Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт экономики
и управления

О. Я. ШЕВАЛДИНА
Е. В. ВЫХОДЕЦ
Е. А. ТРОФИМОВА

МАТЕМАТИКА

РЯДЫ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

О. Я. Шевалдина, Е. В. Выходец, Е. А. Трофимова

МАТЕМАТИКА

РЯДЫ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета в качестве учебного пособия
для студентов вуза, обучающихся по направлениям подготовки
38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент»,
38.03.05 «Бизнес-информатика», по специальностям
38.05.01 «Экономическая безопасность», 38.05.02 «Таможенное дело»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2022

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.1я73
Ш37

Под общей редакцией
С. В. Кругликова

Рецензенты:
отдел математического программирования
Института математики и механики УрО РАН
(заведующий отделом доктор физико-математических наук,
профессор РАН *М. Ю. Хачай*);
Г. А. Тимофеева, доктор физико-математических наук, профессор
(Уральский государственный университет путей сообщения)

Шевалдина, О. Я.

Ш37 Математика: Ряды. Функции нескольких переменных : учебное пособие / О. Я. Шевалдина, Е. В. Выходец, Е. А. Трофимова ; под общ. ред. С. В. Кругликова ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2022. — 158 с. : ил. — 30 экз. — ISBN 978-5-7996-3487-2. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-3487-2

Учебное пособие содержит систематизированное изложение понятий и методов двух разделов математики: ряды и функции нескольких переменных. Разделы, представленные в пособии, являются базовыми для последующего приобретения студентами специальных знаний и приемов аналитической работы в решении задач экономики и управления. Рассмотрены основные вопросы линейной и нелинейной оптимизации функций нескольких переменных. После каждой главы приводится блок заданий, предназначенных для самостоятельного решения студентами, а также тесты для текущего и промежуточного контроля знаний. Изложение материала для лучшего восприятия и понимания сопровождается многочисленными примерами и рисунками.

Для студентов, изучающих дисциплину «Математика» в рамках модуля «Математические методы анализа».

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7996-3487-2

© Уральский федеральный университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит систематизированное изложение понятий и методов двух разделов математики: ряды и функции нескольких переменных. Эти разделы являются базовыми при изучении таких дисциплин, как «Методы оптимальных решений», «Методы принятия управленческих решений», «Финансовый менеджмент» и др. Излагается материал в объеме, необходимом для понимания методов, используемых в анализе экономических процессов и управления, для применения математического инструментария в решении практических задач.

В пособии рассмотрены некоторые основные вопросы линейной и нелинейной оптимизации функций нескольких переменных. Особое внимание уделено обоснованию и возможности использования предложенных методов в решении экономических задач. Заметим, что излагаемый материал по применению методов математики к решению задач экономики никак не может претендовать на строгость и полноту изложения. Целью этого изложения является, наряду с изучением соответствующих разделов математики, знакомство с некоторыми методами оптимизации задач экономики.

Авторы в изложении стремились сохранить доступную, но строгую математическую форму. В пособии значительное место занимает иллюстративный материал, примеры задач с подробным разбором решений. Обращается внимание на детали изучаемого материала, демонстрирующие различные характерные особенности функций нескольких переменных.

В конце каждой главы приведены задания для самостоятельного решения и тесты с ответами для повторения и контроля степени усвоения пройденного материала.

Одной из особенностей пособия является использование большого числа рисунков к рассматриваемым задачам. Эти рисунки приводятся для лучшего понимания изучаемого материала, а также для развития геометрического воображения у читателей. Большинство рисунков выполнены с помощью современных компьютерных систем GeoGebra и Adobe Photoshop.

Учебное пособие ориентировано на студентов, обучающихся по программам подготовки бакалавров и специалистов по направлениям «Экономика», «Менеджмент», «Бизнес-информатика», «Таможенное дело», «Финансовая и экономическая безопасность», «Судебная экспертиза».

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Понятие числового ряда и его суммы

Сходящиеся и расходящиеся ряды

Пусть

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{1.1}$$

— последовательность действительных чисел.

Сопоставим этой последовательности чисел последовательность (S_n) *конечных* сумм вида:

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2, \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, \\ &S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots \end{aligned}$$

Однако на практике часто приходят к задачам суммирования *бесконечной последовательности* чисел (1.1).

Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

или

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.2}$$

Числа $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называют n-ми *частичными суммами* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а число a_n — n-м (*общим*) *членом* этого ряда.

Так как каждому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ соответствует последовательность (S_n) его частичных сумм и, наоборот, каждой последовательности (S_n) соответствует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = S_1$, $a_2 = S_2 - S_1$, …, $a_n = S_n - S_{n-1}$, …, то каждое свойство последовательностей можно перефразировать в некоторое свойство рядов заменой характеристики членов последовательности соответствующей характеристикой членов ряда.

Таким образом, фразы «последовательность (a_n)», «последовательность (S_n)», «совокупность последовательностей (a_n) и (S_n)», «ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$» суть математические синонимы.

При определении ряда естественно возникают вопросы:

1. Что такое «сумма» бесконечной последовательности чисел?

2. Если сумма существует, то каковы ее свойства?

Прежде чем ответить на эти вопросы, рассмотрим пример 1.1.

Пример 1.1. Отрезок [0; 1] разобьем на два равных отрезка (каждый длины $\frac{1}{2}$) (рис. 1.1).

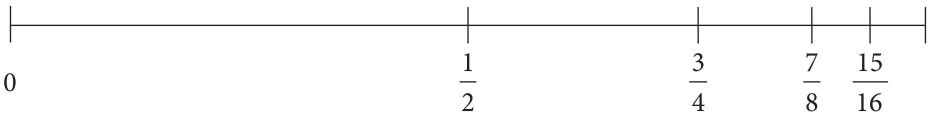


Рис. 1.1. Геометрическая иллюстрация примера 1.1

Правую половину отрезка, т. е. отрезок $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, снова разделим пополам, затем разобьем пополам отрезок $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$ и т. д. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим разбиение отрезка [0; 1] на бесконечное множество отрезков: $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right]$, $\left[\frac{7}{8}; \frac{15}{16}\right]$, … Естественно считать, что «сумма» длин всех отрезков, на которые разбит отрезок [0; 1], равна длине отрезка, т. е. единице. Иными словами,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1. \tag{1.3}$$

Это рассуждение было известно еще грекам, и философ Зенон (около 490 г. до н. э.), известный нам своими «парадоксами», оспаривал его законность. Один из парадоксов утверждал, что бегущий человек никогда не сможет достичь своей цели, поскольку он должен пробежать сначала половину требуемой дистанции, затем половину оставшейся части дистанции и т. д.; таким образом, он должен пробежать бесконечное множество расстояний, а это будет продолжаться вечно.

Если бы мы попытались вычислить сумму (1.3), последовательно выполняя все указанные в ней сложения, то это, конечно, никогда бы не окончилось.

И все-таки равенство (1.3) в некотором смысле верно. В чем же заключается точный его смысл?

Определим понятие *суммы* ряда. Прежде обратимся к примеру 1.1. Последовательности $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ сопоставим последовательность частичных сумм (S_n), где

$$S_n = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} : S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{3}{4},\ S_3 = \frac{7}{8}, \ldots, S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = 1$ является длиной отрезка.

Если последовательность (S_n) частичных сумм ряда *сходится*, то ее предел $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют *суммой* ряда, а сам ряд (1.2) называют *сходящимся* или *суммируемым*. В этом случае пишут:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, или предел последовательности (S_n) не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *расходящимся*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится* к $+\infty$, и пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Аналогично в случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ считаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Пример 1.2. Рассмотрим ряд $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n$. Для этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$. Данный ряд расходится к $+\infty$.

Пример 1.3. Рассмотрим ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$. Поскольку для этого ряда $S_{2k-1} = 1$, $S_{2k} = 0$ ($k \in \mathbf{N}$), то последовательность (S_n) не имеет предела при $n \to \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ расходится. Заметим, что этот ряд не расходится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Пример 1.4. Рассмотрим последовательность

$$(S_k) : S_k = \frac{1}{k^{\alpha}},\ k \in \mathbf{N},\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Ей соответствует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = S_1 = 1$, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Так как последовательность (S_n) *сходится* при $\alpha \geq 0$ и *расходится* при $\alpha < 0$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}\right)$ *сходится* при $\alpha \geq 0$ и *расходится* при $\alpha < 0$.

Пример 1.5. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ и найдем его сумму.

Так как $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то последовательность частичных сумм $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$; $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

Итак, заданный ряд сходится и его сумма

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Замечание. Для представления общего члена ряда в виде суммы простейших дробей полезно использовать *метод неопределенных коэффициентов*.

Пример 1.6. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+3n+2)}$.

Представим общий член ряда $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, приходим к тождеству: $1 \equiv A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$.

Последовательно полагая $n = 0, -1, -2$, находим: $A = \frac{1}{2}$; $B = -1$; $C = \frac{1}{2}$.

Таким образом, $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$.

Отсюда:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$, следовательно, данный ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{4}$.

Пример 1.7. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(5n-2)(5n+3)}$.

Преобразуем формулу n-го члена ряда, представив его в виде суммы простейших дробей: $a_n = \frac{5}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{(5n+3)-(5n-2)}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}$.

Выпишем последовательность частичных сумм данного ряда и найдем ее предел:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8},\ S_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} = \frac{1}{3} - \frac{1}{13}, \ldots,$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{3}$.

Пример 1.8. Выясним, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)$.
Частичные суммы ряда равны:

$$S_1 = a_1 = \ln\frac{5}{2},$$

$$S_2 = S_1 + a_1 = \ln\frac{5}{2} + \ln\frac{8}{5} = \ln\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{5}\right) = \ln\frac{8}{2},\ \ldots,$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \ln\frac{3(n-1)+2}{2} + \ln\frac{3n+2}{3n-1} = \ln\left(\frac{3n-1}{2}\cdot\frac{3n+2}{3n-1}\right) = \ln\frac{3n+2}{2}.$$

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{3n+2}{2} = +\infty,$ так как аргумент логарифма, а значит, и сам логарифм при $n \to \infty$ стремятся к бесконечности. Следовательно, исследуемый ряд расходится.

Пример 1.9. Пусть m — фиксированное натуральное число. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)},$ называемый *рядом обратных факториалов*.

Преобразуем общий член ряда по формуле

$$u_n = \frac{1}{m}\frac{n+m-n}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)}\right).$$

Выпишем последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{2\cdot 3\cdots(m+1)}\right),$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{3\cdot 4\cdots(m+2)}\right),\ldots,$$

$$S_k = S_{k-1} + a_k = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{m\cdot m!}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{1}{m\cdot m!}$.

Пример 1.10. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ представимы в виде $a_n = b_{n+1} - b_n$ и пусть существует конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

Тогда исходный ряд сходится и его сумма равна $b - b_1$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{n+1} - b_n\right) = b - b_1. \tag{1.4}$$

Действительно, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(b_{k+1} - b_k\right) = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_{n+1} - b_n),$

т. е. $S_n = b_{n+1} - b_1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = b,$ то отсюда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = b - b_1,$ и поэтому справедлива формула (1.4).

Применим данное свойство для ряда с общим членом:

$$a_n = \frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

Представим его в виде

$$a_n = -\frac{(n+1)(2n+1)-n(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = -\left(\frac{(n+1)}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{n}{(2n+1)(2n+3)}\right).$$

Обозначим $b_n = -\dfrac{n}{(2n+1)(2n+3)}$. Тогда $a_n = b_{n+1} - b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

$b_1 = -\dfrac{1}{15}$. По формуле (1.4) находим: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{15}$.

Пример 1.11. Найдем сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+10)}$.

Так как $\dfrac{1}{n(n+10)} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+10}\right)$, то $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+10)} =$

$$= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+10} = \frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=11}^{n+10}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+10}\frac{1}{k}\right).$$

Отсюда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{10}\right) = 4\frac{9}{25}$.

Пример 1.12. Исследуем сходимость *гармонического* ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Гармонический ряд — это ряд, каждый член которого, начиная со второго, является средним гармоническим его соседних членов: $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$.

Для решения вопроса о сходимости гармонического ряда рассмотрим другой, вспомогательный ряд, полученный из гармонического уменьшением его членов:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{2 слагаемых}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\text{4 слагаемых}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\text{8 слагаемых}} \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{2^{\hat{e}-1}\ \text{слагаемых}} + \ldots$$

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{k}=1+\frac{k}{2}.$$

В гармоническом ряде остались без изменения слагаемые $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$ а все остальные уменьшились. Найдем частичные суммы нового ряда:

$$S_1=1,\ S_2=1+\frac{1}{2},\ S_{2^2}=1+\frac{1}{2}\cdot 2,\ S_{2^3}=1+\frac{1}{2}\cdot 3,\ S_{2^4}=1+\frac{1}{2}\cdot 4,\ldots,\ S_{2^k}=1+\frac{1}{2}\cdot k,\ldots$$

Таким образом, $S_{2^k}=1+\frac{k}{2}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{k}{2}\right)=\infty$. Поэтому вспомогательный ряд расходится. Но частичные суммы гармонического ряда больше соответствующих сумм вспомогательного ряда, поэтому гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Приведем еще два доказательства того, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Действительно, если бы он сходился, то, обозначив его сумму через S, мы бы имели:

$$\lim_{k\to\infty}\left(S_{2k}-S_k\right)=\lim_{k\to\infty}S_{2k}-\lim_{k\to\infty}S_k=S-S=0. \tag{1.5}$$

Но $S_{2k}-S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}+\ldots+\frac{1}{2k}=k\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}$,
т. е. $S_{2k}-S_k>\frac{1}{2}$, что противоречит (1.5).

Наконец, рассмотрим функцию $f(t)=\ln(1+t)$. Вторая производная функции $f''(t)=-\frac{1}{\left(1+t\right)^2}$, $t>-1$. Так как $f''(t)<0$, то график функции является выпуклым вверх. Касательная к графику функции в точке $t=0$ имеет вид: $y=t$. Следовательно, $t\geq\ln(1+t)$ при $\forall t>-1$. Поэтому

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\geq\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots n\left(n+1\right)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n}=\ln\left(n+1\right).$$

Итак, частичная сумма гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=S_n\geq\ln\left(n+1\right)$. Отсюда вытекает, что $S_n\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$, т. е. гармонический ряд расходится.

Заметим, что гармонический ряд расходится очень «медленно». Л. Эйлер[1], например, вычислил, что $S_{1\,000} = 7{,}4849, \ldots, S_{10\,000} = 9{,}7875, \ldots, S_{1\,000\,000} \approx 14{,}3927, \ldots$

Пример 1.13. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ называется *обобщенным гармоническим*.

При $\alpha = 1$ — это гармонический ряд, и его расходимость доказана. Покажем, что этот ряд расходится и при $\alpha < 1$.

Здесь $S_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}}$, и $S_n > \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot n = n^{1-\alpha}$ при любом $n > 1$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, и поэтому при $\alpha < 1$ данный ряд расходится. Итак, обобщенный гармонический ряд расходится при $\alpha \le 1$. Покажем, что при $\alpha > 1$ этот ряд сходится. Для этого достаточно установить, что последовательность S_{n_k}, где $n_k = 2^{k+1} - 1$, ограничена. Имеем:

$$S_{n_k} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} + \frac{1}{8^{\alpha}} + \frac{1}{9^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{15^{\alpha}} +$$

$$+ \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{\left(2^{k+1} - 1\right)^{\alpha}} \le 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^{\alpha}} + 4 \cdot \frac{1}{4^{\alpha}} + 8 \cdot \frac{1}{8^{\alpha}} + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^2} + \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^3} + \cdots + \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^k} = \frac{1 - \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^k}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \le \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \infty.$$

Функцию $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ переменной α называют *дзета-функцией Римана*[2] и обозначают $\zeta(\alpha)$.

Пример 1.14. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n q^n$, где q — действительное число: $|q| < 1$.

