i = \overline{1,n}$ бөліктерге бөлеміз. Әрбір бөліктен кез келген (ξ_i, η_i) нүктені алып, D_i бөліктің массасы жуықтап $m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ деп алуға болады.

Онда D аймағының массасы, шамамен

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$$

болады. Ал бұл қосынды үзіліссіз $\rho(x,y)$ функциясы үшін D аймақ бойынша интегралдық қосынды. $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d(D_i) \to 0$ деп шекке көшсек, массаның дәл мәні шығады, яғни

$$m = \lim_{maxd(D_j)\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i = \iint_D p(x,y)dxdy \qquad (9.23)$$

5. Жазық пішін массасының ауырлық центрі Статистикалық моменттер.

Oxy жазықтықтағы D аймақта орналасқан, $M(x,y)$ нүктедегі тығыздығы $\rho(x,y)$ үзіліссіз функция болатын пішін массасының ауырлық центрін табу керек болсын.

Екі еселі интегралды анықтау үлгісіне сүйеніп D аймақты D_i, $i=\overline{1,n}$ бөліктерге бөліп, әр бөлікте $\mu_i(\xi_i,\eta_i)$ нүктесін алсақ бөліктің массасы жуықтап $m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta S_i$ болады, мұндағы ΔS_i көбейткіш D_i бөліктің ауданы. Енді осы бөліктердегі массалар $\mu_i(\xi_i,\eta_i)$ нүктелерге жинақталды десек, бұл нүктелер жүйесінің ауырлық центрінің x_c және y_c координаталары үшін

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta Si}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta Si},\ y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i\ \ \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta Si}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta Si}$$

теңдіктері орынды болады. ([11] №1.110) Ал бұл координаталардың дәл мәндерін алу үшін $\lambda=\max d(D_i)\to 0$ деп шекке көшеміз. Сонда

$$x_c=\frac{\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dxdy}{m},y_c=\frac{\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dxdy}{m}\qquad(9.24)$$

формулалары алынады. Мұндағы $m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ пішіннің массасы.

Егер $\rho(x,y)=c=\text{const}$ болса,

$$x_c=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy},y_c=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}.\qquad(9.24a)$$

$$\mu_y=\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dxdy,\mu_x=\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dxdy\qquad(9.25)$$

шамалары D пішіннің сәйкес Oy,Ox осьтеріне салыстырмалы статистикалық моменттері деп аталады.

Мысал 1.8. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ эллипс, $x=0$ және $y=0$ координаталық осьтермен шекараланған бірінші ширектегі D пішіннің әрбір нүктесіндегі беттік тығыздық $\rho(x,y)=k\cdot x\cdot y$ болғанда, массасы, ауырлық центрі және статистикалық моменттерін табайық.

Шешуі. (9.23) формула бойынша D пішіннің массасын есептейміз:

$$m=\iint\limits_D k\cdot x\cdot ydxdy=k\int_0^2 xdx\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}ydy=\frac{k}{x}\int_0^2 xdx[y^2]_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^2 x(4 - x^2dx) = \frac{k}{8}\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{k}{2}.$$

Статистикалық моменттерін табамыз:

$$\mu_x = \iint\limits_D y\cdot kxydxdy = k\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y^2dy = k\int\limits_0^2 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx =$$

$$= \frac{k}{3}\int\limits_0^2 x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dx \left| \begin{array}{ll} t^2 = 1 - \frac{x^2}{4} & x = 0 \text{ де } t = 1 \\ 2tdt = -\frac{x}{2}dx & x = 2 \text{ де } t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{k}{3}\int\limits_1^0 t^3(-4t)dt = \frac{k}{3}(-4)\int\limits_1^0 t^4dt = -\frac{4k}{3}\left[\frac{t^5}{5}\right]\Bigg|_1^0 = -\frac{4k}{3}\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4k}{15}.$$

Осы сияқты есептесек $\mu_y = \frac{8}{15}k$ болады. (9.24а) формулалары бойынша ауырлық центрінің координаталары:

$$x_c = \frac{\mu_y}{m} = \frac{16}{15}, y_c = \frac{\mu_x}{m} = \frac{8}{15}.$$

5. Жазық пішіннің инерция моменттері

Материалдық нүктенің кейбір l оське салыстырғандағы инерция моменті деп, m нүктесінің массасының осы нүктеден оське дейінгі арақашықтығының квадратына көбейтіндісін атайды және $I_l = md^2$ деп белгілейді. Ал материалдық нүктелер жүйесінің инерция моменті осы нүктелердің инерция моменттерінің қосындысына тең болады.

Oxy жазықтықтағы D аймақтың әрбір материалдық нүктесінің тығыздығы $\rho(x,y)$ үзіліссіз функция болсын. D аймақты D_i бөліктерге бөліп (ортақ ішкі нүктелері жоқ) әрбір бөліктен (ξ_i, η_i) нүкте алып, осы нүктеге бөліктің массасын шоғырландырамыз. Сонда бөліктің массасы $m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\cdot\Delta S_i$ болады да, саны ақырлы нүктелер жүйесінің Oy осімен салыстырмалы инерция моменті, жуықтап

$$J_y \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \rho(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

Ox осімен салыстырмалы инерция моменті жуықтап

$$J_x \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \rho(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

$O(0;0)$ нүктесімен салыстырмалы инерция моменті жуықтап

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i)^2 \rho(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

түрінде жазылады. Енді $\lambda = \max d(D_i) \to 0$ деп шекке көшсек $\rho(x,y)$ үзіліссіз функция болғандықтан, дәл мәндері екі еселі интеграл түрінде анықталады:

$$J_y = \iint\limits_D x^2 r(x,y) dxdy \tag{9.26}$$

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x,y) dxdy. \tag{9.27}$$

Соңғы жуық теңдіктен $J_0 = J_y + J_x$ екендігі көрінеді. Демек,

$$J_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)\, dxdy, \tag{9.28}$$

$$J_{xy} = \iint\limits_D xy \cdot \rho(x,y) dxdy \tag{9.29}$$

интегралы центрден тепкіш инерция моментін анықтайды.

Мысал 1.9. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ x = 0,\ y = 0$ сызықтармен шенелген үшбұрыштың $O(0,\ 0)$ нүктесімен салыстырғандағы J_0 инерция моментін $\rho = 1$ болғанда, есептеу керек.

Шешуі. (9.28) формула бойынша,

$$J_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x,y) dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)} (x^2 + y^2) dy =$$

$$= \int\limits_0^a \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right]_0^{b\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx = \int\limits_0^a \left[\frac{b}{a} x^2 (a - x) + \frac{b^3}{a^3}(a - x)^3\right] dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} bx^2 - \frac{b}{4a} x^4 - \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{1}{4}(a - x)^4\right]_0^a = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}$$

§ 2. Үш еселі интегралдар

Анықталған интегралдың үш айнымалды функция үшін жалпылауы үш еселі интеграл болып табылады.

2.1. Үш еселі интегралдың анықтамасы және бар болу шарттары

$u = f(x,y,z)$ функциясы кеңістікте T шенелген тұйық аймақта анықталған және шенелген болсын. T аймақты кез келген тәсілмен ішкі ортақ нүктелері жоқ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ бөліктерге бөлеміз және олардың көлемдерін сәйкес $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ деп белгілейміз. Әрбір T_i бөліктен кез келген $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ нүктесін таңдап,

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\Delta v_i \tag{9.30}$$

интегралдық қосынды деп аталушы қосынды құрамыз.

$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(T_i)$ яғни T_i бөліктердің диаметрлерінің ең үлкені, деп белгілейміз.

Анықтама 2.1. Егер $\lambda\to 0$ болғанда (9.30) интегралдық қосынды J шекке ұмтылса, онда бұл шек $f(x,y,z)$ функциясының T аймақ бойынша Риман мағынасындағы үш еселі интегралы деп аталады және

$$J=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i=\iiint\limits_T f(x,y,z)dv=\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \tag{9.31}$$

символдардың біреуімен белгіленеді.

Бұл шек T аймақты бөлу тәсіліне және әрбір бөлікте $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ нүктесін таңдауға байланысты емес екендігін атап өтейік.

Бұл жағдайда $f(x,y,z)$функциясы T аймақта интегралданушы функция, T интегралдау аймағы, x,y,z – интегралдау айнымалдары, dV немесе $dxdydz$ көлем элементі деп аталады.

Егер $f(x,y,z)$ функциясы T шенелген тұйық аймақта үзіліссіз болса, онда (9.31) шек, яғни үш еселі интеграл бар.

$f(x,y,z)$ функциясының T шенелген тұйық аймақта шенелген болуы – қажетті шарт, ал үзіліссіз болуы – жеткілікті шарт.

Егер $f(x,y,z)$ функциясын T аймақта заттың үлестірімінің көлемдік тығыздығы десек, онда (9.31) үш еселі интеграл T аймақтағы заттың массасын анықтайды.

Келесі тұжырым орынды.

Теорема 9.4. (интегралдың бар болуы). Егер $u=f(x,y,z)$ функциясы шенелген тұйық T аймақта үзіліссіз болса, онда (9.31) интегралдың қосындылардың $\lambda\to 0$ болғандағы шегі бар және ол шек T аймақты бөлу тәсіліне әрі T бөліктерде $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ нүктелерді таңдауға байланысты емес.

2.2. Үш еселі интегралдардың негізгі қасиеттері

Үш еселі интегралда интегралданушы функциялар үшін екі еселі интегралдардың негізгі қасиеттері орындалады.

1. $\iiint\limits_T c\cdot f(x,y,z)dv=c\cdot\iiint\limits_T f(x,y,z)dv, c=const;$

2.

$$\iiint\limits_T [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dv=\iiint\limits_T f(x,y,z)dv\pm\iiint\limits_T g(x,y,z)dv,$$

3. Егер $T=T_1\cup T_2$, $T_1\cap T_2=\Gamma$, мұнда Γ – шекара сызығы болса,

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)dv;$$

4. $f(x,y,z) \geq 0$ болғанда, $\iiint\limits_T f(x,y,z)dv \geq 0$ болады; егер T аймақта $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ болса, $\iiint\limits_T f(x,y,z)dv \geq \iiint\limits_T g(x,y,z)dv$;

5. $\iiint\limits_T dv = |V_T|$ өйкені $f(x,y,z) = 1$ болғанда кез келген интегралдық қосынды $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = T$ болып, сандық мәні дененің көлеміне тең.

6. Егер T аймақта $m \leq f(x,y,z) \leq M$ болса, $m|V_T| \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dv \leq M|V_T|$

7. Орта мән туралы теорема: егер $f(x,y,z)$ функциясы шенелген тұйық T аймақта үзіліссіз болса, онда осы аймақта $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесі табылып,

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dv = f(x_0,y_0,z_0)|V_T|$$

теңдігі орынды болады, мұндағы $|V_T|$ дененің көлемі.

2.3. Үш еселі интегралды есептеу

Үш өлшемді кеңістіктегі тұйық S бетпен шенелген T аймақ мынадай қасиеттерге ие болсын:

1) Oz осіне параллель, T аймақтың ішкі нүктесінен өтетін әрқандай түзу S бетті екі нүктеде қиып өтсін;

2) T аймақтың Oxy жазықтығына проекциясы D дұрыс аймақ болсын;

3) T аймақтың Oxy, Oxz, Oyz координаталық жазықтықтардың кез келгеніне параллель жазықтықтармен қиғандағы әрқандай бөлігі 1) және 2) қасиеттерге ие болсын.

Көрсетілген қасиеттерге ие болған T аймақ дұрыс аймақ деп аталады.

Эллипсоид, тік бұрышты параллелопипед, тетраэдр, шар т.с.с. денелер дұрыс аймақ болады. Біз негізінен дұрыс аймақтарды қарастырамыз.

Үзіліссіз $f(x,y,z)$ функциясының T аймақ бойынша J_T үш еселі интегралы ұғымын енгіземіз.

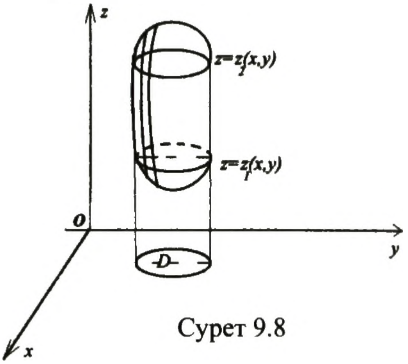
T аймақ жоғарыдан $z = z_2(x,y)$, төменнен $z = z_1(x,y)$ беттермен шенелсін.

T аймақтың Oxy жазықтықтағы проекциясы D төменнен $y = y_1(x)$, жоғарыдан $y = y_2(x)$ және $x = a, x = b$ сызықтармен шенелген болсын.

Онда $f(x,y,z)$ функциясының T аймақ бойынша қайталама интегралы деп,

$$J_T = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{y_1(x,y)}^{y_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx \tag{9.32}$$

түрінде өрнектелген интегралды атайды. J_T интегралды z бойынша интегралдап, Ньютон-Лейбниц формуласын қолданып x және y айнымалдардың функциясы алынады. Содан соң D аймақ бойынша алынған функция, екі еселі интегралдағыдай интегралданады (сурет 9.8).



Сурет 9.8

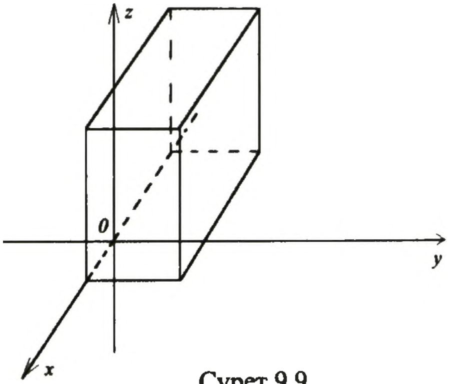
Теорема 9.5. Егер $f(x,y,z)$функциясы $T = \{(x,y,z)|a \le x \le b,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x),\ \ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ шенелген тұйық дұрыс аймақта үзіліссіз болса, мұндағы $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ функциялары анықталу аймақтарында үзіліссіз, онда $J_T = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ қайталама интеграл бар және

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{9.33}$$

теңдігі орындалады.

(9.33) формула Теорема 9.3 сияқты дәлелденеді.

Дербес жағдайда $T = \{0 \le x \le a, 0 \le y \le b,\ \ 0 \le z \le c\}$ параллелопипедтің көлемі $\iiint_T dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz$ формуламен анықталады (сурет 9.9).



Сурет 9.9

Мысал 2.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоидтың көлемі табылсын.

Шешуі. Берілген эллипсоид (сурет 4.59) төменнен $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ және жоғарыдан $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ беттермен шенелген. Эллипсоидтың Oxy жазықтығына проекциясы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс. 5-қасиет бойынша $f(x,y,z) = 1$ десек, үш еселі интеграл эллипсоидтың көлемінің сандық мөлшерін анықтайды. (9.33) формуланы қолдансақ,

$$V = \iiint_T dxdydz = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz$$

$$= \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} [z]_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dy = 2c\int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy.$$

Ішкі интегралды есептегенде x тұрақты деп алынады.

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ \sin t\,, dy = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ \cos t\, dt$$

алмастыруын енгізсек, - $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ болғандықтан $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ болады. Бұл жаңа шектерді интегралға қойсақ,

$$V = 2c\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right)\sin^2 t}\quad b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ \cos t\, dt =$$

$$= 2cb\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 dt = 2cb\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2cb\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{cb\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{cb\pi}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{cb\pi}{a^2}\left[a^3-\frac{a^3}{3}+a^3+\frac{a^3}{3}\right] = \frac{4a^3\pi cb}{3a^2} = \frac{4\pi abc}{3}$$

Демек, эллипсоидтың көлемі $|V_э| = \frac{4\pi abc}{3}$ Дербес жағдайда $a = b = c = R$ болса, шардың көлемі, $V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2.4. Үш еселі интегралда айнымалдарды ауыстыру. Цилиндрлік және сфералық координаталар жүйелері

Үш еселі интегралдарды есептегенде, екі еселі интегралдар сияқты, тік бұрышты $Oxyz$ Декарт координаталар жүйесінен басқа координаталар жүйесіне өту формулалары жиі қолданылады.

Үш еселі интегралда айнымалдарды ауыстыру келесі ереже арқылы жүзеге асады:

Егер дұрыс шенелген тұйық T аймақ $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ үзіліссіз дифференциалданушы функциялар арқылы T^* дұрыс тұйық аймаққа бір мәнді бейнеленсе және J якобиан T^* аймақта нөлге айналмаса, яғни

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ болса, онда}$$

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint_T f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J|\, dudvdw \qquad (9.34)$$

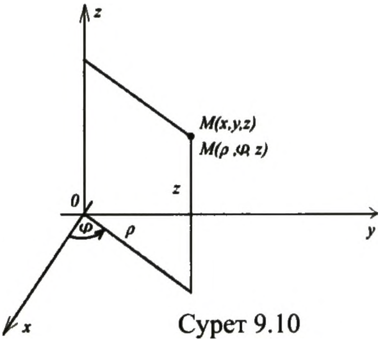
формула орынды болады.

Дербес жағдайларды қарастырайық.

1. Цилиндрлік координаталар жүйесіндегі үш еселі интеграл

$Oxyz$ кеңістіктегі $M(x, y, z)$ нүктені цилиндрлік координаталар деп аталушы үш сан (ρ, φ, z) арқылы анықтауға болады, мұнда

$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z(\rho \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi], z \in R)$



Сурет 9.10

(9.34) формулада u, v, w ретінде ρ, φ, z цилиндрлік координаталарды алсақ түрлендірудің якобианы

$$J = (r; \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\rho & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho > 0$$

Онда (9.34) айнымалдарды ауыстыру формуласы

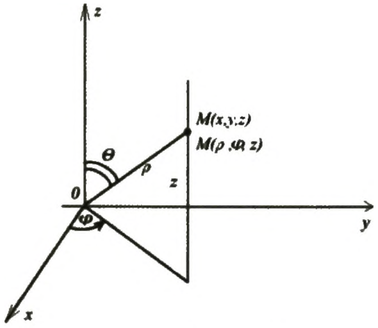
$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = = \iiint\limits_{T^*} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;z)\rho d\rho d\varphi dz \qquad (9.35)$$

түріне келеді (сурет 9.10)

Цилиндрлік координаталар деп аталуы $\rho = \text{const}$ координаталық беттің түзу сызықты Oz осіне параллель цилиндр екендігіне байланысты.

2. Сфералық координатарлар жүйесіндегі үш еселі интеграл

$Oxyz$ кеңестіктегі $M(x,y,z)$ нүктесін сфералық координаталар деп аталушы (ρ,φ,θ) (сурет 9.11) үш сан арқылы да анықтауға болады.



Сурет 9.11

Мұнда ауыстыру формулалары

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\theta,$$
$$0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

түрінде болып, якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi\ sin\theta & sin\varphi\ sin\theta & cos\theta \\ -\rho\ sin\varphi\ sin\theta & \rho\ cos\varphi\ sin\theta & 0 \\ \rho\ cos\varphi\ cos\theta & \rho\ sin\varphi\ cos\theta & sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2 sin\theta \neq 0$$

Сондықтан (9.31) үш еселі интеграл жаңа сфералық координаталарда

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\cdot\left|\rho^2\sin\theta\right| d\rho d\varphi d\theta \qquad (9.36)$$

түрінде болады.

Сфералық координаталар деп аталуы $\rho = \text{const}$ координаталық беттің сфера болуымен байланысты. Сфералық координаталарды басқаша-кеңістіктегі полярлық координаталар деп те атайды.

Әдетте, үш еселі интегралда цилиндрлік немесе сфералық координаталарға өткенде T^* аймақ бейнеленбейді, ал жаңа координаталардың геометриялық мағынасын ескере отырып, интегралдау шекаралары тікелей T аймақтың түріне қарап қойылады.

Мысал 2.2. $\iiint\limits_{T} 9z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ интегралын есептейік. Мұндағы V аймақ $x^2 + y^2 = 2x$ цилиндр және $y = 0, z = 0, z = h$ жазықтықтармен шенелген.

Шешуі. Цилинрлік координаталарға өтсек, цилиндрдің теңдеуі $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi$ немесе $\rho^2(\cos^2\varphi^2 + \sin^2\varphi) = 2\rho\cos\varphi$, яғни $\rho = 2\cos\varphi$ түрінде болады. Демек, T аймақта. $0 \le \rho \le 2\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le z \le h$.

Сондықтан

$$\iiint\limits_T 9z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = 9\iiint\limits_{T^*} z\rho\cdot\rho d\rho d\varphi dz = 9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\int\limits_0^h zdz\right) =$$

$$= \frac{9}{2}h^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 9\cdot\frac{4}{3}h^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi = 12h^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\left(\sin\varphi\right) =$$

$$= 12h^2\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12h^2\cdot\frac{2}{3} = 8h^2.$$

Мысал 2.3. $\iiint\limits_T 15x^2 dxdydz$ интегралы есептелсін. Мұндағы T – радиусы a-ға тең шар.

Шешуі. (ρ, φ, θ) сфералық координаталарға өтсек, олар $0 \le \rho \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$, аралықтарында өзгереді.

Демек, (9.36) формула бойынша,

$$\iiint\limits_T 15x^2\,dxdydz = 15\iiint\limits_{T^*} \rho^4\cos^2\varphi\sin^3\theta d\rho d\varphi d\theta = 15\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{a}\rho^4 d\rho =$$

$$= 15\cdot\frac{a^5}{5\cdot 2}\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = 15\cdot\frac{\pi a^4}{5}\int\limits_0^{\pi}(\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta) =$$

$$= 3\pi a^4\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi a^4.$$

2.5. Үш еселі интегралдардың кейбір қолданулары

Үш еселі интегралдар жиі қолданылатын есептердің формулаларын келтіреміз. Бұл формулалардың қорытып шығарылуы, екі еселі интегралдар үшін сәйкес есептердің формулаларын шығару сияқты.

1. T дененің көлемі $V = \iiint\limits_T dv$ немесе:

Декарт координаталар жүйесінде,

$$V = \iiint\limits_T dxdydz\ , \tag{9.37}$$

цилиндрлік координаталарда

$$V = \iiint\limits_T \rho d\rho d\varphi dz, \tag{9.37a}$$

сфералық координаталарда

$$V = \iiint\limits_T \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi dz \tag{9.37б}$$

2. Дененің массасы. m масса T денеде $\mu(x,y,z)$ көлемдік тығыздықпен үлестірілсе,

$$m = \iiint\limits_T \mu(x,y,z)dxdydz. \tag{9.38}$$

3. Статистикалық моменттер. Көлемдік тығыздығы $\mu(x,y,z)$ болатын T дененің Oxy, Oxz, Oyz координаталық жазықтықтармен салыстырмалы S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}, статистикалық моменттері:

$$S_{xy} = \iiint\limits_T z\cdot\mu(x,y,z)dv\ , S_{xz} = \iiint\limits_T y\cdot\mu(x,y,z)dv,\ S_{yz} = \iiint\limits_T x\cdot\mu(x,y,z)dv \tag{9.39}$$

4. Дененің ауырлық центрі. T дененің C ауырлық центрінің координаталары:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, y_c = \frac{S_{xz}}{m}\ , z_c = \frac{S_{xy}}{m}. \tag{9.40}$$

5. Дененің инерция моменттері. T дененің Oxy, Oyz, Oxz координаталық жазықтықтарға салыстырғандағы сәйкес инерция моменттері:

$$J_{xy} = \iiint\limits_T z^2\cdot\mu(x,y,z)dv, \qquad J_{yz} = \iiint\limits_T x^2\ \ \mu(x,y,z)dv,\ \ S_{xz} =$$

$$= \iiint_T y^2\cdot\mu(x,y,z)dv, \tag{9.41}$$

ал Ox, Oy, Oz координаталық осьтерге салыстырғандағы инерция моменттері:

$$J_x = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\ \ \mu(x,y,z)dv, \qquad J_y = \iiint\limits_T (x^2+z^2)\cdot\mu(x,y,z)dv,$$

$$J_z = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\cdot\mu(x,y,z)dv, \tag{9.42}$$

дененің O(0; 0; 0) нүктесіне салыстырғандағы инерция моменті

$$J_0\ = \iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\cdot\mu(x,y,z)dxdydz. \tag{9.43}$$

Мысал 2.4. $z = x^2 + y^2$ және $z = 2$ беттерімен шенелген T дененің көлемі табылсын.

Шешуі. Берілген дене төменнен $z = x^2 + y^2$ параболоидпен, жоғарыдан $z = 2\ (||Oxy)$ жазықтықпен шенелген. Дененің көлемін цилиндрлік координаталарды (9.37а) пайдаланып есептейміз:

$$V = \iiint\limits_T \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left(\int_{\rho^2}^{2} dz \right) \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho(2 - \rho^2) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} (2 - 1) d\varphi = 2\pi.$$

Мысал 2.5. $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1,$ жазықтықтармен шенелген T дененің көлемдік тығыздығы $\mu = x + y + z$ болса, оның массасын табу керек.

Шешуі. Берілген дене тік бұрышты параллелопипед. (9.38) формула бойынша

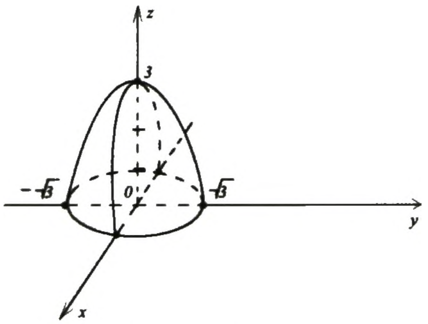
$$m = \iiint\limits_T (x + y + z) dx dy dz = \int_0^1 d\varphi \left[\int_0^1 dy \left(\int_0^1 (x + y + z) dz \right) \right] =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left[\frac{(x + y + z)^2}{2} \right]_0^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 \left[(x + y + 1)^2 - (x + y)^2 \right] dy =$$

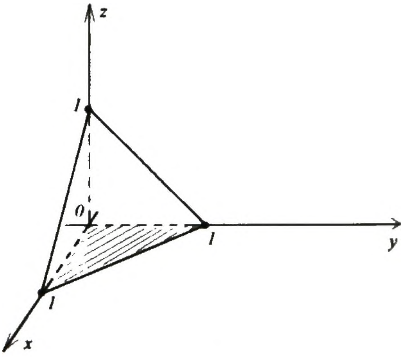
$$= \frac{1}{6} \int_0^1 \left[(x + y + 1)^3 - (x + y)^3 \right]_0^1 dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \left[(x + 2)^3 - (x + 1)^3 - (x + 1)^3 + x^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 \left[\frac{(x + 2)^4}{4} - 2 \cdot \frac{(x + 1)^4}{4} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Мысал 2.6. $z = 3 - x_2 - y^2$ параболоид және $z = 0\ (z \geq 0)$ жазықтықпен шенелген T біртекті дененің ауырлық центрінің координаталары табылсын (сурет 9.12).



Сурет 9.12



Сурет 9.13

Шешуі. T дене Oxz және Oyz координаталық жазықтықтарға салыстырғанда симметриялы болғандықтан $x_c = y_c = 0$. z_c координатаны табу үшін дененің m массасын табамыз. Цилиндрлік координаталар енгіземіз (9.38) формула бойынша,

$$m = \iiint_T dxdydz = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi\left[\int_0^{\sqrt{3}} \rho dp\left(\int_0^{3-p^2} dz\right)\right] = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\sqrt{3}} \rho[z]_0^{3-p^2} d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\sqrt{3}} \rho(3-\rho^2)_0^{3-p^2} d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left[\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{3-p^2} = 4\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right)\int_0^{\pi/4} d\varphi = 9\cdot[\varphi]_0^{\pi/4} = \frac{9\pi}{2}$$

Мысал 2.7. $x + y + z = 1, x = 0, y = 0$ және $z = 0$ жазықтықтармен шенелген T біртекті пирамиданың Oxy координаталық жазықтықпен салыстырғандағы инерция моментін анықтайық (сурет 9.13).

Шешуі (9.41) формула бойынша,

$$J_{xy} = \iiint_T z^2 dxdydz = \int_0^1 dx\left[\int_0^{1-x} dy\left(\int_0^{1-x-y} z^2 dz\right)\right] = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\left[\int_0^{1-x}\left[z^3\right]_0^{1-x-y} dy\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 dx\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)dy\right) = -\frac{1}{12}\int_0^1\left[(1-x-y)^4\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 (1-x)^4 dx = -\frac{1}{12}\int_0^1 (1-x)^4 d(1-x) = -\frac{1}{12}\left[\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

Мысал 2.8. Радиусы r-ге тең болған шардың, оның центрімен салыстырғандағы инерция моменті есептелсін.

Шешуі. $\boldsymbol{Oxyz}$ координаталар жүйесінің бас нүктесін шардың центріне орналастырайық. (9.43) формула бойынша $J_0 = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$.

Сфералық координаталарды енгізсек,

$$J_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^r \rho^4 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^r =$$

$$= \frac{r^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{r^5}{5}\int_0^{2\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi} d\varphi = \frac{2r^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2r^5}{5}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4\pi r^5}{5}$$

§ 3. Қисықсызықты интегралдар

Анықталған интеграл ұғымын интегралдау аймағы қисық сызық болған жағдайға жалпылайық.

$L = \overset{\frown}{AB}$ қисығында $F(x,y)$ функциясы анықталған болсын. L қисығының теңдеуі $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ немесе $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ параметрлік түрде беріледі.

Анықтама 3.1. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, L қисығының кез келген (x_1, y_1) және (x_2, y_2) нүктелері үшін $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta(\varepsilon)$ шарты орындалғанда $|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $F(x,y)$ функциясын L қисықта үзіліссіз деп атайды.

Анықтама 3.2. Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f'(x)$ туындысы (немесе $x(t)$ және $y(t)$ функцияларының $[\alpha; \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз $x'(t)$ және $y'(t)$ туындылары) болса, онда L тегіс қисық деп аталады.

Егер L қисығы ортақ ішкі нүктелері жоқ, ақырлы тегіс қисықтардан құралса, онда L – құрақты-тегіс қисық деп аталады.

$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 0$ болатын нүктелер L қисықтың ерекше нүктелері деп аталады.

Қисықсызықты интегралдардың екі түрін қарастырайық.

3.1. Бірінші текті (доға бойынша) қисықсызықты интеграл

1. Бірінші текті қисықсызықты интегралдың анықтамасы.

Oxy жазықтықта тегіс $L = \overset{\frown}{AB}$ қисығын және осы $\overset{\frown}{AB}$ қисықта анықталған және үзіліссіз $z = f(x,y)$ функциясын қарастырайық. AB қисығын кез келген тәсілмен $A = M_0, M_1, M_2 \ldots M_{n-1}, M_n = B$ нүктелері арқылы n бөлікке бөлеміз және әрбір $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ бөлікте кез келген M_i^* нүктені аламыз да $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i^*) \cdot \Delta l_i$, мұндағы $\Delta l_i - \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ доғаның ұзындығы, қосынды құрамыз. Бұл қосынды AB қисығы бойынша $z = f(x,y) = f(M)$ функциясы үшін интегралдық қосынды деп аталады. λ арқылы $M_{i-1}M_i$ бөліктер доғасының ұзындығының ең үлкенін белгілейміз, яғни $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta l_i|$

Анықтама 3.3. Егер σ_n интегралдық қосынды $\lambda \to 0$ болғанда J-ге тең шекке ұмтылса, онда бұл шек $f(x,y)$ функциясының AB қисығы бойынша бірінші текті қисықсызықты интегралы деп аталады және

$$J = \int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} f(x,y) dl$$

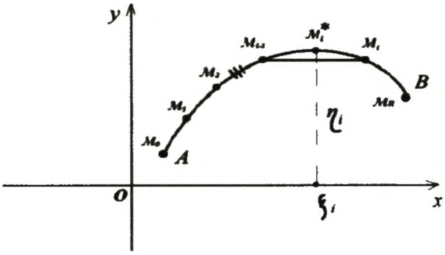
түрінде белгіленеді. Демек $M_i^*(\xi_i, \eta_i)$ десек,

$$J=\lim_{\substack{\lambda=0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta l_i=\int_{AB}f(x,y)dl \qquad (9.44)$$

Мұнда AB қисығы интегралдау контуры, $f(x,y)$ – AB қисығы бойынша интегралданушы функция, dl – доға ұзындығының элементі, A интегралданудың бастапқы нүктесі және B соңғы нүктесі деп аталады. (Сурет 9.14)

Ескерту 3.1. $u=f(x,y,z)$ функциясы үшін кеңістіктегі L қисығы бойынша бірінші текті қисықсызықты интеграл да осы сияқты анықталады:

$$J=\lim_{\substack{\lambda=0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta l_i=\int_{AB}f(x,y)dl \qquad (9.45)$$



Сурет 9.14

мұндағы $M_i^*(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ – L қисықты бөліктегенде ұзындығы Δl_i болатын $M_{i-1}M_i$ бөлік доғаның кез келген нүктесі, ал $M(x,y,z)$ – L сызықтың айнымал нүктесі, dl –доға ұзындығының элементі.

2. Бірінші текті қисықсызықты интегралдың негізгі қасиеттері:

1°. $\int_{AB}f(x,y)dl=\int_{BA}f(x,y)dl$,

яғни бірінші текті қисықсызықты интеграл интегралдау бағытына байланысты емес.

2° $\int_{AB}cf(x,y)dl=c\int_{AB}f(x,y)dl,\ c=const$

3° $\int_{AB}\left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]dl=\int_{AB}f(x,y)dl\pm\int_{AB}g(x,y)dl$

4°. Егер $L=L_1\cup L_2, L_1\cap L_2=\emptyset$ болса,

$$\int_{L}f(x,y)dl=\int_{L_1}f(x,y)dl+\int_{L_2}f(x,y)dl$$

5° Егер L қисықтың барлық нүктелерінде $f(x,y)\le g(x,y)$ болса, онда $\int_{L}f(x,y)dl\le\int_{L}g(x,y)dl$ болады.

6° $\int_{AB}dl=\lim_{\substack{\lambda=0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=l$, мұндағы $l-AB$ қисығының ұзындығы.

7°. Орта мән туралы теорема.

Егер $f(x,y)$ функциясы AB қисығында үзіліссіз болса, бұл доғада (x_0,y_0) нүкте табылып,

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = f(x_0,y_0)\cdot l \tag{9.46}$$

теңдігі орындалады.

Бұл теңдіктерде оң бөліктердегі интегралдар бар деп есептелінеді.

Бұл қасиеттер анықталған интегралдың сәйкес қасиеттері сияқты дәлелденеді.

3. Бірінші текті қисықсызықты интегралдың бар болуы және оны анықталған интегралға келтіру

$L = AB$ қисығы $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ параметрлік теңдеулерімен берілсін.

Теорема 9.6. Егер $f(x,y)$ функциясы ерекше нүктелері жоқ L сыптығыр қисықта үзіліссіз болса, онда $J = \int\limits_L f(x,y)dl$ бар және

$$J = \int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \tag{9.47}$$

формула орынды.

Дәлелдеуі. (9.47) теңдіктің оң бөлігіндегі интеграл бар, өйткені интеграл астындағы функция $[\alpha;\ \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз функция. Сондықтан,

$\lim\limits_{\max\Delta l_i}\sigma_n = \int\limits_L f(x,y)dl = J$ екендігін дәлелдеу жеткілікті.

Аддитивтік қасиетке (3° қасиет) сүйеніп,

$$J = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{[x'(t)^2+y'(t)^2]}dt$$

түрінде жазуға болады. Екінші жағынан, бөлікше доғалардың ұзындығы,

$\Delta l_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$ Онда $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f[x(\tau_i),y(\tau_i)]\cdot\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$

J мен σ_n шамалардың бұл өрнектерінен

$$\sigma_n - J = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left\{f[x(\tau_i),y(\tau_i)] - f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\right\}. \quad (*)$$

Қисықтың ерекше нүктелері болмағандықтан, $\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 \geq \delta^2 > 0$ теңсіздік орынды.

Бұл теңсіздікке сүйенсек,

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt \ge \delta(t_i - t_{i-1}) = \delta\Delta t_i .$$

теңсіздігі алынады. Бұл теңсіздіктен $\max\limits_{1\le i\le n_i} \Delta l_i \to 0$ болғанда, $\max\limits_{1\le i\le n_i} \Delta t_i \to 0$ болады. Кез келген $\varepsilon > 0$ санды белгілейік .

$f(x,y)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан, күрделі $f[x(t),y(t)]$ функция да $\alpha \le t \le \beta$ болғанда үзіліссіз болады. Демек $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $\max\limits_{i} \Delta l_i < d(e)$ болғанда (*) теңдіктегі фигуралық жақшаның ішіндегі өрнек $|f[x(\tau_i),y(\tau_i)] - f[x(t),y(t)]| < \frac{\varepsilon}{l}$ теңсіздікті қанағаттандырады.

Онда (*) теңдіктен $\max\limits_{i} \Delta l_i < d(e)$ болғанда

$$|\sigma_n - J| \le \frac{\varepsilon}{l}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt = \frac{\varepsilon}{l}\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt = \varepsilon.$$

теңсіздігі шығады.

Теорема дәлелденді.

Ескерту 3.2. Егер AB қисығы $y = \varphi(x), x \in [a,b]$ (мұндағы $\varphi(x)$ үзіліссіз дифференциалданушы функция) теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f\left[x,\phi(x)\right]\cdot\sqrt{1 + \left[\phi'(x)\right]^2}\,dx\,. \qquad (9.47а)$$

(9.47а) формуласының оң бөлігіндегі интеграл астындағы өрнек, сол бөлігіндегі интеграл астындағы өрнекті $y = \varphi(x)$ функциясына және $dl = \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}dx$ доғасының дифференциалына ауыстыру арқылы алынады.

Ескерту 3.3. Егер кеңестіктегі AB қисығы $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ параметрлік теңдеулерімен берілсе, әрі $x'(t), y'(t), z'(t)$ функциялары $[\alpha;\ \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2}\,dt \qquad (9.48)$$

формула орынды болады.

Ескерту 3.4. Егер жазықтықтағы L қисығы $\rho = \rho(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ полярлық теңдеуімен берілсе, онда $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\cdot d\varphi$ болып,

$$\int_{L} f(x,y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\cdot d\varphi \qquad (9.47б)$$

формула орынды болады.

Мысал 3.1. $J=\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$ қисықсызықты интегралды $A(-1;\ 0)$ нүктеден B (0; 1) нүктеге дейін есептеу керек: 1) AB түзу бойынша; 2) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ – астроида (сурет 7.14) бойынша.

Шешуі. 1) AB түзудің теңдеуі: $\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$ формуладан алынады:

$y = x + 1$. Бұдан $y' = 1$, $dl=\sqrt{1+1^2}dx=\sqrt{2}dx$. $a = -1, b = 0$ болғандықтан (9.47б) формула бойынша,

$$J_1=\int\limits_{-1}^{0}\left(4x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dl=\int\limits_{-1}^{0}\left(4x^{\frac{1}{3}}-3\sqrt{x+1}\right)\sqrt{2}dx=$$

$$=-\sqrt{2}\left[4\int\limits_{-1}^{0}x^{\frac{1}{3}}dx-3\int\limits_{-1}^{0}(x+1)^{-\frac{1}{2}}d(x+1)\right]=$$

$$=\sqrt{2}\left[3x^{\frac{4}{3}}-2(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}=\sqrt{2}(-3\cdot1-2)=-5\sqrt{2};$$

2) Берілген қисықсызықты интегралды анықталған интегралға келтіреміз:

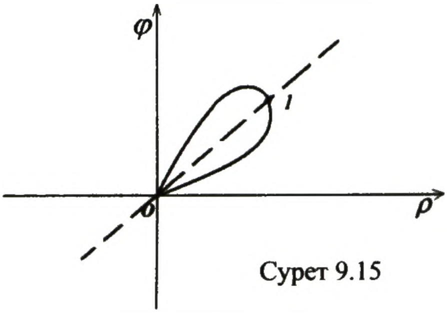
$x = \cos^3 t, dx = -3\cos^2 t \cdot \sin t dt, y = \sin^3 t, dy = 3\sin^2 t \cdot \cos t dt, t_A = \pi, t_B = \frac{\pi}{2}$ болғандықтан, (9.47) формула бойынша,

$$J=\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos t-3\sqrt{\sin^3 t})3\sin t\cos t dt=$$

$$=-\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t d(\cos t)-9\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}} t d(\sin t)=\left[-4\cos^3 t-\frac{18}{7}\sin^{\frac{7}{2}} t\right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{46}{7}$$

Мысал 3.2. $\int\limits_L 2(x+y)dl$ есептейік. Мұндағы L бірінші ширекте орналасқан $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$ лимниската.

Шешуі. Интегралдау қисығы сурет 9.15-те көрсетілген. (9.47б) формуланы пайдаланамыз.



Сурет 9.15

$$dl=\sqrt{\sin 2\varphi+\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi=\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{d\varphi}{\rho}.$$

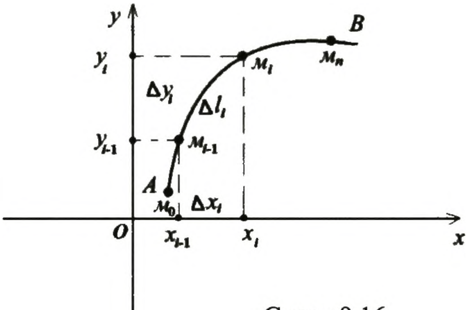
Онда $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ екенін ескерсек,

$$\int_L 2(x+y)dl = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\frac{d\varphi}{\rho} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi = 2[\cos\varphi + \sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1+1) = 4.$$

3.2. Екінші текті (координаталар бойынша) қисықсызықты интеграл

1. Екінші текті қисықсызықты интегралдың анықтамасы



Сурет 9.16

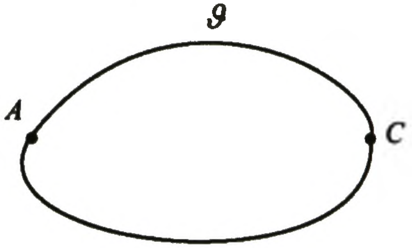
$P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары AB қисығында шенелген болсын. AB қисығын $A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$ нүктелермен n бөлікке бөлеміз. $\overline{M_{i-1}M_i}$, $i = \overline{1,n}$, векторының координаталық осьтердегі проекцияларын Δx_i және Δy_i деп белгілейік.

Әрбір $M_{i-1}\,M_i$ бөлікше доғада $M_i^*(\xi_i, \eta_i)$ нүктесін алып $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары үшін $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} P(M_i^*)\cdot\Delta x_i$ және $\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i^*)\cdot\Delta y_i$ интегралдық қосындылар құрамыз. Мұндағы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ және $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ бөлікше доғасының сәйкес Ox және Oy осьтеріндегі проекциялары. $M_{i-1}\,M_i$ доғасының ұзындығын Δl_i және $\lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n}|\Delta li|$ деп белгілейміз (сурет 9.16).

Анықтама 3.4. Егер $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sigma_1 = J_1$ шек $\left(\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sigma_2 = J_2\right)$ бар болса, және ол AB қисығын бөлу тәсіліне және әрбір бөлікше доғада (ξ_i, η_i) нүктелерін таңдауға тәуелді болмаса, онда J_1 (J_2) $P(x,y)$ функциясының $(Q(x,y)$ функциясының) AB қисығы бойынша екінші текті қисықсызықты (координаталар бойынша) интегралы деп аталады да $\int_{AB} P(x,y)dx \left(\int_{AB} Q(x,y)dy\right)$ түрінде белгіленеді.

Сонымен,

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,\ \int_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i.$$



Сурет 9.17

Жалпы түрдегі екінші текті қисықсызықты интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ түрінде жазылып,

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy$$

теңдігімен анықталады.

Кеңістіктегі *Г* қисық бойынша екінші текті қисықсызықты интеграл

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

осылайша анықталады. Бұл интеграл үшін

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + \int_{\Gamma} Q(x,y,z)dx + \int_{\Gamma} R(x,y,z)dx$$

теңдігі орындалады.

2. Екінші текті қисықсызықты интегралдардың негізгі қасиеттері:

1° Интегралдау жолының бағытын өзгерткенде екінші текті қисықсызықты интеграл өзінің таңбасын қарама-қарсы таңбаға өзгертеді, яғни

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2°. Егер *AB* қисығы *C* нүктесімен *AC* және *CB* бөліктерге бөлінсе, онда

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

3°. Егер $AB \perp Ox$ болса, $\int_{AB} P(x,y)dx = 0$ (барлық $\Delta x_i = 0$) болады, ал $AB \perp Oy$ болса $\int_{AB} Q(x,y)dx = 0$ (барлық $\Delta y_i = 0$) болады.