Преобразуем частичную сумму (S_n) этого ряда следующим образом:

$$S_n = \left(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n\right) + \left(q^2 + q^3 + \cdots + q^n\right) + \left(q^3 + \cdots + q^n\right) + \cdots +$$

$$+ \left(q^{n-1} + q^n\right) + q^n = \frac{q\left(1 - q^n\right)}{1-q} + \frac{q^2\left(1 - q^{n-1}\right)}{1-q} + \frac{q^3\left(1 - q^{n-2}\right)}{1-q} + \cdots + \frac{q^n(1-q)}{1-q} =$$

---

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) — математик, физик, механик; родился в Швейцарии, большую часть жизни прожил в России и в Германии, активно участвовал во многих направлениях деятельности Петербургской и Берлинской академий.

[2] Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866) — знаменитый немецкий математик, известный своими работами по теории функций и новаторскими теориями в области дифференциальной геометрии.

$$=\frac{1}{1-q}\left(\frac{q\left(1-q^{n}\right)}{1-q}-nq^{n+1}\right).$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{q}{\left(1-q\right)^2}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^n$ сходится и его сумма равна $\frac{q}{\left(1-q\right)^2}$.

В частности, если $q=\frac{1}{2}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2\,.$$

Число е ***как сумма ряда***

Нам известно, что $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. В этом пункте мы изучим ряд, с помощью которого можно указать достаточно хороший способ вычисления числа е.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n\left(n-1\right)\cdots\left(n-k+1\right)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Полагая $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}_n$ и $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=s_n$, имеем:

$$\mathrm{e}_n<s_n\ \ \left(n=1,2,\cdots\right).$$

С другой стороны, при любом фиксированном k и любом $n\geq k$ из того же разложения имеем:

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\mathrm{e}_n.$$

При $n\to\infty$ левая часть последнего неравенства стремится к s_k, а правая — к числу е, поэтому $s_k\leq\mathrm{e}$ для любого $k\in\mathbf{N}$. Но тогда из двойного неравенства

$$\mathrm{e}_n<s_n\leq\mathrm{e}$$

по известной теореме о пределе промежуточной последовательности получаем, что $\lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}.$ По определению суммы ряда теперь можно записать:

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Оценим разность e – s_n:

$$0 < \mathrm{e} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Таким образом, чтобы абсолютная погрешность приближения числа e числом s_n не превосходила, например, 10^{-5}, достаточно, чтобы имело место неравенство $\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{100\,000}$. Этому условию удовлетворяет уже n = 8.

В заключение покажем, что *число* e *иррационально*.

Предположим, что $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, где p, $q \in \mathbf{N}$. Тогда при любом $n \in \mathbf{N}$ число $u_n := n!q\left(\mathrm{e} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ целое и положительное. Следовательно, $u_n \geq 1$ при любом $n \in \mathbf{N}$.

С другой стороны, $u_n \leq n!q\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ Противоречие!

В 1873 г. Ш. Эрмит[3] установил, что число e *трансцендентно*, т. е. не является корнем никакого алгебраического многочлена с целыми коэффициентами.

[3] Шарль Эрмит (1822–1901) — французский математик, член Парижской Академии наук.

1.2. Основные свойства сходящихся рядов

Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называют *остатком ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и обозначают r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

Теорема 1.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. При этом

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0.$$

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и S его сумма, а σ_n — частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Ясно, что $\sigma_n = S_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Следовательно, если существует и конечен один из пределов $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то существует и конечен другой предел.

Так как для сходящегося ряда $S = S_n + r_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - S = S - S = 0.$

При достаточно больших n можно считать, что

$$S \approx S_n.$$

Следствие. Прибавление (отбрасывание, изменение) конечного числа членов не влияет на сходимость ряда (но может, конечно, изменить его сумму).

Теорема 1.2. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ одновременно сходятся или расходятся. Если один из них сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и S — его сумма, а σ_n — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$. Тогда очевидно, что $\sigma_n = \alpha S_n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha S_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \alpha S$, т.е. последовательность частичных сумм (σ_n) сходится к числу αS.

Теорема 1.3. Два сходящихся ряда можно почленно складывать и вычитать, то есть, если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ тоже сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство. Так как $\sum_{n=1}^{n}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{n} a_n \pm \sum_{n=1}^{n} b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S + T$, где S и T — суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно, то $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = S + T$.

Следствие. Если два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n)$ также сходится, и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Теорема 1.4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ расходится.

Пример 1.15. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n \cdot 2^n}$.

Так как $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{2^n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится (см. пример 1.14), а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n \cdot 2^n}$ расходится.

Теорема 1.5. Если оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ может как сходиться, так и расходиться.

Пример 1.16. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Так как $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, то $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ сходится и его сумма равна $\frac{3}{4}$.

В то же время каждый из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ является расходящимся.

Расходимость второго ряда очевидна: он получается из гармонического отбрасыванием двух его первых членов.

Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 1.6. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.6}$$

Доказательство. $S_n = S_{n-1} + a_n$ $(n \geq 2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Замечание. Как утверждается в теореме, для сходимости ряда *необходимо*, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ заведомо расходится.

Наоборот, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд необязательно является сходящимся. Пример гармонического ряда показывает, что это условие *не является достаточным*: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя при этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Для сходимости ряда недостаточно, чтобы n-й член ряда стремился к нулю; нужно, чтобы он стремился к нулю достаточно быстро (обсуждение этого вопроса в п. 1.4).

Пример 1.17. Рассмотрим ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + \ldots \quad (q \in \mathbf{R}), \tag{1.7}$$

составленный из членов геометрической прогрессии: 1, q, q^2, …, q^{n-1}, … Его часто называют *геометрическим рядом*. Исследуем сходимость данного ряда.

Если $|q| \geq 1$, то $|q|^n \geq 1$; следовательно, $|q^n| = |q|^n \geq 1$, и в этом случае не выполнен необходимый признак сходимости. Итак, в случае $|q| \geq 1$ ряд (1.7) расходится.

Пусть $|q| < 1$. Тогда $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, если $|q| < 1$. Значит, ряд в этом случае сходится.

Наоборот, если ряд (1.7) суммируем, то $q^n \to 0$, $n \to \infty$ и, следовательно, $|q| < 1$.

Таким образом, геометрический ряд суммируем тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, и в этом случае его сумма:

$$1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}+\ldots=\frac{1}{1-q}. \tag{1.8}$$

Пример 1.18. Найдем сумму ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots$

Данный ряд можно представить в виде суммы двух рядов:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}.$$

Каждый из них является геометрическим рядом со знаменателем $q < 1$, а потому сходится. По формуле (1.8) суммы первого и второго рядов, соответственно, равны:

$$\bar{S}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1, \quad \bar{\bar{S}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Тогда по теореме 1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

Пример 1.19. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{4n+7}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n+7}=\frac{3}{4}\neq 0.$

Пример 1.20. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ расходится, так как последовательность $(\sin n)$ не является бесконечно малой.

В самом деле, предположим противное: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0.$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)=0.$ Так как $\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0,$ что противоречит равенству $\cos^2 n+\sin^2 n=1.$ Следовательно, рассматриваемый ряд расходится.

1.3. Ряды с неотрицательными членами

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при любом натуральном n удовлетворяют условию $a_n \geq 0$. Последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей. Поэтому по теореме о пределе монотонной последовательности справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.7. Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм (S_n) была ограничена сверху: $\exists M > 0 : \ \forall n \geq 1 \quad S_n \leq M$.

Необходимость. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, поэтому последовательность его частичных сумм сходится; всякая сходящаяся последовательность ограничена (при этом условие *неотрицательности* членов ряда необязательно).

Достаточность. Поскольку все члены ряда неотрицательны и для любого n сумма $S_n = S_{n-1} + a_n$ $(n \geq 2)$, то последовательность (S_n) не убывает и, следовательно, для сходимости этой последовательности достаточно, чтобы она была ограничена (монотонная, ограниченная последовательность сходится).

Замечание. Если последовательность (S_n) не ограничена сверху, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 1.21. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{(n+1)(n+2)}$.

Так как $\frac{\sin^2 n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$,

то $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k}{(k+1)(k+2)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}$, поэтому ряд сходится.

Признаки сравнения

Теорема 1.8 (первый признак сравнения). Пусть даны два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.10}$$

с неотрицательными членами: $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

Если $\exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall k \geq n_0 : a_k \leq b_k$, то из сходимости ряда (1.10) с «большими» членами следует сходимость ряда (1.9) с «меньшими» членами, а из расходимости ряда (1.9) следует расходимость ряда (1.10). Ряд (1.10) называют *мажорантным* для ряда (1.9).

Пример 1.22. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+7}$. Так как $\frac{1}{2n^2+7} < \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (как обобщенный гармонический), то, по признаку сравнения, исходный ряд сходится.

Пример 1.23. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 2)$ и гармонический ряд расходится, то данный ряд расходится.

Пример 1.24. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 \ln(n+2)}}$.

При $n > 1$ имеем $\ln(n+2) > 1, n^3 \ln(n+2) > n^3$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{n^3 \ln(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (как обобщенный гармонический), следовательно, по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Пример 1.25. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ сходится, так как $\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$ (для $n > 3$), и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Пример 1.26. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\beta} n}$ расходится, так как $\frac{1}{\ln^{\beta} n} > \frac{1}{n}$ для достаточно больших n и так как гармонический ряд расходится.

Теорема 1.9 (второй признак сравнения). Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с *положительными членами*: $a_n > 0$, $b_n > 0$. Если $\exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall k \geq n_0 : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 1.10 (предельный признак сравнения). Если $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ для всех $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbf{N}$ и если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$, $0 < K < +\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1.27. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n + \sqrt{n^7 + 3}}{n^4 + \sqrt[3]{n^5 + 10}}$.

Подберем подходящий для сравнения эталонный ряд. Рассмотрим поведение числителя и знаменателя общего члена ряда при $n \to \infty$:

$$2n + \sqrt{n^7 + 3} = 2n + \left(n^7 + 3\right)^{1/2} \sim 2n + n^{7/2} \sim n^{7/2}, \quad n \to \infty,$$

$$n^4 + \sqrt[3]{n^5 + 10} = n^4 + \left(n^5 + 10\right)^{1/3} \sim n^4 + n^{5/3} \sim n^4, \quad n \to \infty.$$

Возьмем $\alpha = 4 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}$ и в качестве эталонного ряда рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n + \sqrt{n^7 + 3}}{n^4 + \sqrt[3]{n^5 + 10}} : \dfrac{1}{n^{1/2}} \right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^{3/2} + \sqrt{n^8 + 3n}}{n^4 + \sqrt[3]{n^5 + 10}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{n^{5/2}} + \sqrt{1 + \dfrac{3}{n^7}}}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{n^7} + \dfrac{10}{n^{12}}}} = 1.$ Предел конечен и отличен от нуля, условие предельного признака сравнения выполнено. Эталонный ряд расходится, значит, исходный ряд по предельному признаку сравнения тоже расходится.

Пример 1.28. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$.

Преобразуем формулу общего члена ряда: $a_n = \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \sqrt{n}2\sin^2\frac{1}{2n}$.

Так как $2\sqrt{n}\,\sin^2\frac{1}{2n} \sim 2\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^{3/2}}$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то и исходный ряд сходится.

Пример 1.29. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}:\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0$, и гармонический ряд расходится.

Пример 1.30. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}\ln(n+1)}$.

Так как предел отношения общих членов данного ряда и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^5}\ln(n+1)}:\frac{1}{n^{5/2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5}\ln(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0$, то по предельному признаку сравнения из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ следует сходимость исходного ряда.

1.4. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Существует довольно много приемов, позволяющих устанавливать сходимость (расходимость) рядов. Все эти приемы называют признаками сходимости.

Признаки Даламбера и Коши

Теорема 1.11 (признак Даламбера[4]). Пусть дан ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n > 0\quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$$

[4] Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783) — один из самых разносторонних и влиятельных ученых Франции. Математик, физик, механик, автор физико-математической части «Энциклопедии» Д. Дидро, а также ряда трудов по музыке и эстетике.

Если существует такое число q: $0 < q < 1$ и $\exists n_q \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq n_q$ и выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \tag{1.11}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если же $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Отбросив, если необходимо, несколько первых членов ряда, можно считать, что неравенство (1.11) выполняется для всех $n \in \mathbf{N}$. Перепишем это неравенство в виде $a_{n+1} \leq qa_n$. Отсюда $a_2 \leq qa_1$, $a_3 \leq qa_2 \leq q^2 a_1$, $a_4 \leq qa_3 \leq q^3 a_1$ и т. д. Вообще при любом $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$a_n \leq q^{n-1} a_1. \tag{1.12}$$

Это показывает, что члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ не превосходят соответствующих членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n + \ldots$$

Так как по условию $0 < q < 1$, то эта прогрессия сходится. В силу первого признака сравнения (теорема 1.8) сходится и данный ряд.

В случае, когда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, имеем неравенство $a_{n+1} \geq qa_n$, т. е. члены ряда образуют неубывающую последовательность, и поэтому не выполняется необходимый признак сходимости ряда, что доказывает теорему полностью.

Признак Даламбера часто применяется в следующей *предельной форме*.

Теорема 1.12. Если существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d, \tag{1.13}$$

то при $0 \leq d < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $d > 1$ — расходится.

В случае $d = 1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда (требуется провести дополнительное исследование).

Доказательство. Пусть $0 \leq d < 1$. Возьмем некоторое число q: $d < q < 1$. Из условия (1.13) следует, что, начиная с некоторого номера n, будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. По предыдущей теореме ряд сходится. Случай $d > 1$ разбирается аналогично.

Полезно отметить, что признак Даламбера позволяет дать оценку остатка ряда. Из неравенства $a_n \le q^{n-1}a_1$ следует, что

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots \le a_{n+1} + a_{n+1}q + a_{n+1}q^2 + \ldots,$$

то есть

$$r_n \le \frac{a_{n+1}}{1-q}. \tag{1.14}$$

Пример 1.31. Исследовать сходимость ряда $1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots + \frac{3^n}{n!} + \ldots$

Имеем $a_n = \frac{3^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$, тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}$. Очевидно, что $\frac{3}{n+1} < 1$ для $n > 3$. По признаку Даламбера исходный ряд сходится.

Замечание. Из сходимости ряда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Пример 1.32. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} < 1.$

Пример 1.33. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{e} < 1,$ поэтому ряд сходится.

Пример 1.34. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{n!}.$

Имеем $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{n+1} n!}{(n+1)!\left(\sqrt{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2}.$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2} = 0 \cdot \sqrt{e} = 0 < 1,$

т. е. рассматриваемый ряд сходится.

Пример 1.35. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^{2n-1}}$. Оценить погрешность приближенного равенства $S \approx S_5$. Найти в этом случае сумму ряда.

По признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 3^{2n-1}}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}=\frac{1}{9}<1,$ поэтому ряд

сходится. Найдем: $S_5=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}.$

Так как $r_5=\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\frac{1}{15\cdot 3^{15}}+\cdots<\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{11\cdot 3^{13}}+\frac{1}{11\cdot 3^{15}}+\cdots<$

$$<\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)=\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8\cdot 11\cdot 3^{11}}\approx 5{,}7\cdot 10^{-7}<0{,}000001,$$

то для того, чтобы гарантировать требуемую точность, будем вычислять каждое слагаемое с семью знаками после запятой, делая округление на седьмом знаке. При такой точности вычислений ошибка при подсчете каждого слагаемого будет меньше, чем $5\cdot 10^{-8}$, и накопление таких ошибок от пяти членов ряда будет меньше, чем $5\cdot 5\cdot 10^{-8}<3\cdot 10^{-7}$. Поэтому $S_5 = 0{,}3333333 + 0{,}0123456 + 0{,}0008230 + 0{,}0000653 + 0{,}0000056 = 0{,}3465728 \approx 0{,}346573$.

Окончательная погрешность вычислений (т. е. сумма погрешности от отбрасывания всех членов ряда, начиная с шестого, и погрешности от неточного вычисления пяти членов ряда) будет меньше, чем

$$3\cdot 10^{-7}+6\cdot 10^{-7}=9\cdot 10^{-7}<10^{-6}=0{,}000001.$$

Замечание. Для оценки остатка ряда можно было воспользоваться формулой $r_n\le\frac{a_{n+1}}{1-q}$, где $q=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

Признак Коши в предельной форме

Теорема 1.13. Если существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

то при $0 \le q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а при $q > 1$ — расходится.

При $q = 1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда.

Пример 1.36. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Имеем $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{e}}{2} > 1,$ следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

Пример 1.37. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{2n^2+1}{5n^2+1}\right)^n$.

Решение. Так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left(n^{1/n}\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1,$ то $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$ $= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \frac{2n^2+1}{5n^2+1} = 1\cdot\frac{2}{5} < 1.$ Поэтому данный ряд сходится.

Пример 1.38. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2}$.

Решение. Используя асимптотическую формулу Стирлинга[5]

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n\to\infty},$$

получим: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^2}{(2\pi)^{1/n}\cdot n^{1/n}} = \frac{\mathrm{e}^2}{1\cdot 1} = \mathrm{e}^2 > 1.$

Следовательно, данный ряд расходится.

Интегральный признак Коши — Маклорена[6]

Теорема 1.14. Если функция $f(x)$ неотрицательна, не возрастает и непрерывна при $x \geq 1$, тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1.15}$$

и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1.16}$$

сходятся или расходятся одновременно.

---

[5] Джеймс Стирлинг (1692–1770) — шотландский математик. Числа Стирлинга, перестановки Стирлинга и приближение Стирлинга называют в честь него.

[6] Колин Маклорен (1698–1746) — шотландский математик, ученик И. Ньютона.

Если ряд (1.15) и интеграл (1.16) сходятся, то справедливы следующие оценки:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_{n}^{+\infty} f(x)dx, \quad (1.17)$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx + f\left(n+1\right), \quad (1.18)$$

где $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$. Заметим, что оценка сверху в неравенстве (1.18) является следствием оценки сверху в неравенстве (1.17).

Доказательство. Сходимость интеграла (1.16) означает существование предела при $n \to \infty$ интеграла

$$\int_{1}^{n} f(x)dx, \quad (1.19)$$

а значит, сходимость ряда

$$\int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx + \int_{n}^{n+1} f(x)dx + \ldots, \quad (1.20)$$

для которого интеграл (1.19) является частичной суммой (если сложить первые n – 1 членов ряда (1.20), то получим интеграл (1.20)). Поэтому задача заключается в том, чтобы доказать одновременно сходимость или расходимость рядов (1.15) и (1.20).

Пусть n — натуральное число. В силу монотонности $f(x)$ на любом отрезке $[n; n+1]$ имеем (рис. 1.2):

$$f(n+1) \le f(x) \le f(n).$$

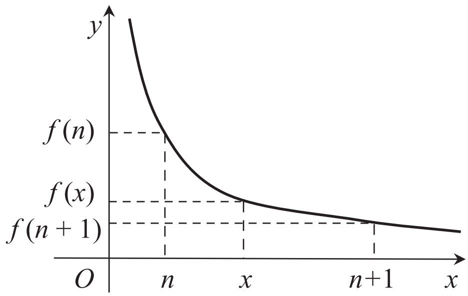


Рис. 1.2. Геометрическая иллюстрация неравенства $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

Отсюда

$$\int_{n}^{n+1} f(n+1)dx \le \int_{n}^{n+1} f(x)dx \le \int_{n}^{n+1} f(n)dx$$

или

$$f(n+1) \le \int_{n}^{n+1} f(x)dx \le f(n). \quad (1.21)$$

Если сходится ряд (1.15), то из правого неравенства в (1.20), согласно первому признаку сравнения, вытекает сходимость ряда (1.20). Обратно, если сходится ряд (1.20), то из первого неравенства в (1.21), согласно признаку сравнения, вытекает сходимость ряда $f(2)+f(3)+\ldots+f(n+1)+\ldots$, а значит, ряда (1.15). Теорема доказана полностью.

Пример 1.39. Рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

При $\alpha > 0$ функция $f\left(x\right)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ положительна, убывает на промежутке $[1; +\infty)$. При $\alpha \neq 1$ имеем:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}.$$

Рассмотрим три случая:

1) если $0 < \alpha < 1$, то при $b \to +\infty$ $b^{1-\alpha} \to +\infty$, следовательно, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=+\infty$, т. е. интеграл расходится, а значит, расходится и ряд (это мы установили выше другим способом);

2) если $\alpha = 1$, то исходный ряд превращается в гармонический ряд, расходимость которого была доказана в п. 1.1 (впрочем, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$ также расходится);

3) если $\alpha > 1$, то при $b \to +\infty$ $b^{1-\alpha} \to +\infty$, следовательно, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}$, т. е. несобственный интеграл сходится, а значит, и ряд сходится.

Если $\alpha \leq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится, так как в этом случае не выполнено необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\neq 0$.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

Пример 1.40. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. На промежутке $[2; +\infty)$ эта функция принимает положительные значения и убывает, поэтому ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ и интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ или оба сходятся, или оба расходятся. Вычислим интеграл:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\left|\frac{dx}{x}=d(\ln x)\right|=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=\infty.$$

Интеграл расходится, значит, расходится и ряд.

Пример 1.41. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(n+2)}$.

В этом случае непосредственное применение интегрального признака нецелесообразно, так как вычисление несобственного интеграла может оказаться затруднительным. Сравним общий член данного ряда с общим членом ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. Найдем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln^2 n}{(3n+1)\ln^2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln^2 n}{(3n+1)\ln^2\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^2}=\frac{1}{3}.$$

Исследуем теперь сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. Аналогично предыдущему примеру для этого вычислим интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\left|\frac{dx}{x}=d(\ln x)\right|=\int\limits_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=$- $=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$. Итак, интеграл сходится, значит, и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ сходится. Тогда по предельному признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Пример 1.42. Выясним, сколько членов ряда $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\dots$ надо сложить, чтобы найти сумму этого ряда с точностью до 0,001.

Введем функцию $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\geq 1$. По формуле (1.18)

$$\int_{n+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\leq r_n\leq\int_{n+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\ \text{или}\ \frac{1}{n+1}\leq r_n\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Так как требуемая погрешность не должна превосходить 0,001, то потребуем, чтобы $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}<0{,}001$. Тогда при $n\geq 1\,000$ $r_n=S-S_n<0{,}001$, значит, для вычисления суммы ряда с требуемой точностью следует сложить по меньшей мере 1 000 членов ряда! Как видим, сходимость ряда весьма «медленная».

Замечание. При решении данной задачи можно было воспользоваться и оценкой (1.17).

1.5. Исследование сходимости рядов с помощью асимптотических формул

При исследовании на сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами полезны асимптотические формулы вида:

$$a_n \sim \frac{c}{n^{\alpha}} \quad \left(n \to \infty, c > 0\right), \tag{1.22}$$

$$a_n \sim \frac{c}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n} \quad \left(n \to \infty, c > 0\right). \tag{1.23}$$

В случае (1.22) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$; в случае (1.23) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\alpha = 1$, $\beta > 1$ или $\alpha > 1$, $\beta \in \mathbf{R}$, и в других случаях расходится.

Пример 1.43. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$.

Здесь $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 = n^{1/n} - 1 = \mathbf{e}^{\ln n/n} - 1 \sim \dfrac{\ln n}{n}$ при $n \to \infty$, так как последовательность $\dfrac{\ln n}{n}$ является бесконечно малой при $n \to \infty$. Ряд с общим членом $b_n = \dfrac{\ln n}{n}$ согласно (1.23) расходится, поэтому исходный ряд также расходится.

Пример 1.44. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt{\ln\left(n^3 + 2\right)}}{\sqrt[3]{n^7 + n^3 + 5}}$. Общий член данного ряда $a_n = \dfrac{n \cdot \sqrt{\ln\left(n^3 + 2\right)}}{\sqrt[3]{n^7 + n^3 + 5}} \sim \dfrac{\sqrt{3}\, n \cdot \ln^{1/2} n}{n^{7/3}} = \dfrac{\sqrt{3}\, \ln^{1/2} n}{n^{4/3}}$, $n \to \infty$. Здесь $\alpha = \dfrac{4}{3} > 1$, $\beta = -\dfrac{1}{2}$, и согласно (1.23) исходный ряд сходится.

Пример 1.45. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\sin n + n^{\alpha}}}\right)$. Заметим, что при $\alpha = 0$ предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sin n}$ не существует, так как не существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$; если $\alpha < 0$, то $n^{\alpha} \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin n + n^{\alpha})$ не существует, и общий член ряда не стремится к нулю. Следовательно, при $\alpha \le 0$ ряд расходится. При $\alpha > 0$ $\dfrac{1}{\sqrt{\sin n + n^{\alpha}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Так как $\ln(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$, то

$\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\sin n + n^{\alpha}}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{\sin n + n^{\alpha}}} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$, $n \to \infty$. Согласно (1.22) данный ряд сходится при $\dfrac{\alpha}{2} > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 2$.

Окончательно получаем: исходный ряд сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \le 2$.

Пример 1.46. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$.

Используя разложения:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3),\ t \to 0, \quad \operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3),\ t \to 0,$$

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3),\ t \to 0,$$

находим $\ln(1+\operatorname{tg} t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2t^3}{3} + o(t^3)$, $\ln(1+\operatorname{arctg} t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)$, $t \to 0$.

Следовательно, $a_n = \dfrac{2}{3n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, т. е. $a_n \sim \dfrac{2}{3n^{3/2}}$, и потому ряд сходится.

1.6. Знакопеременные ряды

Знакопеременный ряд — это ряд, членами которого являются действительные числа произвольного знака.

Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.24}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов:

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \tag{1.25}$$

Сходящийся ряд (1.24) называют *условно сходящимся*, если ряд (1.25) расходится.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Теорема 1.15. Если ряд (1.24) абсолютно сходится, то он сходится, причем имеет место неравенство:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда (1.24); σ_n — частичная сумма ряда (1.25). Обозначим через S_n' сумму всех положительных слагаемых частичной суммы S_n, а через S_n'' сумму всех отрицательных слагаемых частичной суммы S_n. Тогда

$$S_n = S_n' - S_n'', \quad \sigma_n = S_n' + S_n'.$$

Так как ряд (1.25) сходится, то его частичные суммы ограничены некоторым числом C, тогда суммы S_n' и S_n'' также ограничены числом C, поэтому согласно критерию сходимости рядов с неотрицательными членами (теорема 1.7) существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S''$. Если в равенстве $S_n = S_n' - S_n''$ перейти к пределу при $n \to \infty$, то получим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n' - S_n'') = S' - S''$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.16. Сумма абсолютно сходящегося ряда равна разности сумм двух положительных рядов, составленных, соответственно, из всех положительных членов ряда и из абсолютных величин всех его отрицательных членов.

Теорема 1.17 (признак сравнения). Если существует сходящийся ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, такой, что $\forall n \ge n_0 \left(n_0 \in \mathbf{N}\right) |a_n| \le u_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Пример 1.47. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \operatorname{arctg}\dfrac{\cos n}{n}$ абсолютно сходится.

Воспользуемся известными неравенствами: $0 \le \ln(1+x) \le x$, $x \ge 0$ и $|\operatorname{arctg} x| \le |x|$, $x \in \mathbf{R}$: $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left|\operatorname{arctg}\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left|\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{n^{4/3}}$, откуда и следует абсолютная сходимость заданного ряда.

Сочетательное свойство для числовых рядов

Посмотрим, как влияет на сходимость ряда группировка его членов.

Пример 1.48. Сгруппируем формально члены следующего ряда по два, начиная с первого:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = (1-1)+(1-1)+\ldots+ = 0+0+\ldots = 0.$$

Если же формально сгруппировать члены этого же ряда по два, начиная со второго, то получим: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1-0-0-0\ldots = 1.$

Пример показывает, что группировка членов расходящегося ряда может привести к разным результатам.

В общем случае перепишем ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+\ldots+a_{n_1}+a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2}+\ldots+a_{n_{k-1}+1}+\ldots+a_{n_k}+\ldots,$$

где

$$1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Обозначим $b_k = a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}b_k = \sum_{k=1}^{\infty}a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$ называют *группировкой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Теорема 1.18. Если исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то любая его группировка $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ также сходится, причем к той же сумме, которую имеет исходный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

Замечание. Обратное утверждение неверно. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. Если $b_k = 1 - 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$ в то время как исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ расходится. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 1.19. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ а последовательность натуральных чисел n_k возрастает:

$$1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с любой его группировкой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пример 1.49. Рассмотрим ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$. Этот ряд может быть просуммирован группировкой по два члена: $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = \\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. Так как $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}$, $n \to \infty$, то рассматриваемый ряд сходится. Поскольку гармонический ряд расходится, то знакопеременный гармонический ряд сходится условно.

1.7. Знакочередующиеся ряды

Знакопеременный ряд называют *знакочередующимся*, если каждые два соседних члена этого ряда имеют противоположные знаки.

Обычно знакочередующийся ряд записывают в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0. \tag{1.26}$$

Укажем очень простой *достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда*, принадлежащий Лейбницу[7].

Теорема 1.20 (признак Лейбница). Пусть члены знакочередующегося ряда (1.26) удовлетворяют условиям:

1) $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$,

---

[7] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий математик, физик и изобретатель, юрист, историк, философ-идеалист, языковед.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Тогда ряд (1.26) сходится и для его суммы S справедливо неравенство:

$$0 \le S \le a_1.$$

Доказательство. Для частичных сумм с четным индексом из 1) вытекает

$$\begin{gathered} S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + \\ + (a_{2k-3} - a_{2k-2}) + (a_{2k-1} - a_{2k}) \ge S_{2k-2} \quad (k \ge 2). \end{gathered} \tag{1.27}$$

Аналогично

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \le a_1 \quad (k \ge 1). \tag{1.28}$$

Таким образом, $S_{2k} \ge S_{2k-2}$ $(k \ge 2)$ и $0 \le S_{2k} \le a_1$ $(k \ge 1)$, т.е. последовательность S_n монотонная и не убывает, по теореме Вейерштрасса существует предел последовательности $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}$, $S \in \mathbf{R}$. причем $0 \le S \le a_1$.

На основании условия 2) $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} + \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = S.$ Теорема доказана.

Следствие. Пусть

$$r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots$$

— остаток ряда (1.27) и пусть выполнены условия 1) и 2) признака Лейбница. Тогда любой остаток ряда не превосходит по абсолютной величине первого из своих членов: $|r_n| \le a_{n+1}$, $n \ge 1$ и имеет одинаковый с ним знак: $\operatorname{sgn} r_n = \operatorname{sgn} a_{n+1}$.

Пример 1.50. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 7}$.

Решение. Покажем, что члены ряда, начиная с некоторого номера, убывают по абсолютной величине. Имеем: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n}{n^2+7} \frac{(n+1)^2 + 7}{n+1} = \frac{n^3 + 2n^2 + 8n}{n^3 + n^2 + 7n + 7} =$ $= 1 + \frac{n^2 + n - 7}{n^3 + n^2 + 7n + 7}$. Так как $\frac{n^2 + n - 7}{n^3 + n^2 + 7n + 7} > 0$ при $n \ge 3$, то, начиная с номера $n = 3$, выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+7} = 0.$

Условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно, ряд сходится. Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+7}$, составленный из модулей членов данного ряда, расходится, так как $\frac{n}{n^2+7} \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$. Поэтому исходный ряд сходится *условно*.

Пример 1.51. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{3^n n^2 + 1}$.

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}$. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}:\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}n^2}{3^n n^2\left(1+\frac{1}{\left(3^n n^2\right)}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Предел конечен и отличен от нуля, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}$ ведет себя так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т. е. сходится. Тогда по теореме 1.15 исходный ряд сходится, причем *абсолютно*.