4° Тұйық қисық бойынша $\oint$ қисықсызықты интеграл бастапқы нүктені таңдауға байланыстыемес, тек интегралдау бағытына байланысты (сурет 9.17)

Шынында да,

$$\int\limits_{A\mu CvA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{A\mu C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{CvA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Екінші жағынан,

$$\int\limits_{CvA\mu C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{CvA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_{A\mu C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Сондықтан,

$$\int\limits_{A\mu CvA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{CvA\mu C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

3. Екінші текті қисықсызықты интегралды есептеу

L сызығы параметрлік теңдеулерімен берілсін:

$$x=x(t), y=y(t),\ \ \alpha\leq t\leq\beta.$$

Теорема 9.7. Егер $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары ерекше нүктелері жоқ параметрлік теңдеулерімен берілген L сыптығыр қисықта үзіліссіз болса, онда $\int\limits_L P(x,y)dx$ және $\int\limits_L Q(x,y)dx$ екінші текті қисықсызықты интегралдар бар және

$$J_1=\int\limits_L P(x,y)dx=\int\limits_\alpha^\beta P[x(t),y(t)]\cdot x'(t)dt \qquad (9.49)$$

$$J_2=\int\limits_L Q(x,y)dy=\int\limits_\alpha^\beta Q[x(t),y(t)]\cdot y'(t)dt \qquad (9.50)$$

формулалары орынды.

Бұл тұжырым теорема 9.6 сияқты дәлелденеді.

(9.49), (9.50) теңдіктерді қоссақ

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\{P[x(t);y(t)]x'(t)+Q[x(t);y(t)]y'(t)\}dt \qquad (9.51)$$

Егер $L=AB$ қисығы $y=y(x), x\in[a;\ b]$ теңдеуімен берілсе, x айнымалды параметр деп, AB қисықтың $x=x, y=y(x), a\leq x\leq\ b$, түріндегі параметрлік теңдеулері алынады. Онда (9.51) формула

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x;y(x)\}y'(x)\}dx \qquad (9.51a)$$

түріне келеді. Дербес жағдайда

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_a^b P[x,y(x)]dx, \qquad (9.49а)$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_a^b Q[x,y(x)]\cdot y'(x)dx. \qquad (9.50а)$$

Егер $x = x(y), y = y, c \le y \le d$ түріндегі параметрлік теңдеулерді алсақ

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[x(y),y]x'(y) + Q[x(y),y]\}dy. \qquad (9.51б)$$

Егер $L = AB$ қисық, кеңістіктегі $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha;\ \beta]$ параметрлік теңдеулерімен берілген сыптығыр қисық болса, онда қисықсызықты интеграл

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{AB} P(x,y,z)dx + \int_{AB} Q(x,y,z)dy + \int_{AB} R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)$$

$$+ R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt \qquad (9.52)$$

формуламен есептеледі.

(9.52) формула да (9.51) сияқты дәлелденеді.

(9.51), (9.52) формулалардан екінші текті қисықсызықты интегралдарды есептеу, анықталған интегралды есептеуге келтірілетіні көрінеді.

Сондықтан анықталған интегралдардың негізгі қасиеттері екінші текті қисықсызықты интегралдар үшін де орынды.

Мысал 3.3. $J = \int_\Gamma (3xy-1)dx + 3x^2 ydy$ қисықсызықты интегралды $A(1;\ 0)$ нүктеден B (0; 2) нүктеге дейін есептеу керек: а) $y + 2x - 2 = 0$ түзуі бойынша; б) $4x + y^2 = 4$ парабола доғасы бойынша; в) $x = \cos t, y = 2\sin t$ эллипс доғасы бойынша.

Шешуі. а) Берілген түзудің теңдеуі бойынша, (9.51а) формуланы пайдаланып, қисықсызықты интегралды түрлендіріп, x айнымал бойынша анықталған интегралға келтіріп есептейміз: $\frac{y-0}{2-0} = \frac{x-1}{0-1}$

$$y = -2x + 2, dy = -2dx.$$

$$J = 3\int\limits_{x_A=1}^{x_B=0} \{[x(2-2x)-1] + x^2(2-2x)(-2)\}dx =$$

$$= 3\int\limits_1^0 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)dx = 3[x^4 - 2x^3 + x^2 - x]_1^0 = 3\cdot 1 = 3;$$

б) Бұл жағдайда J қисықсызықты интегралды y айнымал бойынша анықталған интегралға келтіру ынғайлы: $x = 1-\frac{y^2}{4}, dx = -\frac{y}{2}dy$.

(9.51б) формула бойынша,

$$J = 3\int\limits_{y_A=0}^{y_B=2} \left\{\left[\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\cdot y - 1\right]\left(-\frac{y}{2}\right) + \left(1-\frac{y^2}{4}\right)^2 y\right\}dy =$$

$$= 3\int\limits_0^2 \left(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2}\right)dy = 3\left[\frac{y^6}{96} + \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^2}{4}\right]_0^2 = -\frac{3}{5}$$

в) J интегралды t айнымал бойынша анықталған интегралға түрлендіреміз: $x = \cos t, dx = -\sin t dt$; $y = 2\sin t, dy = 2\cos t dt$

(9.51) формула бойынша.

$$J = 3\int\limits_{t_A=0}^{t_B=\pi/2} [(\cos t\, 2\sin t - 1)(-\sin t) + \cos^2 t\cdot 2\sin t\cdot 2\cos t]\, dt =$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (4\cos^3 t\sin t + \sin t - 2\sin^2 t\cos t)dt =$$

$$= -12\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 t d(\cos t) + 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin t dt - 6\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= 3\left[-\cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} = 3\cdot\frac{4}{3} = 4.$$

Мысал 3.4. $A(3;\,-6;\,0), B(3;\,-6;\,0)$ нүктелері берілген. $J = \int\limits_{\Gamma} xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$ қисықсызықты интегралды: а) OB кесіндісі бойынша; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 45,\ 2x + y = 0$ теңдеулерімен берілген шеңбердің AB доғасы бойынша есептеу керек.

Шешуі. $O(0;\,0;\,0)$ және $B(-2;\,4;\,5)$ нүктелерінен өтуші түзудің теңдеуі:

$$\frac{x-x_O}{x_B-x_O} = \frac{y-y_O}{y_B-y_O} = \frac{z-z_O}{z_B-z_O} \to \frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

Бұл тең қатынастарды t-ға теңестірсек $x = -2t, y = 4t, z = 5t$ түріндегі OB түзудің параметрлік теңдеулерін аламыз. (9.52) формула бойынша $dx = -2dt, dy = 4dt, dz = 5dt$ шамаларды ескеріп, J-ді есептейтін анықталған интеграл алынады. $t_0 = \frac{x_0}{2} = 0, t_1 = \frac{x_1}{2} = 1$, екендігін ескерсек,

$$J = \int_0^1 [-2t(4t)^2(-2) + 4t(5t)^2 \cdot 4 - 5t(-2t)^2 \cdot 5]dt =$$

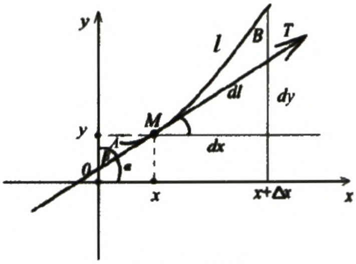
$$= 364 \int_0^1 t^3 dt = 364 \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{364}{4}(1-0) = 91$$

б) Шеңбердің теңдеулерін параметрлік түрге келтіреміз. $x = t$ десек, екінші теңдеуден $y = -2t$, бірінші теңдеуден $z = \sqrt{45-5t^2}$ Осыдан $dx = dt, dy = -2dt, dz = -\frac{5tdt}{\sqrt{45-5t^2}}$ Демек, (9.52) формула бойынша $x_A = t_A = 3, x_B = t_B = -2$ екендігін ескерсек

$$J = \int_3^{-2}\left[(-2t)^2 t + (-2t)(45-5t^2)(-2) - \sqrt{45-5t^2} \cdot t^2\left(-\frac{5tdt}{\sqrt{45-5t^2}}\right)\right]dt =$$

$$= \int_3^{-2}(180t - 17t^2)dt = \left[90t^2 - \frac{17t^3}{3}\right]_3^{-2} = -173\frac{3}{4}.$$

3.3. Бірінші және екінші текті қисықсызықты интегралдар арасындағы байланыс



Сурет 9.18

AB қисықтың $M(x, y)$ нүктесіндегі оң бағытталған жанама MT (AB бағытындағы) координаталық осьтермен α және β бұрыштар жасасын. Онда (сурет 9.18) $dx = \cos\alpha dl$, $dy = \cos\beta dl$ қатынастары алынады. Демек екінші текті қисықсызықты интегралдар бірінші текті қисықсызықты интегралдар арқылы былайша өрнектеледі:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AB} P(x,y)\cos a dl \qquad (9.53а)$$

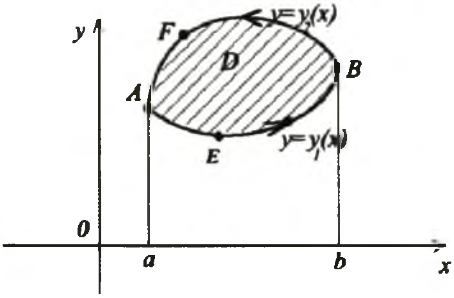
$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} Q(x,y)\cos b dl \qquad (9.53б)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} [P(x,y)\cos a + Q(x,y)\cos b]dl\,. \qquad (9.53)$$

$\boldsymbol{M(x,y)}$ нүктесінің қозғалысы AB қисығын бойлап қарама-қарсы бағытқа өзгерсе, онда cosα, cosβ, $\boldsymbol{dx}$ және $\boldsymbol{dy}$ шамаларының да таңбалары өзгереді.

3.4. Грин формуласы

Грин формуласы D аймақ бойынша алынған екі еселі интегралды шекарасы тұйық L сызық бойынша алынған қисықсызықты интегралмен байланыстырады.



Сурет 9.19

D – дұрыс аймақ, яғни ішкі нүктелері арқылы өткізілген Ox және Oy осьтеріне параллель түзулер L шекараны екі нүктеден артық нүктеде қимайды, ал L – құрақты-сыптығыр немесе сыптығыр сызық болсын.

Теорема 9.8. Егер $P(x,y)$ пен $Q(x,y)$ функциялары және олардың $\frac{\partial P}{\partial y}$ пен $\frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары дұрыс D аймақта үзіліссіз, ал тұйық шекарасы L құрақты сыптығыр (немесе сыптығыр) болса, онда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (9.54)$$

Грин формуласы орынды болады.

Мұндағы қисықсызықты интеграл L-дің оң бағыты бойынша алынады, яғни L бойынша жылжығанда D аймақ сол жақта қалады (сурет 9.19).

Дәлелдеуі. AEB доғасының теңдеуі $y = y_1(x)$ AEB доғасының теңдеуі $y = y_2(x)$ $a \leq x \leq b$ болсын. Алдымен

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

интегралды табамыз. (9.6) екі еселі интегралды есептеу формуласы бойынша

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx [P(x,y)]_{y_1(x)}^{y_2(x)} =$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2(x))]dx - \int_a^b [P(x, y_1(x))]dx$$

Екінші жағынан, (9.50а) формуласы бойынша

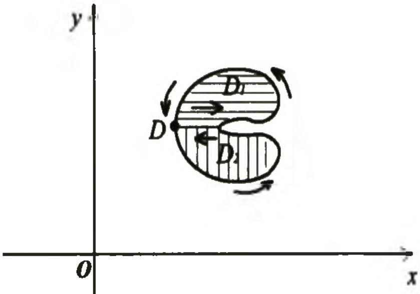
$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{AFB} P(x,y)dx - \int_{AEB} P(x,y)dx =$$

$$= -\int_{BFA} P(x,y)dx - \int_{AEB} P(x,y)dx = -\int_{L} P(x,y)dx$$

Осы сияқты, $\iint \frac{\partial P}{\partial x}dxdy = \oint_{L} Q(x,y)dx$ теңдігі де дәлелденеді. Бұл соңғы теңдіктен алдыңғы теңдікті алсақ, (9.54) формула шығады. Грин формуласы D аймақ $c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)$ теңсіздіктермен берілгенде де орынды болады.

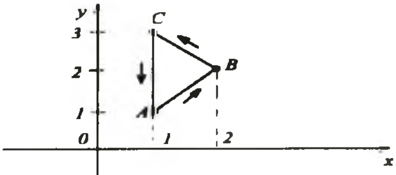
Ескерту 3.5. Грин формуласы дұрыс аймақтарға бөліктеуге болатын кез келген D аймақ үшін де орынды.

Шынында да D аймақ сурет 9.20 дағыдай болсын. Оны D_1 және D_2 дұрыс аймақтарға бөлеміз. Бұл аймақтардың әрқайсысы үшін (9.54) формула орынды.



Сурет 9.20

Олар үшін Грин формуласын жазып, алынған теңдіктерді мүшелеп қоссақ, сол бөлігінде аймақ бойынша екі еселі интеграл, ал оң бөлігінде контур бойынша қисықсызықты интеграл шығады. Өйткені қосымша сызық бойынша алынған қисықсызықты интегралдар қарама-қарсы бағытта болып, қосқанда жойылып кетеді.



Сурет 9.21

Мысал 3.5. Грин формуласын қолданып

$$\int_{\Gamma} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$$

интеграл есептелсін. Мұндағы L – төбелері $A(1;\ 1), B(2;\ 2), C(1;\ 3)$ болған, үшбұрыштың контуры (сурет 9.21)

Шешуі. Бұл мысалда $P = 2(x^2+y^2), Q = (x^2+y^2)$ және $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y), \frac{\partial P}{\partial y} = 4y$.

(9.54) Грин формуласын қолдансақ,

$$\int_{\Gamma} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \iint_{DABC}[2(x+y)-4y]dxdy.$$

Алынған екі еселі интеграл (9.10) формула бойынша,

$$\iint_{DABC}[2(x+y)-4y]dxdy = 2\int_1^2 dx \int_x^{-x+4}(x-y)dy = -2\int_1^2 dx[(x-y)^2]_x^{-x+4} =$$

$$-4\int_1^2 (x-2)^2dx = [-\frac{4}{3}(x-2)^3]_1^2 = -\frac{4}{3},$$

мұнда AB түзудің теңдеуі $y = x$, BC түзудің теңдеуі $y = -x + 4$ екендігін пайдаландық.

3.5. Екінші текті қисықсызықты интегралдың интегралдау жолынан тәуелсіз болу шарттары

$D \subset Oxy$ аймағы бір байланысты болсын, яғни D аймақта жататын кез келген тұйық контур қоршаған аймақ та толығымен D аймақта жатады.

$A(x_1, y_1)$ және $B(x_2, y_2)$ нүктелері бір байланысты D аймақтың кез келген нүктелері болса, оларды қосатын әрбір L_1, L_2, L_3 сызықтарында, жалпы алғанда,

$$J = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

интегралы әртүрлі мәндерді қабылдайды.

Егер J интегралы AB сызықтары әртүрлі болғанда бірдей мәнді қабылдаса, онда J интегралын интегралдау жолынан тәуелсіз деп айтады.

Бұл жағдайда J интегралында $A(x_1, y_1)$ бастапқы нүкте мен $B(x_2, y_2)$ соңғы нүктені көрсету жеткілікті:

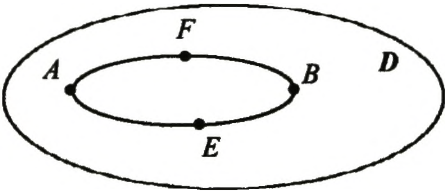
$$J = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{9.55}$$

Қандай шарттар орындалғанда екінші текті қисықсызықты интеграл интегралдау жолына тәуелсіз?

Теорема 9.9. Егер бірбайланысты D тұйық аймақта $P(x,y)$, $Q(x,y)$ функциялары және олардың $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары анықталған және үзіліссіз болса, онда (9.55) J интегралы интегралдау жолына тәуелсіз болуы үшін, осы аймақтың әрбір нүктесінде

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{9.56}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.



Сурет 9.22

Дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. D аймақта берілген A және B нүктелерінен өтетін кез келген Γ тұйық контур алайық. Бұл контур үшін Грин формуласы орынды. (9.54) теңдік бойынша

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \text{ немесе}$$

$$\oint_{AEBFA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Екінші текті қисықсызықты интегралдың қасиеттерін ескерсек,

$$\oint\limits_{AEBFA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint\limits_{AEB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \oint\limits_{BFA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \oint\limits_{AEB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \oint\limits_{AFB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Алынған теңдік қисықсызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіз екендігін көрсетеді:

$$\int\limits_{AEB} P\,(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AFB} P\,(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Қажеттілігі. Егер кез келген $\varGamma \subset D$ тұйық қисығы үшін

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{9.57}$$

болса, контуры $\varGamma$ сызығы болған $D' \subset D$ аймақтың әрбір нүктесінде (9.56) теңдік орындалатынын көрсетеміз. Керісінше жориық, яғни $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ дейік. Анықтық үшін кейбір $M_0(x_0, y_0)$ нүктеде $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ болсын. Шарт бойынша бұл теңсіздіктің сол бөлігіндегі функция үзіліссіз. Сондықтан M_0 нүкте ішінде жататын жеткілікті кішкене D' аймақ табылып, кейбір $\delta > 0$ санынан үлкен болады.

D' аймақ бойынша $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ өрнекті интегралдасақ, ол оң мән болады. Шынында да

$$\iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > \iint\limits_{D} \delta \cdot dxdy = \delta \iint\limits_{D} dxdy = \delta \cdot S_{D'} > 0$$

Бірақ Грин формуласы бойынша, соңғы теңсіздіктің сол бөлігі D' аймақтың шекарасы $\varGamma'$ бойынша алынған қисықсызықты интегралға тең, ал ол қисықсызықты интеграл нөлге тең. Демек, соңғы теңсіздік (9.57) $\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ шартқа қайшы, яғни $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ болсын деген ұйғаруымыз дұрыс емес. Сондықтан D аймақтың барлық нүктелерінде $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Сонымен, теорема толығымен дәлелденді.

Салдар 3.1. Егер (9.57) шарт орындалса, онда $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ өрнек кейбір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болады, яғни

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y). \tag{9.58}$$

Сонда (9.55) бойынша

$$J = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y_1)} du(x,y) =$$

$$= \left[u(x,y)\right]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1)\ \text{, яғни}$$

$$J = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1). \tag{9.59}$$

(9.59) формула Ньютон-Лейбниц формуласының толық дифференциалдың қисықсызықты интеграл үшін жалпылауы деп аталады.

Салдар 3.2. Егер $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$ және Γ интегралдау контуры тұйық болса, онда

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Ескерту 3.6. (9.56) шартты қанағаттандырушы $u = u(x,y)$ функциясын

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi,y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} P(x_0,\eta)d\eta + C \tag{9.60}$$

формуласын пайдаланып табуға болады. Әдетте (x_0,y_0) бастапқы нүкте ретінде (0; 0) нүктесін алады.

Ескерту 3.7. $\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, мұндағы Γ – кеңістіктегі қисық, кеңістіктегі қисықсызықты интеграл үшін де осы сияқты тұжырымдар орынды. (9.52) шарт, (9.58) теңдік, (9.59) және (9.60) формулалары сәйкес келесі түрде болады:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \tag{9.52'}$$

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du(x,y,z); \tag{9.58'}$$

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} P\,(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1); \tag{9.59'}$$

$$u = (x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi,y_0,z_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} P(x_0,\eta,z_0)d\eta + \int\limits_{z_0}^{z} P(x_0,y_0,\varsigma)d\varsigma \tag{9.60'}$$

Бұл теңдіктер кеңістіктегі J қисықсызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіз болу шарттары.

Мысал 3.6. $J = \int\limits_{(0,0)}^{(2.4)} ydx + xdy$ қисықсызықты интегралды есептеу керек.

Шешуі. Бұл интегралда $P(x,y) = y, Q(x,y) = x,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, яғни (9.56) теңдік орынды. Демек, (9.58) теңдік орындалады: $ydx + xdx = d(xy)$.

Теорема 9.9 бойынша берілген интегралдың мәні интегралдау жолына тәуелсіз. Интегралдау жолы ретінде $y = 2x$ түзу кесіндісін немесе $y = x^2$ парабола доғасын алуға болады. Онда (9.59) формула бойынша

$$J = \int\limits_{(0,0)}^{(2,4)} ydx + xdy = \int\limits_{(0,0)}^{(2,4)} d(x \cdot y) = [x \cdot y]_{(0,0)}^{(2,4)} = 2 \cdot 8 - 0 \cdot 0 = 8.$$

Мысал 3.7. $J = \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy$ қисықсызықты интегралды есептеу керек.

Шешуі. Алдымен интеграл астындағы өрнектің кейбір $u(x, y)$ функцияның толық дифференциалы екенін анықтайық.

$du(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)dy$ екендігі белгілі.

Біздің жағдайда, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-y}) = -e^{-y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(2y + x \cdot e^{-y}) = -e^{-y}$. Демек (9.56) теңдік орындалады, яғни интеграл астындағы өрнек кейбір $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы. Сондықтан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -(2y + x \cdot e^{-y})$$

теңдіктері орынды.

Бірінші теңдікте y-ті тұрақты деп, x бойынша интегралдасақ,

$$u(x,y) = \int e^{-y}\,dx = e^{-y}x + \varphi(y),$$

мұндағы $\varphi(y)$ кез келген функция. Енді осы алынған өрнекті екінші теңдікке қойып $\varphi(y)$ функциясын табамыз.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[e^{-y}x + \varphi(y)] = -xe^{-y} + \varphi'^{(y)} = -(2y + xe^{-y});$$

$$\varphi'(y) = -2y, \varphi(y) = -y^2 + C, \qquad C = \text{const}$$

Сонымен $u(x,y) = xe^{-y} - y^2 + C$,

Теорема 9.9 бойынша берілген J интегралының мәні интегралдау жолына тәуелсіз. Онда $y = x$ түзу кесіндісін немесе $y = x^2$ парабола доғасын интегралдау жолы деп алуға болады. (9.59) формула бойынша

$$J = \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})dx = \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} d(xe^{-y} - y^2 + \text{c}) =$$

$$= [xe^{-y} - y^2 + C]_{(0,0)}^{(1,1)} = (1 \cdot e^{-1} - 1^2 + C) - C = e^{-1} - 1;;$$

$u(x, y)$ функциясын (9.60) формуланы қолданып та табуға болады:

$$u(x,y) = \int\limits_0^x e^{-0}d\xi + \int\limits_0^y (-2\eta - x \cdot e^{-\eta})d\eta + c =$$

$$= x - y^2 + x \cdot e^{-y} - x + c = xe^{-y} - y^2 + c.$$

3.6. Қисықсызықты интегралдардың кейбір қолданулары

Қисықсызықты интегралдар математика, физика және техниканың әртүрлі салаларында жиі қолданылады.

а) Бірінші текті қисықсызықты интегралдың кейбір қолданулары

1. Қисықсызықтың ұзындығы. AB жазық қисықтың немесе кеңістіктегі сызықтың ұзындығы:

$$l = \int_{AB} dl. \tag{9.61}$$

Бұл формула тікелей анықтамадан шығады.

2. Цилиндрлік беттің ауданы.

Егер Oxy жазықтығындағы AB қисығы цилиндрлік беттің бағыттаушы сызығы, ал жасаушылары Oz осіне параллель болса, онда $z = f(x, y)$ функциясымен берілген цилиндрлік беттің ауданы:

$$S = \int_{AB} f(x, y)dl \tag{9.62}$$

3. Қисықсызықтың массасы. Материалдық AB қисықтың (сым, шынжыр т.б.) массасы $\mu(x, y)$ тығыздықпен үлестірілсе, оның массасы:

$$m = \int_{AB} \mu(M)dl = \int_{AB} \mu(x, y)dl \tag{9.63}$$

4. Статистикалық моменттер. Ауырлық центрі. AB материалдық қисықтың Ox және Oy осьтерімен салыстырмалы статистикалық моменттері

$$S_x = \int_{AB} y \cdot \mu(x, y)dl, S_y = \int_{AB} x \cdot \mu(x, y)dl \tag{9.64}$$

формулаларымен, ал қисықтың ауырлық центрі

$$x_c = \frac{S_y}{m}, y_c = \frac{S_x}{m} \tag{9.65}$$

формулаларымен анықталады.

5. Инерция моменттері. AB материалдық қисықтың Ox, Oy осьтерге және O(0; 0) координата бас нүктесіне салыстырмалы сәйкес инерция моменттері:

$$J_x = \int_{AB} y^2 \cdot \mu(x, y)dl, \qquad J_y = \int_{AB} x^2 \cdot \mu(x, y)dl$$

$$J_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2)\mu(x, y)dl \tag{9.66}$$

б) Екінші текті қисықсызықты интегралдың кейбір қолданулары

6. Жазықтықтағы фигураның ауданы. D тұйық аймақтың шекарасы L тұйық сызығы болсын. Осы аймақтың ауданын есептейік. Белгілі болғандай

$\iint\limits_D 1dxdy$ екі еселі интеграл D аймақтың ауданы S-ті анықтайды. Сондықтан Грин формуласында $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$ болатындай $P(x,y), Q(x,y)$ функцияларын тапсақ, онда D аймағының S ауданы

$$S = \iint\limits_D 1dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

формуламен анықталады.

$Q(x,y) = x, P(x,y) = 0$ десек, сонда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ болып,

$$S = \oint\limits_L xdy \qquad (9.67a)$$

болады. Осы сияқты

$Q(x,y) = 0, P(x,y) = y$ десек

$$S = -\oint\limits_L ydx \qquad (9.67b)$$

$Q(x,y) = -\frac{y}{2}, P(x,y) = \frac{x}{2}$ десек

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx. \qquad (9.67)$$

Сонымен ауданды есептеу үшін үш формула алынды.

7. Айнымал күштің жұмысы. $\overline{F}[P(x,y), Q(x,y)]$ айнымал күштің AB қисығы бойынша орындаған жұмысы

$$A = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (9.68)$$

формуласымен табылады.

Шынында да, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ материалдық нүкте $\overline{\boldsymbol{F}}$ күшінің әсерімен $\boldsymbol{Oxy}$ жазықтығында қайсыбір қисықты бойлап A нүктесінен B нүктеге дейін жылжысын. AB қисығын $\boldsymbol{A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B}$ нүктелерімен $\boldsymbol{n}$ бөлікке бөлеміз. $\boldsymbol{M_{i-1}M_i}$ бөлікше доға ұзындығын $\boldsymbol{\Delta l_i}$ деп белгілеп, әрбір бөлікше доғада кез келген $C_i(\xi_i, \eta_i), i = \overline{1,n}$ нүктесін аламыз. $\boldsymbol{\overset{\frown}{M_{\iota-1}M_\iota}}$ доғасын $\overline{\boldsymbol{M_{i-1}M_i}} = (\boldsymbol{\Delta x}, \boldsymbol{\Delta y})$ векторымен ауыстырып, ол $\overline{\boldsymbol{M_{i-1}M_i}}$ векторда $\overline{F_i} = (P(x_i,h_i), Q(x_i,h_i))$ күшті тұрақты деп есептейміз.

$\overline{F_i}$ күштің $M_{i-1}M_i$ доғадағы жұмысын жуықтап

$$A_i \approx \overline{F_i} \cdot \overline{M_{i-1}M_i} = P(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i$$

деп қарастыруға болады.

Барлық A_i, $i = \overline{1,n}$ мәндерін қоссақ, $\overline{F}$ күштің AB қисықтағы жұмысының жуық мәні шығады:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i) \ \ \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i) \cdot \Delta y_i$$

A жұмыстың дәл мәні ретінде алынған қосындының $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ болғандағы шегін ($\Delta x_i \ \to 0, \Delta y_i \ \to 0$ болуы айқын) қабылдаймыз:

$$A = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i) \ \ \Delta y_i \right) = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Қисықсызықты интегралдың анықтамасын ескерсек (ξ_i,η_i) нүктелерінің орнына (x_i, y_i) нүктелерін алуға да болады.

Ескерту 3.8. AB кеңістіктегі қисық болғанда,

$\overline{F} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ күштің жұмысы

$$A = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (9.68a)$$

формуламен анықталады.

Мысал 3.8. $\overline{F} = 4x^4\overline{i} + xy\overline{j}$ күштің $y = x^2$ парабола бойлап $O(0;\ 0)$ нүктеден $B(1;\ 1)$ нүктеге дейінгі орындаған жұмысын табу керек.

Шешуі. (9.68) формула бойынша, $P = 4x^4, Q = xy$ екендігін ескерсек,

$$A = \int\limits_{OB} 4x^4dx + xydy = \int\limits_0^1 4x^4dx + xx^2 2xdx = \int\limits_0^1 6x^4dx = 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5}.$$

Мысал 3.9. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$ кардоиданың ұзындығы табылсын. (сурет 9.23)

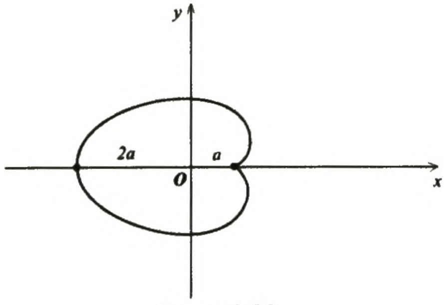
Шешуі. Доғаның дифференциалы

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

$$x'(t) = -2a\sin t + 2a\sin 2t,$$
$$y'(t) = 2a\cos t - 2a\cos 2t$$

болғандықтан, $dl = 4a\sin\dfrac{t}{2}dt$ (9.61) формула бойынша

$l = \int_L \ dl = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = \left[-8a \cdot \cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 16a.$



Сурет 9.23

Мысал 3.10. $y = \ln x$ материалдық қисықтың әрбір нүктесіндегі сызықтық тығыздығы осы нүктенің абсциссасының квадратына пропорциянал болса, $A(1;\, 0)$ және $B\ (3;\, \ln 3)$ нүктелерімен шенелген доғасының массасын табу керек.

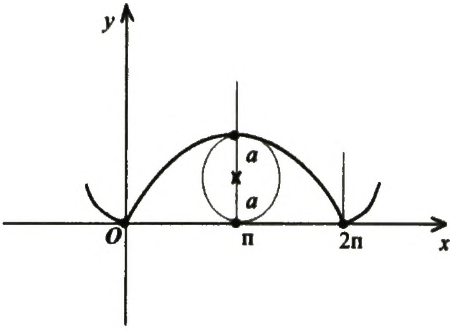
Шешуі. (9.63) формуланы пайдаланамыз. Шарт бойынша $\mu(x,y) = kx^2$, $y' = \frac{1}{x}$; доғаның дифференциалы $dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx$, екендігін ескерсек,

$$m = \int\limits_{AB} \mu(x,y)dl = k\int\limits_1^3 x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx = \frac{k}{2}\int\limits_1^3 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1) =$$

$$= \left[\frac{k}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{k}{3}\left(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right) \approx 9{,}6k.$$

Мысал 3.11. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ циклоиданың $C(x_c, y_c)$ ауырлық центрінің координаталарын табу керек. (сурет 9.24).

Шешуі. Циклоида $x = \pi$ түзуіне сәйкес симметриялы болғандықтан $x_c = \pi$ деп аламыз. Енді m мен y_c-ны табамыз. Циклоиданың теңдеуінен



Сурет 9.24

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + [a\sin t]^2}dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt;$$

сонда

$$m = \int\limits_L dl = \int\limits_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}dt =$$

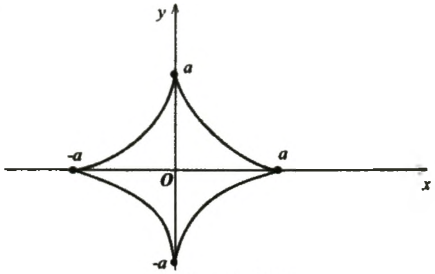
$$= 2a \cdot 2\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a;$$

$$y_c = \frac{\int\limits_L ydl}{m} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)a\sqrt{2}\sqrt{c-\cos t}dt}{8a} = \frac{a}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -a\left[\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right]_0^{2\pi} = -a\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4a}{3}.$$

Мысал 3.12. $x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le \pi/2$ ширек біртекті шеңбердің координата осьтерімен және координатаның бас нүктесімен салыстырғандағы инерция моменттерін табу керек.

Шешуі. Шеңбердің координаталық осьтерден бірдей қашықтықтарда орналасқандығынан $J_x = J_y$. (9.66) формула бойынша:



Сурет 9.25

$$J_x = J_y = \int_L y^2 dl = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= R^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{R^3}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^3}{4}$$

$$J_0 = \int_L (x^2 + y^2) dl = \int_0^{\pi/2} R^2 \cdot R dt = R^3 [t]_0^{\pi/2} = \frac{R^3 \pi}{2}.$$

Мысал 3.13. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le \pi$ (сурет 9.25) астроидамен шенелген пішіннің ауданын табайық.

Шешуі. (9.51) және (9.67) формулаларды қолдансақ:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t \cos t - a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)]dt =$$

$$= \frac{1}{2} 3a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{4} dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3a^2}{16}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{16} \cdot 2\pi = \frac{3a^2 \pi}{8}$$

§ 4. Беттік интегралдар

Беттік интеграл екі еселі интегралдың жалпылауы болып табылады. Бұл параграфта бетте берілген функциялардың интегралдары қарастырылады.

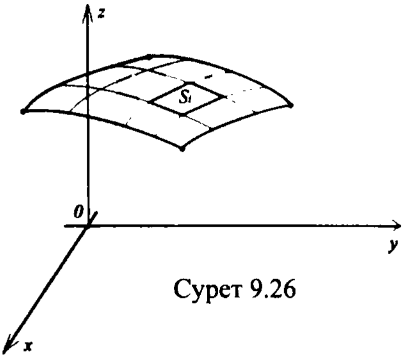
4.1. Бірінші текті беттік интеграл

1. Бірінші текті беттік интегралдың анықтамасы

$u = f(x, y, z)$ функциясы $Oxyz$ кеңістіктегі ауданы s-ке тең S бетте анықталған және үзіліссіз болсын. S бетті кез келген тәсілмен $S_1, S_2, \dots, S_n$ бөліктерге бөліп, бұлардың аудандарын $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ деп, ал диаметрлерін, сәйкес, $d_1, d_2, \dots, d_n$ деп белгілейік. Әрбір S_i, $i = \overline{1, n}$ бөлікте кез келген $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін алып,

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right) \cdot \Delta s_i \qquad (9.69)$$

қосынды құрамыз (сурет 9.26). (9.69) қосынды $f(x,y,z)$ функциясы үшін S бет бойынша интегралдық қосынды деп аталады. λ арқылы S_i, $i = \overline{1,n}$ бөліктердің диаметрлерінің ең үлкенін белгілейміз, яғни $l = \max\limits_{1J\, iJ\, n} d\left(S_i\right)$.



Сурет 9.26

Анықтама 4.1. Егер $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d\left(S_i\right) \to 0$ болғанда $\lim\limits_{l\to 0} \sigma_n = J$ болса, онда J саны $f(x,y,z)$ функциясының S беті бойынша бірінші текті беттік интегралы деп аталады және $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$ түрінде белгіленеді.

Демек, анықтама бойынша,

$$J = \iint\limits_S f\left(x,y,z\right)ds = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta s_i \qquad (9.70)$$

2. Бірінші текті беттік интегралдың негізгі қасиеттері

1. $\iint\limits_S c\cdot f\left(x,y,z\right)ds = c\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)ds, c = \text{const}.$

2. $\iint\limits_S \left[f_1\left(x,y,z\right) \pm f_2\left(x,y,z\right)\right]ds = \iint\limits_S f_1\left(x,y,z\right)ds \pm \iint\limits_S f_2\left(x,y,z\right)ds.$

3. Егер S беті ортақ ішкі нүктелері жоқ S_1 және S_2 бөліктерге бөлінсе, яғни $S = S_1 \cup S_2$, онда

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)ds + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)ds.$$

4. Егер S бетте $f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z)$ болса, онда

$$\iint\limits_S f_1(x,y,z)ds \le \iint\limits_S f_2(x,y,z)ds.$$

5. $\iint\limits_S ds = s$, мұндағы $s - S$ беттің ауданы

6. $\left|\iint_S f(x,y,z)\,ds\right| \le \iint_S \left|f(x,y,z)\right|ds$

7. Орта мән туралы теорема. Егер $f(x,y,z)$ функциясы S бетте үзіліссіз болса, онда бұл бетте (x_0,y_0,z_0) нүктесі табылып,

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = f(x_0,y_0,z_0)\cdot s \qquad (9.71)$$

формуласы орынды болады.

1–6 қасиеттер тікелей анықтамадан шығады, ал (9.71) формула екі еселі интегралдағы сәйкес теорема сияқты дәлелденеді.

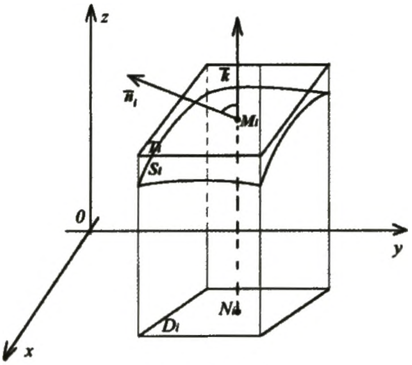
3. Бірінші текті беттік интегралды есептеу

S бет бойынша бірінші текті интегралды есептеу, S беттің Oxy жазықтығындағы проекциясы D аймақ бойынша екі еселі интегралды есептеуге келтіріледі.

Теорема 9.10. Егер $f(x,y,z)$ функциясы S бетте үзіліссіз, S бетті анықтайтын $z = z(x,y)$ функциясы, беттің Oxy жазықтығындағы проекциясы D аймақта үзіліссіз және $z_x'(x,y), z_y'(x,y)$ үзіліссіз дербес туындыларға ие болса, онда

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_D f\left[x,y,z(x,y)\right]\cdot\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy \qquad (9.72)$$

формула орынды.



Сурет 9.27

Дәлелдеуі. S бетті кез келген тәсілмен S_i, $i = \overline{1,n}$ бөліктерге бөліп, (сурет 9.27) әрбір бөліктің Oxy жазықтықтағы проекциясын D_i, $i = \overline{1,n}$ десек, D аймақ n бөлікке бөлінеді. D_i бөліктен кез келген $M_i(x_i,y_i)$ нүктесін алып, осы нүктеден жазықтыққа перпендикуляр тұрғызайық. S бетте $M_i(x_i,y_i,z_i) \in S_i$ нүктесін аламыз. $M_i(x_i,y_i,z_i)$ нүктесінде S бетке жанама жазықтық өткізіп, оның проекциясы D_i де жататын T_i бөлігін қарастырамыз. S_i, T_i және D_i бөліктердің аудандарын сәйкес ΔS_i, ΔT_i және ΔD_i деп белгілеп, жуықтап

$$\Delta T_i \approx \Delta S_i \qquad (*)$$

деп есептейміз. Oz осьпен M_i нүктесіндегі беттің $\overline{n_i}$ нормаль векторы арасындағы бұрышты γ_i десек

$$\Delta T_i \cdot \cos\gamma_i = \Delta D_i \qquad (**)$$

теңдігі орындалады. S беттің теңдеуі $z = f(x,y)$ болғандықтан, оның M_i нүктесіндегі жанама жазықтықтың теңдеуі (8.25) формула бойынша

$$z_x'(x_i,y_i)(x - x_i) + z_y'(x_i,y_i)(y - y_i) - (z - z_i) = 0$$

болады, мұндағы $\overline{n_i}\{z_x'(x_i,y_i), z_y'(x_i,y_i), -1\}$ нормаль вектор (сурет 9.27).

γ_i бұрыш, $\overline{k}(0,0,1)$ мен $\overline{n_i}\{z'_x(x_i,y_i),z'_y(x_i,y_i),-1\}$ векторларының арасындағы бұрыш болғандықтан,

$$\cos\gamma_i = \frac{\overline{k_i}\cdot\overline{n_i}}{|\overline{k_i}|\cdot|\overline{n_i}|} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2(x_i,y_i)+z_y'^2(x_i,y_i)}}$$

Сонда (**) теңдік

$$\Delta T_i = \sqrt{1+z_x'^2(x_i,y_i)+z_y'^2(x_i,y_i)}\cdot\Delta D_i$$

түріне келеді. (9.70) теңдіктің оң бөлігіндегі ΔS_i шаманы (*) жуық теңдік бойынша ΔT_i-ге, ал $z_i - \partial i$ $z(x_i,y_i)$-ге ауыстырамыз. Сондықтан, $l = \max\limits_{1J\,iJ\,n} d\left(S_i\right)$® 0 болғанда, $\max\limits_{0\le i\le n} d\left(D_i\right)\to 0$ болып, (9.72) теңдік шығады.

Сонымен бірінші текті беттік интегралды есептеу екі еселі интегралды есептеуге келтірілді.

Егер S беті $y = y(x,z)$ немесе $x = x(y,z)$ теңдеулермен берілсе, онда

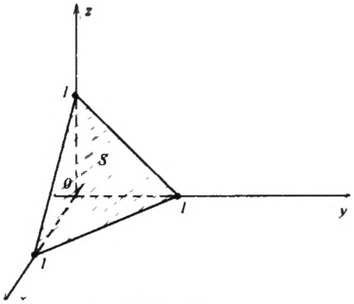
$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{D_1} f\left(x,y,(x,z),z\right)\cdot\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz, \tag{9.72а}$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{D_2} f\left(x(y,z),y,z\right)\cdot\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz \tag{9.72б}$$

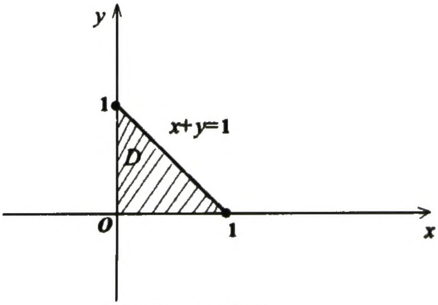
формулалары алынады, мұндағы D_1 және D_2 сәйкес S беттің Oxz және Oyz координаталық жазықтықтардағы проекциялары. Дәлелдеулері (9.72) формуланы дәлелдеген сияқты жүргізіледі.

Мысал 4.1. $\iint\limits_S \frac{ds}{(1+x+z)^3}$ бірінші текті интегралды есептеу керек, мұнда S беті $x+y+z=1$ жазықтықтың бірінші октанттағы бөлігі (сурет 9.28).

Шешуі. S беттің теңдеуін айқын түрде $z = 1-x-y$ түрінде жазамыз. $(x,y)\in D$ мұндағы D аймақ беттің Oxy жазықтықтағы проекциясы (сурет 9.29). Ол $x = 0$, $y = 0$ және $x+y=1$ түзулермен шенелген аймақ, ал



Сурет 9.28



Сурет 9.29

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}dxdy = \sqrt{3}dxdy.$$

Интеграл астындағы функция, $\frac{1}{(1+x+z)^3} = \frac{1}{(1+x+1-x-y)^3} = \frac{1}{(2-y)^3}$ болады.

Енді (9.72) формуланы қолданамыз:

$$\iint\limits_S \frac{ds}{(1+x+z)^3} = \iint\limits_D \frac{\sqrt{3}dxdy}{(2-y)^3} = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^3} = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \left[\frac{1}{2(2-y)^2}\right]_0^{1-x} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4}\right]dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{1}{1+x} - \frac{1}{4}x\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

4. Бірінші беттік интегралдың кейбір қолданулары

1. Беттің ауданы

Егер S беті $z = z(x,y)$ теңдеуімен берілсе, ал оның Oxy жазықтықтағы проекциясы D аймақ болса және D аймақта $z(x,y), z'_x(x,y), z'_y(x,y)$ функциялары үзіліссіз болса, онда аймақтың ауданы:

$$s = \iint\limits_S ds \text{ немесе } s = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}dxdy. \qquad (9.81)$$

2. Беттің массасы

S материалдық беттің массасы $\mu = \mu(x,y)$ беттік тығыздықпен үлестірілген болсын. Сонда массаны табу үшін S бетті S_i бөліктерге, $i = \overline{1,n}$ бөліп, олардың аудандарын ΔS_i арқылы белгілейміз; әрбір S_i бөлікте кез келген $M_i(x_i,y_i,z_i)$ нүктесін аламыз; S_i бөліктің m_i массасы $\mu_i(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta S_i$ шамадан аз ғана ауытқиды; барлық S_i бөлікше аймақтардың массаларын қосамыз:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(x_i, y_i, z_i\right)\cdot\Delta S_i \cdot S$$ материалдық беттің дәл мәні ретінде

$$m \approx \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(x_i, y_i, z_i\right)\cdot\Delta S_i$$ шекті, яғни

$$m = \iint\limits_S \mu\left(x_i, y_i, z_i\right)ds \qquad (9.82)$$

интегралды қабылдаймыз.