Пример 1.52. Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{2^n+n^3}$ расходится.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n+n^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n\left(1+\frac{n^3}{2^n}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+0}=\frac{1}{2}\neq 0,$

то общий член ряда не стремится к нулю. Необходимое условие сходимости ряда не выполнено, и поэтому исходный ряд расходится.

Замечание. Для сходимости знакочередующегося ряда выполнение признака Лейбница *не является необходимым условием*: знакочередующийся ряд может сходиться, даже если модуль его общего члена стремится к нулю немонотонно.

Так, ряд $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\dots$ сходится и притом абсолютно, хотя признак Лейбница и не выполнен: абсолютная величина общего члена ряда хотя и стремится к нулю, но немонотонно.

Пример 1.53. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$.

Так как по правилу Лопиталя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln^2 n)'}{(n)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ и $\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)'=\frac{\ln n}{n^2}(2-\ln n)<0$ при $n\geq 8$, то выполнены, соответственно, условия 1) и 2) признака Лейбница. Поэтому данный ряд сходится. Заметим, что ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится: $\int\limits_2^\infty \frac{\ln^2 x}{x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_2^b \ln^2 x\, d\left(\ln x\right) = \infty.$ Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$ сходится *условно.*

Пример 1.54. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right).$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится в силу признака Лейбница, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ расходится, следовательно, данный ряд расходится. В то же время $\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $n \to \infty$. Поэтому делать вывод о сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ по поведению ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$, где $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, можно *только для рядов с неотрицательными членами*!

Пример 1.55. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \ln\left(1 + \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}\right).$

Используя асимптотическую формулу $\ln(1+t) = t + o(t^2),\ t \to 0,$ получаем $\ln\left(1 + \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}} + b_n,$ где $\left|b_n\right| \le \frac{C}{n^{4/3}},$ $C > 0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$ в силу признака Лейбница сходится условно, то заданный ряд сходится условно.

Пример 1.56. Вычислить приближенно с точностью до 10^{-5} сумму знакочередующегося ряда:

$$1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{5!\,11} + \ldots$$

Сходимость ряда следует из признака Лейбница. Так как для *сходящегося* ряда его сумма $S = S_n + r_n$, то при достаточно больших n можно считать, что $S \approx S_n$, причем для остатка ряда справедлива оценка:

$$|\, r_n \,| < a_{n+1}.$$

В данном примере $a_{n+1} = \dfrac{1}{n!(2n+1)}$. По условию задачи должно выполняться неравенство $a_{n+1} = \dfrac{1}{n!(2n+1)} < 5 \cdot 10^{-6}$. Эта оценка удовлетворяется уже при $n = 7$:

$$(7!) \cdot 15 = 75\,600 > 7 \cdot 10^5, \quad \frac{1}{(7!) \cdot 15} < \frac{1}{7} \cdot 10^{-5} < \frac{1}{5} \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, для решения задачи можно отбросить все члены ряда, начиная с $a_8 = \dfrac{1}{(7!) \cdot 15}$, и вычислить сумму только первых семи членов. Для того чтобы гарантировать требуемую точность, будем вычислять каждое слагаемое с шестью знаками после запятой, делая округление на шестом знаке. При такой точности вычислений ошибка при подсчете каждого слагаемого будет меньше, чем $5 \cdot 10^{-7}$, и накопление таких ошибок от пяти членов ряда (первые два члена — точные) будет меньше, чем $3 \cdot 10^{-6}$. Выпишем в отдельные столбцы результаты вычислений положительных и отрицательных членов:

$$\begin{array}{ll}
1 = 1{,}000000, & \dfrac{1}{1 \cdot 3} \approx 0{,}333333, \\[2ex]
\dfrac{1}{2!5} = 0{,}100000, & \dfrac{1}{3!7} \approx 0{,}023809, \\[2ex]
\dfrac{1}{4!9} \approx 0{,}004625, & \dfrac{1}{5!11} \approx 0{,}000757, \\[2ex]
\dfrac{1}{6!13} \approx 0{,}000107, & \\[2ex]
\Sigma \approx 1{,}104732 & \Sigma \approx 0{,}357899.
\end{array}$$

В результате вычислений получаем:

$$S \approx S_7 \approx 1{,}104732 - 0{,}357899 = 0{,}746833 \approx 0{,}74683.$$

Окончательная погрешность вычислений (т. е. сумма погрешности от отбрасывания всех членов ряда, начиная с седьмого, и погрешности от неточного вычисления пяти членов ряда) меньше, чем $2 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6}$.

Итак, $S \approx 0{,}74683$ и все пять цифр после запятой верные.

Задания для самостоятельного решения

1.1. Рассмотрев предел частичной суммы ряда, установить его сходимость или расходимость. В случае сходимости найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$;

5) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{8}+\ldots$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{5n-3}{5n+2}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+20)}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

1.2. Найти сумму ряда:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{25}+\frac{4}{9}+\frac{1}{125}+\frac{8}{27}+\ldots$$

1.3. Сложить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ и вычислить сумму получившегося ряда, если $a_n=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi n}{3}\right)}{2^n}$, $b_n=\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi n}{6}\right)}{2^{n-1}}$.

1.4. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд сходящимся:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{2n^3+4n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi n}{n^2+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(\dfrac{3n}{3n-1}\right)$.

1.5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}\ln(n+2)}$.

1.6. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь предельным признаком сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n+4}{n^3+2n^2-16}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{4}{n^3+7}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+7}}{n^{15}+12}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt[5]{n^{15}+14n^{11}+1}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{4^n}{5^n+n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}\right)$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n+n^2+1}{3^n n^5-12}$; 10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

1.7. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n^2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi\cdot 3^n}{4^n+e^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{n!}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n+2^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\sin\frac{\pi}{2^n}}{n!}$.

1.8. Рассматривая a_n как члены соответствующего ряда, показать, что данные последовательности (a_n) сходятся:

1) $a_n=\frac{n^5}{5^n}$; 2) $a_n=\frac{5^n}{n!}$;

3) $a_n = \dfrac{\ln n}{n^k}, \quad k > 1;$

4) $a_n = \dfrac{n^n}{5^n \cdot n!};$

5) $a_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n)!};$

6) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}.$

1.9. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1} \right)^n;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\dfrac{n}{4n-3} \right)^{2n};$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\operatorname{arctg} \dfrac{1}{n} \right)^n;$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \left(\dfrac{\sqrt{2n-5}}{\sqrt{2n+3}} \right);$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$

1.10. Найти все значения α, при которых сходится ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{9n^{\alpha} + \operatorname{arctg} \sqrt{n}};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[7]{1 + n^{\alpha} \sin \dfrac{\pi}{n^2}} - 1 \right);$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+1)} - 1 \right)^{\alpha}.$

1.11. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\ln^2(5n+1)};$

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln^5 n}};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n};$

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n + 1}};$

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{(n^2-3)^2};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$

1.12. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

1) $\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10^2} - \dfrac{13}{10^3} + \dfrac{19}{10^4} + \dfrac{25}{10^5} - \dfrac{31}{10^6} + \ldots;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n}{4^n + 7};$

3) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3^n} + \ldots;$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln(n+1) \ln\ln(n+2)};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n^3+7)}{3n^4+12\sqrt{n+5}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\arcsin\left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n+1)}$.

1.13. Исследовать на сходимость ряды, используя признаки Абеля и Дирихле:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\arcsin\left(\frac{\pi}{\sqrt[5]{n}}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^5 n}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\pi n$.

1.14. Вычислить сумму знакочередующегося ряда:

1) $\frac{1}{2!2}-\frac{1}{4!4}+\frac{1}{6!6}-\frac{1}{8!8}+\ldots$ с точностью до 10^{-5};

2) $\frac{1}{10}-\frac{2}{3\cdot10^3}+\frac{2^2}{2!5\cdot10^5}-\frac{2^3}{3!7\cdot10^7}+\frac{2^4}{4!9\cdot10^9}-\ldots$ с точностью до 10^{-9}.

1.15. Число e = 2,718281828459… Каково наименьшее число k, для которого k-я частичная сумма ряда $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ позволяет вычислить десять верных знаков после запятой десятичного разложения числа e?

1.16. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$ нужно взять, чтобы ошибка при замене суммы S этого ряда частичной суммой S_n не превышала 10^{-5}? Найти приближенно сумму ряда в этом случае.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1.1. 1) $S=\frac{23}{90}$; 2) $S = 1$; 3) $S=\frac{5}{16}$; 4) $S=\frac{1}{8}$; 5) расходится; 6) расходится; 7) $S=\frac{1}{20}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$; 8) $S=\frac{1}{6}$; 9) $S_n=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$, $S=1-\sqrt{2}$.

1.2. $S=\frac{9}{4}$.

1.3. 1.

1.4. 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) требуется дополнительное исследование; 5) нет.

1.5. 1) Сходится; 2) расходится.

1.6. 1) Сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) сходится; 9) сходится; 10) расходится.

1.7. 1) Сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) сходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) расходится.

1.9. 1) Сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) расходится; 6) расходится.

1.10. 1) $\alpha>\frac{4}{3}$; 2) $\alpha < 1$; 3) $\alpha>\frac{1}{2}$.

1.11. 1) Сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) расходится.

1.12. 1) Сходится абсолютно; 2) сходится абсолютно; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно; 5) сходится условно; 6) сходится абсолютно; 7) сходится условно.

1.13. 1) Сходится абсолютно; 2) сходится условно; 3) сходится условно; 4) сходится абсолютно.

1.14. 1) 0,23981; 2) 0,09934.

1.15. $k = 14$.

1.16. $n = 4$; $S_4 \approx 0{,}175198 \approx 0{,}17520$.

Тесты к главе 1

1.1. Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}$ равна:

а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

1.2. Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ равна…

1.3. Сумма числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$ равна:

а) $\dfrac{5}{6}$; б) $\dfrac{1}{6}$; в) $\dfrac{1}{2}$; г) 2.

1.4. Даны числовые ряды: A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-1}{5n+1}\right)^n$, B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{5^n}$.

Тогда верным является утверждение:
а) ряд A) расходится, ряд B) сходится;
б) ряд A) расходится, ряд B) расходится;
в) ряд A) сходится, ряд B) сходится;
г) ряд A) сходится, ряд B) расходится.

1.5. Даны числовые ряды: A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{5n+1}$, B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{2^n}$.

Тогда верным является утверждение:
а) ряд A) расходится, ряд B) сходится;
б) ряд A) расходится, ряд B) расходится;
в) ряд A) сходится, ряд B) сходится;
г) ряд A) сходится, ряд B) расходится.

1.6. Даны числовые ряды: A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+2}$, B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5n}{10n+1}$.

Тогда верным является утверждение:
а) ряд A) расходится, ряд B) сходится;
б) ряд A) расходится, ряд B) расходится;
в) ряд A) сходится, ряд B) сходится;
г) ряд A) сходится, ряд B) расходится.

1.7. Найти соответствие между числовыми рядами и утверждениями:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n+4}$	а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$, ряд расходится
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{3n+4}$	б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ряд расходится
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+3n}$	в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$, ряд сходится по признаку Даламбера

1.8. Для вычисления суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 5^n}$ с точностью до 0,001 надо взять количество членов ряда, равное:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

1.9. Из приведенных ниже рядов сходящимся является:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$.

1.10. Числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ сходится при α, равном:

а) 2; б) 1; в) 0,5; г) 0.

1.11. Даны числовые ряды: А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+3}}$, В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{10n^2+1}$.

Тогда верным является утверждение:

1) ряд А) сходится условно, ряд В) сходится абсолютно;

2) ряд А) сходится условно, ряд В) сходится условно;

3) ряд А) расходится, ряд В) сходится абсолютно;

4) ряд А) расходится, ряд В) сходится условно.

1.12. Из перечисленных ниже рядов абсолютно сходящимися являются:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{10n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$.

Ответы к тестам

1.1. $\frac{1}{2}$. **1.2.** –0,4. **1.3.** $\frac{5}{6}$. **1.4.** Ряд А) расходится, ряд В) сходится. **1.5.** Ряд А) расходится, ряд В) сходится. **1.6.** Ряд А) сходится, ряд В) расходится.

1.7

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n+4}$	а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ряд расходится
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{3n+4}$	б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$, ряд расходится
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+3n}$	в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$, ряд сходится по признаку Даламбера

1.8. 3. **1.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$. **1.10.** 2. **1.11.** Ряд А) сходится условно, ряд В) сходится абсолютно. **1.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{10n^2+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$.

2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.1. Степенной ряд. Теорема Абеля

Пусть $\mathrm{E} \subset \mathbf{R}$, функции $u_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, определены на множестве E (u_n: $\mathrm{E} \to \mathbf{R}$).

Выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in \mathrm{E} \tag{2.1}$$

называется *функциональным рядом*, множество E называется *областью определения* функционального ряда (2.1).

Пусть $x_0 \in \mathrm{E}$. Ряд (2.1) называют *сходящимся* в точке x_0, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, и *абсолютно сходящимся* в точке x_0, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|u_n(x_0)\right|$.

Пусть (a_n) ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — последовательность действительных чисел, $x_0 \in \mathbf{R}$. *Степенным рядом* называется функциональный ряд

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(\xi - x_0) + a_2(\xi - x_0)^2 + \ldots + a_n(\xi - x_0)^n + \ldots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi - x_0)^n,\ (\xi \in \mathbf{R}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Числа a_n называют *коэффициентами степенного ряда*.

Полагая $\xi - x_0 = x$, получим ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,\ (x \in \mathbf{R}), \tag{2.3}$$

исследование сходимости которого эквивалентно исследованию сходимости ряда (2.2). Отметим, что степенной ряд (2.3) всегда сходится при $x = 0$.

Теорема 2.1 (Абеля). Если степенной ряд (2.3) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях x: $|x| < |x_0|$; если этот ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всяком x: $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Перепишем степенной ряд (2.3) в виде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$ и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \tag{2.4}$$

По предположению числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Согласно теореме 1.6

(необходимое условие сходимости ряда) $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$ т. е. последовательность $(a_n x_0^n)$ сходится, а так как сходящаяся последовательность ограничена, то

$$\exists M > 0 : \left|a_n x_0^n\right| < M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

Пусть

$$|x| < |x_0| \Rightarrow \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1. \tag{2.6}$$

Обозначим через $q := \left|\frac{x}{x_0}\right|.$ Тогда общий член ряда (2.4), согласно (2.5), $|a_n x^n| < M \cdot q^n$, т. е. члены ряда (2.4) меньше членов сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n = M\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ и по признаку сравнения ряд (2.4) сходится. Следовательно, ряд (2.3) сходится абсолютно. Итак, первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы.

Предположим противное, т. е. будем считать, что степенной ряд (2.2) сходится в точке $x_1' : |x_1'| > |x_1|.$ Но тогда по первой части теоремы он сходится для $\forall x : |x| < |x_1'|,$ следовательно, он сходится и при $x = x_1$, а это противоречит предположению о расходимости ряда при $x = x_1$.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Для любого степенного ряда (2.3) существует такое число $R > 0$, что ряд (2.3) сходится абсолютно для всех значений $|x| < R$.

Интервал $(-R; R)$ называют *интервалом сходимости*, а число R — *радиусом сходимости* степенного ряда.

Если число $R = 0$, то степенной ряд (2.3) сходится в единственной точке $x = 0$.

Если же $R = \infty$, то степенной ряд (2.3) сходится для всех значений $x \in \mathbf{R}$.

При $x = \pm R$ ряд (2.3) может как сходиться, так и расходиться, при $|x| > R$ ряд (2.3) расходится.

Замечание. Для степенного ряда (2.2) интервал сходимости имеет вид:

$$|x - x_0| < R.$$

Радиус сходимости может быть определен с помощью признака Даламбера, т. е. из условия $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}\left(x-x_0\right)^{n+1}}{a_n\left(x-x_0\right)^n}\right| = \left|x-x_0\right|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$ при $|x - x_0| < R$, где

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{2.7}$$

Пример 2.1. Исследовать на сходимость степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x-1\right)^n}{n2^n}$.