3. S материалдық беттің статистикалық моменттері

$$S_{xy} = \iint_S z \cdot \mu(x_i, y_i, z_i) ds, \ S_{yz} = \iint_S x \cdot \mu(x_i, y_i, z_i) ds, \ S_{zx} =$$
$$= \iint_S \ y \cdot \mu(x_i, y_i, z_i) ds, \qquad (9.83)$$

формулаларымен табылады.

4. S материалдық беттің ауырлық центрі

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, y_c = \frac{S_{xz}}{m}, z_c = \frac{S_{xy}}{m} \qquad (9.84)$$

формулаларымен табылады.

5. S материалдық беттің инерция моменттері

$$M_x = \iint_S (y^2 + z^2) \cdot \mu(x,y,z) ds, \ M_y = \iint_S (x^2 + z^2) \cdot \mu(x,y,z) ds,$$
$$M_z = \iint_S (x^2 + y^2) \cdot \mu(x,y,z) ds, \ M_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \mu(x,y,z) ds, \qquad (9.85)$$

формулалармен табылады.

Бұл формулалардың дұрыстығы сәйкес екі еселі интегралдардың формулаларына негізделеді.

Мысал 4.2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ z \geq 0$ жарты сфераның ауырлық центрін табу керек. Мұндағы беттің әрбір нүктесіндегі беттік тығыздығы осы нүктеден жарты сфераның табанына перпендикуляр радиусқа дейінгі қашықтыққа тең.

Шешуі. Шарт бойынша $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$ds = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

(9.82) формуланы қолдансақ

$$m = \iint_S \mu ds = R \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$, мұндағы D аймақ $x^2 + y^2 = R^2$ дөңгелегі.

Полярлық координаталарға көшсек.

$$m = R \iint_{\rho \leq R} \frac{\rho^2 d\varphi d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2\pi R \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \left| \begin{array}{l} \rho = R \sin t \\ d\rho = R \cdot \cos t \, dt \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi R \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \cdot \sin^2 t \cdot R \cdot \cos t \, dt}{R \cos t} = 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi R^3 \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

Материалдық жарты сфера Oz оське симметриялы орналасқандықтан $x_c = 0, y_c = 0$ болады, өйткені $S_{yz} = S_{xz} = 0$.

(9.83) формула бойынша S_{xy} статистикалық моментті есептейміз:

$$S_{xy} = \iint\limits_{S} z\mu ds = \int\limits_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} =$$

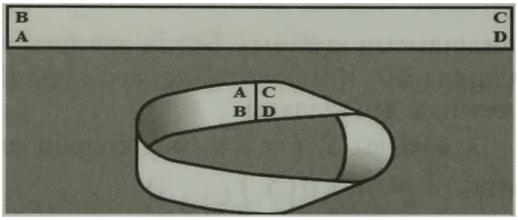
$$= R \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi\,, 0 \le \rho \le R \\ y = \rho\sin\varphi\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ dxdy = \rho d\varphi d\rho \end{array} \right| = R \iint\limits_{\rho\le R} \rho^2 d\varphi d\rho =$$

$$= R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^2 d\rho = R \cdot 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^4.$$

(9.84) формула бойынша, $z_c = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{4R}{3\pi}$. Демек, ауырлық центрі $C\left(0;\ 0;\ \frac{4R}{3\pi}\right)$ нүктесі.

4.2. Екінші текті (координаталар бойынша) беттік интеграл

1. Екінші текті беттік интегралдың анықтамасы



Сурет 9.30

Екінші текті беттік интеграл екінші текті қисықсызықты интегралдың үлгісімен құрылады.

$z = z(x,y)$ теңдеуімен екі жақты S бет берілсін, мұнда $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ функциялары беттің Oxy жазықтықтағы проекциясы D аймақта үзіліссіз функциялар. Мұндай бетте нүкте бет бойлап, шекарамен қиылыспай жылжығанда нормаль вектордың бағыты бетке байланысты өзгермейді. Нормаль вектордың бағыты бетке байланысты өзгеретін беттерді бір жақты беттер деп атайды. Мысалы, Мебиус беті біржақты бет (сурет 9.30) .

Бұл бет $ABCD$ тіктөртбұрыштың AB және CD қабырғаларында A мен C және B мен D нүктелерін біріктіргенде пайда болады.

Бұл тақырыпта екі жақты беттер қарастырылады. $z = z(x,y)$ теңдеуімен берілген бет екіжақты бет деп түсініледі.

$Oxyz$ кеңестіктегі екіжақты S бетте $R(x,y,z)$ функция анықталған және үзіліссіз болсын. S беттің таңдалған жағын кез келген тәсілмен $S_i, i = \overline{1,n}$, бөліктерге бөліп, оларды координаталық жазықтықтарға проекциялаймыз. Егер S беттің жоғарғы жағы алынса, онда S_i беттің проекциясының ΔD_i ауданы “+” таңбамен, төменгі жағы алынса “–” таңбамен алынады. Басқаша айтқанда жоғарғы жағын алғанда $\overline{n}$ нормаль мен Oz осі арасындағы бұрыш γ_i сүйір (сурет 9.31), яғни $\cos\gamma_i > 0$, ал төменгі жағын алғанда $\overline{n_i}$ нормаль мен Oz осі арасындағы γ_i бұрыш доғал, (сурет 9.32), яғни $\cos\gamma_i < 0$, болады.

Бет жағы ұғымымен оның шекарасының бағытталған сызық ұғымы тығыз байланысты.

Жағы таңдалған S беті L контурымен шенелген болсын. Нормаль вектордың ұшынан қарағанда L контур бойлап бетті айналғанда бет сол жақта қалса, онда L оң бағытталған контур, ал қарама-қарсы айналу бағытын теріс бағытталған контур деп атайды.

Егер беттің жағын өзгертсек, онда $\overline{n}$ нормаль вектор да қарама қарсы бағытқа өзгереді, L контурдың айналу бағыты да өзгереді.

Енді екінші ретті беттік интегралды анықтауға көшейік.

$R(x, y, z)$ функциясы $z = f(x, y)$ теңдеуімен берілген S тегіс бетте шенелген болсын. Беттің бір жағын таңдаймыз, яғни нормальдың мүмкін болған екі бағытының бірін белгілеп, бағытталған бет аламыз. Егер нормаль векторлар Oz осьпен сүйір бұрыш жасаса $z = f(x, y)$ беттің төменгі жағы алынды дейміз.

S бетті кез келген тәсілмен $S_1, S_2, \ldots, S_n$ бөліктерге бөліп, $S_i, i = \overline{1, n}$ бөліктің Oxy жазықтықтағы проекциясын D_i арқылы белгілеп, оның ауданын ΔD_i дейміз. Беттің әрбір S_i бөлігінде кез келген $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін алып,

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta D_i \tag{*}$$

қосындысын құрамыз. Беттің жоғарғы жағын алғанда $\Delta D_i > 0$, төменгі жағын алғанда $\Delta D_i < 0$ болады. σ_n қосынды $R(x, y, z)$ функциясы үшін интегралдық қосынды деп аталады.

λ арқылы $S_i, i = \overline{1, n}$, бөліктердің диаметрлерінің ең үлкенін белгілейміз, яғни. $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(S_i)$.

Анықтама 4.2. Егер $\lambda \to 0$ болғанда $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n = J$ болса, онда J саны $R(x, y, z)$ функциясының S беттің таңдалған жағы бойынша екінші текті беттік интегралы деп аталады және

$$J = \iint\limits_S R(M)\,dxdy = \iint\limits_S R(x_i, y_i, z_i)\,dxdy \tag{9.73}$$

символдардың бірімен белгіленеді.

Бұл жағдайда $R(x, y, z)$ функциясы S бетінде x және y айнымалдары бойынша интегралданушы функция деп аталады.

Осы сияқты $P(x, y, z)$ функциясының S бетінің таңдалған жағында y, z айнымалдары бойынша екінші текті беттік интегралы $\iint\limits_S P(x, y, z)\,dydz$ және $Q(x, y, z)$ функциясының S бетінің таңдалған жағында y, z айнымалдары бойынша екінші текті беттік интегралы $\iint\limits_S Q(x, y, z)\,dzdx$ анықталады.

$$\iint\limits_S P(x, y, z)dydz + \iint\limits_S Q(x, y, z)dzdx + \iint\limits_S R(x, y, z)dxdy$$

қосындысы екінші текті жалпы беттік интеграл деп аталады және

$$\iint\limits_S P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dzdx + R(x, y, z)\,dxdy \tag{9.74}$$

түрінде белгіленеді.

Егер S тұйық бет болса, онда екінші текті беттік интеграл сыртқы жағы бойынша $\oiint\limits_{+S}$, ішкі жағы бойынша $\oiint\limits_{-S}$ түрінде белгіленеді.

2. Екінші текті беттік интегралдың негізгі қасиеттері

1. Интегралдау жағын өзгерткенде, екінші текті беттік интегралдың таңбасы өзгереді.

2. Тұрақты көбейткішті интеграл белгісінің алдына шығаруға болады.

3. Функциялардың алгебралық қосындысының беттік интегралы, сол функциялардың беттік интегралдарының алгебралық қосындысына тең.

4. Егер $S = S' \cup S''$ болса, (мұнда S' пен S'' беттердің ортақ ішкі нүктелері жоқ) онда S бойынша алынған екінші текті беттік интеграл S' және S'' бөліктер бойынша екінші текті беттік интегралдардың қосындысына тең.

5. Егер S', S'', S''' беттер жасаушылары сәйкес Oz, Ox, Oy осьтеріне параллель цилиндрлік беттер болса, онда

$$\iint\limits_{S'} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S''} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{S'''} Q(x,y,z)dzdx = 0$$

Ескерту 4.1. Бір жақты беттер үшін екінші ретті беттік интеграл ұғымы енгізілмеген.

3. Екінші текті беттік интегралды есептеу

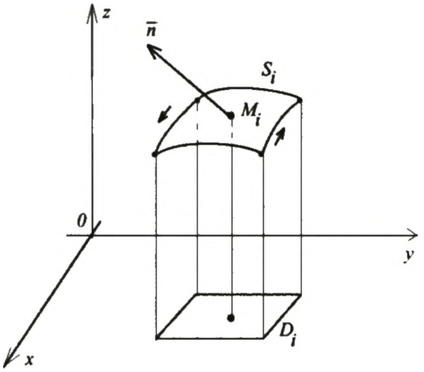
Екінші текті беттік интегралдар екі еселі интегралдарға келтіру арқылы есептелінеді.

Теорема 9.11. Егер $R(x,y,z)$ функциясы S тегіс бетте үзіліссіз болса және S бетті анықтайтын $z = z(x,y)$ функциясы беттің Oxy жазықтықтағы проекциясы D тұйық аймақта үзіліссіз болса, онда $\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy$ интеграл бар және ол

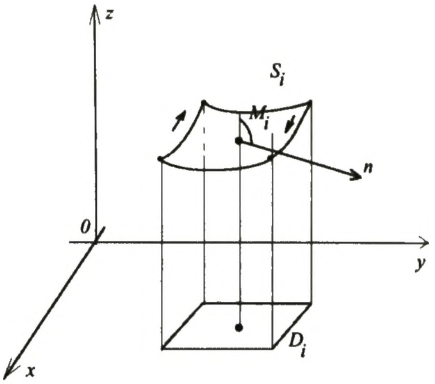
$$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy = \pm\int\limits_{D} R[x,y,z(x,y)]dxdy \qquad (9.75)$$

формула бойынша есептеледі.

Дәлелдеуі. S бетті кез келген тәсілмен $S_i, i = \overline{1,n}$, бөліктерге бөліп, әрбір бөліктің Oxy жазықтықтағы проекциясын D_i, $i = \overline{1,n}$ десек, D аймақ бағытталған n бөлікке бөлінеді (сурет 9.31, сурет 9.32).



Сурет 9.31



Сурет 9.32

Әрбір S_i бөліктен кез келген $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін алып $\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta D_i$, мұндағы ΔD_i - D_i ауданы, интегралдық қосынды құрамыз. $z_i = z(x_i, y_i)$ болғандықтан

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta D_i = \sum_{i=1}^{n} R[x_i, y_i, z(x_i, y_i)]\cdot\Delta D_i . \qquad (*)$$

Бұл теңдіктің оң бөлігінде D аймақта $R[x, y, z(x, y)]$ үзіліссіз функциясының екі еселі интегралы үшін интегралдық қосынды тұр.

(*) теңдікте $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(S_i) \to 0$ деп шекке көшсек (9.75) теңдік шығады.

(9.75) теңдік S бетте үзіліссіз $R(x, y, z)$ функциясының S бет бойынша екінші текті беттік интегралы барлығын дәлелдейді, және ол интегралды екі еселі интеграл арқылы өрнектейді.

Егер беттің төменгі жағын таңдасақ (9.75) теңдіктегі оң жағындағы екі еселі интегралдың алдында минус таңба шығады.

Келесі формулалар да осы сияқты дәлелденеді:

$$\iint_S P(x, y, z)\,dydz = \pm\iint_{D'} P\left[x(y, z), y, z\right]dydz, \qquad (9.75а)$$

$$\iint_S Q(x, y, z)\,dzdx = \pm\iint_{D''} Q\left[x, y(y, z), z\right]dzdx, \qquad (9.75б)$$

мұндағы бет сәйкес $x = x(y, z)$ және $y = y(x, z)$ теңдеулерімен берілген, ал D' пен D'' аймақтары S беттің сәйкес Oyz пен Oxz координаталық жазықтықтардағы проекциялары.

(9.75), (9.75а), (9.75б) теңдіктерді қоссақ (9.74) жалпы интеграл, егер S бет координаталық жазықтықтарға бір мәнді проекцияланса,

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy =$$

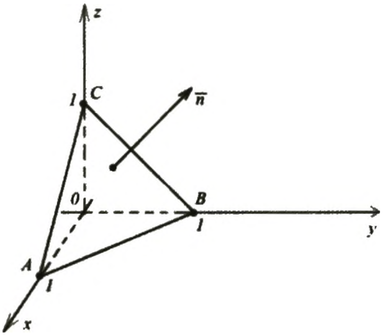
$$= \iint_{D'} P[x(y,z),y,z]dydx + \iint_{D''} Q[x,y(x,z),z]dzdx$$

$$+ \iint_D R[x,y,z(x,y)]dxdy \qquad (9.76)$$

түрінде жазылады.

Егер S күрделі бет болса, онда оны теорема 9.11-дің шартын қанағаттандыратын бөліктерге бөліп, (9.74) беттік интеграл сол бөліктер бойынша беттік интегралдардың қосындысы түрінде жазылады.

Мысал 4.2. $\iint_S zdxdy + ydydz + xdzdx$ екінші ретті беттік интегралын есептейік. Мұндағы S беті координаталық шенелген $\boldsymbol{x+y+z=1}$ жазықтығының сыртқы жағы (сурет 9.33).



Сурет 9.33

Шешуі. Интегралды әрбір қосылғыш үшін жеке есептейміз. S бет – ABC үшбұрышы. $\iint_S zdxdy$ беттік интегралды S беттің Oxy жазықтықтағы проекциясы $\Delta OAB = D = \{(x,y),\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$ аймақ бойынша (9.75) формуламен есептейміз:

$$\iint_S zdxdy = \int_{\Delta OAB} (1-x-y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 dx \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 d(1-x) = \left[-\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Осы сияқты,

$$\iint_S ydydz = \int_{\Delta OAC} ydydz = \int_0^1 ydy \int_0^{1-y} dz =$$

$$= \int_0^1 y[z]_0^{1-y} dy = \int_0^1 y(1-y)dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$\iint\limits_S xdzdx = \int\limits_{\Delta OCB} xdzdx = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} xdx =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-z} = \int\limits_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-z)^2 d(1-z) = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-z)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

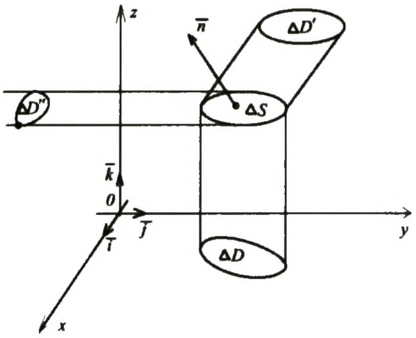
Демек, берілген интегралдың мәні,

$$\iint\limits_S zdxdy + ydydz + xdzdx = \iint\limits_S zdxdy + \iint\limits_S ydydz + \iint\limits_S xdzdx = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

4.3. Бірінші және екінші текті беттік интегралдар арасындағы байланыс

Екінші текті беттік интегралдарды бірінші текті интегралдар арқылы өрнектеуге болады (сурет 9.34).

$\overline{n}$ бірлік нормаль вектордың координаталары $\{\cos(\overline{n}, Ox), \cos(\overline{n}, Oy), \cos(\overline{n}, Oz)\}$ болғандықтан $\Delta S \cdot \cos(\overline{n}, \wedge Oz)$, шама ΔS бет ауданының Oxy жазықтығындағы проекциясы, ΔS $\cos(\overline{n}, \wedge Ox)$– Oyz жазықтығындағы проекциясы, $\Delta S \cdot \cos(\overline{n}, \wedge Oy)$– Oxz жазығындағы проекциясы жазықтағы проекциясы. Сондықтан,



Сурет 9.34

$$\Delta S \cdot \cos(\overline{n}, \wedge z) = \Delta D, \Delta S \cdot \cos(\overline{n}, \wedge x) = \Delta D',$$
$$\Delta S \cdot \cos(\overline{n}, \wedge y) = \Delta D''.$$

Мұндағы ΔD, $\Delta D'$, $\Delta D''$– ΔS бет ауданының сәйкес координаталық жазықтықтағы проекциялары. $\Delta D = dx \cdot dy, \Delta D' = dy \cdot dz, \Delta D'' = dz \cdot dx$ екендігін ескерсек:

1) $R(x, y, z)$ функциясынан, Oxy жазықтық үшін екінші текті беттік интеграл, бірінші текті беттік интеграл беттік интеграл арқылы

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_S R(x, y, z) \cdot \cos(\overline{n}, \wedge Oz)ds$$

теңдікпен өрнектеледі.

2) $Q(x, y, z)$ функциясынан, Oxz жазықтық үшін екінші текті беттік интеграл, бірінші текті беттік интеграл арқылы

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cdot\cos(\overline{n},{}^\wedge Oy)ds$$

теңдікпен өрнектеледі;

3) $P(x,y,z)$ функциясынан, Oyz жазықтықтығы үшін екінші текті беттік интеграл, бірінші текті беттік интеграл арқылы

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \iint\limits_S P(x,y,z)\cdot\cos(\overline{n},{}^\wedge Ox)ds$$

теңдікпен өрнектеледі.

$$(\overline{n},{}^\wedge Ox) = \alpha,\ \ (\overline{n},{}^\wedge Oy) = \beta,\ \ (\overline{n},{}^\wedge Oz) = \gamma,$$

деп белгілесек, жоғарыдағы теңдіктер

$$\iint\limits_S R(x,y,x)dxdz = \iint\limits_S R(x,y,z)\cdot\cos\gamma ds, \tag{9.77}$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,x)dzdx = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cdot\cos\beta ds, \tag{9.78}$$

$$\iint\limits_S P(x,y,x)dydz = \iint\limits_S P(x,y,z)\cdot\cos\alpha ds. \tag{9.79}$$

түрінде жазылады және (9.77), (9.78), (9.79) теңдіктерді қосып, жалпы түрдегі екінші текті беттік интегралды бірінші текті беттік интеграл арқылы өрнектеуші

$$\iint\limits_s P(x,y,z)dydz + \iint\limits_s Q(x,y,z)dzdx + \iint\limits_s R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint\limits_S \left[P(x,y,z)\cos a + Q(x,y,z)\cos b + R(x,y,z)\cos g\right]ds \tag{9.80}$$

формула алынады.

Мысал 4.3. $f''(x) = \dfrac{6x\left(x^2+9\right)}{\left(x^2-3\right)^3} > 0$, екінші текті интегралын есептейік, мұндағы S – төртінші октантта жатқан $2x - 3y + z = 6$ жазықтығының жоғарғы жағы.

Шешуі. Жазықтықтың жоғарғы жағының $\overline{n}$ нормалі Ox, Oz осьтерімен сүйір бұрыш, ал Oy осьмен доғал бұрыш жасайды. Себебі $\overline{n} = \{2;\ -3;\ 1\}$ нормаль векторды ұзындығы $|\overline{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, ал бағыттаушы косинустары:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} > 0, \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}} < 0, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}} > 0.$$

Сондықтан (9.75), (9.75а) формулаларындағы екі еселі интегралдың алдында “+” таңбасы, ал (9.75б) формулада “–” таңбасы қойылады.

Демек,

$$J = +\iint\limits_{D''}\left(3-\frac{3}{2}y+\frac{x}{2}\right)dydz-\iint\limits_{D'}zdzdx+5\iint\limits_{D}dxdy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{0}^{3y+6}\left(-3-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z\right)dz-\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{0}^{6-2x}zdz+5\cdot\frac{1}{2}2\cdot 3=-5.$$

4.4. Остроградский формуласы

Остроградский формуласы $Oxyz$ кеңістіктегі T шенелген тұйық аймақ бойынша үш еселі интегралды оның S шекаралық тұйық бет бойынша беттік интегралымен байланыстырады.

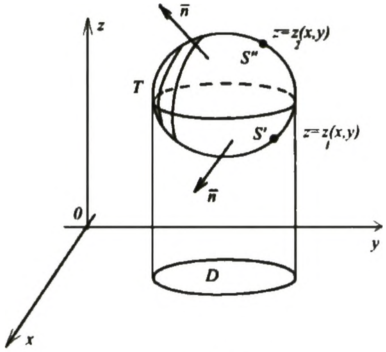
Теорема 9.12. Егер $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялары және олардың бірінші ретті дербес туындылары, S тегіс бетпен шенелген T тұйық дұрыс аймақта үзіліссіз болса, онда

$$\iiint\limits_{T}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_{S}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \qquad (9.81)$$

Остроградский формуласы орынды болады.

Дәлелдеуі. S беттің, әрі T дененің Oxy жазықтықтағы проекциясы D аймағы болсын және S беттің төменгі бөлігі S' беттің теңдеуі $z=z_1(x,y)$, ал жоғарғы бөлігі S'' беттің теңдеуі $z=z_2(x,y)$ болсын (сурет 9.35).

$f''(x)=\dfrac{6x\left(x^2+9\right)}{\left(x^2-3\right)^3}<0$ үш еселі интегралды беттік интегралға келтірейік. Ол үшін оны қайталама интегралға келтіріп, Ньютон-Лейбниц формуласын қолданып, z бойынша интегралдаймыз:



Сурет 9.35

$$\iiint\limits_{T}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint\limits_{D}R[x,y,z_2(x,y)]dxdy-\iint\limits_{D}R[x,y,z_1(x,y)]dxdy.$$

D аймағы S' және S'' та беттердің Oxy жазықтықтағы проекциясы болғандықтан (9.75) формула бойынша екі еселі интегралдарды сәйкес $z=z_2(x,y)$ беттің жоғарғы жағы бойынша және $z=z_1(x,y)$ беттің жоғарғы жағы бойынша беттік интегралға келтіреміз. Сонда,

$$\iiint\limits_{T}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{S''}R(x,y,z)dxdy-\iint\limits_{S'}R(x,y,z)dxdy.$$

S' бойынша беттің жағын ауыстырсақ,

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{S''} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S'} R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_S R(x,y,z)dxdy. \qquad (9.82)$$

Мұндағы S беті T аймақтың шекарасының сыртқы беті. Осы сияқты

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_S Pdydz \qquad (9.82а)$$

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_S Qdzdx \qquad (9.82б)$$

формулалары да дәлелдендеі.

(9.82), (9.82а), (9,82б) теңдіктерді қоссақ (9.81) формула шығады.

Ескерту 4.1. S бет құрақты-тегіс болғанда да (9.81) формула орындалады.

Ескерту 4.2. (9.81) формула, ақырлы дұрыс тұйық аймақтарға бөліктеу мүмкін болатын, кеңістіктегі кез келген T тұйық аймақ үшін орындалады.

Шынында да (9.81) формула кез келген дұрыс тұйық бөлік үшін орындалады. Оларды мүшелеп қоссақ, сол бөлігінде T аймақ бойынша үш еселі интеграл шығады, ал оң бөлігінде T аймақтың шекарасы S бет бойынша алынған беттік интеграл шығады. Қосымша беттер бойынша беттік интегралдар қарама қарсы жақтары бойынша екі рет алынады да, қосқанда жойылып кетеді.

Остроградский формуласы бойынша тұйық беттер бойынша беттік интегралдарды есептеу қолайлы.

Екінші текті беттік интегралдар жәрдемімен Остроградский формуласын пайдаланып, дененің көлемін есептеуге болады.

Егер T дене жоғарыдан $S''(z = z_2(x,y))$, төменнен $S'(z = z_1(x,y))$, бүйірінен S''' цилиндрлік бетпен (жасаушылары Oz осіне параллель) шенелсе, дененің көлемі:

$$V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy, \qquad (9.83)$$

Мұндағы $S = S' \cup S'' \cup S'''$

Шынында да, (9.81) Остроградский формуласында $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = 0$, $R(x,y,z) = 0$ деп алсақ, $\oiint_S \; = \iiint_T dxdydz$, яғни

$$V = \oiint_S xdydz. \qquad (9.83а)$$

Осы сияқты $P(x,y,z) = 0, Q(x,y,z) = y, R(x,y,z) = 0$ деп алсақ,

$$V = \oiint\limits_S ydxdz, \tag{9.83б}$$

$P(x,y,z) = 0, Q(x,y,z) = 0, R(x,y,z) = z$ деп алсақ

$$V = \oiint\limits_S zdydx \tag{9.83в}$$

формулалары алынады, (9.83а), (9.83б), (9.83в) теңдіктерді мүшелеп қоссақ, (9.83) формула алынады.

Мысал 4.5. $J = \oiint\limits_{+S} 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^3dxdy$, мұндағы S бет $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрдің $z = 0$ мен $z = h$ жазықтықтар арасындағы бөлігі, беттік интегралды есептеу керек дейік.

Шешуі. $P = 4x^3, Q = 4y^3, R = -6z^4$ болғандықтан $P'_x = 12x^2$, $Q'_y = 12y^2$, $R'_z = -24z^3$. Табылған дербес туындыларды (9.81) теңдіктің сол бөлігіне қойсақ, S тұйық бет бойынша беттік интеграл, осы бетпен шенелген T цилиндр бойынша үш еселі интегралға келтіріледі.

$$J = 12 \iiint\limits_T (x^2 + y^2 - 2z^3)dxdydz$$

Бұл үш еселі интегралды алдымен z бойынша интегралдап, содан соң полярлық координаталарға көшіп, қайталама интегралды есептейміз:

$$J = 12 \iint\limits_D dxdy \int_0^h (x^2 + y^2 - 2z^3)\,dz = 12 \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \left[(x^2 + y^2)z - \frac{z^4}{2}\right]_{z=0}^{z=h} dxdy =$$

$$= 12 \iint\limits_{\rho \le a} \left(\rho^2 h - \frac{h^2}{2}\right)\rho d\varphi d\rho = 12 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\rho^3 h - \frac{h^4}{2}\rho\right) d\rho =$$

$$= 12[\varphi]_0^{2\pi} \left[h\frac{\rho^4}{4} - \frac{h^4}{2}\frac{\rho^2}{2}\right]_0^a = 24\pi \left[\frac{ha^4}{4} - \frac{h^4}{4} \cdot a^2\right] = 6\pi h a^2(a^2 - h^3).$$

4.5. Стокс формуласы

Стокс формуласы тұйық қисық сызық бойынша қисықсызықты интегралдарды, осы қисықпен шенелген бет бойынша беттік интегралдармен байланыстырады.

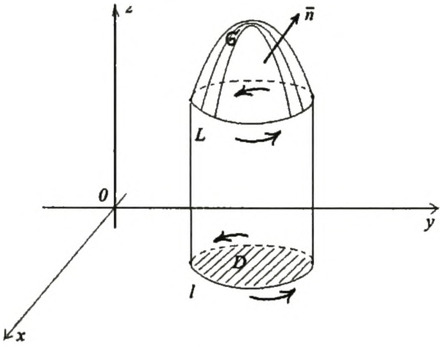
Теорема 9.13. Егер $P(x,y,z)$ функциясы мен оның дербес туындылары S тегіс бетте үзіліссіз болса және S бетті анықтаушы $z = z(x,y)$ функциясы мен оның дербес туындылары, беттің Oxy жазықтықтағы проекциясы D аймақта үзіліссіз болса, онда S бетті шенеуші L тұйық сызық бойынша қисықсызықты интеграл үшін

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds \tag{9.84}$$

формуласы орынды болады.

Мұндағы cos β, cos γ – S беттің нормалінің бағыттаушы косинустары, ал L контуры оң бағытталған, яғни L контуры бойынша айналғанда S беті оң жақта болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша. S беттің $z = z(x,y)$ теңдеуіндегі $z(x,y)$ функциясы және оның $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ дербес туындылары S беттің Oxy жазықтықтағы проекциясы D тұйық аймақта үзіліссіз (сурет 9.36).



Сурет 9.36

S – дұрыс бет деп есептейік, яғни кез келген Oz оське параллель түзу бетті бір нүктеден артық нүктеде қимайды.

$\oint_L P(x,y,z)dx$ түріндегі интегралды түрлендіріп, S беті бойынша екінші текті беттік интеграл арқылы өрнектейміз. Бұл түрлендіруді $\oint_L \to \oint_l \to \iint_D \to \iint_\sigma$ үлгісі бойынша өткіземіз. $P(x,y,z)$ функциясының кеңістіктегі L сызықтағы мәні $P[(x,y,z(x,y)]$ функциясының l сызықтағы мәніне тең, мұндағы l, L сызықтың Oxy жазықтықтағы проекциясы.

Сондықтан $\oint_L P(x,y,z)dx = \oint_l P[x,y,z(x,y)]dx$. Грин формуласын қолдансақ,

$$\oint_l P[x,y,z(x,y)]dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot z'_y\right)dxdy.$$

S – беттің жоғарғы жағы болғандықтан $\cos(\overline{n},{}^\wedge Oz) = \cos\gamma > 0$, $\overline{n} = \{-z'_x, -z'_y, 1\}$.

Бағыттаушы косинустар $\overline{n}$ нормаль вектордың сәйкес проекцияларына пропорционал, демек

$$\frac{cos\beta}{cos\gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y.$$

Сондықтан

$$-\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot z'_y\right)dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy.$$

Енді (9.75) және (9.77) формулаларды пайдалансақ, бұл екі еселі интегралды беттік интегралға түрлендіруге болады:

$$-\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy=-\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma ds=$$

$$=-\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)ds.$$

Сонымен

$$\oint\limits_{L}P(x,y,z)dx=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds$$

Жоғарыдағыдай, сәйкес шарттар орындалғанда,

$$\oint\limits_{L}Q(x,y,z)dx=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)ds \qquad (9.85)$$

$$\oint\limits_{L}R(x,y,z)dz=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)ds \qquad (9.86)$$

формулалардың дұрыстығы (9.84) формула сияқты дәлелденеді.

Алынған (9.84), (9.85), (9.86) теңдіктерді мүшелеп қоссақ,

$$\oint\limits_{L}Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]ds$$

Стокс формуласы шығады.

Бірінші және екінші беттік интегралдарды байланыстырушы (9.80) формуласының жәрдемімен Стокс формуласын

$$\oint\limits_{i}Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx \qquad (9.87)$$

түрде жазуға болады.

Дербес жағдайда, S – Oxy жазықтықтағы аймақ және L оның контуры болса, $dxdz$ мен $dydz$ бойынша интегралдар нөлге айналып, Стокс формуласы Грин формуласына айналады.

Стокс формуласы тұйық контур бойынша қисықсызықты интегралдарды беттік интегралдардың жәрдемімен есептеуге мүмкіндік береді.

Мысал 4.6. $J=\oint\limits_{L}x^2y^3dx+dy+zdz$ интегралы есептелсін, мұндағы L тұйық сызығы $z=+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ жарты сфераның Oxy жазықтығындағы проекциясы.

Шешуі. L контуры $x^2+y^2=a^2$ шеңбер. Стокс формуласы бойынша

$$J=\iint\limits_{S}(0-0)dydz+(0-0)dzdx+(0-3x^2y^2)dxdy=$$

$$= -3\iint\limits_{S} 3x^2y^2dxdy = -3\iint\limits_{D} x^2y^2dxdy,$$

мұндағы D аймақ $x^2 + y^2 \leq a^2$ дөңгелек. $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ полярлық координаталарға көшсек,

$$J = -3\iint\limits_{D} \rho^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\rho d\varphi = -3\int_0^a \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{3}{6}[\rho^6]_0^a \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi = -\frac{1}{8}a^6 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{16}a^6 \left[\varphi + \frac{sin4\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{a^6}{16} \cdot 2\pi = -\frac{\pi a^6}{8}.$$

X тарау. ҚАТАРЛАР

Бұл тарауда қосылғыштар саны ақырсыз болған қосындыларды үйренеміз. Бұл ақырсыз қосындылар көптеген функцияларды есептеудің және зерттеудің маңызды құралы болып табылады.

§ 1. Сандық қатарлар

1.1. Негізгі ұғымдар

Анықтама 1.1. Берілген $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ сандар тізбегінен құралған

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \tag{10.1}$$

ақырсыз қосындыны сандық қатар немесе қатар деп атайды.

Мұндағы $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ сандары қатардың мүшелері, ал $U_n = f(n)$ қатардың жалпы немесе n - мүшесі деп аталады.

(10.1) қатардың алғашқы n мүшесінің қосындысы

$$S_n = U_1, +U_2, + \cdots + U_n \tag{10.2}$$

қатардың n-дербес қосындысы деп аталады.

Анықтама 1.2. Егер $\{S_n\}$ сандар тізбегінің

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ақырлы шегі бар болса, онда (10.1) қатар жинақты (жинақталады) деп аталады, ал бұл шек жоқ немесе ақырсыз болса, (10.1) қатар жинақсыз деп аталады.

Жинақты болған жағдайда

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

деп жазады да, S санын қатардың қосындысы деп атайды.

Мысал 1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ қатар жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. Алғашқы n қосылғыштың дербес қосындысы

$$S_n = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

болғандықтан,

$$S = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)}\right) = \frac{1}{2}.$$

Демек, қатар жинақты, оның қосындысы $\frac{1}{2}$ -ге тең.

Мысал 1.2. Геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, a \neq 0, \qquad (10.3)$$

қатар, жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. $q \neq 1$ болғанда n-дербес қосынды

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Осыдан:

1) егер $|q| < 1$ болса, $\lim\limits_{n\to\infty} S_r = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, яғни (10.3) қатар жинақты, оның қосындысы $S = \frac{a}{1-q}$;

2) егер $|q| > 1$ болса, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a - aq^n}{1-q} = \infty$, яғни (10.3) қатар жинақсыз;

3) $q = 1$ болғанда (10.3) қатар $a + a + a + \ldots + a + \ldots$ түрінде болып, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = \infty$ болады, яғни қатар жинақсыз;

4) $q = -1$ болғанда (10.3) қатар $a - a + a - a + \ldots$ түрінде болып, $S_n = \frac{a}{2} - \frac{a(-1)^n}{2}$ болады, яғни n жұп болғанда $S_n = 0$, ал n тақ болғанда $S_n = a$.

Демек, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шек жоқ, яғни (10.3) – жинақсыз. Сонымен, (10.3) қатар $|q| < 1$ болғанда жинақты, $|q| \geq 1$ болғанда жинақсыз.

1.2. Жинақты қатарлардың қасиеттері

Теорема 10.1. Егер сандық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_{k-1} + U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots. + U_{n-1} + U_n + \ldots \qquad (10.4)$$

жинақты болса, онда қалдық қатар

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} U_n = U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots + U_{n-1} + U_n + \ldots \qquad (10.5)$$

жинақты болады және, керісінше, (10.5) қалдық қатар жинақты болса (10.4) қатар да жинақты болады.

Басқаша айтқанда қатардың жинақталуына оның алғашқы ақырлы сандағы мүшелерін шығарып тастау әсер етпейді.

Дәлелдеуі. (10.4) қатар жинақты және оның қосындысы S, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ болсын. (10.4) қатардың шығарылып тасталған мүшелерінің қосындысын S_k, ал (10.5) қатардың алғашқы $n - k$ мүшелерінің қосындысын σ_{n-k} арқылы белгілесек, онда

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k} \qquad (10.6)$$

болады. Мұндағы S_k саны n-ге тәуелді емес. (10.6) теңдіктен $\sigma_{n-k} = S_n - S_k$. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_k) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_k = S - S_k.$$

Демек, (10.4) қатар жинақты.

Жинақталушы қатарларға жай арифметикалық амалдарды орындауға болады.

Теорема 10.2. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатар жинақты және оның қосындысы S болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n$ қатар да жинақты және оның қосындысы $c \cdot S$ болады; мұндағы c – кейбір сан.

Дәлелдеуі. S_n шама $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатардың және σ_n шама $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n$ қатардың дербес қосындылары болсын. Онда

$$\sigma_n = cU_1 + cU_2 + \ldots + cU_n = c(U_1 + U_2 + \ldots + U_n) = cS_n$$

Бұдан $n \to \infty$ деп шекке көшсек,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS$$

яғни $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n$ қатардың $\{\sigma_n\}$ дербес қосындылардың тізбегінің шегі cS екендігі шығады. Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = cS.$

Теорема 10.3. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} U_r = S, \sum_{n=1}^{\infty} V_r = \sigma$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} (U_r \pm V_n) = S \pm \sigma$ болады.

Дәлелдеуі. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатардың дербес қосындысы S_n, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатардың дербес қосындысы σ_n, ал $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n \pm V_n)$ қатардың дербес қосындысы τ_n болсын. Онда

$$\tau_n = (U_1 \pm V_1) + (U_2 \pm V_2) + \cdots + (U_n \pm V_n) =$$
$$= (U_1 + U_2 + \cdots + U_n) \pm (V_1 + V_2 + \cdots + V_n) = S_n \pm \sigma_n,$$

Бұдан $n \to \infty$ деп шекке көшсек,

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma,$$

яғни $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n \pm V_n)$ қатардың дербес қосындыларының τ_n тізбегінің шегі $S \pm \delta$ екендігі шығады. Демек, $\sum_{m=1}^{\infty}(U_n \pm V_n) = S \pm \sigma$

Сонымен жинақты қатарларды санға көбейту, мүшелеп қосу және азайту мүмкін екендігі анықталды.

1.3. Қатар жинақтылығының қажетті шарты

Қатарды карастырғанда негізгі екі мәселені шешу керек: 1) қатарды жинақтылыққа зерттеу; 2) жинақты болса, оның қосындысын табу.

Негізінен, біз бірінші теориялық мәселені шешумен айналысамыз.

Теорема 10.4. (Қажетті шарт). Егер $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ қатар жинақты болса, оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады, яғни $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша берілген қатар жинақты, қатардың қосындысын S арқылы белгілейік. $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} + U_n$, $S_{n-1} = U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}$ болғандықтан $U_n = S_n - S_{n-1}$. $n \to \infty$ деп шекке көшсек,

$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ қажетті шарт, бірақ қатар жинақты болуы үшін жеткілікті емес.

Мысал 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармониялық қатардың жинақсыз екендігі көрсетілсін.

Мұндағы әрбір мүше, екіншісінен бастап, екі көрші мүшелерінің гармониялық ортасы, яғни $\frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right)$, немесе $n = \frac{1}{2}(n - 1 + n + 1)$.

Шешуі. Гармониялық қатар үшін қажетті шарт орындалады: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Қатардың жинақсыз екендігін дәлелдейміз. Шынында да қатар жинақты, оның қосындысын S десек $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$ болады. Бірақ

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

яғни $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$. Бұл теңсіздіктен $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ теңдігі орындалмайтындығы көрінеді.

Демек, гармониялық қатар жинақсыз.

Сонымен, егер $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$ болса, қатар жинақсыз болады; ал $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ болса, қатар жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін, оны қосымша зерттеу керек.

1.4. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарты. Коши белгісі

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатардың жинақтылығы, оның $\{S_n\}$ дербес қосындыларының тізбегінің жинақты болуымен анықталды. Сондықтан қатардың қосындысы S бар болса, $\{S_n\}$ тізбектің S шегі бар, және керісінше, $\{S_n\}$ тізбектің шегі S болса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатардың қосындысы да S болады.

Теорема 10.5. (Коши) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатары жинақты болуы үшін, кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін барлық $n > N$ нөмірлері мен кез келген p натурал саны үшін

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k\right| = \left|U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p}\right| < \varepsilon \qquad (10.7)$$

теңсіздігі орындалатындай $N = N(\varepsilon)$ нөмірінің табылуы қажетті және жеткілікті. ([1],XVII §1)

(10.7) теңсіздіктің сол жағы $|S_{n+p} - S_n|$-ге тең екендігін, мұндағы S_n берілген қатардың n-дербес қосындысы, ескерсек $\{S_n\}$ тізбектің жинақтылығының қажетті және жеткілікті шартына келтіріледі.

Гармониялық қатар (мысал 10.3) үшін n жеткілікті үлкен сан болғанда және $p = n$ болғанда (10.7) теңсіздік орындалмайды. Сондықтан гармониялық қатар жинақсыз.

§ 2. Мүшелері теріс емес қатарлардың жинақтылығының кейбір белгілері

Жоғарыда айтылғандай қатарлар теориясының басты мәселелері – қатардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықтау және ол жинақты болса, оның қосындысын табу.

Бұл мәселелердің алғашқысын Коши белгісін қолданып шешуге де болар еді. Бірақ бұл жағдайда берілген қатардың әрбіреуінің ерекшілігі ескерілуімен бірге олардың әрбіреуі үшін шарттың орындалуын өзінше қайта тексеріп отырған болар едік. Сондықтан қатарды жинақтылыққа зерттеудің тиімді әдістерін үйрену керек. Сол әдістердің бірнешеуін келтірейік.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатардын жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарты

Теорема 10.6. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар жинақты болуы үшін $\{S_n\}$ дербес қосындылар тізбегінің шенелген болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар жинақты болсын, онда $\{S_n\}$ дербес қосындылар тізбегінің шегі бар. Ал әрқандай шегі бар тізбек Теорема 2.6 бойынша шенелген.

Жеткіліктілігі $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатардың $\{S_n\}$ дербес қосындылар тізбегі шенелген болсын. Қатардың мүшелері теріс емес болғандықтан $\{S_n\}$ кемімейтін тізбек, яғни $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \cdots$ Ал теорема 5.6 бойынша бірсарынды шенелген тізбектің шегі бар.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар жинақты.

2.2. Салыстыру белгілері

Теорема 10.7. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ және $\sum_{n=1}^{\infty} V_n (V_n \geq 0)$ қатарлары берілсін:

а) егер осы екі қатардың мүшелері үшін $U_n \leq V_n$, $n = 1,2,3, \ldots$ теңсіздіктері орындалып, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n (V_n \geq 0)$ қатар жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар да жинақты, ал $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} V_n (V_n \geq 0)$ қатар да жинақсыз болады;

б) егер $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = A > 0$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n (V_n \geq 0)$ қатарларының екеуі бірдей жинақты немесе екеуі бірдей жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. а) Егер $\sum_{n=1}^{\infty} V_n (V_n \geq 0)$ қатар жинақты болса $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = S$. онда теореманың шарты бойынша $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} V_k \leq S$, немесе $S_r = \sum_{k=1}^{n} U_k \leq S, n = 1, 2, \ldots$

$U_k \geq 0$ болғандықтан $\{S_n\}$ тізбек бірсарынды кемімейтін жоғарыдан S санымен шенелген. Сондықтан, бірсарынды шенелген тізбектің шегі туралы теорема 5.6 бойынша, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар жинақты және оның қосындысы $S' \leq S$.