По признаку Даламбера ряд сходится абсолютно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(x-1)^{n+1}\right|n2^n}{(n+1)2^{n+1}\left|x-1\right|^n} =$ $= \dfrac{\left|x-1\right|}{2} < 1,$ т. е. $\left|x-1\right| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$ При этом радиус сходимости ряда $R = 2$.

При $|x - 1| > 2$ ряд расходится. Исследуем поведение ряда на концах интервала $(-1; 3)$. При $x = -1$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n},$ который сходится по признаку Лейбница, при $x = 3$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n},$ который расходится. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является полуинтервал $[-1; 3)$.

Пример 2.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$.

Аналогично предыдущему находим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x^{n+1}\right|\left(n+1\right)!}{n!\left|x\right|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x\right|\left(n+1\right)}{1} = +\infty,$ т. е. для любого $x \neq 0$ ряд расходится. Область сходимости данного степенного ряда состоит из одной точки $x = 0$, радиус сходимости ряда $R = 0$.

Пример 2.3. Степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ сходится при всех значениях $x \in \mathbf{R}$.

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x^{n+1}\right|n!}{(n+1)!\left|x^n\right|} = 0\ \ \forall x \in \mathbf{R}$. В данном примере радиус сходимости ряда $R = \infty$.

Пример 2.4. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{3n-2}\right)^n x^n$.

В этом примере радиус сходимости может быть определен по признаку Коши, т. е. из условия $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right|}=\left|x-x_0\right|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}<1$, т. е. при $|x-x_0|<R$, где

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|a_n\right|}}. \tag{2.8}$$

Вычислим предел $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|a_n\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{4n+5}{3n-2}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n\left(4+\frac{5}{n}\right)}=\frac{3}{4}$.

Тогда $R=\frac{3}{4}$.

Пример 2.5. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^{-n^2} x^n$.

Радиус сходимости этого ряда найдем по формуле (2.8), где $a_n=\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^{-n^2}$. Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^{-n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+5}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+3}{3n+5}-1\right)^{-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3n+5}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3n+5}\right)^{\left(\frac{3n+5}{-2}\right)\left(\frac{-2}{3n+5}\right)(-n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)(-n)}{3n+5}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}.$$

Пример 2.6. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^{2n}}{4^n\left(2n+3\right)}$.

Вычислим предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\left(2\left(n+1\right)+3\right)}{4^n\left(2n+3\right)}=4\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3}=4$. Интервал сходимости данного ряда определяется как $(x_0-R;\ x_0+R)$, где $R=\sqrt{4}=2$, $x_0=-5$. Тогда интервал сходимости ряда определяется как $(-5-2; -5+2)$ или $x\in(-7;-3)$.

2.2. Свойства степенных рядов

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд с положительным радиусом сходимости $R > 0$ и его сумму

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n. \tag{2.9}$$

Функция f: $(x_0 - R; x_0 + R) \to \mathbf{R}$ определена при значениях $|x - x_0| < R$.

Приведем без доказательства следующие теоремы.

Теорема 2.3. Если степенной ряд (2.9) имеет радиус сходимости $R > 0$, то:

1) в интервале сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$ функция f непрерывна и имеет производные любого порядка, полученные почленным дифференцированием (2.9):

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \left(x - x_0\right)^{n-1}; \tag{2.10}$$

2) в интервале сходимости этот ряд можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int_{x_0}^{x} f(t) d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\left(x - x_0\right)^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R). \tag{2.11}$$

Более того, ряды (2.10) и (2.11) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (2.9).

Разложение функции в степенной ряд

Пусть f: $(x_0 - R; x_0 + R) \to \mathbf{R}$ и пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$, R — радиус сходимости степенного ряда (2.9). Применяя повторно теорему 2.3, получим:

$$\begin{cases} f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n \left(x - x_0\right)^{n-1}, \\ f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n-1\right) n a_n \left(x - x_0\right)^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n-k+1\right) \ldots \left(n-1\right) n a_n \left(x - x_0\right)^{n-k}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Подставим $x = x_0$ в (2.9) и в (2.12), находим:

$$f(x_0) = a_0,$$
$$f'(x_0) = a_1,$$
$$f''(x_0) = 1 \cdot 2a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(k)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdots k a_k,$$

Отсюда коэффициенты

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(k = 0, 1, 2, \ldots\right). \tag{2.13}$$

Из формул (2.13) вытекает теорема о единственности разложения функции в степенной ряд (коэффициенты ряда Тейлора вычисляются единственным образом).

Теорема 2.4. Разложим функцию $f(x)$ в степенной ряд (2.9) в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ единственно.

Пусть функция f: $(a; b) \to \mathbf{R}$, $0 < R \le +\infty$, и пусть функция f бесконечное число раз дифференцируема в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ $(f \in C^\infty(x_0 - R; x_0 + R))$. Из формул (2.13) вытекает:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x - x_0\right)^n. \tag{2.14}$$

Ряд в правой части (2.14) называется *рядом Тейлора* функции f в окрестности точки x_0. При $x_0 = 0$ — *рядом Маклорена*.

Достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора

Теорема 2.5. Пусть $x_0 \in \mathbf{R}$, $0 < \delta < +\infty$. Предположим, что функция f удовлетворяет условиям:

1) $f \in C^\infty(x_0 - R; x_0 + R)$;

2) $\exists M \in \mathbf{R}$: $\forall\, x \in (x_0 - R; x_0 + R)$: $|f^{(n)}(x)| \le M$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Тогда для $\forall\, x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ функция f представляется сходящимся к ней рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x - x_0\right)^n.$$

Основные разложения

Рассмотрим несколько основных разложений.

1. Пусть $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$.

Так как $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, то $f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0, n = 2k-1, \\ (-1)^k, n = 2k. \end{cases}$

Для $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall\ n \in \mathbf{N}$ $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1,$ т. е. условия теоремы 2.5 выполнены и

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots\ (x \in \mathbf{R}).} \tag{2.15}$$

2. Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$. Аналогично получаем:

$$\boxed{\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots\ (x \in \mathbf{R}).} \tag{2.16}$$

3. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$.

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ (x \in \mathbf{R}).} \tag{2.17}$$

4. $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$.

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +}$$

$$\boxed{+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, x \in (-1; 1).} \tag{2.18}$$

В частности, при $\alpha = -1$ получаем:

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, x \in (-1; 1).}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (-x)^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, x \in (-1; 1).}$$

5. $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, $x_0 = 0$.

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1;1].} \quad (2.19)$$

Пример 2.7. Разложить в ряд Тейлора следующие функции:

1. $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$. Воспользуемся формулой $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ и известным разложением (2.15):

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbf{R}.$$

2. $f(x) = \ln x$ по степеням $x - 1$ ($x_0 = 1$). Воспользуемся разложением (2.19). Имеем:

$$\ln x=\ln(1+x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad -1<x-1\le 1\Leftrightarrow 0<x\le 2.$$

3. $f(x) = 3^x$, $x_0 = 0$. Воспользуемся разложением (2.17):

$$f(x)=3^x=\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln 3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln^n 3}{n!},\quad x\in\mathbf{R}.$$

4. $f(x)=\frac{1}{3x+4}$, $x_0 = -1$ (по степеням $x + 1$).

Воспользуемся формулой $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ при $|x| < 1$. Имеем:
$f(x)=\frac{1}{3(x+1)+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n(x+1)^n$, $q=3|x+1|<1\Leftrightarrow|x+1|<\frac{1}{3}$. Уточняя поведение ряда на концах интервала сходимости при $x+1=\pm\frac{1}{3}$, получаем расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ($\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует). Поэтому промежутком сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n(x+1)^n$ является интервал $\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

2.3. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям

Рассмотрим несколько примеров приложения степенных рядов к приближенным вычислениям.

1. Пользуясь соответствующими рядами, вычислить приближенно значение интеграла $\int_0^1 \sin x^2 dx$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд, воспользовавшись разложением $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \; (x \in \mathbf{R}).$$

Заменяя x на x^2, получим:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(2n-1)}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Интегрируя, получаем знакочередующийся ряд:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)\cdot(2n-1)!} + \ldots$$

Находим первый член, по модулю меньший 0,001:

$$u_3 = \frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{120 \cdot 11} < 0{,}001.$$

Тогда $|r_2| < |u_3| < 0{,}001$. Следовательно, с точностью до 0,001

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{13}{42} \approx 0{,}3095 \approx 0{,}310.$$

Поскольку ряд знакочередующийся, то $|s - s_n| \le a_{n+1}$. Потребуем $\left|a_{n+1}\right| < 10^{-4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(4n-1)(2n-1)!} < \dfrac{1}{10^4}$; подберем $n = 3$, удовлетворяющее неравенству $10^4 < 11 \cdot 7!$ Итак, $\int\limits_0^1 \sin\left(x^2\right)dx \approx s_3(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{7\cdot 3!} + \dfrac{1}{11\cdot 5!} =$ 0,33333 – 0,02384 + + 0,00075 = 0,31024; отсюда $\int\limits_0^1 \sin(x^2)\,dx = 0{,}3102$ с $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Пользуясь соответствующими рядами, вычислить приближенно значение интеграла $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 0,001:

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{3}{27}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3}.$$

Воспользуемся разложением:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Подставим $\alpha = \dfrac{1}{3}$:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2x^2}{3^2\cdot 2!} + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 + \ldots$$

Подставим $x = \dfrac{1}{9}$:

$$3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3} = 3\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} - \frac{2}{9\cdot 2\cdot 9^2} + \frac{10}{27\cdot 6\cdot 9^3} - \ldots\right) = 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243} + \frac{5}{27^3} + \ldots$$

Находим первый член, по модулю меньший 0,001:

$$u_3 = \frac{5}{27^3} < 0{,}001, \quad |r_2| < |u_3| < 0{,}001.$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{30} \approx 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243} = 3\frac{26}{243} \approx 3{,}106995 \approx 3{,}107.$$

3. Вычислить приближенно $\ln 3$, взяв четыре члена в разложении в ряд Маклорена соответствующей функции. Оценить погрешность.

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right),|x|<1,\quad \frac{1+x}{1-x}=3\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 32}+\frac{1}{7\cdot 128}\right)=1+\frac{1}{12}+\frac{1}{80}+\frac{1}{7\cdot 64}\approx 1{,}098.$$

$$r_4=2\left(\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\frac{1}{13\cdot 2^{13}}+\ldots\right)=\frac{1}{2^8}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2^2\cdot 11}+\frac{1}{2^4\cdot 13}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots\right)=\frac{1}{2^8\cdot 9}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{27\cdot 64}\approx 0{,}0005<0{,}001.$$

Задания для самостоятельного решения

2.1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

2.2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x+3\right)^n$ равен 5. Найти интервал сходимости этого ряда.

2.3. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-3\right)^n}{\left(2n+5\right)\cdot 5^n}$ равен 5. Найти длину интервала сходимости этого ряда.

2.4. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n\cdot 2^n}}x^n$.

2.5. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{5n-2}\right)^n x^n$.

2.6. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+2\right)^n}{\left(n^2+5\right)\cdot 5^n}$.

2.7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)\cdot 2^n}$.

2.8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{6^n}$.

2.9. Найти коэффициент a_3 разложения функции $f(x) = -2x^4 + 3x^3 - x - 2$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 2)$.

2.10. Найти коэффициент a_5 разложения функции $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 2)$.

2.11. Разложить функцию $\frac{6}{x-2}$ в ряд Тейлора по степеням $x + 4$, найти область сходимости полученного ряда.

2.12. Разложить функцию $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.

2.13. Разложить функцию $f(x)=\ln(2-2x)$ по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.

2.14. Написать три отличные от нуля члена разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ следующих функций:

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \operatorname{tg} x$.

2.15. Разложив предварительно производную, путем почленного интегрирования получить разложение в степенной ряд функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

2.1. 5^e. **2.2.** $(-8; 2)$. **2.3.** 10. **2.4.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **2.5.** $\frac{5}{4}$. **2.6.** $(-7; 3)$. **2.7.** $[-2; 2)$. **2.8.** $(-5; 7)$. **2.9.** -78. **2.10.** 0. **2.11.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{6^n}$, $x \in (-10;\ 2)$. **2.12.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$, $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **2.13.** $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $x \in [-1;\ 1)$. **2.14.** а) $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots\ (|x|\le 1)$; б) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **2.15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ (|x|\le 1)$; $\frac{\pi}{4}$.

Тесты к главе 2

2.1. Сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ равна:

а) 2e; б) 1; в) $\frac{e}{2}$; г) e^2.

2.2. Если $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$, то коэффициент a_5 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x + 2)$ равен:

а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{5}$; г) 2.

2.3. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{9n-2}\right)^n x^{2n}$ равен:

а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{9}{4}$; г) $\frac{4}{9}$.

2.4. Если $f(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + 2$, то коэффициент a_3 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$ равен:

а) 9; б) 1; в) –1; г) 18.

2.5. Разложение в ряд Тейлора функции $f(x)=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x = 2$ имеет вид:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+2)^n}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}$.

2.6. Интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n}}{(n+5)\cdot 9^n}$ имеет вид:

а) (–7; –1); б) (–13; 5); в) (–9; 9); г) (–3; 3).

2.7. Разложение в ряд по степеням x функции $f(x) = \ln(1 + 4x)$ имеет вид:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n}{n}x^n,\quad x\in\left(\frac{-1}{4};\frac{1}{4}\right]$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n}{n}x^n,\quad x\in\left[\frac{-1}{4};\frac{1}{4}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 4^n},\quad x\in[-4;4)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 4^n},\quad x\in(-4;4]$.

2.8. Разложение $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots$ в ряд Маклорена соответствует функции:

а) $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$; б) $\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$; в) $\frac{2}{1-\frac{x}{2}}$; г) $\ln\frac{x}{2}$.

2.9. При разложении функции $y = \sin 5x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ первыми тремя отличными от 0 членами ряда будут:

а) $5x-\frac{125x^3}{6}+\frac{625x^5}{24}$; б) $\frac{5x}{1!}-\frac{5x^3}{3!}+\frac{5x^5}{5!}$;

в) $5\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)$; г) $5\left(x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}\right)$.

2.10. Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ имеет вид:
а) $[-2; 2)$; б) $(-2; 2)$; в) $(-2; 2]$; г) $[-2; 2]$.

Ответы к тестам

2.1. e^5 **2.2.** 0. **2.3.** $\frac{3}{2}$. **2.4.** 9. **2.5.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$. **2.6.** $(-7; -1)$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n}{n}x^n,\ x\in\left(\frac{-1}{4};\frac{1}{4}\right]$. **2.8.** $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$. **2.9.** $5x-\frac{125x^3}{6}+\frac{625x^5}{24}$. **2.10.** $[-2; 2)$.

3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Множества в *n*-мерном евклидовом пространстве

Пусть $\mathbf{R}^n := \{x\colon x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2, \ldots, n\}$ — множество упорядоченных совокупностей n действительных чисел, которые можно складывать и умножать на число по определенным правилам:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Элементы $\mathbf{R}^n$ будем называть n-мерными точками (кратко — точками). В частности, $\mathbf{R}^2$ — это множество точек плоскости, $\mathbf{R}^3$ — множество точек обычного трехмерного пространства.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — две точки из пространства $\mathbf{R}^n$. Определим *скалярное произведение* x и y как число, равное

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Скалярное произведение позволяет ввести понятие *модуля* элемента в $\mathbf{R}^n$:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

а также *расстояние* $\rho(x, y)$ от точки x до точки y:

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Пространство $\mathbf{R}^n$ с введенным таким образом расстоянием называется n-мерным *евклидовым* пространством (*метрическим* пространством).

Примеры множеств в R^n

Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — фиксированная точка в $\mathbf{R}^n$. Множество вида

$$\overline{U_r(a)} = \left\{x \in \mathbf{R}^n :\ \rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \le r\right\}$$

называется *замкнутым* n-мерным *шаром* радиуса r с центром в точке a.

Множество вида

$$U_r(a)=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ \rho(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}<r\right\}$$

называется *открытым* n-мерным *шаром* радиуса r с центром в точке a.

Множество вида

$$U_\varepsilon(a)=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ \rho(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}<\varepsilon,\ \varepsilon>0\right\}$$

называется ε-*окрестностью* точки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Например, на плоскости Oxy окрестностью точки $P_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ является множество вида (рис. 3.1):

$$U_\varepsilon(P_0)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\right\}.$$

Введем ряд определений. Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$. Точка $a \in X$ называется *внутренней точкой* множества X, если существует $U_\varepsilon(a)\subset X$.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*. Например, окрестность $U_\varepsilon(a)$ является открытым множеством.

Множество $X\subset\mathbf{R}^n$ называется *ограниченным* (рис. 3.2), если существует число r и точка $a \in \mathbf{R}^n$ такие, что $X\subset U_r(a)$. В противном случае множество называется *неограниченным* (например, первая четверть на плоскости).

Точка $a \in \mathbf{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $X\subset\mathbf{R}^n$, если $\forall\varepsilon>0\ \left\{U_\varepsilon(a)\bigcap X\right\}\setminus\{a\}\neq\varnothing$ (или $\forall\, U_\varepsilon(a)\ \exists\, x\in X,\ x\neq a:\ x\in U_\varepsilon(a)$). Точка a называется *изолированной точкой* множества X, если $a \in X$ и не является предельной для X: $\exists\, U_\varepsilon(a),\ U_\varepsilon(a)\bigcap X=\{a\}$.

Совокупность всех предельных точек множества X называется *производным множеством* и обозначается X'. Множество $X\subset\mathbf{R}^n$ называется *совершенным*, если $X = X'$.

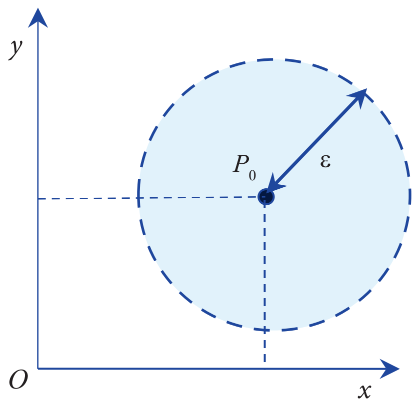


Рис. 3.1. ε-окрестность точки P_0

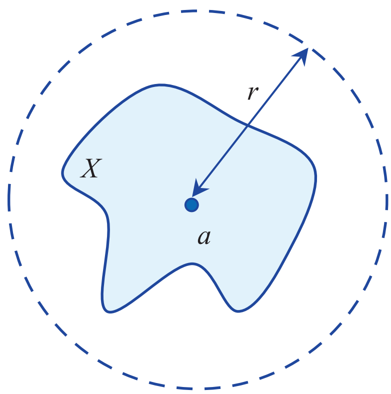


Рис. 3.2. Ограниченное множество

Множество X *замкнуто*, если $X' \subseteq X$. Объединение $X \bigcup X' =: [X]$ называют *замыканием множества X*.

Ограниченное замкнутое множество называется *компактным*.

Точку пространства $\mathbf{R}^n$ (необязательно принадлежащую множеству X) называют *граничной точкой* множества $X \subset \mathbf{R}^n$, если в любой ε-окрестности этой точки имеется хотя бы одна точка из X и хотя бы одна точка, не принадлежащая X. (Верно ли, что любая изолированная точка — граничная?)

Совокупность граничных точек множества образует его *границу*. Например, пусть $X = \{(x, y): |x| + |y| < 1\}$. Тогда $\Gamma_x := \{(x, y): |x| + |y| = 1\}$ — граница множества X (рис. 3.3).

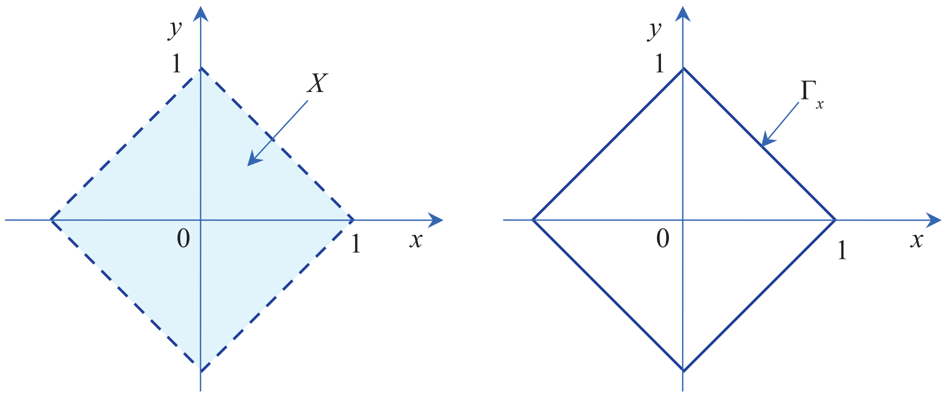


Рис. 3.3. На рисунке слева изображено множество X, справа — его граница

Ясно, что множество, содержащее все свои граничные точки, является замкнутым. Например, $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ — замкнутый шар.

Замечание. Границей последнего множества является сфера $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Понятно, что в случае замкнутого ограниченного множества граничные точки принадлежат этому множеству.

Последовательности в R^n

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ и (x_n) — последовательность точек из X (т.е. $x_n \in X$).

Последовательность (x_n) называется сходящейся, если

$$\exists x_0 \in \mathbf{R}^n: \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \ \forall n \in \mathbf{N} \left(n > N \Rightarrow \left|x_n - x_0\right| < \varepsilon, \ \left(\rho(x_n, x_0) < \varepsilon\right)\right).$$

При этом точка x^0 называется пределом последовательности (x_n), что записывают:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{или} \quad x_n \to x_0, n \to \infty.$$

Лемма о координатной сходимости. Пусть $x_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \in \mathbf{R}^n$, $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, тогда $x_n \to x_0, n \to \infty \Leftrightarrow x_1^{(n)} \to x_1^0, \dots, x_n^{(n)} \to x_n^0$, $n \to \infty$, то есть координаты $x_1^{(n)},..,x_n^{(n)}$ точки x_n стремятся к соответствующим координатам $x_1^0,..,x_n^0$ точки x_0 одновременно и независимо друг от друга.

Теорема Больцано — Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности (x_n) точек из $\mathbf{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

3.2. Определение функции

Если указано правило f, согласно которому каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие определенное (одно) число $y \in Y$, то говорят, что на X (область определения) задана *функция нескольких переменных* (ФНП) и пишут:

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причем множество $\{y \in \mathbf{R}\colon y = f(x), x \in X\}$ называется *множеством* (пространством) *значений функции* (рис. 3.4).

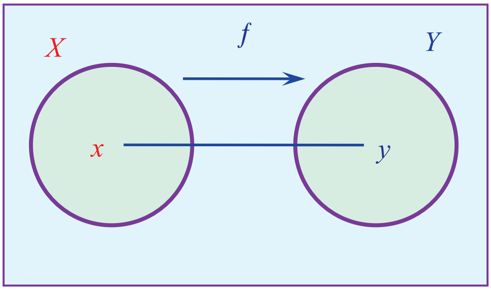


Рис. 3.4. Иллюстрация к определению понятия функции

Для функций двух переменных ($n = 2$) вместо x_1, x_2, y пишут обычно x, y, z, тогда (3.1) принимает вид:

$$z = f(x, y),$$

где $(x, y) \in X \subset \mathbf{R}^2$.

Аналогично при $n = 3$ пишут:

$$u = f(x, y, z),$$

где $(x, y, z) \in X \subset \mathbf{R}^3$.

Множество вида

$$\Gamma_f = \Gamma(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}\colon y = f(x), x \in X, X \subset \mathbf{R}^n \right\}$$

называется графиком функции $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

График функции двух переменных — подмножество пространства $\mathbf{R}^3$ и может быть представлен поверхностью

$$z = f(x, y), (x, y) \in X.$$

Например, графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является верхняя полусфера радиуса 1 (рис. 3.5). Область определения: $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ — круг радиуса 1 с центром в начале координат.

В экономике примером функций нескольких переменных служат *производственные функции* (ПФ). Например, производственная функция Кобба —

Дугласа связывает объем производства Q с величиной производственных фондов K и затрат живого труда L: $Q = f(K, L) = qK^{\alpha} L^{1-\alpha}$, где $q, \alpha \in \mathbf{R}$, q — характеристика производительности выбранной технологии, $q > 0$. То есть, $Q = f(K, L) = qK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ является функцией двух переменных K и L.

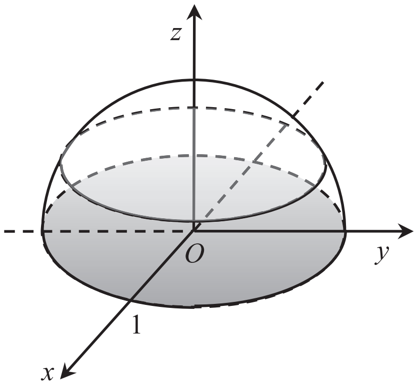


Рис. 3.5. График полусферы радиуса 1 с центром в начале координат

Пример 3.1. Производственная функция небольшого предприятия, изготавливающего детали для станка, имеет вид: $Q = f(x, y) = 2\, x^{3/4}y^{1/4}$, где x — отработанные человеко-часы, y — отработанные машино-часы, Q — количество изготовляемых деталей. Найти количество деталей при плане $(x^*, y^*) = (1, 16)$.

Решение. $Q\,(A) = Q\,(x^*, y^*) = Q\,(1, 16) = 2 \cdot 1^{3/4} \cdot 16^{1/4} = 4$. Этому значению на графике функции $z = f(x, y) = 2\, x^{3/4}y^{1/4}$ соответствует точка B (рис. 3.6).

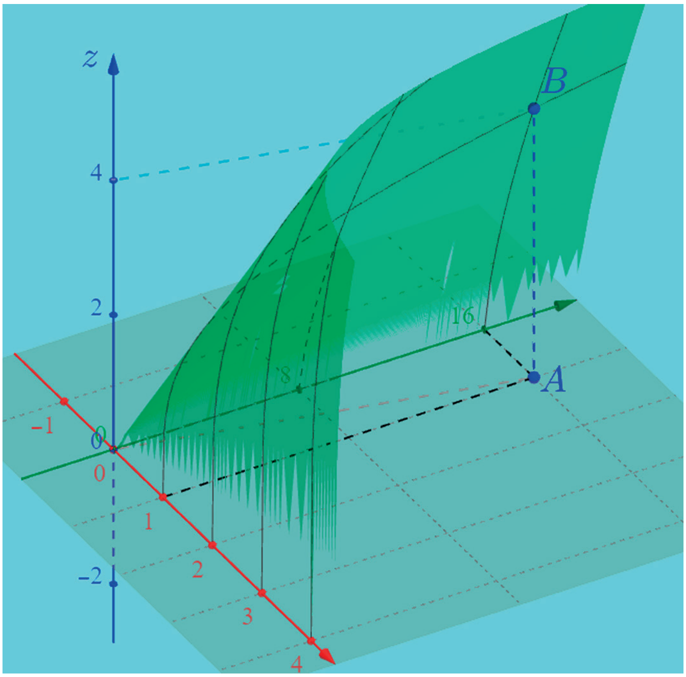


Рис. 3.6. График производственной функции из примера 3.1

Линии и поверхности уровня

Геометрическое представление функций двух или трех переменных удобно связывать с *линиями* или *поверхностями уровня*. В этом случае говорят, что функция $z = f(x, y)$ (или $u = f(x, y, z)$) определяет в множестве $X \subset \mathbf{R}^2$, ($X \subset \mathbf{R}^3$) *скалярное поле f*.

Если речь идет о функции двух переменных, то поле называют *плоским*.

Множество вида

$$L_\alpha(f) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon f(x, y) = \alpha\right\}, \alpha \in \mathbf{R}$$

называют *линиями уровня* функции $z = f(x, y)$. Число α в этом случае называется *уровнем* функции.

Пример 3.2. Пусть $z = 12 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$. Линии уровня определяются условиями $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} =$ 12 – α, α ≤ 12, и представляют собой эллипсы (рис. 3.7).

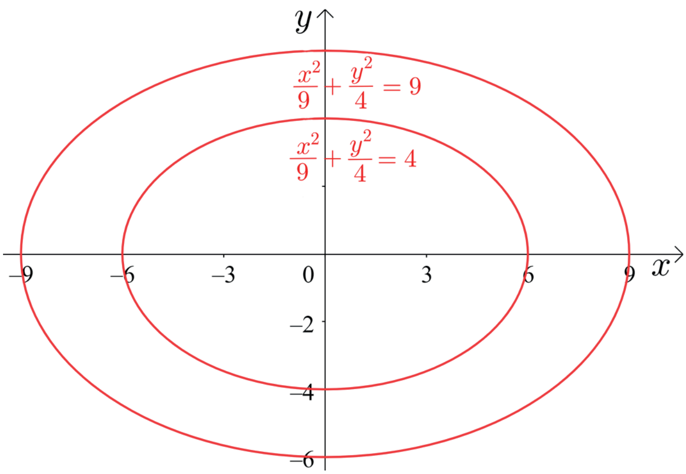


Рис. 3.7. Линии уровня функции $z = 12 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$

Линиями уровня функции $z = 12 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ являются проекции линий, получаемых при пересечении графика этой функции плоскостью $z = \alpha$, параллельной координатной плоскости Oxy (рис. 3.8).

Множество вида

$$\Pi_\alpha(f) = \left\{(x; y; z) \in \mathbf{R}^3 : f(x; y; z) = \alpha\right\}, \ \alpha \in \mathbf{R}$$

называют *поверхностями уровня* функции $u = f(x; y; z)$.

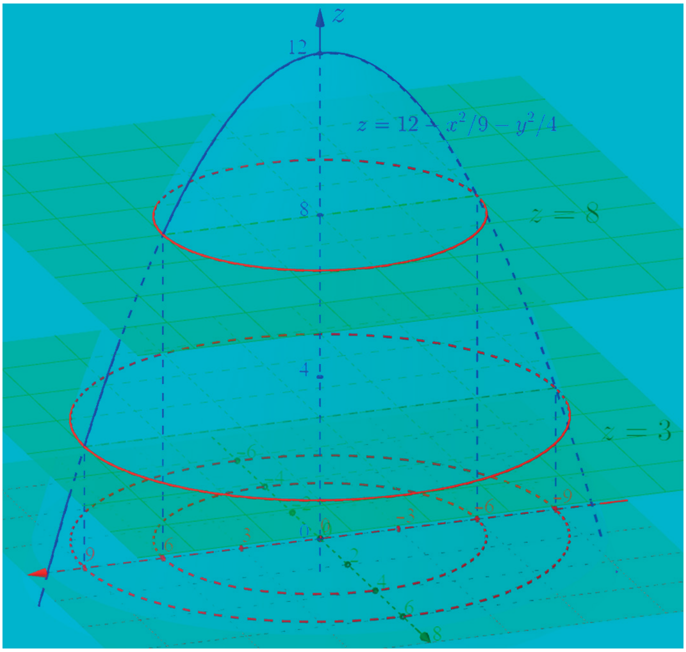


Рис. 3.8. Линии уровня проекции на плоскость Oxy линий пересечения поверхности $z = 12 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ с плоскостями $z = 3$ и $z = 8$

Например, поверхность уровня функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

определяется уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$, где $\alpha \geq 0$, и представляет собой сферу радиусом $\sqrt{\alpha}$ с центром в начале координат.

Взаимное расположение линий или поверхностей уровня при различных α характеризуют геометрические свойства функции $f(x; y)$ или $f(x; y; z)$.

3.3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть x^0 — предельная точка множества X и $f: X \to Y$.

$$A = \lim_{x \to x^0} f(x) := \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall x \in U_\delta(x^0), \ x \neq x^0 \ \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

($x \to x^0$: координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точки x стремятся к соответствующим координатам $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ точки x^0 одновременно и независимо друг от друга).

Теорема 3.1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x^0$, то только один.

Пример 3.3. Показать, что предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{yx}{x^2+y^2}$ не существует.