Енді $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар жинақсыз болсын. Онда оның дербес қосындылары n санымен бірге ақырсыз өседі, олай болса

$$\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} V_k, n = 1, 2, \ldots$$

теңсіздіктер негізінде $\sum_{n=1}^{\infty} V_n (V_n \geq 0)$ қатардың да дербес қосындылары ақырсыз өседі, яғни $\sum_{n=1}^{\infty} V_n (V_n \geq 0)$ қатар жинақсыз.

б) Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = A > 0$ шарт орындалса, онда $A > 0$ болғандықтан $\varepsilon_0 > 0$ саны табылып, $A - \varepsilon_0 > 0$ теңсіздігі орындалады және берілген $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ саны бойынша барлық $n > N$ нөмірлері үшін

$$0 < A - \varepsilon < \frac{U_n}{V_n} < A + \varepsilon$$

теңсіздіктері орындалатындай N натурал саны табылады. Соңғы теңсіздіктерден келесі пара-пар теңсіздіктер шығады:

$$0 < (A - \varepsilon)V_n < U_n < (A + \varepsilon)V_n, \ \ n > N \qquad (10.8)$$

(10.8) теңсіздіктерден теореманың а) тармағы бойынша: егер $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатар жинақты болса, $\sum_{n=N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)V_n$ қатары жинақты болады, яғни $\sum_{n=N+1}^{\infty} U_n$ қатары жинақты, олай болса, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатары да жинақты;

Егер $\sum_{n=N+1}^{\infty} U_n$ қатары жинақты болса, онда, $\sum_{n=N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)V_n$ қатары жинақты, олай болса $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатары да жинақты.

Енді екі қатардың бірінің жинақсыздығынан екіншісінің жинақсыздығы шығатынын дәлелдейміз.

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатары жинақсыз дейік. (10.8) теңсіздіктердің оң жағындағы

$$U_n < (A+\varepsilon)V_n, \ n > N$$

теңсіздіктен теореманың а) тармағындағы тұжырымынан $\sum_{n=N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)V_n$ қатарының жинақсыздығы шығады. Онда $\sum_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)V_n$ қатары да жинақсыз. Олай болса $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатар жинақсыз.

$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатар жинақсыз болғанда (10.8) теңсіздіктердің сол жағындағы

$$0 < (A-\varepsilon)V_n < U_n$$

теңсіздіктен $\sum_{n=N+1}^{\infty}(A-\varepsilon)V_n$ қатардың жинақсыздығы, одан $\sum_{n=N+1}^{\infty}(A-\varepsilon)V_n$ қатардың жинақсыздығы шығады. Демек теореманың а) тармағындағы тұжырымнан $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатардың да жинақсыздығы шығады.

Мысал 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, 0<\alpha<1$ жалпыланған гармониялық қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. $0 < \alpha < 1$ болғандықтан кез келген n нөмірі үшін $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$, ал $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармониялық қатар жинақсыз (мысал 1.3). Онда теорема 10.7-ның а) тармағы бойынша берілген жалпыланған гармониялық қатар жинақсыз.

Мысал 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. Бұл қатардың $U_n = \frac{1}{n\cdot 2^n}$ жалпы мүшесі $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}$ жинақталушы қатардың жалпы мүшесі $V_n = \frac{1}{2^n}$ (мысал 1.2) шамасынан кіші. Сондықтан берілген қатар жинақты.

Мысал 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. $n \geq 2$ болғанда

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

теңсіздігі орындалады. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ қатарды зерттейік.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

түрінде жазсақ n-дербес қосынды.

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n}$$

$\{S_n\} = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ дербес қосындылар тізбегі шенелген. Демек, теорема 10.6 бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ қатар жинақты. Ал бұл берілген қатар үшін мажоранта қатар. Сондықтан (теорема 10.7 а) тармақ) берілген қатар да жинақты.

2.3. Даламбер белгісі

Теорема 10.8 (Даламбер). Мүшелері оң $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n > 0)$ қатар берілсін және ақырлы немесе ақырсыз

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L \tag{10.9}$$

шек бар болсын. Онда: а) $L < 1$ болғанда қатар жинақты; б) $L > 1$ болғанда қатар жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. а) Егер (10.9) теңдікте $L < 1$ болса,

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n} - L\right| < \varepsilon, n \geq N$$

теңсіздігі орындалатындай N нөмірі табылады. Бұл теңсіздік

$$L - \varepsilon < \frac{U_{n+1}}{U_n} < L + \varepsilon, n \geq N \tag{10.10}$$

қос теңсіздікке пара-пар.

$L < 1$ болғанда $L + \varepsilon < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon > 0$ саны (мысалы $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$) табылады.

$L + \varepsilon = q < 1$ деп алсақ (10.10) теңсіздіктердің оң теңсіздігі бойынша $\frac{U_{n+1}}{U_n} < q$ немесе $U_{n+1} < U_n \cdot q$ болады. $n = N, N + 1, N + 2, \ldots$ мәндерінде соңғы теңсіздіктен $U_{N+1} < U_N \cdot q, U_{N+2} < U_{N+1} < U_N \cdot q < U_N q^2, U_{N+3} < U_{N+1} < U_{N+2} \cdot q < U_N q^3$ ... теңсіздіктері шығады. Яғни

$$U_{N+1} + U_{N+2} + U_{N+3} + \cdots \tag{10.11}$$

қатардың мүшелері сәйкес құрылған мүшелері кемімелі геометриялық прогрессия болатын

$$U_N q + U_N q^2 + U_N q^3 + \cdots \tag{10.12}$$

қатардың мүшелерінен кем.

$q < 1$ болғандықтан (10.12) қатар жинақты (мысал 10.2).

Бірақ (10.11) қатар берілген қатардың алғашқы ақырлы N мүшелерін шығарып тастаған қатар.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ берілген қатар жинақты

б) $L > 1$ болсын. $\varepsilon > 0$ санды $L - \varepsilon > 1$ болатындай етіп аламыз.

Онда $n \geq N$ болғанда (10.10) теңсіздіктердің сол теңсіздігі бойынша $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ немесе $U_{n+1} > U_n$ теңсіздігі орындалады. Сонымен $n \geq N$ нөмірден бастап берілген қатардың мүшелері өседі, яғни U_n қатардың жалпы мүшесі $n \to \infty$ болғанда нөлге ұмтылмайды. Демек, теорема 10.4 бойынша қатар жинақсыз.

Ескерту 2.1. $L = 1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n (U_n > 0)$ қатар жинақты да жинақсыз да болуы мүмкін. Оны анықтау үшін басқа белгілермен қосымша зерттеу керек.

Мысалы 2.4. Даламбер белгісі бойынша қатарларды жинақтылыққа зерттеу керек:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{n}}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

Шешуі. а) Мұнда $U_n = \frac{n^4}{3^n}$, $U_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}$; Сондықтан,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3} < 1.$$

Демек қатар жинақты.

б) Мұнда $U_n = \frac{2n^n}{n!}$; $U_{n+1} = \frac{2(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ Сондықтан,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = n\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Демек, қатар жинақсыз.

в) Мұнда $U_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $U_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = 1.$$

Демек Даламбер белгісі бойынша, анық тұжырым жасауға болмайды. Бірақ салыстыру белгісі бойынша $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}$ екендігін және гармониялық қатардың жинақсыздығын ескерсек, берілген қатар жинақсыз.

г) Мұнда $U_n = \frac{2}{n^2}$. $U_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2}$ Сондықтан,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = 1.$$ Бұл мысалда да

Даламбер белгісі бойынша тұжырым жасауға болмайды. Бірақ $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ екендігін және $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1$ қатардың (мысал 10.4) жинақтылығын ескерсек салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

2.4. Радикалдық Коши белгісі

Теорема 10.9 (Коши). Мүшелері оң $\sum_{n=1}^{\infty} U_n (U_n \geq 0)$ қатар берілсін және ақырлы немесе ақырсыз.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = L \qquad (10.13)$$

шек бар болсын. Онда:

а) $L < 1$ болғанда қатар жинақты;

б) $L > 1$ болғанда қатар жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. а) Егер (10.13) теңдікте $L < 1$ болса, онда $L + \varepsilon < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon > 0$ саны үшін, мысалы $\varepsilon = \frac{1-L}{3}$, барлық $n > N$ нөмірлеріне

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{U_n} < L + \varepsilon \qquad (10.14)$$

теңдіктері орындалатындай N саны табылады.

(10.14) теңсіздіктердің оң жағынан шығатын $U_n < (L+\varepsilon)^n$, $n > N$ теңсіздігін және $\sum_{N}^{\infty}(\mathrm{L}+\varepsilon)^{\mathrm{n}}, L+\varepsilon < 1$ қатарының (кемімелі геометриялық прогрессия) жинақтылықты ескерсек, салыстыру белгісі бойынша $\sum_{N}^{\infty} U_n$ қатарының, олай болса $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатарының жинақтылығы шығады.

а) Егер (10.13) теңдікте L>1 болса, онда $L-\varepsilon>1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon>0$ саны үшін, мысалы $\varepsilon=\frac{L-1}{3}$, барлық $n>N$ нөмірлері үшін (10.14) теңсіздіктердің сол жағынан шығатын $\sqrt[n]{U_n}>L-\varepsilon>1$,немесе $U_n>1$, $n>N$ теңсіздігі, яғни қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайтынын, сондықтан да $\sum\limits_{N}^{\infty}U_n$ қатардың олай болса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n\,,U_n>0$, қатардың жинақсыздығын аламыз.

Ескерту 2.2. $L=1$ болғанда берілген қатар жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін. Бұл жағдайда қосымша зерттеу керек.

Мысал 2.5. Радикалдық Коши белгісі бойынша қатарларды жинақтылыққа зерттеу керек:

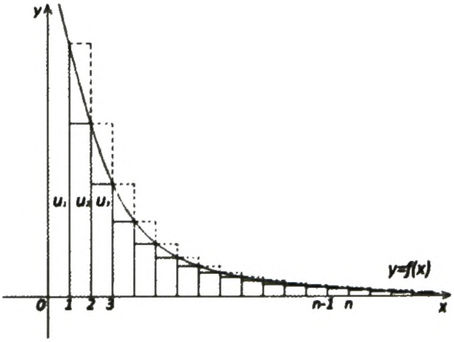
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n}$

Шешуі. а) Мұнда $U_n=\frac{2^n}{n^n}$ Демек $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1$. Сондықтан берілген қатар жинақты.

б) Жалпы мүше $U_n=\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n}$ болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^2=3^2=9>1.$$ Демек, берілген қатар жинақсыз.

2.5. Кошидің интегралдық белгісі



Сурет 10.1

Теорема 10.10. Егер $f(x)$ функциясы $[1;+\infty)$ аралығында теріс емес, үзіліссіз және өспейтін болса, онда $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ меншіксіз интегралы мен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ қатары екеуі де бірдей жинақты немесе бірдей жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. Жоғарыдан $y=f(x)>0$ функциясының графигімен, $x=1,x=n$ түзулер және Ox осімен шенелген қисықсызықты трапецияны қарастырайық (сурет 10.1). Бұл трапецияға табандары $[1;2],[2;3],\dots,[n-1;n]$ болатын іштей және сырттай тік төртбұрыштар құрайық. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасын ескеріп, теореманың шарттары бойынша келесі теңсіздіктерді жазуға болады:

$$f(2)\cdot 1+f(3)\ \ 1+\dots+f(n)\cdot 1<$$
$$<\int_1^n f(x)dx<f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+\dots+f(n-1)\cdot 1,$$

немесе $U_2+U_3+\ldots+U_n<\int_1^n f(x)dx<U_1+U_2+\ldots+U_{n-1}$,

немесе $S_n-U_1<\int_1^n f(x)dx<S_n-U_n$. (10.17)

1-жағдай. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интеграл жинақты, яғни $\int_1^{+\infty} f(x)dx=A$.

$\int_1^n f(x)dx<\int_1^{+\infty} f(x)dx=A$ болғандықтан (10.17) теңсіздіктер бойынша $S_n-U_1<A$, яғни $S_n<U_1+A$.

$U_n>0$ болғанда $\{S_n\}$ дербес қосындылар тізбегі бірсарынды өспелі және $\{S_n\}$ жоғарыдан шенелген болғандықтан $\lim_{n\to\infty} S_n$ ақырлы шек бар. Сондықтан $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n>0$ қатар жинақты.

2-жағдай. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интеграл жинақсыз. Онда $\int_1^{\infty} f(x)dx=+\infty$ болып, $\int_1^n f(x)dx$ интеграл $n\to\infty$ болғанда ақырсыз өседі.

(10.17) теңсіздіктердің оң теңсіздігінен $S_n>\int_1^n f(x)dx+U_n$ екендігін ескерсек $\sum_{n=1}^{\infty} U_n\,(U_n>0)$ қатардың жинақсыздығы шығады.

Ескерту 2.3. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ интегралдың орнына $\int_k^{+\infty} f(x)dx$, мұндағы $k\in N, k>1$ интегралды алуға болады. Себебі қатардың алғашқы k

мүшелерін шығарып тастасақ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(U_n > 0)$ қатардың жинақты немесе жинақсыз болуына әсер етпейді.

Мысал 2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ жалпыланған гармониялық қатар жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. $f(x) = \frac{1}{x^p}$ функцияны қарастырайық. Бұл функция $[1;+\infty)$ аралығында үзіліссіз, бір сарында кемімелі және $f(n) = \frac{1}{n^p} = U_n$ $p \neq -1$ болғанда,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x^{-p+1}}{1-p}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{1-p}, p > 1 & \text{болғанда,} \\ \infty, \quad p < 1 & \text{болғанда.} \end{cases}$$

P = 1 болғанда $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = +\infty$ болады, ал сәйкес қатар гармониялық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, оның жинақсыз екендігі белгілі (Мысал 10.3).

Демек, жалпыланған гармониялық қатар $p > 1$ болғанда жинақты, ал $p \leq 1$ болғанда жинақсыз.

Атап өтетін жәйт, Даламбер мен Коши белгілері жалпыланған гармониялық қатардың жинақты немесе жинақсыздығын анықтай алмайды.

§ 3. Айнымал таңбалы қатарлар

Анықтама 3.1. Мүшелері кез келген таңбалы сандар болатын қатарды айнымал таңбалы қатар деп атайды.

3.1. Ауыспа таңбалы қатарлар

Анықтама 3.2. Қатардың екі көрші мүшелерінің таңбалары қарама-қарсы болса, онда оны ауыспа таңбалы қатар деп атайды:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n+1}U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n, U_n > 0, \quad (10.18)$$

Теорема 10.11 (Лейбниц). Егер (10.18) ауыспа таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$, $(U_n > 0)$ қатардың мүшелерінің модулі өспейтін тізбек және $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ болса, онда (10.18) қатар жинақты және $S \le U_1$, болады.

Дәлелдеуі. (10.18) қатардың жұп нөмірлі дербес қосындыларын

$$S_{2n} = U_1 - (U_2 - U_3) - (U_4 - U_5) - \dots - (U_{2n-2} - U_{2n-1}) - U_{2n}$$

түрінде топтасақ теорема шарты бойынша жақша ішіндегі айырымдар теріс емес және $U_k > 0$, $k = 1,2,3,\dots$ екендігін ескерсек $S_{2n} \le U_1$ теңсіздігі шығады. Егер, осы жұп нөмірлі дербес қосындыларды

$$S_{2n} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2n-1} - U_{2n})$$

түрінде топтасақ, онда тағы да жақша ішіндегі айырымдардың теріс еместігінен $\{S_{2n}\}$ тізбегінің бір сарынды кемімейтіні көрінеді.

Бірсарынды кемімейтін және жоғарыдан U_1 санымен шенелген тізбек үшін

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \le U_1$$

қатысы орындалатыны анық.

Ал тақ нөмірлі дербес қосындылардың да шегі осы сан болады:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - U_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} U_{2n} = S - 0 = S$ Демек, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \le U_1$

Мысал 3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ қатары жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. Бұл ауыспа таңбалы қатар. Шынында да $\frac{1}{n} > 0$, $n = 1,2,3,\dots$; әрі $n = 1,2,3,\dots$;, $n = 1,2,3,\dots$ және $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ Яғни Лейбниц теоремасының барлық шарттары орындалады. Олай болса, берілген қатар жинақты және оның қосындысы $S \le 1$.

Салдар 3.1. Егер (10.18) қатар жинақты болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ қатары да жинақты және оның қосындысы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n = \overline{S} \le U_k$, $U_k > 0$ болады.

Ескерту 3.1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n U_n\,,\ U_n > 0 \qquad (10.19)$$

қатар, яғни бірінші мүшесі теріс ауыспа таңбалы қатар, барлық мүшелерін (–1)-ге көбейту арқылы (10.18) қатарды зерттеуге келтіріледі. (10.18) және (10.19) қатарлар Лейбниц қатарлары деп аталады.

Ескерту 3.2. $0<S<U_1$ теңсіздіктер және жоғарыдағы салдар 3.1 негізінде $S_n < U_{n+1}$ баға орынды болады.

3.2. Абсолют және шартты жинақты қатарлар

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \qquad (10.20)$$

мұндағы $U_1, U_2, ..., U_n$ сандары оң да теріс те болуы мүмкін, айнымал таңбалы қатарды және олардың абсолют шамаларынан құрылған

$$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n| = |U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| + \ldots \qquad (10.21)$$

қатарды қарастырайық.

(10.20) айнымал таңбалы қатарлар үшін келесі жинақтылық белгісі орынды.

Теорема 10.12. Егер (10.21) қатар жинақты болса, онда (10.20) қатар да жинақты болады.

Дәлелдеуі. (10.20) және (10.21) қатарлардың мүшелерінен құралған $\sum_{n=1}^{\infty}\left(U_n + |U_n|\right)$ қатарды қарастырайық.

$0 \le U_n + |U_n| \le 2\|U_n|$ қос теңсіздігі барлық $n \in N$ нөмірлер үшін орынды екендігі айқын. $\sum_{n=1}^{\infty} 2|U_n|$ қатар теореманың шарты бойынша (теорема 10.12) жинақты. Онда салыстыру белгісі (теорема 10.7) бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\left(U_n + |U_n|\right)$ қатар жинақты. Берілген айнымал таңбалы (10.20) қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(U_n + |U_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ түрінде жазуға болады.

Бұл теңдіктің оң жағындағы қатарлар жинақты, сондықтан жинақты қатарлардың қасиеті (теорема 10.3) бойынша сол жағындағы берілген (10.20) қатар да жинақты.

Анықтама 3.3. Егер $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ қатар жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ қатар абсолют жинақты қатар деп, ал $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ қатар жинақты болып, $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ қатар жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ қатар шартты жинақты қатар деп аталады.

Мысал 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ қатары жинақтылыққа зерттелсін.

Шешуі. Бұл ауыспа таңбалы қатар. Лейбниц теоремасының екі шарты да орындалады:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0;\ 1 > \frac{1}{2^{\alpha}} > \frac{1}{3^{\alpha}} > \cdots > \frac{1}{n^{\alpha}} > \cdots$$

Сондықтан берілген қатар жинақты.

$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right| = \frac{1}{n^{\alpha}}$ болғандықтан, берілген қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ болады: $0<\alpha<1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ жалпыланған гармониялық қатар жинақсыз (мысал 2.6), $\alpha = 1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармониялық қатар жинақсыз. $\alpha > 1$ болғанда жинақты (мысал 2.6).

Демек, берілген қатар $0<\alpha\le 1$ болғанда шартты жинақты; $\alpha > 1$ болғанда абсолют жинақты.

Абсолют жинақталушы қатарлардың негізгі қасиеттерін дәлелдеусіз келтірейік:

1. Дирихле теоремасы. Егер берілген $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ қатар абсолют жинақталып, оның қосындысы S болса, онда қатардың мүшелерінің орнын ауыстырғаннан шыққан қатар да абсолют жинақты және оның қосындысы да S-ке тең болады.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ қатарлары абсолют жинақты болып, олардың қосындылары сәйкес S және σ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n \pm V_n)$ қатарлары да абсолют жинақты болып, $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n + V_n) = S + \sigma, \sum_{n=1}^{\infty}(U_n - V_n) = S - \sigma$ болады.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатарлары абсолют жинақты болып, олардың қосындылары сәйкес S және σ болса, олардың көбейтіндісі

$$\sum_{n=1`}^{\infty} U_n \sum_{n=1}^{\infty} V_n = (U_1V_1)+(U_1V_2+V_2U_1)+(U_1V_3+V_2U_2+U_3V_1)+\ldots$$

$$\ldots+(U_1V_n+U_2V_{n-1}+\ldots+U_nV_1)+\ldots$$

қатарда абсолют жинақты болып, қосындысы $S\cdot\sigma$ болады.

Демек, абсолют жинақталушы қатарларды өзара қосу, айыру және көбейтуге болады.

Шартты жинақталушы қатарлар үшін жоғарыдағы қасиеттер жалпы алғанда орындала бермейді.

Мысалы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ қатар Лейбниц теоремасы бойынша жинақты, оның қосындысын S дейік. Бұл қатардың мүшелерінің орнын, әрбір оң таңбалы мүшеден кейін екі теріс таңбалы мүше келтіріп, ауыстырайық:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S$$

Бұл ауыстыруда қосынды екі есеге азайды.Тіпті шартты жинақталушы қатар үшін келесі тұжырым орынды.

Риман теоремасы. Егер берілген $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатары шартты жинақты болса, онда кез келген ақырлы немесе ақырсыз S саны үшін қосындысы S санына тең болатындай берілген қатардың мүшелерінің орын ауыстыруы табылады.

§ 4. Дәрежелік қатарлар

Анықтама 4.1. Әрбір мүшесі дәрежелі функция болатын

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (10.22)$$

қатар дәрежелік қатар деп аталады.

Мұндағы a_n, $n=0,1,2,\ldots$ сандары дәрежелік қатардың коэффициенттері деп аталады.

Дәрежелік қатар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \quad (10.23)$$

түрінде де беріледі.

x айнымалға әртүрлі сандық мәндер берсек, әртүрлі сандық қатарлар шығады. Бұл сандық қатарлар жинақты немесе жинақсыз болуы мүмкін.

Анықтама 4.2. (10.22) Қатар жинақты болатын x айнымалдың мәндер жиыны осы қатардың жинақталу аймағы деп аталады.

$x = 0$ болғанда (10.22) қатар жинақты, сондықтан (10.22) дәрежелік қатардың жинақталу аймағы бос жиын емес.

4.1. Дәрежелік қатардың жинақталу интервалы

Теорема 10.13. (Абель) Егер (10.22) дәрежелік қатар:

а) $x_0 \neq 0$ нүктесінде жинақты болса, онда ол $|x| < |x_0|$ нүктелерінде, яғни $(-|x_0|; |x_0|)$ аралығында, абсолют жинақты;

б) x_1 нүктесінде жинақсыз болса, онда ол $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x нүктелерінде, яғни $(-\infty\ , -x_1] \cup\ [x_1, +\infty\ )$ жиында, жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. а) Теорема шарты бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ сандық қатар жинақты болғандықтан, оның жалпы мүшесінің шегі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, x_0^n = 0$ болады. Бұл теңдіктен $\{a_n x_0^n\}$ тізбегінің шенелгендігі шығады, яғни $M > 0$ саны табылып $|a_n x_0^n| \leq M$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ теңсіздігі орындалады. Осы теңсіздікті ескерсек

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad (10.24)$$

теңсіздікті аламыз. Ал $|x| < x_0$ теңсіздіктен $\left|\frac{x}{x_0}\right|^n < 1$ болып, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ қатары $(-|x_0|; |x_0|)$ аралығында жинақты болады, себебі қатардың мүшелері кемілелі геометриялық прогрессияны құрайды (Мысал 1.2). Олай болса, салыстыру белгілері бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ қатары да $(-|x_0|; |x_0|)$ аралығында абсолют жинақты болады.

б) керісінше жорик, (10.22) дәрежелік қатар $|x_2| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x_2 нүктесінде жинақты болсын дейік. Онда а) тармақ бойынша (10.22) дәрежелік қатар $|x_2| < |x_1|$ болатын x_1 нүктесінде жинақты болу керек. Ал бұл тұжырым б) тармақтың шартына қайшы келеді.

Абель теоремасынан (10.22) дәрежелік қатардың жинақталу аймағы $x = 0$ нүктесіне симметриялы $(-R;\ R)$ түріндегі аралық, ал оның жинақсыз болатын нүктелер жиыны $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty,)$ түрінде болатыны көрінеді.

Іс жүзінде $R = r$ болып, (10.22) қатарында $(-R;\ R)$ абсолют жинақты, $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ жиында жинақсыз болатын R санын табу керек. R саны келесі теорема жәрдемімен анықталады.

Теорема 10.14. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$ ақырлы шек бар болса, онда (10.22) дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{10.25}$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ қатарды қарастырайық. Шарт бойынша $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$ ақырлы шек бар. Бұл шекті $\frac{1}{R}$ арқылы белгілейік. Онда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{R}.$$

x-тің мәнінде (10.22) берілген дәрежелік қатар сандық қатар болады. Сондықтан Даламбер белгісі бойынша $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ қатар $\frac{|x|}{R} < 1$ болғанда, яғни $|x| < R$ болғанда жинақты.

Онда теорема 10.13 бойынша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ айнымал таңбалы қатар да $|x| < R$ болғанда жинақты, әрі абсолют жинақты болады. $|x| > R$ болғанда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ қатар жинақсыз, себебі $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{R} > 1$. Яғни берілген қатардың жалпы мүшесі $a_n x^n$, $n \to \infty$ болғанда нөлге ұмтылмайды. Сонымен, берілген қатар $(-R;\ R)$ интервалдың ішінде абсолют жинақты, ол оның сыртында жинақсыз. Яғни, берілген дәрежелік қатардың жинақтылы радиусы $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Теорема 10.15 (Коши-Адамар). Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\neq 0$ ақырлы шек бар болса, онда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{10.26}$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. Бұл теореманың дәлелдеуі теорема 10.14 дәлелдеуі сияқты. Тек Даламбер белгісінің орнына Коши белгісі алынады.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ қатарды қарастырайық. Шарт бойынша $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\neq 0$ ақырлы шек бар, оны $\frac{1}{R}$ деп белгілейік. Онда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|x|}{R}$$

x-тің әрбір мәніндегі сандық қатар $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ Коши белгісі бойынша $\frac{|x|}{R}<1$ болғанда, яғни $|x|<R$ болғанда жинақты, онда теорема 10.12 бойынша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0 x^n$ айнымал таңбалы қатар $|x|<R$ болғанда жинақты, әрі абсолют жинақты. $|x|>R$ болғанда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\frac{|x|}{R}>1$ болып, қатар жинақтылығын қажетті шарты орындалмайды, яғни жалпы мүше $n \to \infty$ нөлге ұмтылмайды.

Сонымен абсолют жинақтылық радиусы $R=\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

(10.26) формула Адамар формуласы деп аталады.

Ескертулер:

4.1. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ болса, $R=\infty$ болып, берілген (10.22) дәрежелік қатар сан осінің барлық нүктелерінде абсолют жинақты болады. Егер

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$ болса, $R=0$ болады. Бұл тұжырымдарға көз жеткізуге болады.

4.2. (10.23) дәрежелік қатардың абсолют жинақтылық аймағы $|x-x_0|<R$ теңсіздіктен шығады, яғни $(x_0-R;x_0+R)$ аралығы.

4.3. Егер (10.22) дәрежелік қатарға x-тің кейбір (барлығы бірдей) дәрежелері кірмесе, онда (10.25), (10.26) формулаларын қолдануға болмайды. Тікелей Даламбер немесе *Коши белгілерін* қолдану керек.

4.4. $x=\pm R$ нүктелерінде (10.22) қатардың жинақтылығы қосымша зерттеледі. Осы сияқты $x=x_0\pm R$ нүктелерінде де (10.23) қатардың жинақтылығы қосымша зерттеледі.

Мысал 4.1. Қатарлардың жинақтылық аймақтары табылсын:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}x^{2n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$

Шешуі. а) $a_n=\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$, $a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}$; болғандықтан (10.25) формула бойынша

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n-1}\sqrt{n}}{3^n\sqrt{n+1}}\cdot 1\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}}=\frac{1}{3}\cdot 1;$$

Демек, $R=3$, яғни абсолют жинақталу жиыны $-3<x<3$.

Онда берілген қатар Даламбер белгісі бойынша $|x|>3$ болғанда жинақсыз. $x=\pm 3$ шекаралық нүктелерді қосымша зерттейміз. $x=-3$ мәнінде берілген қатарға сәйкес $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}$ сандық қатар $\alpha=\frac{1}{2}$ болған жалпыланған гармониялық қатар (мысал 2.5) жинақсыз.

$x=3$ мәнінде берілген қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3}{\sqrt{n}}$ түріндегі ауыспалы таңбалы қатар болып, Лейбниц теоремасы бойынша шартты жинақты. Демек, берілген қатардың жинақтылық аймағы $-3 < x \leq 3$ болып $-3 < x < 3$ болғанда абсолют жинақты, $x = 3$ болғанда шартты жинақты.

б) Мұнда $a_n = \frac{2^n n!}{(2n)!}$; $a_n = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}$ болғандықтан (10.25) формуласы бойынша

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^n\cdot n!}{2n!}}{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+2)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{2(n+1)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+6n+2}{2n+2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2\left(4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n\left(2+\dfrac{2}{n}\right)}\right| = \infty.$$

Демек, жинақтылық аймағы $-\infty < x < +\infty$, яғни барлық сан осі.

в) Бұл $(x+8)^3$ өрнекке байланысты дәрежелі қатар, мұнда $a_n = \frac{1}{n^2}$; $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$. Онда (10.25) формуласы бойынша

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2}\right| = 1.$$

Яғни, абсолют жинақтылық аймағы $|x+8|^3 < 1; |x+8| < 1; -1 < x+8 < 1$. Немесе $-9 < x < 7$. $x = -9$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{3n}}{n^2}\right|$ ауыспа таңбалы сандық қатар шығады. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n^2} = 0$ және $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+1)^3} > \dots$ шарттары орындалғандықтан, Лейбниц теоремасы бойынша жинақты әрі модулі бойынша $\alpha = 2$ болатын жалпыланған гармониялық жинақталатын қатар.

Сондықтан, бұл нүктеде берілген қатар абсолют жинақталады.

$x=-7$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сандық қатар шығады. Бұл қатар $\alpha = 2$ болатын жалпыланған гармониялық абсолют жинақталатын қатар (мысал 2.5).

Демек, берілген қатардың жинақтылық аймағы $-9 \le x \le -7$ әрі осы аймақта абсолют жинақты.

г) Бұл қатарды $(2x - 3)$ өрнектің барлық дәрежелері кірмей отыр. Сондықтан 4.1 ескерту бойынша берілген дәрежелік қатарға тікелей Даламбер белгісін қолданамыз.

Қатардың n-мүшесін $U_r = 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}(n+1)$ мүшесін $U_{n+1} = 10^{2n+2}(2x-3)^{2n+1}$ деп алып Даламбер белгісін қолданамыз:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 10^2(2x-3)^2 \quad L < 1 \text{ болғанда жинақты.}$$

$$10^2(2x-3)^2 < 1 \Rightarrow |2x-3| < 0,1; \Rightarrow -0,1 < 2x-3 < 0,1 \Rightarrow 1,45 < x < 1,55.$$

Шекара нүктелерді зерттейміз.

$x = 1,45$ мәнді қатарға қойсақ,

$-10\ -10\ -10 \ldots -10 \ldots$ жинақсыз қатар шығады.

$x = 1,55$ мәнді қатарға қойсақ,

$+10+10+10+\ldots+10 \ldots$ жинақсыз қатар шығады.

Демек, берілген қатардың жинақтылық (абсолют) аймағы $1,45 < x < 1,55$

Мысал 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ қатар жинақтылыққа зерттелсін:

Шешуі. (10.26) Коши-Адамар формуласы бойынша жинақтылық радиусын табамыз.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$$

Демек, $x < \frac{1}{e}$ болғанда берілген қатар абсолют жинақты. $x = \frac{1}{e}$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$ санды қатар шығады. Бұл қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды. Шынында да

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-n}=e^{\left[-n+n^2 ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}=e^{\left|-n+n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right|}\to e^{-\frac{1}{2}},n\to\infty$$

Сонымен $x=\frac{1}{e}$ нүктесінде берілген қатар жинақсыз. Осы сияқты $x=-\frac{1}{e}$ нүктесінде де берілген қатар жинақсыз. Демек, берілген қатар $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ аралықта абсолют жинақты, сан осінің басқа нүктелерінде жинақсыз.

Дәрежелік қатарлардың қасиеттері

$f(x)$ функциясы $(-R;\ R)$ аралығанда жинақталушы (10.22) қатардың қосындысы болсын:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n \qquad (10.27)$$

Бұл жағдайда $f(x)$ функциясы (10.22) дәрежелік қатарға жіктелді немесе x-тің дәрежелері бойынша жіктелді деп айтылады.

Негізгі қасиеттерді дәлелдеусіз келтіреміз ([4], 4. II, гл. 1, § 4)

Теорема 10.16. $(-R;\ R)$ аралығында жинақталушы (10.27) дәрежелік қатардың қосындысы $f(x)$ функциясы осы аралықта үзіліссіз функция болады.

Теорема 10.17. $(-R;\ R)$ аралығында жинақталатын (10.27) дәрежелік қатардың қосындысы $f(x)$ функциясы $(-R;\ R)$ аралықта дифференциалданушы функция және қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады:

$$f'(x)=\left(\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^{n-1}$$

Теорема 10.18. (10.27) қатардың қосындысы $f(x)$ функциясы, оның $(-R;\ R)$ жинақталу аралығында кез келген ретті туындыға ие.

Теорема 10.19. $(-R;\ R)$ аралығында жинақталушы (10.27) дәрежелік қатарды кез келген $[\alpha;\beta]\subset[-R;R]$ кесіндіде мүшелеп интегралдауға болады; яғни

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}a_nx^ndx$$

Ескерту 4.6. (10.22) дәрежелік қатарлар үшін келтірілген қасиеттер (10.23) түріндегі дәрежелік қатарлар үшін де орынды.

4.2 Тейлор мен Маклорен қатарлары және олардың жинақталуы

Егер $f(x)$ функциясы $x=a$ нүктесінің кейбір маңайында $(n+1)$ ретке дейінгі туындылары бар болса (теорема 6.14) онда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \qquad (10.28)$$

Тейлор формуласы орынды еді, мұндағы

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),\ 0<\theta<1$$

Лагранж түріндегі қалдық мүше.

(10.28) формуланы $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ түрінде жазамыз,

мұндағы $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Тейлор көпмүшесі.

Анықтама 4.3. Егер $f(x)$функциясы $x = a$ нүктесінде ақырсыз ретті туындыға ие және $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ болса, онда (10.28) Тейлор формуласынан алынатын.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (10.29)$$

қатар $f(x)$ функциясын $(x - a)$-ның дәрежелері бойынша жіктейтін Тейлор қатары деп аталады.

Дербес жағдайда $a = 0$ болса, (10.28) Тейлор формуласын

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \qquad (10.30)$$

Маклорен формуласы деп атайды, мұндағы қалдық мүше $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x)$,ал Тейлор қатарын Маклорен қатары деп атайды:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (10.31)$$

Атап кететін жағдай, $x = a$ нүктесінің маңайында ақырсыз ретті туындысы бар (қажетті шарт) $f(x)$ функцияға сәйкес Тейлор қатарын құруға болады, бірақ бұл қатардың қосындысы $f(x)$-ке тең болмауы, тіпті жинақсыз болуы мүмкін. Мысалы

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$$

Функциясының $x = 0$ нүктесінде барлық ретті туындылары бар, әрқандай n үшін $f^{(n)}(0) = 0$. Яғни Маклорен қатары

$$0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+...+\frac{0}{n!}x^n+...$$

түрінде болады. Бұл қатардың қосындысы 0-ге тең, бірақ $f(x)$-ке тең емес. Берілген $f(x)$ функцияға сәйкес оның Тейлор қатарын жазайық:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+... \quad (10.29)$$

Теорема 10.20. $f(x)$ функциясына сәйкес (10.29) Тейлор қатарының x нүктесінде $f(x)$)-ке жинақталуы үшін осы x нүктесінде (10.28) теңдіктегі қалдық мүшенің шегі $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$ шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттелігі. a_0 нүктесінің кейбір маңайында (10.29) Тейлор қатары $f(x)$-ке жинақталсын, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$. (10.29) қатардың дербес қосындысы $S_n(x)$. Тейлор көпмүшелігі $P_n(x)$-пен дәлме-дәл келеді, яғни $S_n(x)=P_n(x)$. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-P_n(x)\right)=f(x)-\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Жеткіліктілігі. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)=0$ болсын. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty} P_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f_n(x)-R_{n+1}(x)]$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=f(x)-0=f(x)$$

Сонымен, x нүктесінде (10.29) Тейлор қатарының $f(x)$ функциясына жинақталуы $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$ шарттың орындалуына келтірілді. Іс жүзінде, бұл шартты тексеру қиын болған жағдайларда келесі жеткілікті шарттан пайдаланылады.

Теорема 10.21. Егер $f(x)$ функциясының барлық туындыларының модулі x_0 нүктесінің кейбір маңайында бір ғана $M>0$ санымен шенелсе, онда осы маңайдың кез келген нүктесінде $f(x)$ функциясының Тейлорр қатары $f(x)$ функциясына жинақталады, яғни (10.29) теңдік орындалады.

Дәлелдеуі. Теорема 10.20 бойынша, $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$ екендігін көрсету жеткілікті.

Теорема 10.21 шарты бойынша кез келген n үшін $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$. Сонда:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\lim_{n\to\infty} M\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=M\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$ Енді

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=0$ екендігін көрсетейік. Ол үшін $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left|(x-x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!}$ қатарды қарастырайық. Бұл (10.23) түріндегі дәрежелік қатардың жалпы мүшесін $U_n(x) = \dfrac{\left|(x - x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!}$ деп алсақ,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!} : \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\cdot|x-x_0|\right) = |x-x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0 < 1$$

болғандықтан Даламбер белгісі бойынша бұл дәрежелік қатар $(-\infty,+\infty)$ аралығында жинақты болады.

Сондықтан қатар жинақтылығының қажетті шарты бойынша

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0\text{. Демек, } \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

4.3. Элементар функцияларды Маклорен қатарына жіктеу

Берілген $f(x)$ функциясын (10.31) Маклорен қатарына жіктеу үшін (10.30) Маклорен формуласының негізінде, келесі амалдарды орындау керек:

а)$f'(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ ... туындыларды табу;

б) осы туындылардың $x_0 = 0$ нүктедегі мәнін есептеу;

в) функцияның (10.31) түріндегі Маклорен қатарын жазып, жинақтылық интервалын табу;

г) ішкі нүктелерінде қалдық мүшенің шегі $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ болатын $(-R;\ R)$ жинақтылық интервалын анықтау; бұл интервал бар болса, интервал нүктелерінде қатардың қосындысы функцияның мәніне тең болады;

д) $x = \pm R$ нүктелерді жинақтылыққа қосымша зерттеу.

Кейбір элементар функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі мен жинақтылық аймағын көрсетейік.

Теорема 10.22. Функциялардың Маклорен қатарына жіктелуінің келесі формулалары орынды:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{2!} + \ldots x \in (-\infty; +\infty) \qquad (10.32)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots x \in (-\infty; +\infty) \qquad (10.33)$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots x \in (-\infty; +\infty) \qquad (10.34)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$x \in \begin{cases} [-1;1], \alpha \geq 0, \text{ болса}, \\ (-1;1], -1 < \alpha < 0, \text{ болса}, \\ ((-1;1], \alpha \leq -1, \text{ болса}. \end{cases} \tag{10.35}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad x \in (-1;+1); \tag{10.36}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad x \in (-1;\ 1]; \tag{10.37}$$

$$\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1;\ 1]; \tag{10.38}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$+ \frac{1\ \ 3 \cdot 5\ \ \ldots \cdot (2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots 4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots. \quad x \in [-1;1]. \tag{10.39}$$

Формулалардын дәлелдеуі

(10.32): $f(x) = e^x$ болсын.

а) $f'(x) = e^x, f^{(2)}(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x, \ldots;$

б) $f(0) = 1, f'(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1, \ldots;$

в) $e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ \ldots\ + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots;$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Яғни жинақтылық интервалы $(-\infty;\ +\infty)$;

г) барлық $x \in (-R;\ R)$ нүктелері үшін кез келген R-де $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R = M$. Теорема 10.21 бойынша $(-R;\ R)$ аралықта барлық ретті туындылар бір ғана $M = e^R$ санымен шенелген, сондықтан (10.32) қатар жинақты. Олай болса, теорема 10.20 бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Демек, (10.32) теңдік, орынды. Жинақтылық интервалы $(-\infty;\ +\infty)$.

(10.33): $f(x) = \sin x$ болсын.

а) $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(2)}(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

$f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \ldots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \ldots$

б) $f^{(n)}(0) = \sin n \cdot \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0,2,4,6, \ldots \\ -1, & n = 3,7,11, \ldots \\ +1 & n = 1,5,9, \ldots \end{cases}$

в) $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+3)}{x^2}\right| = \infty.$$

Яғни, жинақтылық интервалы $(-\infty;\ +\infty)$;

г) Кез келген n үшін $|f^{(n)}(x)| = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\big) \le 1$. Сондықтан (10.33) қатар теорема (10.21) бойынша жинақты. Онда теорема (10.20) бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ болып, (10.33) теңдіктің дұрыстығы шығады.

(10.34): $f(x) = \cos x$ болсын.

Дәрежелік қатардың қасиетін (Теорема 10.18) пайдалансақ, яғни (10.33) теңдікті дифференциалдасақ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

(10.35): $f(x) = (1+\ x)^\alpha,\ \ \alpha \in R$ болсын.

а) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f^{(2)}(x) = \alpha\big(\alpha-1\big)(1\ +\ x)^{\alpha-2}, \ldots, f^{(n)}(x) =$

$$= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)(1+\ x)^{\alpha-n}, \ldots,\quad n\ \in N;$$

б) $f(0) = 1,\ f'(0) = \alpha,\ f^{(2)}(0) = \alpha\big(\alpha-1\big), \ldots, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1), \ldots;$

в) $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots;$

г) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\cdot(\alpha-n)}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{\alpha-n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\dfrac{\alpha}{n}-1\right)}\right| = 1,$ яғни $(1+\alpha)^\alpha$ функциясы үшін құрылған қатар $(-1;\ 1)$ аралықта жинақталады. $x \in (-1;\ 1)$ болғанда $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ екендігін көрсетуге болады. Демек, кез келген $\alpha \in R$ үшін жинақтылық интервалы $(-1;\ 1)$ болады. $\alpha \ge 0$ болғанда $x = \pm 1$ нүктелерінде де сәйкес сандық қатарлар Даламбер белгісі бойынша жинақты, $-1 < \alpha < 0$ болса, $(-1;\ 1]$ аралықта жинақты болады.

(10.36): $f(x)\ = \frac{1}{1-x}$ болсын.

Бұл формуланы әртүрлі жолмен дәлелдеуге болады. Мысалы (10.35) формулада $\alpha = -1$ деп, x-ті $(-x)$-ке ауыстыру арқылы. Жинақтылық интервалы (–1; 1).

(10.37): $f(x) = \ln(1+x)$ болсын.

Бұл формуланы да әртүрлі жолмен дәлелдеуге болады. Солардың біреуін келтірейік.

Барлық $x \in (-1;\ 1)$ нүктелері үшін орынды

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad n = 0{,}1{,}2, \ldots$$

теңдікті қарастырайық. Дәрежелік қатардың қасиетін (Теорема 10.19) пайдалансақ, яғни соңғы теңдікті $[0;\ x], x \in (-1;\ 1)$ кесіндіде интегралдасақ:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \cdots$$

болады, немесе

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Бұл қатар $x = 1$ болғанда Лейбниц теоремасы бойынша жинақты.

Демек, жинақтылық интервалы $(-1;\ 1]$.

(10.38): $f(x) = \operatorname{arctg} x$ болсын.

(10.35) формулада $\alpha = -1$ деп, x –ті x^2 қа ауыстырайық. Сонда

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \ , x \in (-1;\ 1).$$

Дәрежелік қатардың қасиетін пайдаланып (теорема 10.19) соңғы теңдікті $[0, x]$, $x \in (-1;\ 1)$ кесіндісінде интегралдасақ,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x 1 \cdot dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt + \cdots$$

немесе,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1) \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Бұл теңдік $x = \pm 1$ болғанда да, Лейбниц теоремасы бойынша, орындалады. Демек, жинақтылық интервалы $[-1;\ 1]$.

(10.39): $f(x) = \arcsin x$ болсын.

(10.35) формулада $\alpha = -\frac{1}{2}$ деп, x-ті $(-x^2)$-қа ауыстырсақ келесі теңдік шығады,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \cdots. \quad x \in (-1; 1)$$

Бұл теңдікті (Теорема 10.19) $[0;\ x], x \in (-1;\ 1)$ кесіндіде интегралдасақ,

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x 1 \cdot dt + \int_0^x \frac{t^2}{2} dt + \int_0^x \frac{1\ \ 3}{2 \cdot 4} t^4 dt + \cdots$$

немесе

$$\arcsin x = x + \frac{1\cdot}{2\cdot 3}\frac{x^3}{3} + \frac{1\ \ 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots \frac{1\ \ 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$x = -1$ болғанда, Лейбниц қатары жинақталады. $x = 1$ болғанда да алынған сандық қатар жинақты. Демек, (10.39) теңдік, $x \in [-1;\ 1]$ нүктелерде орындалады.

Ескерту 4.7. (10.32)-(10.39) қатарларды қосу, азайту, көбейту, дифференциалдау және интегралдау ережелерін комбинациялау арқылы басқа да функцияларды Маклорен (Тейлор) қатарына жіктеуге пайдалануға болады.

Мысалы, arcctg$x$ функциясының Маклорен қатары (10.38) формуласы сияқты. Ал arccos x функциясынықі (10.39) формуласы сияқты шығарылады.

Мысал 4.3. $f(x) = 2^x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x\cdot\ln 2}$ болғандықтан (10.32) формулада x айнымалды, $x\ln 2$ өрнекке ауыстырса,

$$2^x = 1 + \frac{\ln 2}{1!}x + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 2}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\ln^n 2}{n!}x^n + \cdots; \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Мысал 4.4. $f(x) = \ln(3-x)$ функциясының Маклорен қатарын жазу керек.

Шешуі: $f(x) = \ln(3-x) = \ln 3\left(1-\frac{x}{3}\right) = \ln 3 + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right) = \ln 3 + \ldots + \ln\left[1+(-\frac{x}{3})\right]$ болғандықтан, (10.36) формулада x айнымалды $\left(-\frac{x}{3}\right)$-ке ауыстырсақ,

$$\ln(3-x) = \ln 3 + \left(-\frac{x}{3}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^3}{3} - \ldots \text{ немесе,}$$

$$\ln(3-x) = \ln 3 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} - \cdots;$$

Мұнда $-1 < -\frac{x}{3} \le 1$, яғни $-3 \le x < 3$.

Мысал 4.5. $f(x) = \frac{3}{4-x}$ функциясының Маклорен қатарын жазу керек.

Шешуі. (10.36) формуланы пайдаланамыз.

$f(x) = \frac{3}{4-x} = \frac{3}{4\left(1-\frac{x}{4}\right)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}$ деп түрлендіріп, (x)-ті $\frac{x}{4}$ -ке ауыстырсақ (10.36) формула бойынша,

$$\frac{3}{4-x} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\right) = \frac{3}{4}\left[1 + \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots\right],$$

немесе

$$\frac{3}{4-x} = \frac{3}{4}\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots + \frac{3}{4}\frac{x^n}{4^n} + \cdots,$$

мұнда $-1 < \frac{x}{4} < 1$, яғни $-4 < x < 4$.

4.4. Дәрежелік қатарлардың кейбір қолданулары

1. Функция мәндерін жуықтап есептеу

$f(x)$ функциясының $x = x_1$ нүктесіндегі мәнін берілген $\varepsilon > 0$ дәлдікпен есептеу керек болсын.

Егер $f(x)$ функциясын $(-R;\ R)$ аралығында дәрежелік қатарға жіктеу мүмкін болса,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

және $x_1 \in (-R;\ R)$ болса, онда $f(x_1)$ шаманың дәл мәні,

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n + \ldots$$

болып, ал жуық мәні дербес қосынды $S_n(x_1)$, яғни

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n$$

шама болады. n өскен сайын соңғы жуық теңдіктің дәлдігі артады. Мұндағы абсолют қате қатар қалдығының модуліне тең болады, яғни

$$R_{n+1}(x_1) = |f(x_1) - S_n(x_1)| = |a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + \cdots|$$

Сөйтіп, $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ абсолют қатені $R_{n+1}(x)$ қалдық қатарды бағалау арқылы табуға болады. Лейбниц қатарлары үшін $\left|R_{n+1}(x_1)\right| \le \left|a_{n+1}x_1^{n+1}\right|$ екендігі белгілі (Лейбниц теоремасы, салдар 3.1).

Басқа жағдайларда, мүмкіндігінше, мажоронта қатарлар тауып, осы қатардың қалдық қатарының қосындысы $|R_{n+1}(x)|$ шаманы бағалайды.

Мысал 4.6. e санын $10^{-2} = \varepsilon$ дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. (10.32) формулада $x = 1$ десек $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ Бұл теңдікті $e = S_n + R_{n+1}(x)$ деп жазып, $R_{n+1}(x)$ қалдық мүшені бағалайық:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n! \cdot n},$$

яғни $R_{n+1}(x) < \frac{1}{n! \cdot n}$. Мұнда кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын $q = \frac{1}{n+1}$ үшін қолдандық. Енді $\frac{1}{n! \cdot n} < 0{,}001$ теңсіздік орындалатындай n натурал санды табу керек. Бұл теңсіздік $n \ge 6$ болғанда орындалады. Сондықтан,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$$

Мысал 4.7. π санын $\varepsilon = 10^{-4}$ дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$ екенін ескеріп, (10.39) формулада $x = \frac{1}{2}$ деп алсақ,

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{(3n+1)}n!\ (2n+1)};$$ мұнда $(2n - 1)!! = 1\ \ 3 \cdot 5\ldots$

Бұл қатардың қалдық қатары үшін

$$R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!\,(2k+1)} x^{2n} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{3 \cdot 2^{3k+1}(k+1)!\,(2k+1)}$$

бағалау орынды болғандықтан және $\frac{6\cdot(2n+1)!!}{3\cdot 2^{3n+2}(n+1)!(2n+1)} < 10^{-4}$ теңсіздің $n \ge 4$ болғанда орындалатындықтан $\frac{\pi}{6}$ санының жуық мәнін керекті дәлдікпен алу үшін жіктелуде алынған сандық қатардың алғашқы бес мүшесінің қосындысын алу жеткілікті:

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{72 \cdot 8192} = 0{,}52359. \text{ Осыдан } \pi \approx 3{,}1415.$$

2. Анықталған интегралдарды жуықтап есептеу

Алғашқы функция ақырлы түрде элементар функциялар арқылы өрнектелмеген жағдайда анықталған интегралдарды жуықтап есептеуде дәрежелік қатарлар қолданылады.

$\int_a^b f(x)dx$ анықталған интегралды $\varepsilon > 0$ дәлдікпен есептеу керек болсын.

Егер интеграл астындағы $f(x)$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу мүмкін болып, жинақталу аралығы $(-R;\ R)$ болса және $[a;\ b] \subset (-R;\ R)$ болса, онда берілген интегралды есептеу үшін бұл қатарды мүшелеп интегралдау қасиетін пайдалануға болады. Есептеудің қатесі функцияның мәнін есептегендей анықталады.

Мысал 4.8. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ анықталған интегралды $\varepsilon = 0{,}001$ дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. (10.32) жіктелуде x-ті $(-x^2)$-пен ауыстырсақ e^{-x^2} функциясының жіктелуі

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

түріндегі қатар болады. Бұл абсолют жинақталушы қатарды $[0;\ 1] \in (-\infty;\ +\infty)$ кесіндіде мүшелеп интегралдауға болады:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right) dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} + \cdots$$

Бұл Лейбниц қатары, сондықтан алғашқы k мүшелерінің қосындысының жуық мәнін есептегенде, абсолют қате $(k+1)$ мүшесінің модулінен артпайды. Осы шарттан керекті k санын табамыз: $\frac{1}{(k+1)(2k+1)} \leq 0{,}001$, бұдан $k \geq 4$.

Демек, $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0{,}747.$

§ 5. Фурье қатарлары

5.1. Ортонормаланған функциялар жүйесі және жалпы түрдегі Фурье қатары түсінігі

$f(x)$ функциясын дәрежелік қатарға жіктеуді,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^2(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \qquad (10.40)$$

$f(x)$ функциясының $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ ақырсыз базис бойынша жіктелуі деп қарауға болады. (10.31) формуланы шығарғанда, бұл теңдік орындалуы үшін $f(x)$ функциясының $x = 0$ нүктесінде ақырсыз туындыларға ие болуы және қалдық қатар

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + \cdots$$

үшін $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ шарты орындалуы қажет еді. Яғни базистік функциялар дәрежелік қатарға жіктелуші функциялар жиынын тарылтады. Мәселен, үзіліссіз функцияларды, дәрежелік қатарға жіктеуге болмайды.

Сонымен қатар нақты дүниедегі көптеген құбылыстар периодты процессті құрайды. Ал мұндай процесстерді дәрежелі қатар түрінде өрнектеуге болмайды. Сондықтан қатарға жіктеуді кеңейту қажеттігі туды.

$[-l;\ l]$ кесіндіде интегралданатын барлық функциялар жиыны $L[-l;\ l]$ кеңістікті қарастырайық, яғни $\int_{-l}^{l} |f(x)dx| < \infty$ болса, $f(x) \in L[-l;l]$.

Мысалы, үзіліссіз функциялар, ақырлы бірінші текті үзіліс нүктелері бар бөлікті-үзілісті функциялар.

Анықтама 5.1. $f(x) \in L[-l;\ l]$, $g(x) \in L[-l;\ l]$ функцияларының скаляр көбейтіндісі деп,

$$(f, g) = \int_{-l}^{l} f(x) \cdot g(x) dx \qquad (10.40)$$

теңдікпен анықталған санды атайды.

(10.40) скаляр көбейтінді геометриялық векторлардың скаляр көбейтіндісінің барлық қасиеттеріне ие:

1. $(f, g) = (g, f)$.

2. $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$

3. $(\lambda f,g)=\lambda(f,g),\ \lambda\in R.$

4. $(f,f)\geq 0.$

Анықтама 5.2. $f(x)\in L[-l;\ l]$ функциясының $\|f\|$ нормасы деп

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx} \tag{10.41}$$

теңдікпен анықталған санды атайды.

Анықтама 5.3. Егер $f(x)\in L[-l;\ l]$ пен $g(x)\in L[-l;\ l]$ функцияларының скаляр көбейтіндісі

$$(f,g)=\int_{-l}^{l}f(x)\cdot g(x)dx=0 \tag{10.42}$$

болса, онда $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары $[-l;\ l]$ кесіндіде ортогональ функциялар деп аталады.

Анықтама 5.4. Егер $L[-l;\ l]$ кеңістіктегі

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x),\dots\}$$

функциялар жүйесінің кез келген әртүрлі екеуінің $[-l;\ l]$ кесіндісіндегі скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса және әрқайсысының нормасы бірге тең болса онда бұл жүйені $[-l;\ l]$ кесіндісінде ортонормальданған жүйе деп атайды.

Атап өтейік, $L[-l;\ l]$ кеңістігінде ортогональ жүйелер ақырсыз көп функциялардан құралады. $L[-l;\ l]$ кеңістігінде ортонормоланған жүйеге мысал ретінде тригонометриялық жүйе деп аталушы

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2l}},\varphi_{2n-1}(x)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{l}nx\right)}{\sqrt{l}},\varphi_{2n}(x)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{l}nx\right)}{\sqrt{l}},n=1,2,3\dots \tag{10.43}$$

жүйені келтіруге болады.

Анықтама 5.5. Кез келген $f(x)\in L[-l;\ l]$ функциясының $L[-l;\ l]$ кеңістікте ортонормаланған $\{\varphi_n(x)\}$ жүйе бойынша Фурье қатары деп

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x) \tag{10.44}$$

түріндегі қатарды атайды, мұндағы f_n сандары $f(x)$ функциясының $\{\varphi_n\}$ жүйе бойынша Фурье коэффициенттері деп аталып,

$$f_n=(f,\varphi_n)=\int_{-l}^{l}f(x)\varphi_n(x)dx \tag{10.45}$$

теңдікпен анықталады.

5.2. 2π периодты функцияны тригонометриялық Фурье қатарына жіктеу

Кез келген периодты функцияны тригонометриялық қатар деп аталушы

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x +$$

$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (10.46)$$

қатар түрінде жіктеп жазуға болады, мұндағы a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, ..)$ қатардың коэффициенттері деп аталады.

(10.46) қатарды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) \qquad (10.47)$$

түрінде жазуға болады. Шынында да $a_n = A_n \sin\varphi_n$, $b_n = A_n \cos\varphi_n$ десек $a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx + \varphi_n)$ болып (10.46) қатар (10.47) қатар түріне келтіреледі, мұнда $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ және $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$ Келесі алынатын формулаларды бір тәрізді болуы үшін бос мүше $\frac{a_0}{2}$ түрінде жазылды.

Келесі жағдайларды атап өтейік.

1. (10.46) тригонометриялық қатарды құраушы

$$\frac{1}{2}, \cos x\,, \sin x\,, \cos 2x\,, \sin 2x\,, \ldots, \cos nx\,, \sin nx\,, \ldots \qquad (10.48)$$

функциялар жүйесі 2π периодты функциялар. Өйткені $\cos nx$ және $\sin nx$ функцияларының периоды $\frac{2\pi}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$, демек $2\pi = n \cdot \frac{2\pi}{n}$ барлық функциялардың да периоды болады.

2. (10.46) қатардың $S_n(x)$ дербес қосындылары да 2π-периодты функциялардың қосындысы болғандықтан 2π-периодты функция болады. Демек, (10.46) қатар $[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде жинақты болса, оның қосындысы да 2π-периодты функция болады, яғни қатар $(-\infty;\ +\infty)$ интервалда жинақты болады. Сондықтан периодты процесстерді түсіндіріп жазатын периодты функцияларды үйренуде тригонометриялық қатарлар ыңғайлы.

Периодты процесстерге машина деталдары мен приборларының тербелмелі және айнымалы қозғалыстары, элементар бөлшектердің периодты қозғалыстары, акустикалық және электромагниттік тербелістер, т.б. жатады.

3. (10.48) жүйенің әртүрлі екі мүшесі ортогональ. Шынында да,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos nx dx = \left\{ \frac{1}{2n} \sin nx \right|_{-\pi}^{\pi} = 0. \ \ (n \neq 0) \qquad (10.49)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \ , \quad (n = 0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin nxdx = -\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \ \left(\forall n \in N\right) \qquad (10.50)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)\,x + \cos(m-n)\,x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 0, (m \neq n) \\ \pi, (m = n) \end{cases} \qquad (10.51)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)\,x + \sin(m-n)\,x]dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m+n)x}{m+n} + \cos\frac{(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \ \left(\forall n \in N\right) \quad (10.52)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)\,x + \cos(m+n)\,x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{(m-n)x}{m-n} - \cos\frac{(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 0, (m \neq n) \\ \pi, (m = n) \end{cases} = 0 \ \left(\forall n \in N\right) \quad (10.53)$$

Ескерту 5.1. 3-тармақтағы тұжырым интегралдау аймағы $[0;\ 2\pi]$ болғанда да орынды.

Енді кезкелген 2π-периодты $f(x)$ функциясын тригонометриялық Фурье қатарына жіктеуді қарастырайық.

Теорема 10.23. Егер $f(x)$ функциясы $[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде интегралданушы функция болса және әрбір мүшесін интегралдауға болатын

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (10.54)$$

тригонометриялық қатарға жіктелсе, онда бұл жіктеу жалғыз ғана болады.

Дәлелдеуі. (10.60) теңдіктің екі жағын да $[-\pi;\ \pi]$ кесінді бойынша интегралдасақ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx]$$

теңдік шығады. Бұдан, (10.49), (10.50) теңдіктері ескерсек,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (10.55)$$

a_m коэффициенттерді табу үшін (10.54) теңдікті $\cos mx$-қа көбейтіп, $[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде интегралдаймыз. Онда (10.51), (10.52) формулаларды ескерсек, $m = n$ болғанда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\,dx\right) = a_n\pi$$

теңдік шығады. Бұл теңдіктен

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1,2,3,... \qquad (10.56)$$

Осы сияқты (10.54) теңдікті $\sin mx$-қа көбейтіп, $[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде интегралдасақ (10.51), (10.52) формулалар негізінде $(m = n)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,3,... \qquad (10.57)$$

Сонымен, a_0, a_n, b_n коэффициенттері бір мәнді анықталғандықтан (10.54) жіктеу жалғыз ғана болады.

Анықтама 5.6. $f(x)$ функциясы $[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде анықталған және интегралданушы функция болса, онда (10.55), (10.56), (10.57) формулаларымен табылған a_0, a_n, b_n сандары Фурье коэффициенттері деп аталады, ал коэффициенттері осы сандар болған

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

қатар $f(x)$ функциясының тригонометриялық Фурье қатары деп аталады:

$[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде интегралданушы $f(x)$ функциясы үшін

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

сәйкестік түрінде жазады.

Анықтама 5.7. 2π-периодты, барлық сан осінде анықталған $F(x)$ функциясы $[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде $f(x)$ функцияға тең болса, яғни $F(x) = f(x)$, онда $F(x)$ функциясын $f(x)$ функциясының 2π -периодты жалғастыруы деп атайды.

Егер $[-\pi;\ \pi]$ кесіндіде тригонометриялық Фурье қатары $f(x)$ функцияға жинақталса, онда ол қатар барлық сан өсінде $F(x)$ функцияға жинақталады.

Негізгі мәселе; қандай шарттар орындалғанда қатардың қосындысы $S(x) = f(x)$ болады.

Бұл сұраққа жеткілікті шартты тұжырымдайтын келесі теорема жауап береді.

Теорема 10.24 (Дирихле). Егер $f(x)$ және оның туындысы $f'(x)$ функциялары $[-\pi;\ \pi]$ кесіндісінде үзіліссіз, немесе ақырлы x_k нүктелерінде бірінші текті үзілісі бар болса, онда:

а) $f(x)$ функциясы үзіліссіз болған нүктелерінде,

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (10.58)$$

б) $f(x)$ функциясының бірінші текті үзіліссіз нүктелерінде

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k-0} f(x)+\lim_{x\to x_k+0} f(x)\right], \qquad (10.59)$$

в) $x=\pm\pi$ нүктелерінде, яғни кесіндінің шеткі нүктелерінде

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -\pi+0} f(x)+\lim_{x\to \pi-0} f(x)\right] \qquad (10.60)$$

Ескерту 5.2. 2π-периодты $F(x)$ жалғастыру функциясы үшін әрбір $x\in(-\infty;+\infty)$ нүктеде, (10.58), (10.59), (10.60) теңдіктердің біреуі орынды болады.

Ескерту 5.3. Дирихле теоремасы, ([1], Гл. 17. §5)-те дәлелденген теорема 18-дің дербес жағдайы.

Мысал 5.1. 2π-периодты $[-\pi;\pi]$ кесіндісінде анықталған

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ 2x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Бұл функция Дирихле шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан (10.54) Фурье қатарына жіктеледі. Қатардың коэффициенттерін табамыз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{0}+\left(\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{2\pi^2}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx\left|\begin{matrix}u=x\,,dv=\cos nx\,dx\\ du=dx,\quad v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx\left|\begin{matrix}u=x\,,dv=\cos nx\,dx\\ du=dx,\quad v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}dx\right]+\frac{2}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[0+\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0}\right]+\frac{2}{\pi}\left[0+\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = -\frac{3}{n\pi^2}[1-(-1)^n].$$

Осы сияқты, есептесек,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Онда (10.45) түріндегі $f(x)$ функциясының тригонометриялық Фурье қатары $(-\pi;\pi)$ интервалда, Дирихле теоремасы бойынша,

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$
$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

$x = \pm\pi$ нүктелерінде

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to-\pi+0}(-x) + \lim_{x\to-\pi-0} 2x\right] = \frac{1}{2}(\pi + 2\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

ал $f(-\pi) = \pi,\ f(\pi) = 2\pi$

5.3. Жұп және тақ функцияларды тригонометриялық Фурье қатарына жіктеу

Егер $f(x)$ функциясы $[-\pi;\pi]$ кесіндіде жұп функция болса, яғни $f(-x) = f(x)$, онда оның Фурье қатары

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (10.61)$$

түрінде болады, мұндағы

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, n \in N \qquad (10.62)$$

Егер $f(x)$ функциясы $[-\pi;\pi]$ кесіндіде тақ функция болса, яғни $f(-x) = -f(x)$, оның Фурье қатары

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (10.63)$$

түрінде болады, мұндағы

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx, n \in N \qquad (10.64)$$

Шынында да, егер $f(x)$ функциясы $[-\pi;\ \pi]$ симметриялық кесіндіде интегралданатын болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \begin{cases} 2\cdot\int_{0}^{\pi} f(x), & f(x) - \text{жұп функция болғанда} \\ 0, & f(x) - \text{тақ функция болғанда} \end{cases} \qquad (10.65)$$

екендігі айқын.

Егер $f(x)$ жұп функция болса, $f(x)\cos nx$ – жұп функция, себебі $f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx$, ал $f(x)\sin nx$ тақ функция, себебі $f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$.

Егер $f(x)$ тақ функция болса, онда $f(x)\cos nx$ – тақ , $f(x)\sin nx$ – жұп функция болады.

Онда (10.65) формуланы ескере отырып (10.55), (10.56), (10.57) формулалардан (10.61)–(10.64) формулаларды аламыз.

Мысал 5.2. $f(x) = 2x,\ x \in [-\pi;\ \pi],\ \mathrm{T} = 2\pi$ функцияны тригонометриялық Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $y = 2x$ функциясы Дирихле шарттарын қанағаттандырады, әрі тақ функция.

Демек,$a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,ал

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\sin nx dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin nx dx \\ v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx \,|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} \right)\cos \pi n,$$

яғни $b_n = \frac{4}{\pi}(-1)^{n+1}, n \in N$, Фурье қатарына тек синустар ғана кіреді:

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}(-1)^{n+1}\sin nx\,.\quad S(\pm\pi) = \frac{-2\pi + 2\pi}{2} = 0.$$

Демек, $x \in (-\pi;\ \pi)$ болғанда $S(x) = f(x)$;

$x = -\pi$ болғанда $f(-\pi) = -2\pi\,,\ S(-\pi) = 0$;

$x = \pi$ болғанда $f(\pi) = 2\pi,\ \ S(\pi) = 0$.

Мысал 5.3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2, x \in [-\pi; \pi], \mathrm{T} = 2\pi$, функцияны тригонометриялық Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Берілген функция $[-\pi;\pi]$ кесіндіде Дирихле шарттарын қанағаттандырады, әрі жұп функция. Сондықтан $b_n = 0$ болып, a_n коэффициенттері (10.62) формуламен табылады.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3\pi} = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\pi}x^2\cos nxdx\left|\begin{matrix} u = x^2,\ du = 2xdx \\ dv = \cos nx\,dx \\ v = \dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}2x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\cdot 0 - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\left|\begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \sin nx\,dx \\ v = -\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right] =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] = (-1)^n\cdot\frac{2}{n^2}.$$

Онда берілген функцияның Фурье қатары:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} - 2\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right).$$

Демек, $x \in (-\pi;\pi)$ болғанда $S(x) = f(x)$;

$x = \pm\pi$ болғанда $f(\pm\pi) = \frac{\pi^2}{2}, S(\pm\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = \frac{1}{2}\frac{2\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$

Сондықтан $x \in [-\pi;\ \pi]$ болғанда $S(x) = f(x)$.

5.4. 2*l*-периодты функциялардың тригонометриялық Фурье қатары

$f(x)$ функциясы $[-l;\ l], l > 0$ кесіндіде анықталған және осы кесіндіде Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттардырсын. Осы функцияны Фурье қатарына жіктейік.

$$x = \frac{l\xi}{\pi},\quad \xi = \frac{x\cdot\pi}{l}$$

алмастыру жәрдемімен жаңа ξ айнымалды енгізіп, $\varphi(\xi) = f\left(\frac{l}{\pi}\right) = f(x)$ функциясын қарастырайық. $x \in [-l;\ l]$ болғанда $\xi \in [-\pi;\ \pi]$ болады. Онда $\varphi(\xi)$ функциясына сәйкес (10.54) Фурье қатары.

$$\phi(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\xi + b_n\sin n\xi) \qquad (10.66)$$

түрінде болады, мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)d\xi, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)\cos n\xi d\xi ;$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)\sin n\xi d\xi$ Фурье коэффициенттері.

Енді қайтадан x айнымалға оралсақ:

$$x = \frac{l}{\pi}\xi, \qquad \xi = x\cdot\frac{\pi}{l}, \qquad d\xi = \frac{\pi}{l}dx.$$

Онда (10.66) формула

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{10.67}$$

түрге келеді, мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\,, b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

(10.67) формула $(2l)$-периодты $f(x)$ функциясының Фурье қатары.

Дербес жағдайларда, $2l$-периодты $f(x)$ функциясы $[-l;\ l]$ кесіндіде жұп болса, $b_n = 0$ болып,

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}x \tag{10.68}$$

мұндағы $\alpha_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx;$

ал тақ болса $a_0 = 0,\ a_n = 0$ болып,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{10.69}$$

мұндағы $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$ түрінде болады.

Мысал 5.4. $f(x) = \frac{x}{2}$ функциясын (–4; 4) интервалында Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Берілген функция тақ функция, Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандырады. $l = 4$ болғандықтан (10.69) формула бойынша, ізделінді қатар

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{4}x$$

түрінде болады, мұндағы $b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 \frac{x}{2}\sin\frac{n\pi}{4}xdx$. b_n коэффициенттерді есептейміз:

$$b_n = \frac{1}{4}\int_0^4 x\cdot\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx \left|\begin{array}{l} u = x\,,\ \ du = dx \\ dv = \sin\frac{n\pi}{4}x\,dx \\ v = -\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left[-x\cdot\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x\Big|_0^4 + \frac{4}{n\pi}\int_0^4 \cos\frac{n\pi}{4}x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-x\cdot\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\cdot\frac{4}{n\pi}\Big|_0^4\right] = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1},\quad n = 1,2,3,\ldots$$

Сонымен,

$$\frac{x}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \cdots\right)$$

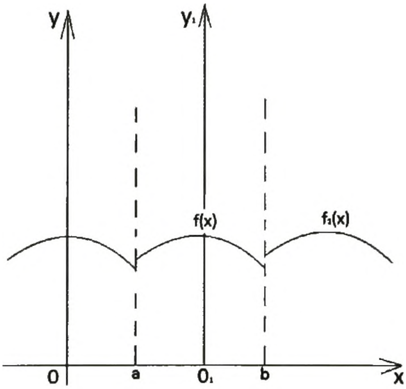
теңдік (–4; 4) интервалдың барлық нүктелерінде орындалады.

5.5. Периодсыз функцияны Фурье қатарына жіктеу

$f(x)$ функциясы (–∞; +∞) интервалда анықталған периодсыз функция болсын. Мұндай функция Фурье қатарына жіктелмейді, себебі Фурье қатарының қосындысы периодты функция, демек бұл қосынды барлық x нүктелерде $f(x)$-қа тең болмауы мүмкін.

Алайда, $f(x)$ функциясын шенелген жиында Фурье қатарына жіктеу керек болса, онда оны $2l$-периодты функцияны жіктеуге келтіруге болады. Келесі жағдайларды қарастырайық.

1. Периодсыз $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндіде анықталып, Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандырсын (сурет 10.2). $T = 2l = |b - a|$ периодты $f_1(x)$ функциясын құрамыз, $[a;\ b]$ кесіндіде $f_1(x) = f(x)$.



Сурет 10.2

Онда $f_1(x)$ функциясының Фурье қатарын құрамыз, бұл қатардың қосындысы, үзіліс нүктелерінен басқа нүктелерде, берілген $f(x)$ функциясына тең болады. Бұл аралықтың сыртында тіпті басқа функция болады.

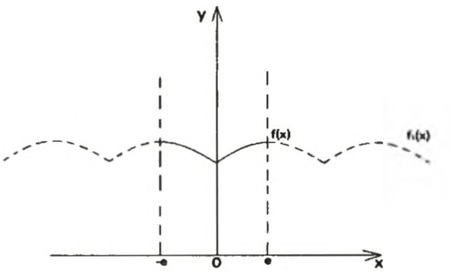
2. Периодсыз $f(x)$ функциясын $[0;\ l]$ кесіндіде Фурье қатарына жіктеу керек болсын. Яғни, координата бас нүктесін $x = a$ нүктесіне көшіріп, $l = |b - a|$ болған жағдай.

Бұл жағдайда $f(x)$ функцияны $[-l;\ 0]$ кесіндіде қосымша анықтап, содан соң оны $T = 2l$ периодпен жалғастырамыз. Осылайша алынған $2l$ периодты $f_1(x)$ функцияны $[-l;\ l]$ кесіндіде **Фурье қатарына жіктелінеді.** Бұл берілген $f(x)$ функциясы үшін $[-l;\ l]$ кесіндідегі ізделінді Фурье қатары.

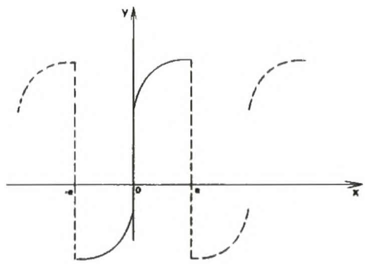
Дербес жағдайда:

а) $f(x)$ функциясын $[-l;\ 0]$ кесіндіге жұп етіп жалғастырсақ, содан соң $T = 2l$ периодпен жалғастырсақ, онда $[-l;\ l]$ кесіндіде алынған $2l$ периоды $f_1(x)$ Фурье қатарына жіктеп, $f(x)$ функциясының $[0;\ l]$ кесіндідегі Фурье қатарына жіктелуін аламыз (сурет 10.3).

б) $f(x)$ функциясын $[-l;\ 0]$ кесіндіге тақ етіп жалғастырса, содан соң $T = 2l$ периодпен жалғастырсақ, онда $[-l;\ l]$ кесіндіде алынған $2l$ периодты $f_2(x)$ функциясын тек синустардан тұратын Фурье қатарына жіктеуге болады (сурет 10.4).



Сурет 10.3



Сурет 10.4

$f(x)$ функциясы үшін косинустар мен синустар қатарларының қосындысы $(0;\ l)$ кесіндіде өзара тең болады. Егер x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі болса, екі қатар үшін де

$$S(x_0) = \frac{1}{2}[\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)]$$

санға тең болады.

Бұл тұжырымдардың барлығы да $[0;\ \pi]$ кесіндісі үшін де орынды,

Мысал 5.5. $f(x) = \frac{\pi - x}{4}, 0 \leq x \leq \pi$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $f(x)$ функциясын $[-\pi;\ 0]$ кесіндіге жұп етіп жалғастырайық. Онда

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi + x}{4}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\pi - x}{4}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

функциясы $T = 2\pi$ периодты функция болады. $f_1(x)$ функциясы Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Онда бұл функцияның жіктелуі (10.68) түрінде болады, ал оның коэффициенттері

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{4}dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{4}\cos nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx \left|\begin{matrix} u = \pi - x, du = -dx \\ dv = \cos nxdx \\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(\pi - x)}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[0 + \frac{1}{n}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}\right]$$

Демек, $$f(x) = \frac{\pi - x}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

мұндағы $0 < x < \pi$ және $S(0) = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{4}, S(\pm\pi) = \frac{0 + 0}{2} = 0.$

§ 6. Комплекс айнымалды қатарлар

6.1. Комплекс сандар тізбегінің шегі

Нақты сандар тізбектерінің шегі туралы тұжырымдарды комплекс сандар тізбектері үшін жалпылауға болады.

$$\{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$$

Мұндағы $z_n = x_n + iy_n$, $n \in N$ комплекс сандар, $i^2 = -1$.

Комплекс сандар тізбегін қарастырайық.

Анықтама 6.1. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін, $N = N(\varepsilon)$ натурал саны табылып, барлық $n > N$ нөмірлер үшін $|z_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $a = x_0 + iy_0$ санын $\{z_n\}$ тізбектің шегі деп атайды және оны $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ немесе $z_n \to a$, $n \to \infty$ түрінде жазады.

Геомертриялық түсіндірілуі: Әрбір $\varepsilon > 0$саны үшін, кейбір N нөмірден бастап $\{z_n\}$ тізбектің барлық мүшелері, Oxy комплекс жазықтықта центрі $a = x_0 + iy_0$, радиусы ε болған

$$\rho(M_n, M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon \qquad (10.70)$$

дөңгелектің ішінде жатады және n өскен сайын $M_n(x_n, y_n)$ нүкте $M_0(x_0, y_0)$, нүктеге жақындай түседі. Мұндағы $\rho(M_n, M_0)$ комплекс жазықтықтағы нүктелердің арасындағы қашықтық. Әрбір z_n комплекс сан реттелген $(x_n;\ y_n)$

нақты сандар жұбы, сондықтан $\{z_n\}$ тізбекке $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ екі нақты сандар тізбектері сәйкес келеді, бұлар $\{z_n\}$ тізбектің нақты және жорамал бөліктерінен құрылған.

Келесі теорема орынды.

Теорема 10.25. $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ тізбек жинақты болуы үшін, $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ нақты сандар тізбектерінің жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. $z_n \to a = x_0 + iy_0$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмір табылып, барлық $n > N$ нөмірлерде (10.70) теңсіздік орындалады,

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

Бұл теңсіздіктен $n > N$ болғанда $|x_n - x_0| \leq |z_n - a| < \varepsilon$, $|y_n - y_0| \leq |z_n - a| < \varepsilon$ теңсіздіктері шығады. Демек $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Жеткіліктілігі. $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ және $a = x_0 + iy_0$ болсын. Онда, $|z_n - a| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ теңдіктен $z_n \to a,\ n \to \infty$ болғанда, $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ екендігі шығады.

Бұл теорема нақты сан тізбектері туралы негізгі тұжырымдарды комплекс сан тізбектеріне де өткізуге мүмкіндік береді.

Мысал 6.1. $\{z_n\} = \left\{\frac{2n-1}{n+1} + i\frac{1-n}{n+2}\right\}$ тізбектің шегін табу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2$,

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = -1$ болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2 - i$ болады.

6.2. Комплекс сандық қатарлар

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$ комплекс сандар тізбегінен, мұндағы $z_n = x_n + iy_n$,

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{10.71}$$

комплекс сандық қатар құрамыз.

Анықтама 6.2. (10.71) қатардың алғашқы n мүшесінің қосындысы, n-дербес қосындылар $\{S_n\}$ комплекс сандар тізбегінің $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ шегі бар болса, онда (10.71) комплекс сандық қатары жинақты деп аталады.

Бұл жағдайда $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_r = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ деп жазылады, S санын қатардың қосындысы деп атайды.

(10.71) комплекс сандық қатарға $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ нақты сандық қатарлар сәйкес келеді.

Теорема 10.26. (10.71) қатар жинақты болуы үшін $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ нақты сандық қатарлардың жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

Сонда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S'$ және $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = S''$ болса, $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S' + i \cdot S''$ болады.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ болсын. Яғни, $\lim_{n\to\infty} S_n = S = x_0 + iy_0$. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмір табылып, барлық $n > N$ нөмірлерде

$|S_n - S| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_n - x_0\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} y_n - y_0\right)^2} < \varepsilon.$ Бұл теңсіздіктен $n > N$ болғанда, .$\left|S_n' - x_0\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k - x_0\right| < | S_n - S | < \varepsilon$. Демек $\lim_{n\to\infty} S_n' = x_0 = S'$.

Осылайша $n > N$ болғанда,

$$|S_n'' - y_0| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} y_k - y_0\right| < |S_n - S| < \varepsilon,$$

Демек, $\lim_{n\to\infty} S_n'' = y_0 = S''$.

Жеткіліктілігі. $S_n' \to x_0$, $S_n'' \to y_0$ болсын. Онда $|S_n - S| = \sqrt{(S_n' - x_0)^2 + (S_n'' - y_0)^2}$ теңдіктен $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, мұндағы $S_n = S_n' + iS_n'' = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Теорема 10.27. Мүшелері комплекс сандар болған

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (10.71)$$

қатардың мүшелерінің модульдерінен құралған

$$| z_1 | + | z_2 | + | z_3 | + \ldots + | z_n | + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} | z_n | \qquad (10.72)$$

нақты сандық қатар жинақты болса, (10.71) қатар да жинақты болады.

Дәлелдеуі. $z_n = x_n + iy_n$ болсын. Онда $\left|z_n\right| = \sqrt{x_n^2 + y_n{}^2}$ және $|x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, $|y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ болады. Онда салыстыру белгілері бойынша (теорема 10.7) $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ және $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|$ қатарлары жинақты. Демек, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ қатарлары жинақты, тіпті абсолют жинақты. Ал бұл тұжырымдар (10.71) қатардың жинақты болуына жеткілікті.

Мысал 6.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n!}$ комплекс сандық қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. Берілген қатардың модульдерінен құралған (10.72) түріндегі сандық қатарға Даламбер белгісін қолдансақ,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,|(2+i)^{n+1}|}{(n+1)!\,|(2+i)^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|2+i|}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{n+1} = 0 < 1$$

болады. Демек, қатар абсолют жинақты.

6.3. Мүшелері комплекс дәрежелік қатарлар

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n, \qquad (10.73)$$

түріндегі ақырсыз қосынды, мұндағы $z = x + iy$ комплекс айнымал, $a_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, мен a комплекс сандар, мүшелері комплекс дәрежелік қатар деп аталады. Дербес жағдайда, $a = 0$ болса

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad (10.74)$$

болады. (10.73) қатарда $z - a = t$ десек (10.74) қатар шығады.

(10.74) қатар $z = 0$ нүктесінде жинақты.

Теорема 10.28. (Абель). Егер (10.74) дәрежелік қатар:

а) $z = z_0 \neq 0$ нүктесінде жинақты болса, онда ол $|z| < |z_0|$ теңсіздікті қанағаттандырушы барлық z нүктелерінде абсолют жинақты болады;

б) $z = z_1$ нүктесінде жинақсыз болса, онда ол $|z| > |z_1|$ теңсіздікті қанағаттандырушы барлық z нүктелерінде жинақсыз болады.

Теорема 10.29. (10.74) дәрежелік қатар $(-R;\, R)$ аралығында абсолют жинақты, $(-R;\, -\infty), (R;\, \infty)$ аралықтарында жинақсыз болатын R саны табылады және

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{немесе} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}} \qquad (10.75)$$

формулалармен анықталады.

$|z| = R$ нүктелерінде (10.74) қатардың жинақтылығы қосымша зерттеледі.

Егер (10.74) қатар тек қана $z = 0$ нүктесінде жинақты болса, $R = 0$ деп, ал Oxy комплекс жазықтықтың барлық нүктелерінде жинақты болса $R = +\infty$ деп есептеледі.

Мысал 6.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}z^n}{n!}$ дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу керек.

Шешуі. (10.75) формулалардың біріншісін қолдансақ

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}}\cdot(n+1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1\cdot(n+1) = \infty$$

Демек, берілген қатар z-тің кез келген мәнінде абсолют жинақты.

6.4. Аналитикалық функциялар. Эйлер формуласы

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (10.74)$$

қатарды қарастырайық.

Егер (10.74) қатар $|z| < R$ дөңгелек ішінде жинақты болса, оның қосындысы $f(z)$ функция z комплекс айнымалдың функциясы болады.

Анықтама 6.3. Дәрежелік қатар (10.74) түрінде өрнектелетін комплекс айнымалды функциялар аналитикалық функциялар деп аталады.

Аналитикалық функциялар өз алдына үйреніледі.

e^x функциясын Маклорен қатарына жіктелгенде, кезкелген x-те жинақталатын.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (10.75)$$

дәрежелік қатарын алған едік.

Егер x нақты айнымалды z комплекс айнымалға ауыстырсақ, z-тің дәрежелері бойынша

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

қатары алынады. Бұл қатар $z = x + iy$ айнымалдың барлық мәндерінде жинақталады, өйткені жинақтылық радиусы R, (10.75)-дің бірінші формуласы бойынша.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Алынған қатардың қосындысын e^z деп белгілейміз.

Демек, анықтама бойынша кез келген z комплекс сан үшін

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (10.76)$$

(10.76) дәрежелік қатардың қосындысын z комплекс айнымалдың көрсеткішті функциясы деп атайды. Осы сияқты z комплекс айнымалдың $\sin z$ және $\cos z$ тригонометриялық функциялары анықталады:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (10.77)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (10.78)$$

Осылайша анықталған e^z көрсеткішті функциямен $\sin z$ және $\cos z$ тригонометриялық функциялардың арасында қарапайым байланыс бар. (10.76) формулада z айнымалды iz-ке алмастырсақ,

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2z^2}{2!} + \frac{i^3z^3}{3!} + \frac{i^4z^4}{4!} + \frac{i^5z^5}{5!} + \cdots = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right).$$

Жақша ішіндегі қатарларды (10.77), (10.78) формулалармен салыстырсақ,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (10.79)$$

теңдікті аламыз.

Енді (10.76) формулада z айнымалды $(-iz)$-ке алмастырсақ,

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \qquad (10.80)$$

теңдік шығады.

(10.79) және (10.80) формулалар Эйлер формулалары деп аталады.

Бұл формулалар z комплекс айнымалдың көрсеткішті функциясы мен тригонометриялық функциялар арасында байланыс орнатады.

(10.79) және (10.80) теңдіктерді мүшелеп қоссақ және айырсақ,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (10.81)$$

Бұл теңдіктер Эйлер формулаларының басқаша жазылуы. (10.79) формулада: $z = x$ десек,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad (10.82)$$

(10.80) формулада $z = -x$ десек,

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \qquad (10.83)$$

формулалары алынады.

Соңғы екі формуладан

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad (10.84)$$

теңдіктері алынады.

(10.82) және (10.83) Эйлер формулалары математика, механика және т.б. салаларда жиі қолданылады.

Енді $z = x + iy$ комплекс айнымалдың $W = \ln z$ функциясын анықтайық. Бұл функцияны $z = e^W$ көрсеткішті функцияға кері функция деп қарау табиғи нәрсе.

$W = U + iV, z = x + iy$ деп, U мен V функцияларын $z = x + iy$ арқылы өрнектейік.

$z = x + iy = e^{U+iV} = e^U(\cos V + i\sin V)$ ара қатыстан комплекс санның модулі және аргументі ұғымдарын ескерсек,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^U, \arg z = V - 2k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Соңғы теңдіктерден

$$U = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, V = \arg z + 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

немесе

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{10.85}$$

Демек, комплекс санның логарифмі ақырсыз көп мәнге ие.

Мысал 6.4. $z = 1 + i$ санының логарифмін табу керек.

Шешуі. $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{4}$ болғандықтан (10.85) формула бойынша $\ln(1 + i) = \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$

XI тарау. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

§ 1. Дифференциалдық теңдеу ұғымы

Дүниедегі барлық процесстер мен құбылыстар қозғалыста болады. Ол қозғалыстағы құбылыстың уақытқа байланысты жүрілген жолы, жылдамдығы, үдеуі т.б. сипаттамалары болады.

Әр құбылысқа тән осы шамалар арасында өзара байланыс болады. Осы байланыс математика тұрғысынан дифференциалдық теңдеу түрінде жазылады.

Дифференциалдық теңдеу – белгісіз функция туындыларымен кіретін теңдеу.

Дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі мәселесі – осы теңдеулердің шешімі болатын функцияларды үйрену.