Решение. Пусть $(x, y) \to (0, 0)$, $y = x$, $x \to 0$, $y \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0,\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left| y = x \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Пусть теперь $(x, y) \to (0, 0)$, $y = 2x$, $x \to 0$, $y \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0,\\ y=2x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2}{5}.$$ Значит, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{yx}{x^2+y^2}$ не существует.

Пример 3.4. Доказать по определению, что $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \left(x+3y-1\right) = 6.$

Решение. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти:

$$\delta = \delta(\varepsilon):\ 0 < \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2} < \delta \ \Rightarrow \ \left| x+3y-1-6 \right| < \varepsilon.$$

$$\left| x+3y-7 \right| \le \left| x-1 \right| + 3\left| y-2 \right| \le \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2} + 3\sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2} =$$
$$= 4\sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2} < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}.$ Тогда из $0 < \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2} < \dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left| x+3y-7 \right| < \varepsilon.$

Пример 3.5. Показать, что $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \dfrac{2x^2 y}{x^4+y^2}$ не существует.

Решение. Пусть $(x, y) \to (0, 0)$, $y = x^2$, $x \to 0$, $y \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0,\\ y=x^2}} \frac{2x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1.$$

Пусть теперь $(x, y) \to (0, 0)$, $y = x$, $x \to 0$, $y \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0,\\ y=x}} \frac{2x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0.$$ Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{2x^2 y}{x^4+y^2}$ не существует.

Пример 3.6. Показать, что $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ не существует.

В самом деле, $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y=kx}} \dfrac{x-kx}{x+kx} = \dfrac{1-k}{1+k}$ зависит от k, значит, $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ не существует.

Вернемся к примеру 3.3: $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y=kx}} \dfrac{2x^2 y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx}{x^2+k^2} = 0.$ Однако, как показано выше, $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \dfrac{2x^2 y}{x^4+y^2}$ не существует.

То есть, в данном случае способ исследования неполный, так как ρ ((x, y), (0,0)) $\to$ 0 не рассматривает все кривые, проходящие через (0, 0).

Пример 3.7. Доказать, что $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}=0.$

1-й способ. Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=\rho^2. \text{ Тогда } \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\sin\varphi\cos 2\varphi}{\rho^2}=0.$$

2-й способ. $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^2 y}{x^2}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \delta=\varepsilon.$

Свойства непрерывных функций на ограниченных замкнутых множествах

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, называется *непрерывной* в точке $x^0 \in X$, если

$$\lim_{x\to x^0} f(x)=f(x^0),$$

или же если x^0 — изолированная точка множества X. Это означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \ \forall x\in X,\ \ \rho\left(x^0, x\right)<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x^0)\right|<\varepsilon.$$

Пусть $\Delta x = x - x^0 = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0)$ — приращение x в точке x^0. Тогда $x = \Delta x + x^0$ и $x \to x^0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0 \Leftrightarrow |\Delta x| \to 0$. Считаем, что $x = x^0 + \Delta x \in X$.

Обозначим $\Delta u := f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$ — *приращение* функции в точке x^0.

Непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x^0 означает, что $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta u \to 0$, т.е. малые приращения аргумента вызывают малые приращения функции.

Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Примеры непрерывных функций:

$$f_1(x)=(c,x)+b=c_1x_1+\ldots+c_nx_n+b,\ \ c\in\mathbf{R}^n, x\in\mathbf{R}^n, b\in\mathbf{R};$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}x, x\right)+\left(c, x\right)+b,$$

$\mathrm{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\mathrm{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ — прямоугольная матрица размера $m \times n$.

Теорема 3.2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на ограниченном и замкнутом множестве X, то она ограничена на этом множестве.

Теорема 3.3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X, то она достигает на нем абсолютного минимума и максимума, т. е. существуют такие точки $p^0 \in X$ и $q^0 \in X$, что

$$\min_{x \in X} f(x) = f(p^0) =: m, \ \max_{x \in X} f(x) = f(q^0) =: M.$$

3.4. Частные производные

Для простоты изложения рассмотрим случай функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$. Определим приращения переменных x и y формулами

$$\Delta x = x - x_0, \ \Delta y = y - y_0.$$

Тогда любая точка $P\,(x; y)$ из окрестности точки $P_0\,(x_0; y_0)$ может быть представлена как

$$(x; y) = (x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y).$$

Разность между значениями функции $z = f(x, y)$ в точках $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и (x_0, y_0) называется *полным приращением* функции Δf:

$$\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right).$$

При изменении x от x_0 до $x_0 + \Delta x$ и постоянном $y = y_0$ функция $z = f(x, y)$ изменится на величину

$$\Delta_x z = f\left(x_0 + \Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right).$$

Эту разность называют *частным приращением* функции $z = f(x, y)$ по *переменной* x в точке $P_0(x_0, y_0)$. *Частное приращение* по y определяется аналогично:

$$\Delta_y z = f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right).$$

Пример 3.8. Найти полное приращение и частные приращения функции $z = xy$ в точке $P\,(1; 2)$, если $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$.

Решение. Полное приращение функции $\Delta z = (x_0 + \Delta x)\,(y_0 + \Delta y) - x_0\, y_0 =$ $= [x_0 = 1, y_0 = 2] = (1 + 0{,}2)\,(2 + 0{,}3) - 1 \cdot 2 = 1{,}2 \cdot 2{,}3 - 2 = 0{,}76$.

Частное приращение по x: $\Delta_x z = (x_0 + \Delta x)\, y_0 - x_0\, y_0 = y_0 \Delta x = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$.

Частное приращение по y: $\Delta_y z = x_0(y_0 + \Delta y) - x_0\, y_0 = x_0 \Delta y = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$.

Составим отношения $\dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$ и $\dfrac{\Delta_y f}{\Delta y}$. Они являются функциями, соответственно, Δx и Δy. Устремим Δx и Δy к нулю.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z=f(x, y)$ по *переменной* x в точке $(x_0; y_0)$ и обозначается $\dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}$.

Другие обозначения: $f'_x\big|_{(x_0,\, y_0)}$, $f'_x, z'_x, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично, если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то он называется *частной производной* функции $z=f(x, y)$ по y в точке $(x_0; y_0)$ и обозначается $\dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}$.

Другие обозначения: $f'_y\big|_{(x_0,\, y_0)}$, $f'_y, z'_y, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

В общем случае функции нескольких переменных $f(x)$, $x\in X\subset \mathbf{R}^n$ определение *частной производной* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ аналогично: это производная по одной из переменных, вычисленная в предположении, что все остальные переменные зафиксированы. Таким образом, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ выражает скорость изменения функции при изменении одной лишь переменной x_k.

Пример 3.9. Найти z'_x, z'_y, если $z=x^4y^3+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)+2x+3y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\begin{vmatrix}\Delta y=0,\\ y=\text{const}\end{vmatrix}=4x^3y^3-\sin(x^2+\sqrt{y})\cdot 2x+2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\begin{vmatrix}\Delta x=0,\\ x=\text{const}\end{vmatrix}=3x^4y^2-\sin\left(x^2+\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+3.$$

Пример 3.10. Для функции $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2+5}$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;\,2)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;\,2)}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1;\,2)}=\begin{bmatrix}\Delta y=0,\\ y=2\end{bmatrix}=\left[z\left(x;2\right)=\frac{2x}{x^2+2^2+5}\right]=\frac{2(x^2+9)-2x\cdot 2x}{(x^2+9)^2}\bigg|_{x=1}=\frac{16}{100}=0{,}16;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;\,2)} = \begin{bmatrix} \Delta x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix} = \left[z\left(1;\, y\right) = \frac{y}{1^2 + y^2 + 5} \right] = \left.\frac{1\cdot(y^2+6) - 2y\cdot y}{(y^2+6)^2}\right|_{y=2} = \frac{2}{100} = 0{,}02.$$

Частные производные в экономике

Пусть $u = a x^{\alpha} y^{\beta}$ — производственная функция Кобба — Дугласа, выражающая зависимость объема производства от объема производственных фондов x и затрат труда y; a, α, β — некоторые постоянные.

Здесь $\dfrac{u\left(x+\Delta x, y\right) - u\left(x, y\right)}{\Delta x}$ — среднее увеличение объема производства при увеличении фондов на Δx (средняя фондоотдача). Частная производная

$$u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$

представляет собой *предельную* фондоотдачу. Она показывает, как увеличится объем производства, если производственные фонды увеличить на единицу, например, приобрести еще один станок.

Аналогично

$$u'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}$$

— *предельная* производительность труда. Она показывает, как возрастает выпуск продукции, если дополнительно взять еще одного рабочего (сохраняя прежний объем фондов).

Для функции Кобба — Дугласа $u = ax^{\alpha} y^{\beta}$ имеем:

$$u'_x = a\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta},\; u'_y = a\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}.$$

В экономике используют обозначения:

$$A_x = \frac{u(x, y)}{x},\; A_y = \frac{u(x, y)}{y}$$

— *средние* фондоотдача и затраты труда соответственно;

$$M_x = u'_x,\; M_y = u'_y$$

— *предельные* фондоотдача и затраты труда соответственно.

Отношение предельных фондоотдачи и продукта труда к их средним величинам называется *эластичностью* выпуска продукции по *фондам и труду* соответственно:

$$E_x = \frac{M_x}{A_x} = \frac{x}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \ E_y = \frac{M_y}{A_y} = \frac{y}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сумма $E_x + E_y$ называется *эластичностью производства*.

Пример 3.11. В процессе производства используются два вида ресурсов: капитал K и труд L. Функция выпуска имеет вид: $y = 3K^{0,5}L^{0,5}$. Найти: а) средние и предельные величины труда и капитала при $K = 40$, $L = 360$; б) эластичность производства.

Решение. Средние величины продукта капитала и труда, соответственно, вычисляются по формулам:

$$A_K = \frac{y}{K} = \frac{3K^{0,5}L^{0,5}}{K} = \frac{3L^{0,5}}{K^{0,5}}, \ A_L = \frac{y}{L} = \frac{3K^{0,5}L^{0,5}}{L} = \frac{3K^{0,5}}{L^{0,5}}.$$

При $K = 40$, $L = 360$ получаем: $A_K = \frac{y}{K} = \frac{3 \cdot 360^{0,5}}{40^{0,5}} = 9, \ A_L = \frac{y}{L} = \frac{3 \cdot 40^{0,5}}{360^{0,5}} = 1.$

Предельные показатели:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial K}\right|_{K=40,\ L=360} = 3 \cdot 0,5K^{-0,5}L^{0,5}\Big|_{K=40,\ L=360} = 4,5,$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial L}\right|_{K=40,\ L=360} = 3 \cdot 0,5K^{0,5}L^{-0,5}\Big|_{K=40,\ L=360} = 0,5.$$

Обратим внимание, что предельные величины (для функции Кобба — Дугласа) меньше средних.

Коэффициенты эластичности по капиталу и труду, соответственно, вычисляются по формулам:

$$E_K = \frac{K}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial K} = \frac{K}{3K^{0,5}L^{0,5}} \cdot 3 \cdot 0,5K^{-0,5}L^{0,5} = 0,5,$$

$$E_L = \frac{L}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L} = \frac{L}{3K^{0,5}L^{0,5}} \cdot 3 \cdot 0,5L^{-0,5}K^{0,5} = 0,5.$$

Эластичность производства равна: $E_K + E_L = 0,5 + 0,5 = 1$.

3.5. Дифференцируемость ФНП

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U_\varepsilon(x^0)$, $x^0 \in X \subset \mathbf{R}^n$ — внутренняя точка множества X. Положим $\Delta x := x - x^0$, или $x = x^0 + \Delta x$, тогда разность

$$\Delta f(x^0) := f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = f(x) - f(x^0)$$

— полное приращение функции $f(x)$ в точке x^0.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x^0, если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $A_i \in \mathbf{R}$ $(i = \overline{1, n})$, $o(\rho) = \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{\rho} = 0,\ \rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2},\ \Delta x_i = x_i - x_i^0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Теорема 3.4. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x^0) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots\ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f(x^0) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots\ldots \\ \Delta x_n \to 0}} o(\rho) =$$

$$= \left[\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0 \Rightarrow \rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2} \to 0,\ n \to \infty \right] = \lim_{\rho \to 0} o(\rho) = 0.$$

Заметим, что $\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0)$. Поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0, \\ \ldots\ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \left(f(x) - f(x^0) \right) = \lim_{\rho \to 0} o(\rho) = 0,$$

и, следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0.

Теорема 3.5 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то существуют частные производные:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = A_1, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = A_n.$$

Доказательство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \left| \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0 \right| = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{A_1 \Delta x_1}{\Delta x_1} + \lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = A_1$$

(здесь $\rho = |\Delta x_1|$).

Аналогично

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}=\lim_{\Delta x_n\to 0}\frac{\Delta_{x_n}f}{\Delta x_n}=\left|\Delta x_n=\ldots=\Delta x_{n-1}=0\right|=A_n.$$

Теорема 3.6 (достаточное условие дифференцируемости функции). Приведем теорему для функции $z=f(x,y)$ двух переменных.

Если функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в некоторой окрестности $U_\delta(P_0)$ точки $P_0(x_0;y_0)$ и эти частные производные непрерывны в этой точке, то функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0,y_0)$.

Связь понятий «непрерывность функции в точке», «существование частной производной в точке» и «дифференцируемость функции в точке» можно изобразить с помощью следующей схемы (рис. 3.9).

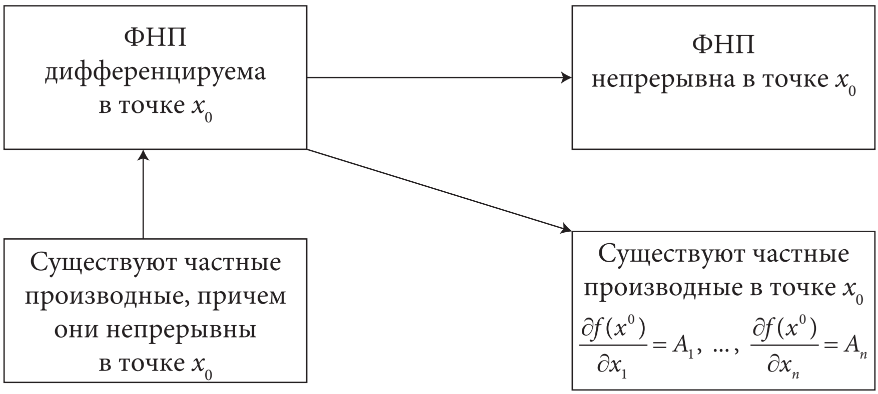


Рис. 3.9. Связь понятий «непрерывность функции в точке», «существование частной производной в точке» и «дифференцируемость функции в точке»

Определение полного дифференциала функции

Для дифференцируемой в точке x^0 функции ее полное приращение записывается в виде

$$\Delta f(x^0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}\Delta x_k+o(\rho),\quad \rho\to 0, \rho=\rho(x,x^0).$$

Линейная функция

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

переменных $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$ называется *дифференциалом* функции $u=f(x)$ в точке x и обозначается $df(x)$.

Переменные Δx_i называются также *дифференциалами* переменных x_i и обозначаются dx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). В этих обозначениях дифференциал функции записывается в виде

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n. \qquad (3.1)$$

Очевидно, что

$$\Delta f(x) = df(x) + o(\rho) \approx 0, \ \rho \to 0. \qquad (3.2)$$

Если же рассматривать дифференциал и при изменении точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то он будет являться функцией $2n$ переменных: $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n, x_1, \ldots, x_n$.

Так как $o(\rho) \approx 0$, $\rho \to 0$, то согласно (3.2) имеем:

$$\Delta f(x^0) \approx df(x^0) \qquad (3.3)$$

с погрешностью $o(\rho)$. Согласно формуле $\Delta f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$ из (3.3) получаем:

$$f(x^0 + \Delta x) \approx f(x^0) + df(x^0). \qquad (3.4)$$

Формулу (3.4) используют для приближенных вычислений значений функции.