Егер белгісіз функция бір айнымалдың функциясы болса, онда теңдеу жай дифференциалдық теңдеу, бірнеше айнымалдың функциясы болса, онда дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Бұл тарауда бір айнымалды белгісіз функцияның дифференциалдық теңдеулері қарастырылады.

Анықтама 1.1. n-ретті жай дифференциалдық теңдеу деп x тәуелсіз айнымал, $y = y(x)$ белгісіз функция және оның $y', y'', \dots, y^{(n)}$ туындыларын байланыстыратын

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (11.1)$$

түріндегі теңдеуді атайды.

Егер (11.1) теңдеуін n-ретті туындыға қатысты шешуге болатын болса, онда

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \qquad 1.2)$$

Анықтама 1.2. (11.1) немесе (11.2) дифференциалдық теңдеулердің шешімі деп (a, b) аралығында осы теңдеулерді қанағаттандыратын n рет дифференциалданатын кез келген $y(x)$ функциясын атайды.

Дифференциалдық теңдеудің шешімінің графигін осы теңдеудің интегралдық қисығы, ал осы дифференциалдық теңдеудің шешімін табуды дифференциалдық теңдеуді интегралдау деп атайды.

Мысал ретінде бірінші ретті $y' = \cos x$ және екінші ретті $y'' = 2$ қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешейік:

$$y' = \cos x, \frac{dy}{dx} = \cos x,\ dy = \cos x dx, y = \sin x + c;$$

$$y'' = 2, y' = \int y'' dx = \int 2dx = 2x + c_1; y = \int y' dx = x^2 + c_1 x + c_2.$$

Демек, бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімінің құрамында бір c кез келген тұрақты сан, екінші ретті теңдеудің шешімінің құрамында екі c_1 және c_2 кез келген тұрақты сандар бар.

Жалпы, кез келген дифференциалдық теңдеудің ақырсыз көп шешімдері бар екен.

Ал дифференциалдық теңдеу нақты бір құбылыстың немесе процесстің математикалық моделі болғандықтан, оның шешімі нақты біреу ғана болуы керек. Сондықтан, (11.2) теңдеуге қосымша шарттар қойылады:

$$x = x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y^{(2)}(x_0) = y_0^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (11.3)$$

(11.3) шарттарды алғашқы шарттар немесе Коши шарттары деп атайды.

(11.2) + (11.3) есеп Коши есебі деп аталады. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі

$$y' = f(x, y); \ \ y(x_0) = y_0$$

түрінде, ал екінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі.

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0$$

түрінде қойылады.

Анықтама 1.3. (11.2) дифференциалдық теңдеудің кейбір $D \subset Oxy$ аймағындағы жалпы шешімі деп $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ шешімді атайды, мұндағы $c_1, c_2, \dots, c_n$ кез келген тұрақтылардың әрқандай (11.3) шарттары үшін жалғыз ғана мәндері табылады.

Анықтама 1.4. (11.2) дифференциалдық теңдеудің кейбір $D \subset Oxy$ аймағындағы дербес шешімі деп $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ жалпы шешімнің $c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0, \dots, c_n = c_n^0$ мәндеріндегі $y = y(x, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$ шешімді атайды.

§ 2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

2.1. Жалпы деректер

Дифференциалдық теңдеулер теориясын үйренуді ең қарапайым түрінен – бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерден бастаймыз.

Жалпы түрде бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді

$$F(x; y; y') = 0 \quad (11.4)$$

түрінде жазуға болады. Мұндағы x тәуелсіз айнымал, y ізделетін белгісіз функция және оның y' туындысы.

Егер (11.4) теңдеуді y'-ке қатысты шешуге мүмкін болса, онда ол

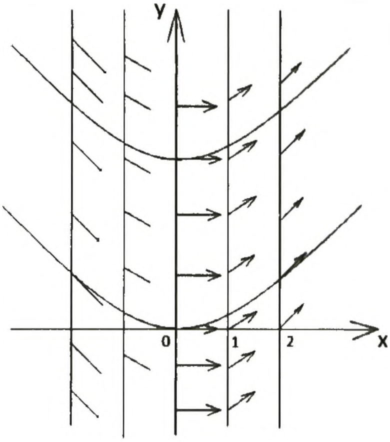
$$y' = f(x; \ y) \quad (11.5)$$

түрінде жазылады да, туындыға қатысты шешілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан (11.5) теңдеу Oxy жазықтықтағы (x, y) нүктенің координаталары мен интегралдық қисыққа осы нүктеден өткізілген жанамалардың y' бұрыштық коэффициенттері арасында байланыс (тәуелділік) орнатады. Демек, (11.5) теңдеу Oxy жазықтықта бағыттар жиынтығын, яғни бағыттар өрісін анықтайды. Өріс бағыттары бірдей болған сызық изоклина деп аталады. Изоклиналарды интегралдық сызықтарды жуықтап құруға пайдалануға болады. Изоклинаның теңдеуі $y' = c$, яғни $f(x; y) = c$.

Мысал 2.1. Изоклиналар жәрдемімен $y' = x$ теңдеудің интегралдық қисықтарының түрін сызу керек.

Шешуі. Изоклинаның теңдеуі $x = c$, яғни Oy оське параллель түзулер. $c = 0$ болғанда $x = 0$, tgα = 0, демек α = 0; $c = 1$ болғанда, $x = 1$, tgα = 1, демек $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $c =$ 2 болғанда, $x = 2$, tgα = 2, α = arctg2 ≈ 63°; $c = -$ 1 болғанда, $x = -1$, tgα = –1, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; $c = -2$ болғанда, $x = -2$, tgα = –2, α≈ –63°, т.с.с. бес изоклина құрамыз, әрқайсысында бірнеше бағыт алып, бұл бағыттарды изоклинаның осы нүктесінен өтетін бірлік векторлармен кескіндеп, жазықтықта бағыттар өрісін аламыз (сурет 11.1).



Сурет 11.1

Одан әрі әрбір нүктедегі жанамаларының бағыты өріс бағытымен беттесетін қисық сызамыз: бұл $y = \frac{x^2}{2} + c$ параболалар (11.5) теңдеуді дифференциалдық түрде

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (11.5a)$$

деп жазуға болады. Мұндағы $P(x,y), Q(x,y)$ белгілі функциялар, яғни $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Мұндай жазудың ерекшелігі y-ті x-тің функциясы және, керісінше, x-ті y-тің функциясы деп қарауға болады.

(11.5) түрінен (11.5 a) түріне және, керісінше, (11.5 a) түрінен (11.5) түріне өтуге болатынын атап өтеміз.

Жоғарыда көрсеткендей кез келген дифференциалдық теңдеудің шешімі ақырсыз көп, олардың айырмашылығы тұрақты шама болады.

Дифференциал теңдеудің шешімі нақты мағынаға ие болуы үшін оны кейбір қосымша шарттарға бағындыру қажет.

$x = x_0$ болғанда берілген $y = y_0$ мәнді қабылдаушы шартты бастапқы шарт немесе Коши шарты деп атайды. Бастапқы шарт

$$y(x_0) = y_0 \text{ немесе } y\Big|_{x = x_0} = y_0 \qquad (11.6)$$

түрінде жазылады.

(11.5) теңдеудің (11.6) шартты қанағаттандырушы шешімін табуды Коши есебі деп атайды:

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

Анықтама 1.3 және **Анықтама 1.4** негізінде (11.5) теңдеу үшін жалпы шешім және дербес шешім ұғымдарын анықтайық.

Анықтама 2.1. Бірінші ретті (11.5) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі деп құрамында бір кез келген с тұрақтысы бар $y = \varphi(x,c)$ функциясын атайды:

$\varphi(x,c)$ функциясы c-ның әрбір белгіленген мәнінде (11.5) теңдеудің шешімі болады;

(11.6) бастапқы шарт қандай болғанда да, $c = c_0$ мәні табылып, $\varphi(x,c_0)$ функциясы осы бастапқы шартты қанағаттандырады.

Анықтама 2.2. Бірінші ретті (11.5) дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі деп, $y = \varphi(x, c)$ жалпы шешімнен анық $c = c_0$ болғанда алынатын $y = \varphi(x, c_0)$ шешімді атайды.

Егер дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $\Phi(x, y, c) = 0$ теңдеумен айқындалмаған түрде табылса, онда бұл шешімді жалпы интеграл деп, ал $\Phi(x, y, c_0) = 0$ теңдеуді дербес интеграл деп атайды.

Геометриялық тұрғыдан қарағанда $y = \varphi(x, c)$ жалпы шешім Oxy жазықтықтағы қисықтар үйірін, ал $y = \varphi(x, c_0)$ дербес шешім осы үйірдің (x_0, y_0) нүктесінен өтетін бір қисығын анықтайды.

Келесі тұжырымды дәлелсіз келтіреміз.

Теорема 11.1 (Коши есебінің шешімінің бар болуы және жалғыздығы).

Егер (11.5) теңдеудегі $f(x, y)$ функциясы және оның $f'_y(x, y)$ дербес туындысы $(x_0, y_0) \in D$ аймақта үзіліссіз болса, онда (x_0, y_0) нүктесінің кейбір маңайында

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

Коши есебінің жалғыз шешімі бар.

Теореманың геометриялық мағынасы: келтірілген шарттар орындалғанда, (x_0, y_0) нүктесінен өтетін жалғыз интеграл қисық бар.

2.2. Айнымалдары ажыралған және ажыралатын дифференциалдық теңдеудер

а) Айнымалдары ажыралған теңдеу деп

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \qquad (11.7)$$

түріндегі теңдеуді атайды. Мұнда бірінші қосылғыш тек x айнымалға, екінші қосылғыш y айнымалға тәуелді.

Теңдеуді мүшелеп интегралдасақ,

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c \qquad (11.8)$$

берілген теңдеудің жалпы интегралы алынады.

Мысал 2.2. $x^2dx + y^2dy = 0$ теңдеудің жалпы интегралын табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеуде $P(x) = x^2, Q(y) = y^2$ болғандықтан, (11.8) формула бойынша, $\int x^2dx + \int y^2dy = c$, немесе $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = c_1$. $c = 3c_1$ деп белгілесек, жалпы интеграл $x^3 + y^3 = c$ болады.

$\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ функцияның $f(x)$ үшін, $\int_{y_0}^{y} g(yt)dt$ функциясының $g(y)$ функциясы үшін (теорема 7.9) алғашқы функция екендігін ескерсек, (мұндағы x_0 нүкте $f(x)$ функциясының үзіліссіздік нүктесі, y_0 нүкте $g(y)$ функциясының үзіліссіздік нүктесі), (11.8) формуласын

$$\int_{y_0}^{y} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c \qquad (11.8a)$$

түрінде жазуға болады.

(11.8а) формуладан (11.7) теңдеудің $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімі,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{y_0}^{y} g(t)dt \qquad (11.9)$$

екендігі шығады.

б) Айнымалдары ажыралатын теңдеу деп,

$$f_1(x)\ \ f_2(y)dx = g_1(x)\ \ g_2(y)dy \qquad (11.10)$$

түріндегі теңдеуді атайды.

Мұндағы $f_1(x), f_2(y), g_1(x), g_2(y)$ кейбір $D \subset Oxy$ аймақта үзіліссіз функциялар. Бұл теңдеудің екі бөлігін де $g_1(x)\ \ f_2(y) \neq 0$ өрнекке бөлсек,

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx = \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy$$

айнымалдары ажыралған теңдеу шығады. (11.8) формула бойынша бұл теңдеудің шешімі.

$$\int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = \int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + c, \text{ немесе } \int_{y_0}^{y} \frac{g_2(t)}{f_2(t)}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{g_1(t)}dt + c, \qquad (11.11)$$

ал $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын Коши есебінің шешімі,

$$\int_{y_0}^{y} \frac{g_2(t)}{f_2(t)}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{g_1(t)}dt \qquad (11.12)$$

түрінде болады.

$g_1(x) \cdot f_2(y) = 0$ болғанда, $g_1(x) = 0$ теңдеуінің $x = a$ түбірі болса, $f_2(y) = 0$ теңдеуінің $y = b$ түбірі болса, онда $x = a$ мен $y = b$ функциялары берілген (11.10) теңдеудің қосымша (ерекше) шешімдері болады. Яғни $x = a$ мен $y = b$ функциялары (11.10) теңдеуді қанағаттандырады.

Ескерту 2.1.

$$y' = f(ax + by + c);\ \ a, b, c - \text{const} \qquad (11.13)$$

түріндегі теңдеуі $u = ax + by + c$ алмастыруы арқылы айнымалдары ажыратылатын (11.10) теңдеуіне келтіріледі. $u(x)$ жаңа функцияны x арқылы дифференциалдасаң,

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

болады, бұдан $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$, яғни

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx$$

Соңғы теңдеуді интегралдасақ және $u(x)$ функцияны $ax + by + c$ өрнекке ауыстырсақ (11.13) теңдеудің жалпы шешімі алынады:

$$x = \int \frac{du}{a + bf(u)} + c, u = ax + by + c \qquad (11.14)$$

Мысал 2.3. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$

Коши есебінің шешімін табу керек.

Шешуі. Алдымен $y' = \frac{dy}{dx}$ екендігін ескеріп берілген теңдеуді (11.10) түріне келтіреміз,

$$(x^2 - 1)dy + 2xy^2dx = 0$$

Бұл теңдеудің екі бөлігін $(x^2 - 1) \cdot y^2 \neq 0$ өрнекке бөлсек, айнымалдары ажыратылған.

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2 - 1} = 0$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің екі бөлігін интегралдасақ,

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = c$$

шешімі шығады. $y = 0$ ерекше шешімді қоссақ, барлық шешімдер жиыны шығады.

Енді $y(0) = 1$ шартын ескеріп, Коши есебінің шешімін табамыз: $x = 0, y = 1$ десек $-\frac{1}{1} + \ln|1| = c$, бұдан $c = -1$.

Демек, қойылған Коши есебінің шешімі

$$y = \frac{1}{1 + \ln\ |x^2 - 1|}$$

Мысал 2.4. $y' - y = 2x - 3$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Теңдеуді $dy = (y + 2x - 3)dx$ (11.13) түрінде жазып, $u = y + 2x - 3$ алмастыруын енгізіп,

$$du = (u + 2)dx$$

айнымалдары ажыралатын теңдеу аламыз.

Бұл теңдеуден $u \neq -2$ болғанда $\frac{du}{u+2} = dx$ теңдеуі шығады. Теңдеуді интегралсақ , $\ln|u + 2| = x + \ln c$, немесе $y = 1 - 2x + ce^x$ Жоғалған $u = -2$, немесе $y = 1 - 2x$ ерекше шешім алынған интегралдық қисықтар үйіріне $c = 0$ болғанда кіреді.

2.3. Біртекті дифференциалдық теңдеулер

Егер $f(x;\ y)$ функциясының әрбір айнымалын кез келген λ санға көбейткенде оның мәні λ^n-ге көбейтілсе, яғни

$$f(\lambda x;\ \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x;\ y)$$

болса, онда $f(x;\ y)$ функциясы n-ретті біртекті функция деп аталады.

Мысалы, $f(x;\ y) = x^3 + 2xy^2$ функциясы үшінші ретті біртекті функция, өйткені

$$f(\lambda x;\ \lambda y) = (\lambda x)^3 + 2\lambda x(\lambda y)^2 = \lambda^3(x^3 + 2xy^2) = \lambda^3 f(x, y). \qquad (11.15)$$

Анықтама 2.4. $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеуде $f(x, y)$ функциясы реті нөл біртекті функция болса, онда (11.15) теңдеу біртекті теңдеу деп аталады.

Біртекті теңдеуді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (11.16)$$

түріне келтіруге болады. Егер $f(x, y)$ реті нөл біртекті функция болса, $\lambda^0 f(x, y) = f(\lambda x;\ \lambda y)$, онда $\lambda = \frac{1}{x}$ десек, $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ болады.

Әрі қарай $u = \frac{y}{x}$ алмастыру енгізсек, $y = ux, y' = u'x + u$. Соңғы теңдікті (11.16)-ға қойсақ $u'x + u = \varphi(u), xdu = [\varphi(u) - u]dx$ түріне келеді.

Бұл (11.10) айнымалдары ажыралатын теңдеу. Бұл теңдеудің жалпы шешімін немесе жалпы интегралын тауып, $u(x)$ функцияны $\frac{y}{x}$ қа ауыстырып, берілген теңдеудің жалпы шешімін немесе жалпы интегралын аламыз.

Ескерту 2.2. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (11.17) түріндегі теңдеуде, $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары бірдей ретті біртекті болса, онда ол біртекті теңдеу болады. Өйткені $f(x,y) = -P(x,y)/\,Q(x,y)$ реті нөл біртекті функция болады.

Мысал 2.5. $xydx + \left(y^2 - x^2\right)dy = 0, \ y(1) = 1$ Коши есебін шешу керек.

Шешуі. Алдымен берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз. Бұл біртекті теңдеу, өйткені $P(x,y) = xy, \ Q(x,y) = y^2 - x^2$ екінші ретті біртекті функциялар. $u = \frac{y}{x}$ немесе $y = ux$ алмастыруын енгізсек,

$$u^3dx + x(u^2 - 1) = 0$$

айнымалдары ажыралушы теңдеу шығады. $u^3x \neq 0$ деп, бұл теңдеуді интегралдап,

$$\int \frac{u^2 - 1}{u^3}du + \int \frac{dx}{x} = \ln c, \ln u + \frac{1}{2u^2} + \ln|x| = \ln c,$$

$$\ln|u \quad x| + \frac{1}{2u^2} = \ln c \text{ немесе, } \quad x^2 + 2y^2 \quad \ln\frac{|y|}{c} = 0,$$

шешімді табамыз. Бұл табылған жалпы шешімге $y = 0$ ерекше шешімді қоссақ барлық шешімдер жиыны шығады. Енді $x = 1, y = 1$ мәндерді қойсақ, $c = e^{\frac{1}{2}}$ болады. Демек, Коши есебінің шешімі

$$x^2 + y^2(\ln y^2 - 1) = 0.$$

(11.17) түріндегі теңдеу, мұндағы $P(x,y), Q(x,y), D \subset R^2$ жиында үзіліссіз функциялар, келесі екі жағдайда (11.16) біртекті теңдеуге келтіріледі:

$$\text{а) } y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \qquad (11.18)$$

$$a_i = \text{const}, b_i = \text{const}, c_i = \text{const}, i = \ 1{,}2.$$

Ол үшін $x = u + \alpha, y = v + \beta$ деп алып, α мен β сандарын, (11.18) теңдеудің оң бөлігі $f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_1u+b_1v}\right)$ түрінде болатындай етіп, таңдаймыз.

Егер $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ болса, онда $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$ болып, $k = \text{const}, \ t = a_2x + b_2y$ алмастыруы арқылы (11.17) теңдеу айнымалдары ажыралатын теңдеуге келтіреледі.

б) (11.17) теңдеу жалпыланған біртекті теңдеу болғанда, яғни α = const саны табылып, $y = [u(x)]^\alpha$ алмастырудан соң (11.17) біртекті теңдеу болады.

Мысал 2.6. $(x + y - 1)dx + (5x - 7y + 1)dy = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $a_1 = 1, b_1 = 1, a_2 = 5, b_2 = -7$ болғандықтан $a_1b_2 - a_2b_1 =$

$=(-7) - 5 \cdot 1 = -12 \neq 0$. Онда $x = u + \alpha, y = v + \beta$ алмастырулар енгізіп, α мен β сандарын α + β –1 = 0, 5α – 7β + 1 = 0 жүйенің шешімі ретінде табамыз: α = β = $\frac{1}{2}$. Сондықтан, $x = u + \frac{1}{2}, \ y = v + \frac{1}{2}$ алмастырудан кейін берілген теңдеу

$(u+v)du+(5u-7v)dv=0$ біртекті теңдеу түріне келеді. $u=tv$ алмастыруын енгізсек, онда $du=udt+tdv$, $(t^2+6t-7)dv+v(t+1)dt=0$. Айнымалдарды ажыратып интегралдасақ,

$$\int\frac{t+1}{(t-1)(t+7)}dt+\ln(|v|c)=0,\quad \frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{3}{4}\ln|t+7|+\ln|vc|=0,$$

бұдан $(t-1)(t+7)^3v^4=c$, немесе $(x-y)(x+7y-4)^3=c$.

Мысал 2.7. $x^3(y'-x)=y^2$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеу біртекті емес. Алайда $y=[u(x)]^\alpha$ алмастыруды қолданып, $\alpha u^{\alpha-1}\cdot x^3du=(u^{\alpha 2}+x^4)dx$ теңдеу $\alpha=2$ болғанда біртекті болатынын ескереміз, $2ux^3du=(u^4+x^4)dx$. $u=xv$ десек, $(v^2-1)^2dx=2v\cdot x\cdot dv$. Бұл теңдеуді айнымалдарды ажыратып интегралдасақ,

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2v}{\left(v^2-1^2\right)}dv,\quad \ln|x|+\frac{1}{v^2-1}=c,\ \text{немесе}\ \ln|x|+\frac{x^2}{y-x^2}=c.$$

Ескеретін жағдай, алынған шешім $y\geq 0$, өйткені $y=x^2\geq 0$, шамалар үшін алынды. Осылайша, алынған шешімдер үйірімі $y=-x^2\leq 0$ болғанда да соңғы теңдік түрінде жазылатыны көрсетіледі. $y=x^2$ ерекше шешім $c=\infty$ болғанда үйірдің ішіне кіреді.

2.4. Сызықтық теңдеулер

Анықтама 2.5. Белгісіз функция мен оның туындысы бойынша бірінші дәрежелі

$$y'+P(x)y=f(x),\ x\in(a,b) \tag{11.19}$$

түріндегі теңдеу бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Мұндағы $P(x)$, $f(x)$ функциялары (a,b) аралығында үзіліссіз. Егер $f(x)=0$ болса, онда

$$y'+P(x)y=0 \tag{11.20}$$

теңдеуі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады. Ал $f(x)\neq 0$ болса, онда (11.19) теңдеу біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Алдымен (11.20) біртекті теңдеудің жалпы шешімін айнымалдары ажыралатын теңдеуді шешу арқылы табамыз,

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0,\frac{dy}{y}+P(x)y=0,\int\frac{dy}{y}+\int P(x)\,dx=\ln|c_1|,\ln|y|+\int P(x)\,dx=\ln|c_1|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{c_1}\right|=-\int P(x)dx\,,\pm c_1\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

яғни (11.20) теңдеудің жалпы шешімі

$$y=\pm c_1\ \ e^{-\int P(x)dx} \tag{11.21}$$

Мұндағы $c=\pm c_1$ кез келген тұрақты сан, ал c_1 кез келген оң сан.

Енді (11.19) теңдеудің жалпы шешімін табамыз. Ол шешімді Лагранждың тұрақтыны вариациялау әдісін қолданып (11.21) түрінде іздейміз. Тек c кез келген тұрақтыны $c(x)$ түрінде, яғни x-тің белгісіз функциясы деп есептейміз. Онда,

$$y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (11.22)$$

(11.22) функция (11.19) теңдеуді қанағаттандыруы керек:

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} - c(x) \cdot P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x) \cdot c(x)e^{-\int P(x)dx} = f(x)$$

немесе $c'(x) = f(x)e^{\int P(x)dx}$ Бұл теңдіктен $c(x) = \int f(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + c_1$, c_1 кез келген тұрақты. $c(x)$ функциясының бұл табылған өрнегін (11.22) теңдікке қойсақ,

$$y(x) = c_1 e^{-\int P(x)dx} * e^{-\int P(x)dx} + \int f(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx \qquad (11.23)$$

Сызықтық теңдеулерге келтірілетін теңдеулер түрлерін қарастырайық.

1. Бернулли теңдеуі

$$y' + P(x)y = y^n \quad f(x),\ n \neq 0, n \neq 1,\ x \in (a, b) \qquad (11.24)$$

түріндегі теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады. Мұндағы $P(x)$, $f(x)$ функциялары (a, b) аралығында үзіліссіз функциялар.

$y = 0$ функциясы (11.24) теңдеудің шешімі болады.

$$u(x) = [y(x)]^{1-n} \qquad (11.25)$$

алмастыру жасасақ, $u' = (1 - n)y^{-n} \cdot y'$ болғандықтан жаңа белгісіз функция үшін, (11.24) теңдеу

$$u' + (1 - n) \cdot P(x)u = (1 - n)f(x) \qquad (11.26)$$

сызықтық теңдеу түріне келеді. (11.24) теңдеу $n = 0$ болғанда сызықтық, $n = 1$ болғанда айнымалдары ажыралатын теңдеу болады.

2. $$\varphi'(y)\frac{dy}{dx} + P(x)\varphi(y) = f(x). \qquad (11.27)$$

(11.27) теңдеуде $\varphi(y) = z(x)$ деп алсақ, $z'(x) = \varphi'(y) \quad y'$ болып, берілген теңдеу

$$z'(x) + P(x)z = f(x)$$

сызықтық теңдеуге келеді.

3. $$\frac{dy}{dx} + P(x) = f(x)e^{-ny}. \qquad (11.28)$$

Бұл теңдеуде $z = e^{ny}$ деп алсақ, $ne^{ny} \cdot y' = z'$ болып, $z(x)$ функцияға сәйкес

$$z' + nP(x)z = n \cdot f(x),\ n \neq 0$$

сызықтық теңдеу шығады.

4. Кейбір теңдеулерде x айнымалды y айнымалдың функциясы деп алсақ, $x(y)$-ке сәйкес сызықтық теңдеу шығады.

Мысал 2.8. $(\sin^2 y + x \cdot \text{ctg } y)y' = 1$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ екендігін ескерсек, берілген теңдеуді $x' - x \cdot \text{ctg } y = \sin^2 y$ сызықтық теңдеу түрінде жазуға болады. Бұл теңдеуді шешсек.

$x(y) = c(y) \cdot \sin y$, мұндағы $c(y) = -\cos y + c_1$

Мысал 2.9. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $x \neq -1$ деп, теңдеудің екі бөлігін де $x + 1$ өрнекке бөлсек,

$$y' + \frac{1}{x+1}y = -y^2$$

Бернулли теңдеуі (11.24) шығады. Бұл теңдеудің екі бөлігін y^2 -қа бөлсек, одан соң $y^{-1} = z(x)$ алмастыруын енгізсек, әрі $z' = -y^2 \cdot y'$ екендігін ескерсек, $z(x)$-ке байланысты.

$$z' - \frac{z}{z+1} = 1$$
теңдеу алынады. Соңғы теңдік $z(x)$-ка байланысты сызықтық теңдеу. Бұл теңдеудің шешімі, $z = \mathrm{c}(x) \cdot (x+1)$, мұндағы $c(x) = \ln|x+1| + c_1$. Ақырында, берілген теңдеудің жалпы шешімі алынады:

$$y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + c_1)}.$$

Мысал 2.10. $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2+1$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл (11.27) түріндегі теңдеу. $z(x) = \sqrt{y^2+1}$ алмастыру енгізсек,

$$z' = \frac{y'}{\sqrt{y^2+1}}, z' + z = x^2 + 1$$
қатыстар шығады.

Соңғы теңдік, $z(x)$ функцияға сәйкес сызықтық теңдеу. Бұл теңдеуді айнымалды вариациялау әдісімен шешсек, $z = c(x)e^{-x}$, мұндағы $c(x) = e^x(x^2 - 2x + 3) + c_1$. Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі,

$$\sqrt{y^2+1} = x^2 - 2x + 3 + c_1 e^{-x}$$

Мысал 2.11. $3y' + e^{x+3y} + 1 = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеуді

$$3\frac{dy}{dx} + 1 = -e^x \cdot e^{3y}$$
түрінде жазсақ, ол (11.28) түріндегі теңдеу. Сондықтан $z(x) = e^{-3y}$ алмастыру енгіземіз. Сонда біртіндеп,

$$z'^{(x)} = -3e^{-3y} \cdot y', \frac{z'}{z} + 1 = -\frac{e^x}{x}, z' - z = e^x$$
қатыстары шығады. Соңғы сызықтық теңдеудің жалпы шешімі $z(x) = c_1 e^x + xe^x$. Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = -\frac{1}{3}\ln(c_1 + x) - \frac{x}{3}$$

2.5. Толық дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 2.6. Егер бірінші ретті

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (11.28)$$
дифференциалдық теңдеудің сол бөлігі белгілі бір $U(x, y)$ функциясының кейбір D аймақта толық дифференциалы болса, яғни $U'_x = P(x,y), U'_y = Q(x,y)$, теңдіктері орындалса, онда (11.28) теңдеу толық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Бұл жағдайда, (11.28) дифференциалдық теңдеу $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U'_x dx + U'_y dy = dU(x,y) = 0$ түрінде болып, оның жалпы шешімі:

$$U(x,y) = C \tag{11.29}$$

түрінде жазылады.

$\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ өрнектің толық дифференциал болу шартын келтіреміз.

Теорема 11.2. Егер $P(x,y)$, $Q(x,y)$, функциялары және олардың дербес туындылары $P'_x(x,y)$ және $Q'_y(x,y)$ кейбір D аймақта үзіліссіз болса, онда $\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ өрнектің толық дифференциал болуы үшін

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{11.30}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Δ толық дифференциал болсын, яғни $P(x,y)dx + $ $+Q(x,y)dy = dU(x,y)$.

$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$ екендігін ескерсек [8.23],

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Бұл теңдіктерді сәйкес түрде y және x бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Аралас туындылар үзіліссіз болғандықтан өзара тең болады.

Жеткіліктілігі. (11.30) шарт орындалсын.

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

қатыс D аймағында орындалатындай $U(x,y)$ функция табылатынын көрсетеміз. Ізделетін функция үшін.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{және} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \quad \text{теңдіктері}$$

орындалуы керек. Егер бірінші теңдікте y-ті белгілеп алып, x бойынша интегралдасақ,

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y), \qquad \text{мұнда } C = \varphi(y). \tag{11.31}$$

Енді осы теңдікті y бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\int P(x,y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

болуы шарт. Осы теңдіктен

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \left(\int P(x,y)\,dx\right)'_y.$$

Бұл теңдіктің сол бөлігі тек y айнымалға тәуелді. Оң бөлігінің де тек y айнымалға тәуелді екенін көрсету үшін оның x бойынша туындысы нөлге тең екендігін көрсетеміз:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right)\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial (P)}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Демек,

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y)dy = \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right]dy + C, \qquad C = \text{const}.$$

$\varphi(y)$ функциясының бұл мәнін (11.31) теңдікке қойсақ ізделетін $U(x,y)$ функциясы табылады.

Сонда (11.29) $U(x,y)$ функциясы мына теңдіктердің біреуімен анықталады:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt, \tag{11.32}$$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \tag{11.33}$$

мұндағы (x_0, y_0) нүктесі, $[x_0, x]$, $[y_0, y]$ кесінділер D аймағына жататындай етіп таңдап алынды.

$U(x,y) = C$ теңдік барлық шешімдерді қамтиды.

Мысал 2.12. $(x\ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y\ln y - y - 2xy)dx = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $P(x,y) = x^3 + y\ln y - y - 2xy, Q(x,y) = x\ln y - x^2 + \cos y$ олғандықтан, олардың үзіліссіздік аймағы

$$D = \{(x,y) \in R^2; -\infty < x < +\infty, y > 0\}$$

және осы аймақта оның

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y\ln y - y - 2xy) = \ln y + 1 - 1 - 2x = \ln y - 2x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\ln y - x^2 + \cos y) = \ln y - 2x,$$

дербес туындылары да үзіліссіз.

(11.30) шарт орындалады. (11.32) формула бойынша,

$$U(x,y) = \int_0^x (t^3 + y\ln y - y - 2ty)dt + \int_{y_0}^{y} (0\ln t - 0^2 + \cos t)dt =$$

$$= \left[\frac{t^4}{4} + y\ln y\, t - yt - 2y\frac{t^2}{2}\right]_0^x + \sin t\,\Bigg|_{y_0}^{y} = \frac{t^4}{4} + xy\ln y - yx -$$

$$-yx^2 + \sin y - \sin y_0.$$

Яғни, берілген теңдеудің жалпы интегралы,

$$x^4 + 4xy(\ln y - 1) - 4x^2y + 4\sin y = C$$

Демек, (11.28) теңдеуді шешу үшін, алдымен (11.30) шартты тексеріп, содан соң (11.32) мен (11.33) формулаларды немесе (11.31) теңдікті қолданамыз.

Егер (11.30) шарт орындалмаса, онда (11.28) толық дифференциалдық теңдеу емес. Алайда, кейбір жағдайларды (11.28) теңдеуді интегралдық көбейткіш деп аталушы кейбір $\mu(x,y)$ функцияға көбейтіп, оны толық дифференциалдық теңдеу түріне келтіруге болады.

Келесі тұжырым орынды: Егер $P(x,y), Q(x,y)$ функциялары мен оның дербес туындылары кейбір D аймақта үзіліссіз және осы аймақта $P^2 + Q^2 \neq 0$ болса, онда $\mu(x,y)$ интегралдық көбейткіш табылады.

$$\mu(x,y)\, P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болуы үшін

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)P(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)Q(x,y)]$$

шарты орындалуы қажет. Дифференциалдауды орындап, әрі ұқсас мүшелерін ықшамдасақ,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot \mu, \text{теңдіктен}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P - \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (11.34)$$

бірінші ретті дербес туындылы теңдеу алынады. Бұл теңдеуді шешу күрделі. Алайда μ функциясы тек x айнымалға немесе тек y айнымалға тәуелді болса, онда μ(x) немесе μ(y) функцияларды табу ықшамдалады.

μ(x) болсын. Онда (11.34) теңдеу

$$-\frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}}{Q} dx$$

түрге келіп, бұдан,

$$\mu(x) = exp\left(\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}}{Q} dx\right) \qquad (11.34а)$$

Бұл теңдіктің сол бөлігі x айнымалдың функциясы болғандықтан, оң бөлігінде x айнымалдың функциясы болуы керек.

Осы сияқты μ = μ(y) болғанда,

$$\mu(y) = exp\left(\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy\right) \qquad (11.34б)$$

Мысал 2.13. Интегралдаушы көбейткіш μ = μ(x) деп алып,

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right) dy = 0$$

теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі.

$$P(x,y) = 1 + \frac{y}{x^2}, Q(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}$$

болғандықтан $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{4y}{x^3}$, яғни берілген теңдеу толық дифференциалдық теңдеу емес. μ = μ(x) деп алғанда (11.34а) теңдік бойынша

$$\mu(x) = exp\left(\int \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4y}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}}dx\right) = exp\left(\int \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{4y}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}}dx\right) =$$

$$= exp\left(\int \frac{\frac{2x+4y}{x^3}}{\frac{x+2y}{x^2}}dx\right) =$$

$$= exp\left(\int \frac{2}{x}dx\right) = exp(2\ln x) = exp(\ln x^2) = x^2$$

яғни, $\mu(x) = x^2$ интегралдаушы көбейткіш. Берілген теңдеуді x^2 -қа көбейтсек,

$$(x^2 + y)dx + (x + 2y)dy = 0$$

толық дифференциалдық теңдеу шығады. (11.32) формуланы қолдансақ,

$$U(x,y) = \int_0^x (t^2+y)dt + \int_{y_0}^y (0+2t)dt = \left[\frac{t^3}{3}+yt\right]_0^x + t^2\Bigg|_{y_0}^{y} = \frac{x^3}{3}+yx+y^2-y_0^2$$

Демек жалпы шешім: $U(x,y) = x^3 + 3yx + 3y^2 = C$

§ 3. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер

Негізгі ұғымдар

Реті бірден жоғары дифференциалдық теңдеулерді жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер деп атайды.

Екінші ретті дифференциалдық теңдеу жалпы жағдайда

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

түрінде, ал егер жоғары ретті туындыға қатысты шешу мүмкін болса,

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (11.35)$$

түрінде болып, бастапқы шарттар (Коши),

$$y|_{x=x_0} = y_0, \;\; y'|_{x=x_0} = y_0' \text{ немесе } y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0' \qquad (11.36)$$

түрінде қойылады.

(11.35) теңдеудің жалпы шешімі деп, екі кез келген c_1, c_2 тұрақтылардан тәуелді $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ функциясын атайды:

а) бұл функция c_1, мен c_2 тұрақтылардың белгіленген мәндерінде (11.35) теңдеудің шешімі болады;

б) (11.36) бастапқы шарттардың әртүрлі мәндерінде $c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0$, жалғыз мәндер табылып, $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ функциясы (11.35) теңдеудің шешімі болады және (11.36) шарттарды қанағаттандырады.

(11.35) дифференциалдық теңдеудің $\varphi(x, y, c_1, c_2) = 0$. $\varphi(x, y, c_1^0, c_2^0) = 0$ түріндегі шешімдері, сәйкес түрде, жалпы интеграл және дербес интеграл деп аталады. (11.35.) , (11.36) есепті Коши есебі деп атайды.

Теорема 11.3 (Коши). Егер (11.35) теңдеудегі $f(x, y, y')$ функциясы және оның f'_y, $f'_{y'}$ дербес туындылары кейбір $D \subset \{x, y, y'\}$ аймақта үзіліссіз болса, онда кез келген $\{x_0, y_0, y'_0\} \in D$ нүктесі үшін (11.35) теңдеудің (11.36) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар ([9], Гл. 2, §6).

Осы сияқты ұғымдар мен анықтамалар n-ретті дифференциалдық теңдеулер, $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ немесе

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (11.36)$$

теңдеулер үшін де орын алады.

(11.36) теңдеу үшін бастапқы шарттар

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \ldots, \ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \text{ немесе}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (11.37)$$

түрінде қойылады. Мұндағы $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ берілген сандар.

3.1. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер

Дифференциалдық теңдеуді шешу (интегралдау) тәсілдерінің бірі – ретін төмендету.

Тәсілдің мағынасы, айнымалды ауыстыру (алмастыру) арқылы дифференциалдық теңдеудің ретін төмендету.

Реті төмендетілетін бес түрлі $n \geq 2$ ретті дифференциалдық теңдеулерді қарастырайық

1. $y'' = f(x)$ (11.38)

түріндегі теңдеу. $y' = p(x)$ жаңа айнымал енгізсек, $p' = f(x)$ бірінші ретті теңдеу шығады. Осы теңдеуді шешіп, одан соң $y' = p(x)$ теңдеуді шешсек, (11.38) теңдеудің жалпы шешімі алынады.

Іс жүзінде теңдеудің реті тікелей біртіндеп интегралдап төмендетіледі.

(11.38) теңдеудің жалпы шешімін,

$$y = \frac{1}{1!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)dt + c_1x + c_2 \qquad (11.39)$$

түрінде жазуға болады. Мұндағы x_0, $f(x)$ функциясының үзіліссіздік аралығындағы кез келген нүкте, ал c_1 мен c_2 кез келген тұрақты сандар.

Шынында да, $y' = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c_1$, $y'' = f(x)$.

Осы сияқты, $n > 2$ болғанда,

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (11.38a)$$

теңдеудің жалпы шешімі,

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + \frac{c_1x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots c_{n-1}x + c_n. \qquad (11.39a)$$

Мысал 3.1. $y^{IV} = 16\sin 2x$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуді біртіндеп төрт рет интегралдасақ,

$$y^{(3)}(x) = \int 16\sin 2x\,dx = 16\left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right) + c_1,$$

$$y^{(2)}(x) = \int((-8)\cos 2x + c_1)dx = -8\frac{\sin 2x}{2} + c_1x + c_2,$$

$$y'(x) = \int(-4\sin 2x + c_1x + c_2)dx = -4\frac{(-\cos 2x)}{2} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

$$y(x) = \int\left(2\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right)dx = \sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4.$$

(11.39) формула бойынша,

$$y = \frac{1}{3!}\int_0^x 16\sin 2t(x-t)^3\,dt + \frac{c_1x^3}{3!} + \frac{c_2x^2}{2!} + \frac{c_3x}{1!} + c_4;$$

мұндағы интегралды бөліктеп интегралдау әдісімен интегралдасақ жоғарыда алынған жалпы шешім шығады.

2. $$y'' = f(x,y') \qquad (11.40)$$

түріндегі, оң бөлігіне ізделетін y функция айқын кірмейтін теңдеу $y' = P(x)$ алмастыруы арқылы

$$P' = f(x,p) \qquad (11.41)$$

түріндегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

Дербес жағдайда

$$y'' = f(y')$$

теңдеу $y' = p(x)$ ауыстырумен $p' = f(p)$ теңдеуге келтіріліп, ақырында $\frac{dp}{f(p)} = dx$ айнымалдары ажыратылған теңдеу алынады.

Осы сияқты $n > 2$ болғанда

$$y^{(n)} = f\left(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \dots; y^{(n-1)}\right), \qquad (11.42)$$

$p(x) = y^{(k)}$ ауыстыруын енгізіп, теңдеудің ретін k бірлікке келтіруге болады:

$$p^{(n-k)} = f\left(x, p, p', p'', \dots p^{(n-k-1)}\right). \qquad (11.42a)$$

Дербес жағдайда $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$ болса, $p = y^{(n-1)}$ ауыстыру енгізіп.

$$p' = f(x,p)$$

бірінші ретті дифференциалдық теңдеу алынады. Содан соң біртіндеп немесе (11.39а) формула арқылы $y^{(n-1)} = p(x)$ теңдеу шешіледі.

Мысал 3.2. $xy^{(3)} = y^{(2)} - xy^{(2)}$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $p(x) = y^{(2)}$ деп ауыстырсақ берілген теңдеу $xp' = (1-x)p$ түріне келеді. Алынған бұл теңдеуді айнымалдарды ажыратып шешсек,

$$\frac{dp}{p} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx, \ln|p| = \ln|x| - x - \ln c \quad \text{болып,}$$

бұдан $p = c_1 e^{-x} \cdot x$ немесе $y'' = c_1 x e^{-x}$ Бұл теңдеуді біртіндеп екі рет интегралдасақ,

$$y = c_1 e^{-x}(x+2) + c_2 x + c_3$$

жалпы шешім алынады.

3. $$y'' = f(y, y') \qquad (11.43)$$

түріндегі, оң бөлігіне x тәуелсіз айнымал айқын кірмейтін теңдеу.

(11.43) теңдеудің ретін төмендету үшін $y' = p(y)$ ауыстыруын енгіземіз. $p(y) = p[y(x)]$ екенін ескерсек,

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

яғни $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Сонда (11.43) теңдеу

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p) \qquad (11.44)$$

түрінде жазылады. $p = \varphi(y, c_1)$, бұл теңдеудің шешімі болсын. $p(y)$-ті y'-қа ауыстырсақ , $y' = \varphi(y, c_1)$ түріндегі айнымалдары ажыралатын теңдеу шығады: $\frac{dy}{\varphi(y,c_1)} = dx$. Бұл теңдеуді интегралдасақ

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = x + c_2$$

$y'' = f(y)$ болғанда да $y' = p(y)$ ауыстыруын енгізсек, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$; берілген теңдеу

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y)$$

бірінші ретті айнымалдары ажыратылатын теңдеу түріне келеді.

Осы сияқты

$$y^{(n)} = f\left(y,\ y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (11.45)$$

теңдеуді, $y' = p(y)$ ауыстыруын енгізсек,

$$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}, y^{(3)} = \frac{d}{dx}(p \cdot p'_y) = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p\left((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy}\right),$$

т.б. есептеулер жасап, берілген теңдеудің ретін бір бірлікке төмендетеміз.

Мысал 3.3. $yy'' = y'^2 - y'^3$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $y' = p(y)$ деп ауыстырсақ, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ болады, онда берілген теңдеу

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2 - p^3$$

түріне келеді. Бұл теңдеу екі теңдеуге ажыралады.

$$p = 0 \text{ және } y \cdot \frac{dp}{dy} = p - p^2.$$

Бірінші теңдеуден $y = c_1$, ал екінші теңдеуден $p = y' = \frac{y}{c_1 + y}$ теңдеу алынады. Бұл теңдеуді интегралдасақ,

4. $$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (11.46)$$
дифференциалдық теңдеу белгісіз функция және оның туындыларына қатысты біртекті болса, яғни
$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')\equiv\lambda^{\alpha}F(x,y,y',y'')$$
тепе-теңдік орынды болса, онда $y'=y\cdot z(x)$ ауыстыру арқылы оның ретін бір бірлікке кемітуге болады. Шынында да $y'=y\cdot z(x)$ қатысты дифференциалдасақ,
$$y''=\left(y\cdot z(x)\right)'=y'z(x)+y\cdot z'(x)=y\cdot z^2(x)+yz'(x)=y\left(z^2(x)+z'(x)\right)$$
y' пен y'' туындылардың өрнектерін (11.46) теңдеуге қойсақ, $F(x,y,yz,y(z^2+z'))=y^{\alpha}F(x,1,z,z^2+z')=0$, яғни $F(x,1,z,z^2+z')=0$, $z(x)$ айнымалға байланысты бірінші ретті дифференциалдық теңдеу алынды. Осы сияқты, біртекті теңдеу
$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (11.47)$$
үшін $y'=y\cdot z(x)$ ауыстыруын енгізсек, $y(x)$ функциясының туындыларын біртіндеп, жаңа $z(x)$ белгісіз функцияның туындылары арқылы өрнектесек, $y^{(n)}=\varphi\left(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)$ болып, мұндағы φ-белгілі функция. $y(x)$ функциясының туындыларының өрнектерін (11.47) теңдеуге қойсақ және оның біртекті екендігін ескерсек,
$$F[(x,y,yz,y(z^2+z'),\ldots,y\cdot\varphi\left(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)]\equiv$$
$$\equiv y^{\alpha}F(x,1,z,z^2+z',\ldots,\varphi\left(,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)=0$$

Мысал 3.4. $xyy''+xy'^2-3yy'=0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеудің сол бөлігіндегі функция біртекті, $F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=x\cdot\lambda y\cdot\lambda y''+x(\lambda y')^2-3\lambda y\cdot\lambda y'=\lambda^2(xyy'+xy^2+3yy')=\lambda^2F(x,y,y',y'')$, яғни (11.46) түріндегі теңдеу. $y'=y\ \ z(x)$ ауыстыруын енгізіп, $y''=\left(y\cdot z(x)\right)'=y(z^2+z')$ болғандықтан, берілген теңдеуді түрлендірсек, $xy\cdot y(z^2+z')+xy^2\ \ z^2-3y^2z=y^2[x(z^2+z')+xz^2+3z]=0$, немесе $x(2z^2+z')-3z=0$, $z'-\frac{3}{x}z=-2z^2$ түріндегі Бернулли теңдеуі алынады. Бұл теңдеудің жалпы шешімі $z(x)=\frac{2x^3}{x^4+c_1}$. Одан әрі $z=\frac{y'}{y}$ екенін ескерсек, $\frac{y'}{y}=\frac{2x^3}{x^4+c_1}$ айнымалдары ажыралған теңдеу алынады. Алынған теңдеуді интегралдасақ,
$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|x^4+c_1|+\ln c_2$, яғни $y=c_2\sqrt{|c_1+x^4|}$.

5. $$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$$
теңдеуді алгебралық түрлендіру жолымен
$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=\left[\varphi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)\right]'=0$$
түрге келтіру мүмкін болса, онда теңдеудің реті бірге кемиді:
$$\varphi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)=c_1 \qquad (11.48)$$

Мысал 3.5. $y''=xy'+y+1$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $F(x,y,y',y'')=y''-xy'-y-1=[y'-(xy+x)]'=0$ түрінде түрлендірсек $y'-(xy+x)=c_1$ теңдеу алынады. Бұл $y'-xy=c_1+x$

сызықтың теңдеуді $(y+1)' = x(y+1) + c_1$ түрінде жазуға болады. Соңғы сызықтық теңдеудің жалпы шешімі,

$$y + 1 = e^{\frac{x^2}{2}}\left(c_1\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + c_2\right)$$

3.2. Жоғары ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 3.1. n-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп $y(x)$ белгісіз функция және оның туындылары $y'(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$ бірінші дәрежеде кіретін.

$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = g(x), x \in (a;\, b)$, мұндағы $b_0(x) \neq 0$, $b_1(x), \dots, b_n(x), g(x)$ берілген функциялар, түріндегі теңдеуді атайды.

$b_0(x) \neq 0$, $x \in (a;\, b)$ болғандықтан теңдеудің екі бөлігін $b_0(x) \neq 0$ функцияға бөлсек, бұл теңдеу

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots$$
$$+ p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (11.49)$$

түрге келеді.

Егер $f(x) \equiv 0$ болса, онда

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x) = 0 \qquad (11.50)$$

біртекті теңдеу деп, $f(x) \neq 0$ болса, біртекті емес теңдеу деп аталады.

$$L[\cdot] = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x).$$

$L[\cdot]$ белгі (таңба) n-ретті сызықтық дифференциалдық оператор деп аталады.

Анықталу аймағы $D[L] \subset C^{(n)}(a, b)$, яғни n-ретті үзіліссіз туындылары бар функциялар.

Теорема 11.3 (Коши) $f(x)$ функциясы және $\{p_i(x)\}_{i=1}^{n}$ функциялар (a, b) интервалда үзіліссіз болса, яғни $p_i(x) \in C(a, b)$, $i = \overline{1, n}$, $f(x) \in C(a, b)$, онда (11.50) теңдеудің (11.37) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар.

3.3. Екінші ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

$n = 2$ болғанда біртекті (11.50) теңдеу

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \;\; a < x < b \qquad (11.51)$$

түріне келеді.

(11.51) теңдеудің шешімдерінің кейбір қасиеттерін қарастырайық.

Теорема 11.4. Егер $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары (11.51) теңдеудің дербес шешімдері болса, онда

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad (11.52)$$

функциясы да (11.51) теңдеудің шешімі болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша $L[y_1] \equiv y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 \equiv 0, L_2[y_2] \equiv y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \equiv 0$. Енді $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ функцияны (11.51) теңдеудің сол бөлігіне қойсақ және ықшамдасақ,

$$L[y] = [c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]'' + p(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]' + q(x)[c_1y_1(x) +$$
$$+c_2y_2(x)] = c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x) + c_1p(x)\cdot y_1'(x) + c_2p(x)\cdot y_2'(x) +$$
$$+ c_1q(x)\cdot y_1(x) + c_2q(x)\cdot y_2(x) = c_1[y_1'' + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] +$$
$$+c_2[y_2'' + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = c_1 \quad 0 + c_2 \quad 0 = 0$$

болады. Яғни, (11.52) функция (11.51) теңдеудің шешімі.

Салдар 3.1. Егер $L[y_1] = 0,\ L[y_2] = 0$ болса, онда $L[y_1 + y_2] = 0, L[cy_1] = 0,\ L[cy_2] = 0$ болады.

Бұл тұжырымдар (11.51) теңдеудің біртекті сызықтық теңдеу екендігінен шығады.

(11.52) функция (11.51) теңдеудің шешімі және құрамында екі кез келген тұрақты бар. (11.52) функция (11.51) теңдеудің жалпы шешімі болама? Осы сұраққа жауап беру үшін функциялардың сызықтық тәуелділігі және сызықтық тәуелсіздігі деген ұғымдарды енгіземіз.

Анықтама 3.2. Егер

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) \equiv 0, \quad a < x < b \tag{11.53}$$

тепе теңдігі орындалатындай ең болмағанда біреуі нөлге тең емес α_1, α_2 сандары табылатын болса, онда $y_1(x)$, $y_2(x)$ функциялары (a, b) аралығында сызықтық тәуелді деп аталады.

Басқаша айтқанда $y_1(x)$, $y_2(x)$ функцияларының біреуі $\forall x \in (a, b)$ нүктесінде қалған екіншісі арқылы өрнектелсе, онда бұл функциялар (a, b) аралығында сызықтық тәуелді болады.

Егер (11.53) тепе теңдік тек барлық $\alpha_i = 0, i = \overline{1,2}$ болғанда және тек сонда ғана орындалса, онда $y_1(x)$, $y_2(x)$ функциялары (a, b) аралығында сызықтық тәуелсіз деп аталады.

Яғни біреуі екіншісі арқылы өрнектелмесе онда бұл функциялар (a, b) аралығында сызықтық тәуелсіз болады.

Мысалы, $y_1(x) = \sin^2 x$ және $y_2(x) = 1 - \cos 2x$ функциялары (–∞; +∞) аралығында сызықтық тәуелді, өйткені $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\forall x \in (-\infty; +\infty)$, ал $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-3x}$ функциялары (–∞; +∞) аралығында сызықтық тәуелсіз, өйткені $\frac{e^x}{e^{-3x}} = e^{4x} \neq \text{const}$.

Сызықтық тәуелділік пен сызықтық тәуелсіздікті анықтау үшін, $y_1(x)$ және $y_2(x)$ дифференциалданушы функциялар үшін,

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \tag{11.54}$$

Вронский анықтауышы (немесе вроскиан) деп аталушы анықтауышты қарастырамыз.

Теорема 11.5. Егер $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары $(a,\ b)$ аралығында сызықтық тәуелді болса, онда $W(y_1, y_2) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, болады.

Дәлелдеуі. $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары сызықтық тәуелді болғандықтан (11.53) тепе-теңдік орындалатындай ең болмағанда біреуі нөлге тең емес α_1, α_2 сандары табылады. $\alpha_1 \neq 0$ болсын. Онда (11.53) теңдіктен,

$$y_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2(x), \qquad y_1{}'(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2{}'(x).$$

$y_1(x)$ және $y_1'(x)$ функциялардың бұл өрнектерін (11.54) Вронский анықтауышына қойсақ,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y'_2 & y'_2 \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 11.6. Егер $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары (a, b) аралықта (11.51) теңдеудің сызықтық тәуелсіз (іргелі) шешімдері болса, онда осы интервалда $W\ (y_1, y_2) \neq 0$.

Дәлелдеуі. Керісінше жориық, яғни $x_0 \in (a, b)$ нүкте табылып, бұл нүктеде $W(x_0) = 0$ болсын.

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0 \end{aligned} \qquad (11.55)$$

теңдеулер жүйесін құрамыз.

Мұндағы α_1 мен α_2 белгісіз сандар. Бұл жүйенің анықтауышы $W\ (x_0) = 0$ болғандықтан, бұл біртекті жүйенін нөлге тең емес $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ шешімдері бар.

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

функцияны қарастырайық, мұндағы α_1, α_2 сандары (11.55) жүйенің, нөлге тең емес шешімдері. Теорема 11.4 бойынша $y(x)$ функциясы (11.51) теңдеудің шешімдері. Сонымен қатар, α_1 мен α_2 (11.55) жүйенің шешімі болғандықтан $y(x)$ функциясы

$$y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0 \qquad (11.56)$$

шарттарды қанағаттандырады.

Мұндай бастапқы шарттарды $y(x) = 0$ шешім қанағаттандырады. Шешімнің барлығы және жалғыздығы туралы теорема 11.3 бойынша $y(x) = 0$ функция (11.51) теңдеудің (11.56) бастапқы шарттарды қанағаттандырушы жалғыз шешім. Демек, (a, b) аралықта $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ болады, яғни $y_1(x)$, $y_2(x)$ сызықтық тәуелді функциялар.

Ал бұл теореманың шартына қайшы келеді. Сондықтан (a, b) аралықтың барлық нүктелерінде $W(x) \neq 0$.

Салдар 3.2. Вронский анықтауышы (a, b) аралығындағы бірде бір нүктеде нөлге тең болмауы үшін, дербес шешімдер сызықтық тәуелсіз болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл тұжырым тікелей теорема 11.5 пен теорема 11.6 тұжырымдарынан шығады.

Екінші ретті біртекті сызықтың дифференциалдық теңдеудің кез келген (a, b) аралығындағы $y_1(x)$, $y_2(x)$ сызықтық тәуелсіз шешімдері шешімдердің фундаментальдық (іргелі) жүйесін құрайды. Басқа шешімдер осы шешімдер арқылы өрнектеледі.

Теорема 11.7. (Жалпы шешім туралы)

Егер $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары (a, b) аралығында (11.51) теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері болса, онда

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (11.57)$$

функциясы, мұндағы c_1 мен c_2 – кез келген тұрақтылар, (11.51) теңдеудің жалпы шешімі болады.

Дәлелдеуі. Теорема 11.4 бойынша (11.57) $y(x)$ функциясы (11.51) теңдеудің жалпы шешімі екенін көрсету үшін, кез келген

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0' \qquad (11.58)$$

бастапқы шарттар берілгенде, (11.57) функциядан (11.58) шарттарды қанағаттандырушы дербес шешім ажыратып алуға болатындығын көрсету керек.

$x = x_0$ деп алып, (11.57) функциядан және оның $y'(x)$ туындысынан теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{matrix} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y_0' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{matrix} \qquad (11.59)$$

мұндағы c_1 мен c_2 – белгісіз сандар.

Бұл жүйенің анықтауышы $W(x_0)$ Вронский анықтауышы. Шарт бойынша $y_1(x)$, $y_2(x)$ сызықтық тәуелсіз функциялар, сондықтан, теорема 11.6 бойынша $W(x_0) \neq 0$.

Демек, (11.59) жүйенің жалғыз $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$ шешімі бар. Осы мәндерді (11.57) теңдікке қойсақ $y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ ізделген дербес шешім алынады. Демек, $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ жалпы шешім.

Мысал 3.6. $y'' - 4y = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл екінші ретті біртекті сызықтық теңдеу. $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{2x}$ функциялары теңдеудің дербес шешімдері екендігін тікелей тексеруге болады: $y_1' = -2e^{-2x}, y_1'' = 4e^{-2x}$, яғни $y_1'' - 4y_1 = 0$; $y_2' = 2e^{2x}$, $y_2'' = 4e^{2x}$, яғни $y_2'' - 4y_2 = 0$. Бұл шешімдер сызықтық тәуелсіз, $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} = e^{4x} \neq$ const. Сондықтан теорема 11.7 бойынша, жалпы шешім:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

Енді (11.51) теңдеудің бір шешімі белгілі болғанда, оның жалпы шешімін табу әдісін көрсетейік.

$y_1(x)$ функциясы (11.51) біртекті теңдеудің дербес шешімі болсын. $y = y_1 z$ деп жаңа $z(x)$ функциясын енгіземіз. Онда, $y' = y_1' \cdot z + y_1 \cdot z', y'' = y_1'' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 z''$ болады. Туындылардың бұл өрнектерін (11.51) теңдеуге қойсақ,

$$[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] \cdot z + z'[2y_1' + p(x)y_1] + y_1 z'' = 0$$

теңдеуі алынады. $y_1(x)$ берілген (11.51) теңдеудің шешімі болғандықтан, z белгісіздің коэффициенті нөлге тең болады. Онда соңғы теңдеу

$$z'[2y_1' + p(x)y_1] + y_1 z'' = 0$$

түріне келеді. $z' = u(x)$ десек, бұл теңдеудің реті төмендейді,

$$u[2y_1' + p(x)y_1] + u'y_1 = 0.$$

Бұл бірінші ретті айнымалдары ажыралатын теңдеу. Бұл теңдеуді шешсек,

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dy_1}{y_1} - \int p(x)dx, \ln|u| = -2\ln|y_1| - \int p\,(x)dx + \ln|c_1|, u =$$
$$= \pm \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$

немесе $u = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$ мұндағы c_1 кез келген тұрақты. Енді $z' = u$ теңдігі бойынша z айнымалға оралып, z үшін табылған өрнекті y_1-ге көбейтсек, (11.51) біртекті теңдеудің жалпы шешімі алынады,

$$y = c_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}\, dx + c_2 y_1 \qquad (11.60)$$

мұндағы c_1 мен c_2 кез келген тұрақтылар, ал сызықты тәуелсіз екінші шешім

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

Демек, кез келген біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің бір дербес шешімі y_1 белгілі болса, $y = y_1\ z$ алмастыру арқылы оның ретін бір ретке төмендетуге болады.

Мысал 3.7. $y'' - 9y = 0$ теңдеудің $y_1 = e^{3x}$ дербес шешімі белгілі. Оның жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеуде $p(x) = 0$ болғандықтан, екенші дербес шешім,

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int 0dx} dx = e^{3x} \int \frac{1}{(e^{3x})^2} e^{\int 0dx} dx = e^{3x} \int \frac{e^{c_0}}{e^{6x}} dx =$$
$$= e^{3x+c_0} \int e^{-6x} dx = \frac{e^{3x} \cdot e^{-6x}}{-6} \mathrm{c} = -\frac{\mathrm{c}}{6} e^{-3x}$$

Онда жалпы шешім (11.60)формуласы бойынша,

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

3.4. n-ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

$n \geq 3$ болғанда

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots$$
$$+p_{n-1}(x)y' + +p_n(x) = 0,\ x \in (a,b) \qquad (11.50)$$

түрінде жазылады, мұндағы $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x) \in \mathrm{C}(a,b)$, яғни (a,b) аралықта үзіліссіз функциялар. $n = 2$ болғандағы тұжырымдарды $n \geq 3$ жағдайлар үшін де таратуға болады.

1. **Теорема 11.8.** Егер $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x), x \in (a,b)$ функциялар (11.50) теңдеудің дербес шешімдері болса, онда

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

функция да (11.50) теңдеудің шешімі болады.

2. **Анықтама 3.3.** $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, a < x < b$ (11.53 a)

тепе-теңдігі орындалатындай, ең болмағанда біреуі нөлге тең емес, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сандары табылса, онда $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялары (a, b) аралықта сызықтық тәуелді деп аталады.

(11.53 a) тепе-теңдік барлық $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ болғанда және тек сонда ғана орындалса, онда $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялары (a, b) аралығында сызықтық тәуелсіз деп аталады.

3. Вронский анықтауышы мына түрде жазылады:

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & & \cdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (11.54\ a)$$

4. **Теорема 11.9.** Егер $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), x \in (a, b)$ функциялары (a, b) аралығында іргелі (сызықтық тәуелсіз) шешімдер жүйесі болса, онда осы интервалда $W(x) \neq 0$.

5. **Теорема 11.10**. (Жалпы шешім туралы). Егер $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялары (a, b) аралығында (11.51a) теңдеудің іргелі (сызықтық тәуелсіз) шешімдер жүйесі болса, онда

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \qquad (11.57\ a)$$

функциясы, мұндағы $c_1, c_2, \dots, c_n$ кез келген тұрақтылар, (11.51 a) теңдеудің жалпы шешімі болады.

11.8, 11.9, 11.10 теоремалар сәйкес 11.4, 11.5, 11.7 теоремалар сияқты дәлелденеді.

Мысал 3.8. $y''' - y'' - 9y' - 9y = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $y_1 = e^x, y_2 = e^{-3x}, y_3 = e^{3x}$ функциялары берілген теңдеудің дербес шешімдері. Шынында да:

$$y_1 = e^x, y_1' = e^x, y_1'' = e^x, y_1''' = e^x; y_1''' - y_1'' - 9y_1' + 9y_1$$
$$= e^x - e^x - 9e^x + 9e^x = 0$$
$$y_2 = e^{-3x}, y_2' = -3e^{-3x}, y_2'' = 9e^{-3x}; y_2''' = -27e^{-3x}; y_2''' - y_2'' - 9y_2' + 9y_2 =$$
$$= -27e^{-3x} - 9e^{-3x} + 27e^{-3x} + 9e^{-3x} = 0$$
$$y_3 = e^{3x}, y_3' = 3e^{3x}, y_3'' = 9e^{3x}; y_3''' = 27e^{3x}; y_3''' - y_3'' - 9y_3' + 9y_3 =$$
$$= 27e^{3x} - 9e^{3x} - 27e^{3x} + 9e^{3x} = 0$$

$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ функциялар шешімдердің іргелі жүйесін құрайды.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-3x} & e^{3x} \\ e^x & -3e^{-3x} & 3e^{3x} \\ e^x & 9e^{-3x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^x(-27 - 27) - e^x(9 - 9) + e^x(3 + 3) = -48e^x \neq 0,$$
$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Онда теорема 11.10 бойынша,

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{3x}$$

функция жалпы шешім болады.

3.5. Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

(11.51) теңдеуде $p(x)$ және $q(x)$ функциялар тұрақты шама болған,

$$y'' + py' + qy = 0, \quad x \in (a, b) \qquad (11.61)$$

теңдеу екінші ретті тұрақты коэффицентті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Бұл теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, оның сызықтық тәуелсіз (іргелі) екі дербес шешімін табу жеткілікті.

(11.61) теңдеудің шешімін Л. Эйлер ұсынғандай

$$y = e^{kx}$$

түрінде іздейік, k кейбір сан. $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$ өрнектерді (11.61) теңдеуге қойсақ, $k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0, e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$, $e^{kx} \neq 0$ өрнекке соңғы теңдіктің екі бөлігін бөлсек,

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (11.62)$$

түріндегі (11.61) теңдеудің сипаттаушы теңдеуі деп аталушы теңдеу шығады.

Теорема 11.11. Егер (11.62) сипаттаушы теңдеудің түбірлері. а) k_1 мен k_2 нақты және әртүрлі болса, онда (11.61) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(x) = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} \qquad (11.63)$$

түрінде болады;

б) Нақты және өзара тең болса, яғни $k_1 = k_2$, онда (11.61) теңдеудің жалпы шешімі,

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_1x} \cdot x \qquad (11.64)$$

түрінде болады;

в) комплекс түйіндес сандар болса, яғни $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$, онда (11.63) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \qquad (11.65)$$

түрінде болады.

Дәлелдеуі. а) $k_1 \neq k_2$ нақты сандар болғанда $y_1 = e^{k_1x}$ және $y_2 = e^{k_2x}$ дербес шешімдер болады. y_1 мен y_2 функциялар шешімдердің іргелі (сызықтық тәуелсіз) жүйесін құрайды. Өйткені, олардың Вронский анықтауышы

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = k_2e^{(k_1+k_2)x} - k_1e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 + k_3) \neq 0$$

(11.57) формула бойынша, жалпы шешім,

$y(x) = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$ болады.

б) $k_1 = k_2$ нақты сан $\left(D = \frac{p^2}{4} - q = 0, k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}\right)$. Бұл жағдайда тек бір дербес шешім $y_1 = e^{k_1x}$ белгілі. $y_2 = x \cdot e^{k_1x}$ функциясы да (11.63) теңдеудің дербес шешімі болады.

Шынында да $y_2 = x \cdot e^{k_1x}$ функцияны (11.61) біртекті теңдеудің сол бөлігіне қойсақ,

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = (xe^{k_1x})'' + p(xe^{k_1x})' + qxe^{k_1x} =$$
$$= (2k_1e^{k_1x} + xk^2e^{k_1x}) + p(e^{k_1x} + k_1xe^{k_1x}) + qxe^{k_1x} =$$
$$= e^{k_1x}(2k_1 + xk_1^2 + pxk_1 + p + qx) = e^{k_1x}[x(k_1^2 + pk_1 + p) + (2k_1 + p)].$$

k_1 саны (11.62) сипаттаушы теңдеудің түбірі болғандықтан $k_1^2 + pk_1 + q = 0$, ал еселі түбірі болғандықтан $2k_1 + p = 0$ болады. Демек, $y_2'' + py_2' + py_2 = 0$, яғни $y_2(x)$ (11.61) біртекті теңдеудің шешімі.

Вронский анықтауышы

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ k_1e^{k_1x} & e^{k_1x} + k_1e^{k_1x} \end{vmatrix} = e^{2k_1x}(1 + k_1x) - k_1xe^{2k_1x} = e^{2k_1x} \neq 0$$

болғандықтан $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = xe^{k_1 x}$ функциялары шешімдердің іргелі (сызықтық тәуелсіз) жүйесін құрайды. Сондықтан (11.57) формула бойынша жалпы шешім

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$$

түрінде болады.

в) (11.62) сипаттаушы теңдеудің түбірлері комплекс түйіндес $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ сандар.$\left(D = \frac{p^2}{4} - q < 0, \alpha = -\frac{p}{2} \ , \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{2}} > 0 \right)$. Бұл жағдайда (11.61) біртекті теңдеудің шешімдері $\overline{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ және $\overline{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ Эйлер формуласы бойынша $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ болғандықтан,

$$\overline{y}_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$
$$\overline{y}_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

(11.61) біртекті теңдеудің екі нақты дербес шешімдерін табамыз. Ол үшін y_1 мен y_2 функцияларының екі сызықтық комбинациясын аламыз:

$$y_1 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, y_2 = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

y_1 мен y_2 функциялары (11.61) біртекті теңдеудің шешімдері болады (Теорема 11.4) және бұл функциялар шешімдердің іргелі жүйесін (сызықтық тәуелсіз) құрайды. Сондықтан (11.57) формула бойынша, жалпы шешім

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x),$$

түрінде болады.

Мысал 3.9. $y'' - 7y' + 12y = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Берілген теңдеудің (11.62) сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 7k + 12 = 0$, оның шешімдері $k_1 = 3, k_2 = 4$. Демек (11.63) формула бойынша жалпы шешім $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$

Мысал 3.10. $y'' - 6y' + 9y = 0$ теңдеудің жалпы шешімі табылсын.

Шешуі. Берілген теңдеудің сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 6k + 9 = 0$, оның шешімдері $k_1 = k_2 = 3$, яғни $k_1 = 3$ екі еселі түбір. Онда (11.64) формула бойынша $y = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x}$

Мысал 3.10. $y'' - 4y' + 13y = 0$ теңдеудің жалпы шешімі табылсын.

Шешуі. Берілген теңдеудің сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 4k + 13 = 0$, оның түбірлері $k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i$, яғни $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Сондықтан, (11.57) формула бойынша жалпы шешім $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

3.6. *n*-ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

$n \geq 3$ болғанда тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, a < x < b \quad (11.66)$$

түріндегі теңдеуді атайды. Мұндағы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – тұрақты нақты сандар.

(11.66) біртекті теңдеудің дербес шешімін $y = e^{kx}$ түрінде іздейміз. $y' = ke^{kx}, \ldots, y'' = k^2 e^{kx}, y^{(n)} = k^n e^{kx}$ өрнектерді теңдеуге қойсақ,

$$e^{kx}(k^n + p_1 k^{n-1} + \ p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0$$

Бұдан $e^{kx} \neq 0$ болғандығы үшін

$$k^n + p_1k^{n-1} + p_2k^{n-2} + \ldots + p_{n-1}k + p_n = 0 \qquad (11.67)$$

түріндегі (11.66) теңдеудің сипаттаушы теңдеуі деп аталушы n-дәрежелі алгебралық теңдеу шығады.

$n = 2$ болғандағы тұжырымдардың жалпыланған түрі (11.66) біртекті теңдеу үшін де орынды болады.

(11.67) теңдеудің алгебраның негізгі теоремасы (Теорема1.2) және оның салдары бойынша дәл n түбірі бар. Олар нақты жай, нақты еселі, комлекс-түйіндес және комплекс-түйіндес еселі түбірлер болуы мүмкін.

Теорема 11.12. (11.67) сипаттаушы теңдеудің:

а) әрбір k нақты жай түбіріне (11.66) біртекті теңдеудің e^{kx} дербес шешімі сәйкес болады;

б) әрбір $m > 1$ еселі k нақты түбіріне, (11.66) теңдеудің e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, ..., $x^{m-1}e^{kx}$ дербес шешімдер жүйесі сәйкес болады;

в) әрбір комплекс түйіндес $\alpha \pm \beta i$ сандардың жай түбірлеріне (11.66) біртекті теңдеудің $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ дербес шешімдері сәйкес болады;

г) әрбір комплекс түйіндес $\alpha \pm \beta i$ сандар жұбының $m > 1$ еселі түбірлеріне, (11.66) біртекті теңдеудің $(e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x)$, $(xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x)$, $(x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x)$, ..., $(x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x)$ дербес шешімдер жұптары сәйкес болады.

Бұл шешімдер сызықтық тәуелсіз (іргелі) шешімдер жүйесін құрайды.

Дәлелдеуі. а), б), в), г) жағдайларындағы келтірілген функциялар (11.68) теңдеуді қанағаттандырады, яғни дербес шешімдер болады. Әрбір жағдайда алынған дербес шешімдер жүйесі сызықтық тәуелсіз (іргелі) жүйе, өйткені әр жағдай үшін де $W(x) \neq 0$ екендігін көрсетуге болады. Сондықтан (11.68) біртекті теңдеудің жалпы шешімі (11.57а) формула бойынша әр жағдай үшін алынған сызықтық тәуелсіз дербес шешімдердің сызықтық комбинациясы болады.

Мысал 3.12. $y'''- 4y'' + y' + 6y = 0$ теңдеудің жалпы шешімі табылсын.

Шешуі. Берілген бір текті теңдеудің (11.67) сипаттаушы теңдеуі

$$k^3 - 4k^2 + k + 6 = 0.$$

Бұл үшінші дәрежелі теңдеудің түбірлері $k_1 = -1, k_2 = 2, k_3 = 3$, өйткен $k^3 - 4k^2 + k + 6 = (k + 1)(k - 2)(k - 3) = 0$.

Бұл түбірлерге сәйкес дербес шешімдер, сәйкес түрде, e^{-x}, e^{2x}, e^{3x} болады. Сондықтан, (11.57а) формула бойынша, жалпы шешім, $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ болады.

Мысал 3.13. $y^{(4)} + 6y^{(3)} + 5y^{(2)} - 24y' - 36y = 0$ теңдеудің жалпы шешуін табу керек.

Шешуі. Берілген біртекті теңдеудің (11.67) сипаттаушы теңдеуі.

$k^4 + 6k^3 + 5k^2 - 24k - 36 = 0$, немесе $(k^2 - 4)(k + 3)^2 = 0$. Бұл төртінші дәрежелі теңдеудің шешімдері $k_1 = -2, k_2 = 2, k_3 = k_4 = -3$. Яғни –2 мен 2 жай түбірлер, ал –3 екі еселі түбір. Онда теорема 11.12 а), б) тармағы бойынша, бұл түбірлерге сәйкес берілген теңдеудің дербес шешімдері $e^{-2x}, e^{2x}, e^{-3x}, xe^{-3x}$ болады. Демек, жалпы шешім: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x} + c_4e^{-3x}x$.

Мысал 3.14. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' + y = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. (11.67) сипаттаушы теңдеу

$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0,$ немесе $(k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$ түрінде болып, $k_1 = -1, k_2 = k_3 = i, k^4 = k^5 = -i$ түбірлерге ие. i және $-i$ сандары екі еселі түбірлер. Онда теорема 11.12 а), в) тармағы бойынша, сәйкес дербес шешімдер $y_1 = e^{-x}, y_2 = \cos x, y_3 = \sin x, y_4 = x\cos x, y_5 = x\sin x$ түрінде болады. Сондықтан, жалпы шешім,

$$y = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4x\cos x + c_5x\sin x.$$

3.7. Екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеу деп

$$L[y] \equiv y^u + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (11.68)$$

түріндегі теңдеуді атайды, мұндағы $p(x), q(x), f(x)$ функциялар (a,b) аралықта үзіліссіз. $f(x) = 0$ болса,

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (11.69)$$

теңдеуі (11.68) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеу деп аталады.

Теорема 11.13. (11.68) біртекті емес сызықтық теңдеудің жалпы шешімі, оның кез келген $y^*(x)$ дербес шешімі мен оған сәйкес (11.69) біртекті теңдеудің $\overline{y}(x)$ жалпы шешімінің қосындысына тең, яғни

$$y = y^* + \overline{y}(x) = y^* + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad (11.70)$$

Дәлелдеуі. (11.70) y функциясы (11.68) біртекті емес теңдеудің шешімі болады:

$$L[y] \equiv (y^* + \overline{y})'' + p(x)(y^* + \overline{y})' + q(x)(y^* + \overline{y}) =$$
$$= (y^{*\prime\prime} + p(x)y^{*\prime} + q(x)y^*) + (\overline{y}'' + p(x)\,\overline{y}' + q(x)\,\overline{y}) = f(x) + 0 = f(x).$$

Енді $y = y^* + \overline{y}$ функциясы (11.68) біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі екендігін көрсетеміз. Яғни (11.70) шешімнен

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

шарттарды қанағаттандырушы жалғыз дербес шешім табуға болатындығын көрсетеміз. Ол үшін (11.70) функцияны дифференциалдап, $y(x)$ пен $y'(x)$ функцияларына бастапқы шарттарды қойсақ,

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' - y^{*\prime}(x_0), \end{cases}$$

c_1 мен c_2 еркін тұрақтыларға сәйкес сызықтық теңдеу жүйесі алынады. $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары (11.69) теңдеудің сызықтың тәуелсіз (іргелі) дербес шешімдері болғандықтан, Вронский анықтауышы $W(x_0) \neq 0$ болады. Сондықтан бұл жүйенің $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$ жалғыз шешімі бар. Демек, $y = y^* + c_1^0y_1(x) + c_2^0y_2(x)$ берілген бастапқы шарттарды қанағаттандырушы жалғыз шешім.

Ерікті тұрақтыларды вариациялау әдісі (Лагранж)

(11.68) теңдеуді қарастырайық. Оның жалпы шешімі $y = y^* + \overline{y}$ болады. Мұндағы y^* кезкелген дербес шешім, ал $\overline{y}$ сәйкес (11.69) біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

Егер (11.69) біртекті теңдеудің шешімі $\overline{y}$ белгілі болса, y^* дербес шешімді кез келген тұрақтыларды вариациялау әдісімен (Лагранж әдісі) табуға болады.

$\overline{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ функциясы (11.69) біртекті теңдеудің шешімі болсын, мұндағы $y_1(x))$ және $y_2(x)$ функциялары осы теңдеудің сызықтық тәуелсіз (іргелі) шешімдері.

Әдістің мағынасы: $\overline{y}$ функциясының құрамындағы еркін тұрақтыларды x айнымалдың белгісіз $c_1(x)$ және $c_2(x)$ функциялары деп алып,

$$y^* = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{11.71}$$

функциясы (10.68) біртекті емес теңдеуді қанағаттандыратындай етіп табу керек.

y^* функциясының туындысы

$$(y^*)' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

өрнегінен $c_1(x)$ және $c_2(x)$ функцияларын

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{11.72}$$

болатындай етіп таңдаймыз. Онда,

$$(y^*)' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x),$$

$$(y^*)'' = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x).$$

$(y^*), (y^*)', (y^*)''$ өрнектерін (11.68) теңдеуге қойсақ,

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x) +$$
$$+ p(x)[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)] + q(x)[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)] = f(x),$$

немесе

$$c_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] +$$
$$+ c_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

$y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары (11.69) біртекті теңдеудің сызықтық тәуелсіз (іргелі) шешімдері болғандықтан, $c_1(x)$ және $c_2(x)$ функцияларының алдындағы коэффициенттер нөлге тең. Яғни соңғы теңдік

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \tag{11.73}$$

түріне келеді.

Демек, y^* функциясы, $c_1(x)$ және $c_2(x)$ функциялары (11.72) және (11.73) теңдеулер жүйесін

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = f(x) \end{cases} \tag{11.74}$$

қанағаттандырғанда, (11.68) теңдеудің дербес шешімі болады. Бұл жүйенің анықтауышы Вронский анықтауышы болғандықтан, нөлге тең емес, яғни

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сондықтан (11.74) жүйе жалғыз $c_1'(x) = \varphi_1(x)$, $c_2'(x) = \varphi_2(x)$ шешімге ие. Мұндағы $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ кейбір белгілі функциялар. Осы функцияларды интегралдап, $c_1(x)$ және $c_2(x)$ функцияларын табамыз. Табылған өрнектерді (11.71) теңдікке қойсақ y^* дербес шешім алынады.

Мысал 3.15. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Алдымен $y'' - 2y' + y = 0$ сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз. Бұл біртекті теңдеудің сипаттаушы алгебралық теңдеуі $k^2 - 2k + 1 = 0$, оның шешімдері $k_1 = k_2 = 1$, яғни 1 саны екі еселі түбір. Демек, іргелі шешімдер $y_1 = e^x$ және $y_2 = x \cdot e^x$ Онда біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$\overline{y} = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Енді $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)$ деп тұрақтыларды вариациялаймыз. Бұл функцияларды

$$y^* = c_1(x) e^x + \ c_2(x) \cdot x e^x \qquad (*)$$

функция берілген теңдеудің дербес шешімі болатындай етіп таңдаймыз. Ол үшін (11.74) жүйені шешеміз:

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) \cdot x e^x \ = 0, \ \ c_1'(x) e^x + c_2'(x) \cdot e^x (x+1) \ \ = \frac{e^x}{x}$$

Бұл жүйеден, $c_1'(x) = -1$, $c_2'(x) = \frac{1}{x}$. Алынған теңдеулерді интегралдасаң, $c_1(x) = -x \ + c_1, c_2(x) \ = \ln|x| + c_2$, мұндағы c_1 мен c_2 жаңа кез келген тұрақтылар. Бұл өрнектерді (*) теңдікке қойсақ,

$$y = (-x \ + c_1) e^x + (\ln|x| + c_2) x e^x,$$

немесе жалпы шешім

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + (-x e^x + \ln|x| \cdot x \cdot e^x).$$

Мұндағы $c_1 e^x + c_2 x e^x = \ \overline{y}, x e^x + \ln|x| \cdot x \cdot e^x \ = y^*$.

3.8. *n*-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} \ + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y = f(x) \qquad (11.75)$$

түріндегі теңдеуді атайды, мұндағы $p_1(x), p_2(x), \ldots, f(x)$ функциялар (a, b) аралығында үзіліссіз функциялар. (11.75) теңдеуде $f(x) \neq 0$ болса біртекті емес деп, ал $f(x) = 0$ болса, яғни

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y = \ 0 \qquad (11.76)$$

теңдеу біртекті теңдеу деп аталады.

(11.75) теңдеуге Коши есебі былайша қойылады:

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ y^{(2)}(x_0) = y_0^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (11.77)$$

Екінші ретті сызықтық дифференциалдың теңдеуге келтірілген тұжырым (11.75) теңдеу үшін де орынды.

Теорема 11.14. (11.75) теңдеудің жалпы шешімі, оның кез келген $y^*(x)$ дербес шешімі мен оған сәйкес (11.76) біртекті теңдеудің $\overline{y}(x)$ жалпы шешімінің қосындысына тең, яғни

$$y(x) = y^* + \overline{y} = y^* + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \qquad (11.78)$$

Дәлелдеуі. Теорема 11.13 дәлелдеуі сияқты.

$L[y^*] = f(x)$, $L[y] = 0$ болғандықтан $L[y^* + \ \overline{y}] = L[y^*] + [\ \overline{y}] = f(x) + 0 = f(x)$.

Яғни $y^* + \overline{y} = y$ функциясы (11.75) теңдеудің шешімі. (11.77) бастапқы шарттарды қанағаттандырушы шешім

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\cdots+c_ny_n(x_0)=y_0-y^*(x_0) \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+\cdots+c_ny_n'(x_0)=y_0'-(y^*)'(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}-(y^*)^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

жүйені шешкендегі $c_1=c_1^0, c_2=c_2^0,\dots,c_n=c_n^0$ жалғыз шешімге сәйкес,

$$y=y^*+c_1^0y_1(x)+c_2^0y_2(x)+\ldots+c_n^0y_n(x)$$

функциясы болады.

3.9. n-ретті ($n\geq 2$) тұрақты коэффициентті оң бөлігі арнайы түрдегі біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуді шешу.

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x) \qquad (11.79)$$

теңдеудің оң бөлігі

$$f(x)=e^{\alpha x}\ [P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_m(x)\cdot\sin\beta x] \qquad (11.80)$$

түрінде болса, (11.79) теңдеудің дербес шешімін интегралдау амалын қолданбай-ақ, дифференциалдау және сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу арқылы қарапайым амалдарды қолданып табатын, анықталмаған коэффициенттер әдісін қарастырамыз. Мұндағы $P_n(x)$ және $Q_m(x)$, сәйкес түрде n-дәрежелі және m-дәрежелі көпмүшелер.

(11.80) өрнектің кейбір дербес түрлер:

а) $\beta=0$ болса, $f(x)=e^{\alpha x}\ P_n(x)$;

б) $\alpha=0$, $\beta=0$ болса, $f(x)=P_n(x)$;

в) $\alpha=0$ болса, $f(x)=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$;

г) $\alpha=0$, $Q_m(x)=0$ болса, $f(x)=P_n(x)\cos\beta x$;

д) $\alpha=0$, $P_n(x)=0$ болса, $f(x)=Q_m(x)\sin\beta x$.

(11.79) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеу

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=0 \qquad (11.81)$$

түрінде, ал бұл теңдеудің сипаттаушы теңдеуі

$$k^n+p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}+\ldots+p_{n-1}k+p_n=0 \qquad (11.82)$$

болады.

Теорема 14а. Егер (11.79) теңдеудің оң бөлігі (11.80) түрінде болса, онда оның дербес шешімі

$$y^*=x^r\cdot e^{\alpha x}\left[\overline{P}_S(x)\cdot\cos\beta x+\overline{Q}_S(x)\cdot\sin\beta x\right] \qquad (11.83)$$

түрінде болады.

Мұндағы $s=\max[n,m]$, r саны (11.81) біртекті теңдеудің (11.82) сипаттаушы теңдеуінің $\alpha+i\beta$ түріндегі түбірінің еселігі, $\overline{P}_S(x)$ және $\overline{Q}_S(x)$ дәрежесі $s=\max[n,m]$ болған анықталмаған (белгісіз) коэффициентті көпмүшелер.

Тұжырымның дұрыстығына y^* функциясының n-ретке дейінгі туындыларын тауып, оларды (11.79) теңдеуге қойғанда анықталмаған коэффициенттерге байланысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің жалғыз ғана шешімі барлығы арқылы көз жеткізуге болады.

Мысал 3.15. $y''+y=4\sin x$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуге сәйкес $y''+y=0$ біртекті теңдеудің (11.82) сипаттаушы теңдеуі $k^2+1=0$ және оның шешімдері $k=\pm i$ болғандықтан, (11.81) теңдеуді іргелі шешімдері $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ функциялары болады, онда біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$\overline{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

y^* дербес шешімді (11.83) түрінде іздейміз. $f(x) = 4\sin x$, яғни α = 0, β = 1, $P_n(x) = 0, Q_m(x) = 4; 0 + 1.$ i саны сипаттаушы теңдеудің түбірі болғандықтан, дербес шешім $y^* = x(A\cos x + B\sin x)$ түрінде болады.

$$(y^*)' = A\cos x + B\sin x - Ax \cdot \sin x + Bx \cdot \cos x.$$

$$(y^*)'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\sin x$$

өрнектерді берілген теңдеуге қойсақ, $A = -2, B = 0$, яғни $y^* = -2x\cos x$. Сондықтан жалпы шешім

$$y = \overline{y} + y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x\cos x.$$

Мысал 3.16. $y^{(4)} - y' = 4x$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. (11.82) сипаттаушы $k^4 - k = 0$ теңдеудің түбірлері $k^4 - k = k(k - 1)\ \ (k^2 + k + 1) = 0$ болғаны үшін $k_1 = 0, k_2 = 1, k_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$. Яғни

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

$f(x) = 4x = e^{ox} \cdot p_1(x)$, яғни α = 0, β = 0, $n = 1, r = 1$.

Демек (11.83) дербес шешін $y^* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ түрінде болады. Бұдан $y^{*\prime} = 2Ax + B,\ \ y^{*(2)} = 2A,\ \ y^{*(3)} = 0,\ \ y^{*(4)} = 0.$

Бұл өрнектерді берілген теңдеуге қойсақ,

$-2Ax - B = 4x$, бұдан $A = -2, B = 0$, яғни $y^* = -2x^2$.

Сондықтан, жалпы шешім

$$y = \overline{y} + y^* = c_1 + c_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\, sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 2x^2$$

§ 4. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі

4.1. Негізгі ұғымдар

Математика, физика, техника, жаратылыстану және экономиканың көптеген мәселелерін шешкенде, бірнеше функцияларды табу талап етіледі. Осындай функциялар бірнеше дифференциалдық теңдеулер жүйесімен өрнектеледі.

Анықтама 4.1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп, құрамында тәуелсіз айнымал x, ізделетін (белгісіз) $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар және олардың $y_1', y_2', \dots, y_n'$ туындылары кіретін, $x \in (a;\ b)$,

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots y_n') = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots y_n') = 0 \end{cases}$$

түріндегі жүйені атайды.

Анықтама 4.2. Туындыға сәйкес шешілген

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (11.84)$$

түріндегі бірінші ретті теңдеулер жүйесі дифференциал теңдеулердің нормаль жүйесі деп аталады. Мұнда теңдеулер саны мен белгісіз функциялар саны өзара тең деп алынады.

Ескеретін жағдай, жалпы, жоғары ретті туындыларға сәйкес шешілген жүйелерді (11.84) түріне келтіруге болады. Мысалы

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = F_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2') \\ \dfrac{d^2y_2}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2') \end{cases}$$

жүйе $\frac{dy_1}{dx} = z_1, \frac{dy_2}{dz} = z_2, \frac{dz_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2, z_1, z_2), \frac{dz_2}{dx} = F_2\ (x, y_1, y_2, z_1, z_2)$ түріндегі нормаль жүйеге келтіріледі.

$y''' = F(x, y, y_1', y'')$ – үшінші ретті дифференциалдық теңдеу

$$y' = z, z' = u, u' = F\ (x, y, z, u)$$

түріндегі жүйеге келтіріледі.

(11.84) жүйеге қойылатын бастапқы шарттар,

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0 \qquad (11.85)$$

Анықтама 4.3. (11.84) жүйенің шешімі деп, осы жүйенің әрбір теңдеуін қанағаттандыратын $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ функциялар жиынтығын атайды. (11.84), (11.85) Коши есебінің шешімі деп (11.85) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (11.85) жүйенің шешімдер жиынтығын атайды. Коши есебінің шешімі бар және жалғыздығы туралы теореманы дәлелсіз келтіреміз.

Теорема 11.15 (Коши). Егер (11.84) жүйедегі барлық $F_k(x, y_1, \dots, y_n)$ функциялар, $k = \overline{1, n}$, және осы функциялардың $y_i, i = \overline{i, n}$, бойынша дербес туындылары кейбір $(n + 1)$ өлшемді D аймақта үзіліссіз болса, онда осы аймақтың әрбір $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ нүктесінде (11.85) шарттарды қанағаттандыратын (11.84) жүйенің $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, (x)$ жалғыз шешімі бар.

D аймақта M_0 нүктені өзгертіп (яғни бастапқы шарттарды) ақырсыз жиынды шешімдер алынады. Бұл шешімдер жиынын n кез келген тұрақтыға тәуелді $y_1 = \varphi_1(x;\ c_1, c_2, \dots, c_n)$, $y_2 = \varphi_2(x;\ c_1, c_2, \dots, c_n)$, ... , $y_n = \varphi_n(x;\ c_1, c_2, \dots, c_n)$ түрінде жазуға болады.

Бұл шешім $c_1, c_2, \dots, c_n$ кез келген тұрақтыларды

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_1^0 \\ \varphi_2(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_2^0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \varphi_n(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_n^0 \end{cases}$$

жүйеден бір мәнді табуға мүмкін болса, жалпы шешім болады.

Жалпы шешімнің $c_1, c_2, \dots, c_n$ кез келген тұрақтылардың нақты берілген мәндеріндегі шешім дербес шешім деп аталады.

4.2. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін жоғары ретті бір теңдеуге келтіру әдісімен шешу

(11.84) нормаль жүйеде, мысалы $y_1(x)$ функциясы кейбір n-ретті дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады және F_k, $k=\overline{1,n}$ функцияларының барлық айнымалдар бойынша үзіліссіз (n – 1) ретті дербес туындылары бар болсын дейік.

(11.84) жүйенің $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялары кейбір шешімі болсын, яғни осы функцияларды (11.84) жүйеге қойғанда, ол жүйе тепе теңдікке айналсын. Дербес жағдайда бірінші теңдеу де тепе теңдікке айналады,

$$\frac{dy_1}{dx} \equiv f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Бұл тепе теңдікті x бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{dx}, \text{немесе}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot f_k, \text{немесе}$$

соңғы тепе-теңдіктің оң бөлігін $F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ десек,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \equiv F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Бұл тепе-теңдікті тағы да x бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{dx} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot f_k$$

болады. Тепе-теңдіктің оң бөлігін $F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ десек,

$$\frac{d^3y_1}{dx_1^3} \equiv F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Осы сияқты алынған тепе-теңдікті тағы да дифференциалдасақ және дифференциалдау мен ықшамдауды (n – 2) рет жалғастырсақ, ақырында

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \equiv F_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

тепе-теңдік аламыз. Бұл тепе теңдікті тағы да дифференциалдасақ,

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} \equiv F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Сонымен (n – 1) тепе-теңдіктер,

$$\frac{dy_1}{dx} \equiv f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \equiv F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \qquad (11.86)$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \equiv F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

және тағы бір,

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} \equiv F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \qquad (11.87)$$

тепе-теңдік алынды. Айнымалдардың өзгеру аймағында Якоби анықтауышы

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \ldots F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)} \neq 0$$

болса, (11.86) жүйені $y_2, y_3, \ldots, y_n$ функцияларға сәйкес шешуге болады және ол шешімдер x, y_1, $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ айнымалдар арқылы өрнектеледі.

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\ y_3 = \psi_3\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ y_n = \psi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \end{cases} \qquad (11.88)$$

Осы табылған (11.88) өрнектерді (11.87) теңдікке қойсақ,

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) \qquad (11.89)$$

түріндегі теңдеу алынады. Бұл теңдеуді $y_1(x)$ функциясы қанағаттандырады.

Ұйғарым бойынша, бұл функция (11.84) жүйенің $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ шешімдерінің құрамына кіреді. (11.85) теңдеудің жалпы шешімін

$$y_1(x) = \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

делік. Бұл шешімді $(n-1)$ рет дифференциалдап, $y_1(x)$ және табылған $y_1'(x), y_1^{(2)}(x), \ldots, y_1^{(n-1)}(x)$ туындылардың өрнектерін (11.88) жүйенің теңдеулеріне қойсақ, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ... , $y_n(x)$ функцияларының жалпы шешімі алынады:

$$y_2(x) = \varphi_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), y_3(x) = \varphi_3(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, y_n(x) = \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Мысал 4.1. $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, y_2' = y_1 + y_2 + y_3 , y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3$ жүйенің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бірінші теңдеуді екі рет дифференциалдап, бірінші, екінші, үшінші теңдіктерді қолдансақ:

$$y_1'' = 3y_1' - y_2' + y_3' = 3(3y_1 - y_2 + y_3) - (y_1 + y_2 + y_3) + (4y_1 - y_2 + 4y_3) = \\ = 12y_1 - 5y_2 + 6y_3;$$

$$y_1''' = 12y_1' - 5y_2' + 6y_3' = 12(3y_1 - y_2 + y_3) - 5(y_1 + y_2 + y_3) + 6(4y_1 - y_2 + 4y_3) \\ = 55y_1 - 23y_2 + 31y_3.$$

$y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$, $y_1'' = 12y_1 - 5y_2 + 6y_3$, $y_1''' = 55y_1 - 23y_2 + 31y_3$ жүйеден y_2 және y_3 функцияларды шығарып тастасақ, $y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 == 0$ теңдеуі алынады.

Сонда, $y_2 = y_1'' - 6y_1' + 6y_1$, $y_3 = y_1'' - 5y_1' + 3y_1$ болады.

$y_1(x)$ функциясына қатысты алынған үшінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі $k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = 0$,

$k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = (k - 1)(k^2 - 7k + 10)$ болғандықтан түбірлері $k_1 = 1$, $k_2 = 2, k_3 = 5$ болады.

$$\text{Демек, } y_1 = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{5x}, y_2 = c_1e^x - 2c_2e^{2x} + c_3e^{5x}, y_3 =- 3c_2e^{2x} + 3c_3e^{5x}$$

Ескерту 4.1. Егер $y_1(x)$ функциясына сәйкес n-ретті (11.89) теңдеуді алғанда

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \dots F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \dots, y_n)} = 0$$

болса, онда $y_1(x)$ функцияның орнына, Якоби анықтауышы нөлге тең болмайтын $y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ функциялардың біреуі алынады.

4.3. Тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (11.90)$$

түріндегі нормаль сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық, мұндағы $a_{ij}(i,j = \overline{1,n})$ коэффициенттер тұрақты сандар.

(11.90) жүйенің дербес шешімін

$$y_1 = \alpha_1e^{kx}, y_2 = \alpha_2e^{kx}, \dots, y_n = \alpha_ne^{kx} \qquad (11.91)$$

түрінде іздейік.

Мақсат: (11.91) функциялар (11.90) жүйені қанағаттандыратындай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ және k тұрақтыларды анықтау керек.

(11.91) функцияларды (11.90) жүйеге қойсақ,

$$\begin{gathered} k\alpha_1e^{kx} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)e^{kx}, \\ k\alpha_2e^{kx} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)e^{kx}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ k\alpha_ne^{kx} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)e^{kx} \end{gathered}$$

теңдіктер шығады. Барлық мүшелерін сол бөлігіне өткізіп, $\alpha_i(i = \overline{i,n})$ шамалардың алдындағы коэффициенттерді жинақтасақ,

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \qquad (11.92)$$

жүйе алынады. $\alpha_i(i = \overline{1,n})$ және k сандарын (11.92) жүйені қанағаттандыратын етіп таңдаймыз. (11.92) жүйе біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі болғандықтан, оның Вронский анықтауышы

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (11.93)$$

болса, барлық $\alpha_i = 0\ (i = \overline{i,n})$ болып, $y_1(x) = y_2(x) = \ldots = y_n(x) = 0$ болады.

Сонымен, (11.91) нөлге тең емес шешімдер $\Delta(k) = 0$ болғанда ғана алынады, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.94)$$

(11.94) теңдеу (11.90) жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп, ал оның түбірлері сипаттаушы теңдеудің түбірлері деп аталады.

Бірнеше жағдайларды қарастырайық.

1. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі: $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Әрбір k_i , $i = \overline{1,n}$, үшін (11.92) жүйеден

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$$

коэффициенттерді анықтаймыз.

Бұлардың біреуі кез келген шама, оны бірге тең деп алуға болады.

Сонымен, (11.90) жүйенің шешімі:

k_1 үшін $y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 x},\ y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 x}, \ldots, y_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 x}$,

k_2 үшін $y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 x},\ y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 x}, \ldots, y_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 x}$,

... ...

k_n үшін $y_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n x},\ y_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n x}, \ldots, y_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n x}$

Бұл функциялар шешімдердің іргелі функциялар жүйесін құрайды. Бұл тұжырымның дұрыстығын Вронский анықтауышы $W(x) \neq 0$ екендігін көрсету арқылы анықтауға болады. Демек, (11.90) жүйенің жалпы шешімі:

$$\begin{cases} y_1 = c_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 x} + c_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 x} + \cdots + c_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n x}, \\ y_2 = c_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 x} + c_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 x} + \cdots + c_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n x}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = c_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 x} + c_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 x} + \cdots + c_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n x} \end{cases} \qquad (11.95)$$

Мысал 4.2. $y_1' = y_1 - y_2 + y_3, y_2' = y_1 + y_2 - y_3, y_3' = 2y_1 - y_2$ жүйенің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Берілген (11.90) тұрақты коэффициентті бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімін

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, y_2 = \alpha_2 e^{kx}, y_3 = \alpha_3 e^{kx}$$

түрінде іздесек, жүйенің (11.94) сипаттаушы теңдеуі

$\begin{vmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ -1 & k-1 & 1 \\ -2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$ болып, бұдан $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$.

Бұл теңдеудің түбірлері $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -1$.

Демек, жүйенің дербес шешімдері,

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)}e^x,\ \ y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)}e^x,\ \ y_3^{(1)} = \alpha_3^{(1)}e^x;$$
$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)}e^{2x},\ \ y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)}e^{2x},\ \ y_3^{(2)} = \alpha_3^{(2)}e^{2x};$$
$$y_1^{(3)} = \alpha_1^{(3)}e^{-x},\ \ y_2^{(3)} = \alpha_2^{(3)}e^{-x},\ \ y_3^{(3)} = \alpha_3^{(3)}e^{-x}$$

түрінде болады.

$\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)},\ i = 1,\ 2,\ 3$ шамалар арасындағы қатыс, y_1, y_2, y_3 дербес шешімдер берілген жүйеге қойғанда алынады:

$$\begin{cases} \alpha_1^{(i)}(k_i - 1) + \alpha_2^{(i)} - \alpha_3^{(i)} = 0 \\ -\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)}(k_i - 1) + \alpha_3^{(i)} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ -2\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)}k_i = 0 \end{cases}$$

Бұл жүйені шешсек:

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = \alpha_3^{(1)}, \qquad \alpha_1^{(2)} = \alpha_3^{(2)},\ \alpha_2^{(2)} = 6,\ \alpha_2^{(3)} = -3\alpha_1^{(3)},\ \ \alpha_3^{(3)} = -5\alpha_1^{(3)}.$$

Табылған тұрақтылардың бір бөлігі еркін шама болғандықтан, $\alpha_3^{(1)} = 1$, $\alpha_3^{(2)} = 1$, $\alpha_1^{(3)} = 1$ деп алсақ, $\alpha_2^{(1)} = \alpha_1^{(3)} = 1$, $\alpha_1^{(3)} = 1$, $\alpha_2^{(3)} = -3$, $\alpha_3^{(3)} = -5$ болады.

Берілген жүйенің Вронский анықтауышы

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-x} \\ e^x & 0 & -3e^{-x} \\ e^x & e^{2x} & -5e^{-x} \end{vmatrix} \neq 0$$

Сондықтан, берілген жүйенің жалпы шешімі

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-x},$$
$$y_2 = c_1e^x - 3c_3e^{-x}, y_3 = c_1e^x + c_2e^{2x} - 5c_3e^{-x}$$

2. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері әртүрлі, бірақ олардың ішінде $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ комплекс түбірлері бар. Бұл жағдайда да дербес шешімдердің түрлері 1-жағдайдағыдай анықталады. Алынған комплекс мәнді дербес шешімдердің орнына, олардың сызықтық комбинациясын алып және Эйлер формуласын қолданып, нәтижеде екі нақты дербес шешімдер алуға болады.

Немесе алынған комплекс дербес шешімдердің нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, екі нақты дербес шешімдер алынады:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

(бұлардың шешім екендігін тікелей теңдеуге қойып тексеруге болады). $k_2 = \alpha - i\beta$ комплекс түйіндес түбір жаңа дербес шешімдер анықтамайтындығы айқын.

Мысал 4.3. $y_1' = y_1 + y_2,\ y_2' = -y_1 + y_2 - y_3,\ y_3' = 3y_2 + y_3$ жүйенің $y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 4,\ y_3(0) = 1$ бастапқы шарттарды қанағаттандырушы дербес шешімін табу керек.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеу (11.94) құрып, оның түбірлерін табамыз:4

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ -1 & 1-k & -1 \\ 0 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

Бірінші баған элементтері бойынша жіктесек,

$$(1-k)\,[(1-k)^2 + 3] + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} + 0 = 0,$$

$$(1-k)(k^2-2k+5)=0,$$
$$k_1=1, k_2=1+2i, k_3=1-2i.$$

(11.92) жүйе; $k_1=1$ болғанда,

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}+0\cdot\alpha_3^{(1)}=0 \\ -\alpha_1^{(1)}+0\cdot\alpha_2^{(1)}-\alpha_3^{(1)}=0 \\ 0\cdot\alpha_1^{(1)}+3\alpha_2^{(1)}+0\cdot\alpha_3^{(1)}=0 \end{cases}$$

түрінде болып, оның шешімдері $\alpha_1^{(1)}=1$ деп алсақ, $\alpha_2^{(1)}=0$, $\alpha_3^{(1)}=-1$ болады.

Берілген жүйенің дербес шешімі $y_1^{(1)}=e^x$, $y_2^{(1)}=0$, $y_3^{(1)}=-e^x; k_2=1+2i$ болғанда, (11.92) жүйе

$$\begin{cases} -2i\cdot\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}=0 \\ -\alpha_1^{(2)}-2i\alpha_2^{(2)}-\alpha_3^{(2)}=0 \\ 3\alpha_2^{(2)}-2i\alpha_3^{(2)}=0 \end{cases}$$

түрінде болып, шешімдері $\alpha_1^{(2)}=1$ деп алсақ, $\alpha_2^{(2)}=2i$, $\alpha_3^{(2)}=3$ болады. $k_2=1+2i$ түбірге сәйкес дербес шешім,

$$y_1^{(2)}=e^{(1+2i)x}, y_2^{(2)}=2ie^{(1+2i)x}, \; y_3^{(2)}=3e^{(1+2i)x}$$

Бұл шешімнің нақты және жорамал бөліктерін ажыратамыз.

$$y_1^{(2)}=e^x(\cos2x+i\sin2x);\ \mathrm{Re}\,y_1^{(2)}=e^x\cos2x;$$
$$\mathrm{Jm}\,y_1^{(2)}=e^x sin2x;\ y_2^{(2)}=2ie^x(\cos2x+i\sin2x);\ \mathrm{Re}\,y_2^{(2)}=-2e^x\sin2x;$$
$$\mathrm{Jm}\,y_2^{(2)}=2e^x\cos2x.\ y_3^{(2)}=3(e^x\cos2x+ie^x\sin2x);$$
$$\mathrm{Re}\,y_3^{(2)}=3e^x\cos2x;\ \mathrm{Jm}\,y_3^{(2)}=3e^x\sin2x.$$

Жоғарыда атап өтілгендей $k_3=1-2i$ түбір де осы дербес шешімдерді анықтайды.

Сонымен берілген жүйенің жалпы шешімі,

$y_1=c_1e^x+c_2e^x\cos 2x+c_3e^x\sin 2x,$

$y_2=c_1\cdot 0-\ 2c_2e^x\sin 2x+2c_3e^x\cos 2x,$

$y_3=-c_1e^x+3c_2e^x\cos 2x+3c_3e^x\sin 2x.$

Енді осы жалпы шешімнен берілген бастапқы шарттарды қанағаттандырушы дербес шешімді табамыз. $x=0$ десек,

$$3=c_1+c_2+0,\quad 4=0-0+2c_3,\quad 1=-c_1+3c_3+0$$

жүйе алынады. Бұл жүйені шешсек: $c_1=5$; $c_2=-2$; $c_3=2$. Демек, берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешім:

$y_1=5e^x-2e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x,$

$y_2=+4e^x\sin 2x+6e^x\cos 2x,$

$y_3=-5e^x-6e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x.$

3. (11.94) сипаттаушы теңдеудің k түбірі m еселі болсын. Онда осы m еселі түбірге сәйкес дербес шешім,

$y_1=\left(\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}x+\alpha_1^{(3)}x^2+\cdots+\alpha_1^{(m)}x^{m-1}\right)e^{kx},$

$y_2=\left(\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}x+\alpha_2^{(3)}x^2+\cdots+\alpha_2^{(m)}x^{m-1}\right)e^{kx},$

$$y_3 = \left(\alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}x + \alpha_n^{(3)}x^2 + \cdots + \alpha_n^{(m)}x^{m-1}\right)e^{kx}$$
түрінде ізделеді.

Бұл шешім m кез келген тұрақтыларға тәуелді. $\left\{\alpha_i^{(j)}\right\}, i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}$ тұрақтылар анықталмаған коэффициенттер әдісімен анықталады.

Мысал 4.4. $y_1' = y_1 - y_2 + y_3, y_2' = y_1 + y_2 - y_3, y_3' = -y_2 + 2y_3$ жүйенің $y_1(0) = 1, y_2(0) = 6, y_3(0) = 3$ бастапқы шарттарды қанағаттандырушы дербес шешімін табу керек.

Шешуі. Жүйенің (11.94) сипаттаушы теңдеуін құрып, оның түбірлерін табамыз:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 0 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0,$$

теңдіктің сол бөлігіндегі анықтауышты ашып, ықшамдасақ:

$(1-k)^2(2-k) - 1 - (1-k) + (2-k) = (1-k)^2\,(2-k) - 1 - 1 + k + 2 - k =$ $(1-k)^2(2-k)$. Демек, сипаттаушы теңдеу $(1-k)^2(2-k) = 0$ болады. $k_1 = 2$ түбірге сәйкес (11.92) жүйе

$$\begin{cases} -\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} - \alpha_3^{(1)} = 0 \\ -\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} - \alpha_3^{(1)} = 0. \end{cases}$$

$\alpha_3^{(1)} = 1$ десек, $\alpha_1^{(1)} = 1$ болады. Сонда берілген жүйенің бір дербес шешімі алынады:

$$y_1^{(1)} = e^{2x}, \qquad y_2^{(1)} = 0, \qquad y_3^{(1)} = e^{2x}.$$

$k = k_2 = k_3 = 1$ екі еселі түбірге ($m = 2$) сәйкес дербес шешімдер,

$$y_1^{(2,3)} = \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)}x\right)e^x,\ y_2^{(2,3)} = \left(\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)}x\right)e^x,\ y_3^{(2,3)} = \left(\alpha_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)}x\right)e^x$$

түрінде болады. Бұл шешімдерді берілген жүйеге қойсақ,

$$\begin{cases} \alpha_1^{(3)}e^x + (\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)}x)e^x = (\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)}x)e^x - (\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)}x)e^x + (\alpha_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)}x)e^x, \\ \alpha_2^{(3)}e^x + (\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)}x)e^x = (\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)}x)e^x - (\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)}x)e^x - (\alpha_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)}x)e^x, \\ \alpha_3^{(3)}e^x + (\alpha_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)}x)e^x = -(\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)}x)e^x + 2(\alpha_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)}x)e^x \end{cases}$$

немесе, $e^x \neq 0$ өрнекке қысқартқаннан кейін

$$\begin{cases} (\alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(3)})x + \alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(2)} - \alpha_3^{(2)} = 0, \\ (\alpha_1^{(3)} - \alpha_3^{(3)})x + \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(2)} = 0, \\ (\alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(3)})x + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

жүйе шығады.

Бұл теңдіктер орындалуы үшін,

$$\alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(3)} = 0, \alpha_1^{(3)} - \alpha_3^{(3)} = 0, \alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(2)} - \alpha_3^{(2)} = 0$$
$$\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(2)} = 0, \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(2)} = 0$$

қатыстар орындалуы қажет.

Екінші теңдіктен $\alpha_1^{(3)} = \alpha_3^{(3)}$ Бірінші теңдікті ескерсек, $\alpha_2^{(3)} = \alpha_1^{(3)}$ Төртінші теңдіктен, $\alpha_3^{(2)} = \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(3)}$, яғни $\alpha_3^{(2)} = \alpha_1^{(2)} - \alpha_1^{(3)}$. Үшінші теңдіктен $\alpha_2^{(2)} = \alpha_3^{(2)} - \alpha_1^{(3)}$, яғни $\alpha_2^{(2)} = \alpha_1^{(2)} - \alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(3)}$, немесе $\alpha_2^{(2)} = \alpha_1^{(2)} - 2\alpha_1^{(3)}$, және $\alpha_1^{(3)}$ кез келген сандар $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_1^{(3)} = 0$ десек, $\alpha_2^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(3)} = 0$, $\alpha_3^{(2)} = 1$, $\alpha_3^{(3)} = 0$. $\alpha_1^{(2)} = 0$, $\alpha_1^{(3)} = 1$ десек, $\alpha_2^{(2)} = -2$, $\alpha_2^{(3)} = 1$, $\alpha_3^{(2)} = -1$, $\alpha_3^{(3)} = 1$.

Екі еселі $k = 1$ түбірге сәйкес сызықты тәуелсіз (іргелі) екі дербес шешім алынды:

$$y_1^{(2)} = e^x,\ y_2^{(2)} = e^x,\ y_3^{(2)} = e^x \text{ және}$$

$$y_1^{(3)} = xe^x,\ y_2^{(3)} = (-2+x)e^x,\ y_3^{(3)} = (-1+x)e^x.$$

Демек, берілген жүйенің жалпы шешімі:

$$y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3xe^x, y_2 = c_2e^x + c_3(x-2)e^x,$$

$$y_3 = c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3(x-1)e^x$$

Бастапқы шарттарды пайдалансақ,

$1 = c_1 + c_2, 6 = c_2 - 2c_3, 3 = c_1 + c_2 - c_3$ жүйенің шешімі $c_1 = -1$, $c_2 = 2, c_3 = -2$ болады.

Демек, дербес шешім,

$$y_1 = -1 \cdot e^{2x} + 2e^x - 2xe^x,\ \ y_2 = 2e^x - 2(x-2)e^x,$$

$$y_3 = -1 * e^{2x} + 2\,e^x - 2(x-1)e^x.$$

§ 5. Дифференциалдық теңдеулерді дәрежелік қатарлар жәрдемімен интегралдау

Егер дифференциалдық теңдеудің шешімі элементар функциялар арқылы өрнектелмесе немесе шешу әдістері күрделі болса, онда Тейлор қатарын пайдаланып, жуықтап шешуге болады.

$$y'' = f(x, y, y) \tag{11.96}$$

дифференциалдық теңдеудің

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \tag{11.97}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандырушы дербес шешімін табу керек болсын.

Екі түрлі әдісті қарастырайық.

1. Анықталмаған коэффициенттер әдісі

Жуықтап шешудің бұл тәсілі (11.96) теңдеу сызықтық болған жағдайда тиімді.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{11.98}$$

теңдеудің $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ бастапқы шарттарды қанағаттандырушы дербес шешімін табу керек болсын.

Мұндағы $p_1(x), p_2(x), f(x)$ функциялары кейбір $(x_0 - R, x_0 + R)$ аралықта жинақталушы Тейлор қатарына жіктелуші функциялар болсын. Ізделінді шешім $y = y(x)$ функциясын

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots \tag{11.99}$$

анықталмаған коэффициентті дәрежелік қатар түрінде іздейміз. c_0 және c_1 коэффициенттері бастапқы шарттар жәрдемімен анықталады, $c_0 = y_0$, $c_1 = y_0'$

Келесі коэффициенттерді табу үшін (11.99) қатарды екі рет дифференциалдаймыз, себебі дифференциалдық теңдеу екінші ретті. Содан соң y, y', y'' өрнектерін (11.98) теңдеуге қойып, $p_1(x), p_2(x), f(x)$ функциялары олардың жіктелуімен ауыстырылады. Нәтижеде тепе-теңдік алынып, анықталмаған коэффициенттер әдісімен $(x - x_0)$ екі мүшенің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестіріп) жетіспеген коэффициенттер табылады.

Ескерту 5.1. Бұл тәсіл n-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуде де қолданылады.

Мысал 5.1. $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$ Коши есебінің шешімін жуықтап табу керек.

Шешуі. $y'' = f(x, y, y') = \frac{4x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y,\ x \neq \pm 1$, теңдеу (11.96) теңдеудің (11.98) сызықтық түрі болғандықтан f функциясы x, y, y' айнымалдары ($x \neq \pm 1$) бойынша ақырсыз дифференциалданушы функция. Демек, ізделінді $y(x)$ функциясы да ақырсыз дифференциалданушы функция. Алдымен бұл шешімдерді $x = 0$ нүктесінің кейбір маңайында табамыз, яғни бұл шешімдерді (11.99) қатар

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

түрінде іздейміз. (11.97) түріндегі берілген бастапқы шарттарды ескерсек, $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ болады.

Жазылған қатарды берілген теңдеуге қойсақ, x бойынша тепе-теңдік алынады:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \equiv 0.$$

Бірінші қосындыда n қосу индексін $(n + 2)$-ге ауыстырсақ, соңғы тепе-теңдікті мына түрде жазуға болады:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \equiv 0$$

немесе

$$2a_2 + 6a_3x - 2a_0 - 6a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 4na_n - 2a_n]x^n \equiv 0.$$

Осы тепе-теңдіктен, x-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестірсек,

$$a_2 = a_0, a_3 = 1, a_{n+2} = a_n,\ \ n = 2, 3, \ldots$$

теңдіктер шығады. $y(0) = a_0 = 0, y'(0) = a_1 = 1$ екендігін ескерсек, $a_{2k} = 0,\ a_{2k+1} = 1$ болады.

Демек, ізделген шешім;

$$y(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} + \ldots = \frac{x}{1 - x^2}, |x| < 1.$$

2. Біртіндеп дифференциалдау тәсілі

Сызықтық емес (11.96) теңдеудің (11.97) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жуық шешімін табуды қарастырайық. (11.96) теңдеудің $y = y(x)$ шешімін Тейлор қатары түрінде іздейік,

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (11.100)$$

Мұндағы алғашқы екі коэффициентті (11.97) бастапқы шарттардан табамыз, $x = x_0$ болғанда, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$. Бұл шамаларды (11.96) теңдікке қойсақ, $y''(x_0) = f(x_0, y_0, y_0')$ болады. Осылаша $y^{(3)}(x_0), y^{(4)}(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)$ коэффициенттерді (11.96) теңдікті біртіндеп x бойынша дифференциалдап, $x = x_0$ болғандағы туындылардың мәндері есептелінеді. Табылған мәндерді (11.100) теңдікке қойсақ, (11.100) қатар айнымалдың жинақталатын мәндерінде (11.96) теңдеудің ізделген дербес шешімі болады.

Бұл қатардың дербес қосындысы (11.96) теңдеудің жуық шешімі болады.

Ескерту 6.1. Біртіндеп дифференциалдау әдісі кез келген ретті дифференциалдық теңдеулерді жуықтап шешуде де қолданылады.

Мысал 5.2. $y'' = xy' - y^2$; $y(0) = 1, y'(0) = 2$ Коши есебін біртіндеп дифференциалдау тәсілімен жуықтар шешу керек.

Шешуі. Бастапқы шарттарды ескерсек,

$$y''(0) = 0 \cdot 2 - 1^2 = -1;$$

$$y^{(3)}(x) = y' + xy^{(2)} - 2y \cdot y'; \; y^{(3)}(0) = 2 + 0 \cdot (-1) - 2 \quad 1 \quad 2 = -2;$$

$$y^{(4)}(x) = y^{(2)} + y^{(2)} + xy^{(3)} - 2y'^2 - 2y \cdot y^{(2)};$$

$$y^{(4)}(0) = -1 - 1 + 0 \quad (-2) - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -8.$$

$$y^{(5)}(x) = \underbrace{2y^{(3)} + y^{(3)}}_{3y^{(3)}} + xy^{(4)} - 4y' \cdot y^{(2)} - 2y' \cdot y^{(2)} - 2yy^{(3)};$$

$$y^{(5)}(0) = 3 \quad (-2) + 0 - 42 \quad (-1) - 2 \quad 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot (-2)$$
$$= -6 + 8 + 4 + 4 = 10.$$

Демек, Маклорен формуласы бойынша,

$$y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + \cdots.$$

§ 6. Шекаралық (шеттік) есептер туралы түсінік

6.1. Шекаралық есеп ұғымы. Шекаралық есептердің қойылуы

Бастапқы шарттар (Коши есебі) бойынша негізгі есептен басқа шекаралық (шеттік) есептер де жиі кездеседі.

Мұндай есептерге *A* нүктесінен шыққан жарық сәулесінің берілген *B* нүктесіне түсу траекториясын анықтау және балистикалық есеп, яғни ракетаның жердің бір нүктесінен шығып, басқа бір берілген нүктеге дәл тию траекториясын анықтау, т.с.с. есептер жатады.

Қозғалыс туралы есептер дифференциалдық теңдеулерге келтірілетіндіктен, ол теңдеулердің жалпы шешіміндегі ерікті тұрақтыларды берілген шекаралық шарттар жәрдемімен анықтау керек.

Әрине, барлық жағдайда да шешім бола бермейді, болса да шешім жалғыз болмауы мүмкін.

Мысал ретінде келесі шекаралық есепті қарастырайық: $y'' + y = 0$; $y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Бірінші шекаралық шарт бойынша $c_1 = 0$, өйткені $y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

Сонда шешімі $y = c_2 \cos x$ түрінде болады. Келесі жағдайлар болуы мүмкін:

а) егер $x_1 \neq k\pi, y_1 \neq 0$ болса, онда берілген шекаралық есептің жалғыз шешімі бар, ол $y = \frac{y_1}{\sin x_1} \sin x$ түрінде болады;

б) егер $x_1 = n\pi,\ y_1 = 0$ болса, онда $y = c_2 \sin x$ қисықтар шоғы шекаралық есептің шешімдерінің графигі болады, яғни шешім ақырсыз көп болады.

в) егер $x_1 = n\pi,\ y_1 \neq 0$ болса, онда шекаралық есептің шешімі жоқ, өйткені $y = c_2 \sin x$ қисықтар шоғының біреуі де $(x_1; y_1)$ нүктесінен өтпейді.

Атап өтейік,

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_1(x) \qquad (*)$$

екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу, екі бөлігін де функцияға көбейту арқылы

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x) \qquad (11.101)$$

түріне келтіріледі. Мұндағы $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$, $q(x) = p_2(x)e^{\int p_1(x)dx}$, $f(x) = f_1(x)e^{\int p_1(x)dx}$

Енді (11.101) теңдеу үшін шекаралық есептерді қарастырайық.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x), \\ \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = \omega_0, \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = \omega_1,\ \ x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases} \qquad (11.102)$$

түріндегі есеп, $y(x)$ функциясы үшін шекаралық (шеттік) есеп деп аталады. Мұндағы берілген $q(x), f(x)$ функциялары (x_0, x_1) аралықта үзіліссіз, $p(x) \in C'(x_0, x_1)$, $p(x) \neq 0$, ал $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega_0,\ \omega_1$ берілген сандар.

Егер $\omega_0 = \omega_1 = 0$ болса, (11.102) шарттар біртекті шарттар, ал (11.101), (11.102) есеп біртекті шекаралық есеп деп аталады.

(11.102) шарттарда: а) $\alpha = \gamma = 0$ болса, ол бірінші текті шекаралық шарт; б) $\beta = \delta = 0$ болса, екінші текті шекаралық шарт; в) α, β, γ, δ коэффиценттердің берлығы да нөлге тең болмаса үшінші текті шекаралық шарт деп аталады.

Сәйкес есептер бірінші текті, екінші текті және үшінші текті шекаралық есептер деп аталады.

Бірінші және екінші текті шеаралық есептердің шарттары $z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0$ алмастыруы арқылы $z(x_0) = z(x_1) = 0$ біртекті шарттарға келтіріледі. Жаңа $z(x)$ функцияға байланысты (11.101) теңдеу сызықтың теңдеу болады.

6.2. Шекаралық есепті Грин функциясын құру әдісімен шешу

$$L[y] = \frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x), \qquad (11.103)$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0 \qquad (11.104)$$

бірінші текті шекаралық есепті қарастырайық

Анықтама 6.1. (11.103), (11.104) бірінші текті шекаралық есептің $G(x,s)$ Грин функциясы деп келесі қасиеттерге ие функцияны атайды:

а) белгіленген s-те $G(x,s)$ функциясы x бойынша үзіліссіз, мұнда $x_0 \le x \le x_1, x_0 < s < x_1$;

б) $G(x,s)$ функциясы $[x_0, x_1]$ кесіндінің $x \neq s$ нүктелерінде сәйкес $\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x)$ біртекті теңдеудің шешімі;

в) $G(x_0,s) = G(x_1,s) = 0$ шекаралық шарттарды қанағаттандырады;

г) $x = s$ нүктесінде $G'_x(x,s)$ туынды $\frac{1}{p(x)}$-ке тең секірмесі бар.

Теорема 11.16. Егер $p(x) \in C'[x_0, x_1], q(x), f(x) \in C[x_0, x_1]$ болса, яғни $[x_0, x_1]$ кесіндіде $p(x)$ бірінші ретті үзіліссіз туындыға ие, ал $q(x), f(x)$ үзіліссіз функциялар болса, онда (11.103), (11.104) шекаралық есептің шешімі

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds \qquad (11.105)$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі. (11.105) функцияда бірінші және екінші туындыларды тауып, теңдеуге қоямыз.

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)ds = \int_{x_0}^{x} G'_x(x,s)f(s)ds + \int_{x}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)ds;$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)ds + G'_x(x,x-0)f(x)$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)ds - G'_x(x,x+0)f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)ds + [G'_x(x+0,x) - G'_x(x-0,x)]f(x).$$

(11.105) теңдіктегі $y(x)$ өрнегін және табылған $y'(x), y''(x)$ өрнектерін (11.103) теңдеуге қойсақ, әрі б) және г) қасиеттерді ескерсек,

$$\int_{x_0}^{x_1} [p(x)G''_{xx}(x,s) + p'(x)G'_x(x,s) + q(x)G(x,s)]ds +$$

$+ p(x)[G'_x(x+0,x) - G'_x(x-0,x)]f(x) \equiv f(x)$ тепе-теңдік алынады.

(11.103), (11.104) шекаралық есеп үшін Грин функциясын құрайық.

Алдымен, біртекті теңдеу үшін,

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = 0, \tag{11.106}$$

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = y'_0 \neq 0 \tag{11.107}$$

Коши есебінің $y_1(x)$ шешімін қарастырайық. Бұл шешім, жалпы түрде, $y_1(x_1) = 0$ екінші шекаралық шартты қанағаттандырмайды. $y_1(x_1) = 0$ болуы кездейсоқ жағдай, бұл есепке алындайды (11.106) теңдеу біртекті болғандықтан $c_1y_1(x)$, $c_1 = \text{const}$, функция да $y(x_0) = 0$ шартты қанағаттандырады.

Осы сияқты $y_2(x_1) = 0$ екінші шекаралық шартты қанағаттандырушы $y_2(x)$ функциясын табамыз. Жоғарыда айтқандай, $c_2y_2(x)$ функциясы да $y(x_1) = 0$ шартын қанағаттандырады. Мұндағы c_2 кез келген тұрақты сан.

Грин функциясы деп аталушы функциясы

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1y_1(x), & x_0 \leq x \leq s \\ c_2y_2(x), & s \leq x \leq x_1 \end{cases} \tag{11.108}$$

түрінде іздейміз. Анықтама 6.1. бойынша $x = s$ нүктесінде функция үзіліссіз болуы үшін,

$$c_1y_1(x) = c_2y_2(x), \tag{11.109}$$

ал, $x = s$ нүктесінде секірме $\frac{1}{p(x)}$ болуы үшін

$$c_2y'_2(x) - c_1y'_1 = \frac{1}{p(x)} \tag{11.110}$$

болуы керек.

(11.109), (11.110) жүйені шешсек,$c_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}$, $c_2 = \frac{y_1(s)}{W(s)p(s)}$

Осы өрнектерді (11.108) теңдікке қойсақ, ол мына түрге келеді:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}y_1(x), & x_0 \leq x \leq s, \\ \frac{y_1(s)}{W(s)p(s)}y_2(x), & s \leq x \leq x_1. \end{cases}$$

Мысал 6.1. $y''- y' = 0, y(0) =- 1, y'(1) - y(1) = 2$ шекаралық есепті шешу керек.

Шешуі. Берілген дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі, $k^2 - k = 0$, ал оның шешімдері $k_1 = 0, k_2 = 1$ болғандықтан, тәуелсіз дербес шешімдері $y_1 = e^0 = 1, y_2 = e^{1\cdot x}$, демек, жалпы, шешімі $y = c_1 + c_2e^x$.

Берілген шекаралық шарттарды жалпы шешімге қойсақ, кез келген тұрақтылар үшін $c_1 + c_2 = - 1$, $c_2e + c_1 - c_2e = 2$ теңдеулер жүйесі алынады. Бұл жүйені шешсек $c_1 = -2$, $c_1 = 1$. Демек, ізделінді шешім $y =- 2 + e^x$, $0 \leq x \leq 1$.

Мысал. 6.2. $y'' + y = f(x), y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi)$ шекаралық есеп үшін Грин функциясы құрылсын.

Шешуі. $y'' + y = 0$ біртекті теңдеудің тәуелсіз дербес шешімдері: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$. Сонда (11.108) Грин функциясы $G(x,s) = \begin{cases} c_1 \sin x + c_2 \cos x, & 0 \le x \le s \\ c_3 \sin x + c_4 \cos x, & s \le x \le \pi \end{cases}$ түрінде болады. Шекаралық шарттар бойынша,

$$c_2 = -c_4, \; c_1 = -c_3. \qquad (*)$$

$G(x,s)$ функциясының $x = s$ нүктесінде үзіліссіз болатындығынан (11.109) және $G'_x(x,s)$ туындының $x = s$ нүктесінде $\frac{1}{p(x)}$ секірме (11.110) болатынын ескерсек

$$c_1 \sin s + c_2 \cos s = c_3 \sin s + c_4 \cos s, c_3 \cos s - c_4 \sin s - c_1 \cos s + c_2 \sin s = 1 \quad (**)$$

қатыстар шығады. (*) және (**) жүйелерден, $c_1 = -c_3 = -\frac{1}{2}\cos s$, $c_2 = -c_4 = \frac{1}{2}\sin s$.

Сондықтан,

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(s - x), & 0 \le x \le s \\ \frac{1}{2}\sin(x - s), & s \le x \le \pi \end{cases}$$

түріндегі Грин функциясын аламыз. Немесе $G(x,s) = \frac{1}{2}\sin|x - s|, 0 \le x \le \pi$.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика: учебник. – М.: Проспект, 2017.
2. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник. – М.: Высшая школа, 2015.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: учебник. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., 2004.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: учебник. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., 2004.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: учебник. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. – М., 2004.
6. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник. – М., 2006.
7. Смирнов. Курс высшей математики: учебник. 1, 2, 3, 4, 5. – М., 2004.
8. Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә. Жоғары математика курсы. Аналитикалық геометрия. – Алматы: “Санат”, 1994.
9. Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә. Жоғары математика курсы. Сызықты алгебра. – Алматы: “Санат”, 1997.
10. Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә. Жоғары математика курсы. Математикалық анализ 1, 2 бөлім. – Алматы: “Қазақ университеті”, 2006.
11. Қабдықайырұлы Қ. Жоғары математика. – Алматы, 1993.
12. Айдос Е. Ж. Жоғары математика. – Алматы: Уль-Тек-Китап, 2003.
13. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. – Қарағанды, 2016.
14. Махмеджанов Н.М. Жоғары математикадан тапсырмалар жинағы. – Алматы: “Қазақ университеті”, 2014.
15. Махмеджанов Н.М. Сборник задач по высшей математике. – Қарағанды, 2016.
16. Махмеджанов Н.М. Сборник заданий по высшей математике. – Алматы: “Қазақ университеті”, 2013.

МАЗМҰНЫ

Оқулық

Махмеджанов Набибулла Махмеджанұлы

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

Басуға 04.04.2018 қол қойылды. Пішімі 60x90 $^1/_{16}$.
Офсеттік басылыс. Қаріп түрі «Cambria Math».
Шартты баспа табағы 31,6.
Таралымы 3000 дана

МАХМЕДЖАНОВ НАБИБУЛЛА МАХМЕДЖАНҰЛЫ

Өзбекстан Республикасы, Ташкент облысы, Шыназ ауданының Құдайбергенов Айдар ауылында дүниеге келген.

1962 жылы Ташкент мемлекеттік педагогикалық университеті математика факультетінің қазақ бөлімін бітірген. Ташкент политехникалық университетінде, Ташкент мемлекеттік университетінде (бұрынғы САГУ) дәріс берген.

1967-1969 жылдары М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінде стажер-зерттеуші бола жүріп, Мәскеу электрондық машина жасау институтында дәріс берген.

1969-1972 жылдары Мәскеу мемлекеттік университетінің есептеу математикасы және кибернетика факультетінің аспирантурасында оқыды.

1973 жылы осы факультеттің ғылыми кеңесінде кандидаттық диссертация қорғады.

1974 жылдан бастап әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінде жұмыс істейді: доцент, жоғары математика кафедрасының меңгерушісі, Жоғары оқу орындары оқытушыларының біліктілігін арттыру институтында оқу және ғылыми жұмыстар бойынша директордың орынбасары, әрі осы институттың математика және механика кафедрасының меңгерушісі бола жүріп, “Жоғары математиканы оқытудың әдістемесі” атты ғылыми-әдістемелік семинарға жетекшілік етті. 2015 жылдан дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының профессоры.

Н.М. Махмеджанов 50-ден астам ғылыми, ғылыми-әдістемелік еңбектердің авторы. Бұл еңбектері АҚШ, Ресей, Өзбекстан және Қазақстан Республикаларының мерзімді ғылыми басылымдарында жарық көрген. Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі ұсынған “Жоғары математика есептерінің жинағы” (2005, 2008, 2016), “Сборник задач по высшей математике” (2009, 2016) және аймақтық оқу-әдістемелік кеңес ұсынған “Жоғары математикадан тапсырмалар жинағы” (2014), “Сборник заданий по высшей математике” (2013) оқу құралдары Қазақстан Республикасының көптеген жоғарғы оқу орындарында қолданылуда.