Так как $\Delta x := x - x^0$, то $x^0 + \Delta x = x$. Перепишем (3.4), с учетом (3.1) и того, что $dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0$, в виде

$$f(x) \approx f(x^0) + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\left(x_1 - x_1^0\right) + \ldots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\left(x_n - x_n^0\right). \qquad (3.5)$$

Соотношением (3.5) функция $f(x)$ *линеаризована* в окрестности точки x^0.

Пример 3.12. Для функции $z = f(x; y) = 5x^2y + xy^2$ вычислить $\Delta f(P_0)$ и $df(P_0)$ и сравнить эти значения, если $P_0(1; -1)$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}02$.

Решение. *Полное приращение* функции:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [x_0 = 1, y_0 = -1, x_0 + \Delta x =$$
$$= 1{,}05, y_0 + \Delta y = -1{,}02] = f(1{,}05; -1{,}02) - f(1; -1) =$$
$$= 5 \cdot 1{,}05^2 (-1{,}02) + 1{,}05 \cdot (-1{,}02)^2 - (5 \cdot 1^2 \cdot (-1) + (-1)^2) = -4{,}5303 + 4 = -0{,}5303.$$

Найдем значение дифференциала функции $df(P_0)$ в точке $(1; -1)$, если $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}02$:

$$dz\big|_{(1,-1)} = \left(10xy + y^2\right)\Big|_{(1,-1)} \Delta x + \left(5x^2 + 2xy\right)\Big|_{(1,-1)} \Delta y = -9 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot (-0{,}02) = -0{,}51.$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства $\Delta f(P_0) \approx df(P_0)$ равна:

$$\left|\Delta f(P_0) - df(P_0)\right| = \left|-0{,}53033 - (-0{,}51)\right| = 0{,}0203.$$

Относительная погрешность замены приращения функции в точке дифференциалом равна:

$$\delta = \frac{0,0203}{0,5303} \cdot 100\,\% \approx 3,83\,\%.$$

Пример 3.13. Найти приближенное значение величины $\sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$.

Здесь

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3},\ x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \Delta x = 0,03,\ \Delta y = -0,02,\ f(1, 2) = 3.$$

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y,$$

$$\frac{\partial f(1;2)}{\partial x} = \left.\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^3}}\right|_{(1;\,2)} = \frac{1}{3},\quad \frac{\partial f(1;2)}{\partial y} = \left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}\right|_{(1;\,2)} = 2,$$

$$\sqrt{1,03^2 + 1,98^3} \approx 3 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 + 2 \cdot (-0,02) = 2,97.$$

Пример 3.14. Линеаризовать функцию $u = \mathrm{e}^{x+2y} + \sin\frac{x+y+z}{5}$ в окрестности точки M_0 (–2; 1; 1).

Здесь $u = f(x, y, z)$. Согласно (3.5) имеем:

$$f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \\ + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0). \quad (3.6)$$

Находим $\left.u'_x\right|_{M_0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \left.\left(\mathrm{e}^{x+2y} + \frac{1}{5}\cos\frac{x+y+z}{5}\right)\right|_{(-2;\,1;\,1)} = 1 + \frac{1}{5} = 1,2;$

$$\left.u'_y\right|_{M_0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \left.\left(2\mathrm{e}^{x+2y} + \frac{1}{5}\cos\frac{x+y+z}{5}\right)\right|_{(-2;\,1;\,1)} = 2 + \frac{1}{5} = 2,2;$$

$$\left.u'_z\right|_{M_0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = \left.\left(\frac{1}{5}\cos\frac{x+y+z}{5}\right)\right|_{(-2;\,1;\,1)} = \frac{1}{5} = 0,2;$$

$$u(M_0) = u(-2;\ 1;\ 1) = 1.$$

Согласно (3.6)

$$\mathrm{e}^{x+2y} + \sin\frac{x+y+z}{5} \approx 1 + 1,2(x+2) + 2,2(y-1) + 0,2(z-1)$$

в окрестности точки M_0 (–2; 1; 1).

3.6. Дифференцирование сложных функций

Сложные функции нескольких переменных, как и сложные функции одной переменной, есть композиция двух или нескольких функций.

Пусть на некотором открытом множестве $T \subset \mathbf{R}^k$ задана система n функций:

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t), \; t = (t_1, ..., t_k) \in T.$$

И пусть на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ задана функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $x \in X$. Если $\forall t \in T \;\; \varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) \in X$, то можно говорить о сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, ставящей в соответствие $\forall\, t \in T$ число

$$F(t_1, \ldots, t_k) = f\Big(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)\Big).$$

Итак, F: $T \to \mathbf{R}$, причем $T \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, где $T \subset \mathbf{R}^k$, $X \subset \mathbf{R}^n$.

Теорема 3.7. Пусть функция $f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, для которой $x_j^0 = \varphi_j(t^0)$, $j = \overline{1, n}$, и функции $\varphi_j(t)$ дифференцируемы в точке $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_k^0)$. Тогда сложная функция $F = f \circ \varphi$ дифференцируема в точке t^0, а ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial F(t^0)}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j(t^0)}{\partial t_i}, \; i = \overline{1, k}. \tag{3.7}$$

Здесь $t_1, \ldots, t_k$ — независимые переменные, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — промежуточные переменные, $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — внешняя функция.

Формула (3.7) читается: производная сложной функции по независимой переменной $(t_i, i = \overline{1, k})$ равна сумме произведений производной внешней функции по каждой из промежуточных переменных $(\varphi_j, j = \overline{1, k})$, умноженной на производную этой переменной по соответствующему независимому аргументу.

Рассмотрим частные случаи (3.7):

1. $k = 1$: $F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{d\varphi_j(t)}{dt}.$$

2. $n = 1$: $F(t_1, \ldots, t_k) = f(\varphi(t_1, \ldots, t_k))$,

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i}, \; i = \overline{1, k}.$$

3. $n = k = 2$: $F(t_1, t_2) = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2))$. В этом случае

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_1} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_2}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_2}+\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t_2}.$$

Пример 3.15. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z=u^2+v^3$, $u=\sqrt{xy}, v=\frac{x}{y}$.

Здесь x, y — независимые переменные, u, v — промежуточные переменные, $z=u^2+v^3$ — внешняя функция. Прежде чем вычислять производную сложной функции, рекомендуется сначала написать формулы для нахождения производных сложных функций:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Находим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2u=\left[u=\sqrt{xy}\right]=2\sqrt{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=3v^2=\left[v=\frac{x}{y}\right]=\frac{3x^2}{y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{xy}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{xy}},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sqrt{xy}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xy}}+\frac{3x^2}{y^2}\cdot\frac{1}{y}=y+3\frac{x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sqrt{xy}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+3\frac{x^2}{y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=x-3\frac{x^3}{y^4}.$$

Пример 3.16. Найти $\frac{dz}{dx}, \frac{\partial z}{\partial x}$ для функции $z=f(x, y)=x^2y^3$, $y=\ln(1+\sqrt{x})$.

Здесь сложная функция $z=f(x,y)=f(x,y(x))$ имеет *один* независимый аргумент x и *два* промежуточных аргумента x и y, поэтому производная сложной функции по ее независимому аргументу имеет вид:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\ \text{или}\ \frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Находим $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}$. В итоге получаем:

$$\frac{df}{dx}=2xy^3+3x^2y^2\cdot\frac{1}{2\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}=xy^2\left(2y+\frac{3\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})}\right)=\left[y=\ln(1+\sqrt{x})\right]=$$

$$= x\ln^2(1+\sqrt{x})\left(2\ln(1+\sqrt{x})+\frac{3\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})}\right)=\frac{x\ln^2(1+\sqrt{x})\left(4(1+\sqrt{x})\ln(1+\sqrt{x})+3\sqrt{x}\right)}{2(1+\sqrt{x})}.$$

Обращаем внимание на различие по смыслу и написанию знаков $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{d}{dx}$.

Пример 3.17. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = \ln t$, $t = \sin x + \cos y$.

Здесь сложная функция $z = f(t) = f(t\ (x, y))$ имеет *два* независимых аргумента x и у и *один* промежуточный аргумент t, поэтому:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{1\cdot\cos x}{\sin x+\cos y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1\cdot\left(-\sin y\right)}{\sin x+\cos y}.$$

3.7. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, $f: X \to \mathbf{R}$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и пусть в любой точке $x \in X$ существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\ (i=\overline{1,n})$. Если точку x не фиксировать, а менять, то частные производные сами являются функциями и их снова можно дифференцировать.

Определим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\ (i,j=\overline{1,n}).$$

Обозначения: $f''_{x_i\,x_j}$, f''_{ij}.

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Если дифференцирование проводится по различным переменным, то такие частные производные называются *смешанными*. Например, $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x_i^3\,\partial x_j^2}$ — одна из возможных смешанных частных производных пятого порядка.

Частная производная по любой из независимых переменных от частной производной $(m - 1)$-го порядка функции $f(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ называется *частной производной m-го порядка*.

Теорема 3.8 (Шварца о равенстве смешанных производных). Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена вместе со своими частными производными $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$ в некоторой окрестности точки x^0, причем $f''_{x_i x_j}$ непрерывны в этой точке. Тогда

$$f''_{x_i x_j}(x^0) = f''_{x_j x_i}(x^0),$$

т. е. значение второй производной не зависит от порядка дифференцирования.

Следствие. Если частные производные $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_i^k \partial x_j^{n-k}}$ и $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_j^{n-k} \partial x_i^k}$ непрерывны в точке x^0, то

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^k \partial x_j^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial x_j^{n-k} \partial x_i^k}.$$

Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, X — открытое множество, тогда

$$df(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} dx_k.$$

Рассмотрим полезные для дальнейшего изложения свойства дифференциалов.

Пусть u и v — дифференцируемые функции в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, α, β, $C \in \mathbf{R}$. Тогда:

1. $dC \equiv 0$;
2. $d(\alpha u \pm \beta v) = \alpha\, d(u) \pm \beta\, d(v)$;
3. $d(u\, v) = u\, dv + v\, du$;
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Введем теперь понятие дифференциала второго и более высоких порядков.

Пусть функция $f: X \to \mathbf{R}$ имеет вторые *непрерывные* частные производные.

Зафиксируем приращения $dx_k = \Delta x_k$, и так как они теперь не зависят от $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то dx_k можно рассматривать как постоянные. Тогда дифференциал первого порядка df является снова функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Определим дифференциал второго порядка, используя свойства дифференциалов 1 и 2:

$$d^2 f := d(df) = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) = \sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) dx_k = \left[d(dx_k) = 0\right] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k.$$

Здесь $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ и $d^2 f$ является квадратичной формой независимых дифференциалов dx_1, …, dx_n. Определение квадратичной формы см. далее в п. 4.2.

Аналогично

$$d^l f = d\left(d^{l-1} f\right), \ \left(l = 2, 3, \ldots\right).$$

Например, для функции $z = f(x, y)$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f.$$

Аналогично

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k},$$

где $C_m^k = \frac{m!}{k!\left(m-k\right)!}$, $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m.$

Для функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющей *непрерывные* частные производные до порядка m включительно,

$$d^m f = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k\right\}^m f.$$

Пример 3.18. Найти дифференциал второго порядка функции $z = x\mathrm{e}^{2y} + y\mathrm{e}^{-2x}$ в точке P (–1; 1).

Решение. Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{2y} - 2y\mathrm{e}^{-2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{-2x},$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_P = \left.\left(\mathrm{e}^{2y} - 2y\mathrm{e}^{-2x}\right)'_x\right|_P = \left.4y\mathrm{e}^{-2x}\right|_{(-1,1)} = 4\mathrm{e}^2,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_P = \left.\left(2x\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{-2x}\right)'_y\right|_P = \left.4x\mathrm{e}^{2y}\right|_{(-1,1)} = -4\mathrm{e}^2,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_P = \left.\left(2x\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{-2x}\right)'_x\right|_P = \left.2\mathrm{e}^{2y} - 2\mathrm{e}^{-2x}\right|_{(-1,1)} = 0.$$

Подставляем в формулу дифференциала второго порядка, получаем:

$$d^2z\Big|_P = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\Bigg|_P =$$

$$= 4\mathrm{e}^2 dx^2 + 2\cdot 0\cdot dxdy - 4\mathrm{e}^2 dy^2 = 4\mathrm{e}^2(dx^2 - dy^2).$$

3.8. Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и *непрерывна* вместе со своими частными производными до порядка m включительно в δ-окрестности точки $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Тогда для $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$: $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2} < \delta$ справедлива формула Тейлора:

$$\Delta f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x^0) + \ldots + \frac{1}{m!}d^m f(x^0) + o(\rho^m), \tag{3.8}$$

где $o(\rho^m) = \alpha\left(x^0, \Delta x\right)$: $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha(x^0, \Delta x)}{\rho^m} = 0.$

Пусть $m = 2$. Для функции двух переменных ($n = 2$) формула Тейлора имеет вид:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2),$$

где

$$df\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\Delta y,$$

$$d^2 f\left(x_0, y_0\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f\left(x_0, y_0\right),\ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Замечание. Формула Тейлора (3.8) является уточнением и обобщением формулы линейного приближения (3.5).

Пример 3.19. Разложить функцию $f(x, y) = y^x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2; 1)$ до членов второго порядка включительно.

Находим:

$$f(2; 1) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(2;1)} = y^x \ln y\Big|_{(2;1)} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(2;1)} = xy^{x-1}\Big|_{(2;1)} = 2.$$

Отсюда

$$df\left(2,1\right)=0\cdot dx+2\cdot dy=2\Delta y=\left[\Delta y=y-y_0=y-1\right]=2(y-1).$$

Теперь найдем $d^2f(2, 1)$.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(2;1)}=\left.\frac{\partial f\left(y^x\ln y\right)}{\partial x}\right|_{(2;1)}=y^x\ln^2 y\Big|_{(2;1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(2;1)}=\left.\frac{\partial\left(xy^{x-1}\right)}{\partial x}\right|_{(2;1)}=\left(y^{x-1}+xy^{x-1}\ln y\right)\Big|_{(2;1)}=1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(2;1)}=x(x-1)y^{x-2}\Big|_{(2;1)}=2.$$

Подставляем в формулу дифференциала второго порядка, получаем:

$$d^2f\Big|_{(2,1)}=0\cdot dx^2+2\cdot 1dxdy+2dy^2=\left[dx=\Delta x=x-2, dy=\Delta y=y-1\right]=$$

$$=2(x-2)(y-1)+2(y-1)^2.$$

Искомое разложение:

$$y^x=1+2(y-1)+\frac{1}{2!}\cdot 2(x-2)(y-1)+\frac{1}{2!}\cdot 2(y-1)^2+o(\rho^2)=$$

$$=1+2(y-1)+(x-2)(y-1)+(y-1)^2+o(\rho^2),\ \rho=\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2}.$$

3.9. Дифференцирование функций, заданных неявно

Пусть дана функция $F(x, y)$ двух переменных. Рассмотрим множество X точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0. \tag{3.9}$$

Для любого фиксированного x из некоторого множества X уравнение (3.9) относительно переменной y имеет некоторое множество решений, обозначим его через A_x (может быть, $A_x = \varnothing$). Будем рассматривать те $x \in X$, для которых $A_x \neq \varnothing$. Тогда соответствие f: $x \to A_x$ определяет однозначную или многозначную функцию переменной x. Такая функция называется *неявной*.

Если для каждого значения x в некотором промежутке существует *одно* значение y, которое вместе с исходным значением x удовлетворяет данному уравнению, то этим определяется *однозначная* функция $y = f(x)$, для которой равенство $F(x, f(x)) = 0$ имеет место тождественно относительно x, т.е. уравнение (3.9) определяет в X неявную (однозначную) функцию, если

$$\forall x\ \exists!\ y = f(x) : F\big(x, f(x)\big) \equiv 0.$$

Решение уравнения (3.9) не всегда можно записать в виде явной формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ — элементарная функция.

Примеры

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) задает неявно *две* функции $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$ при любом $-1 < x < 1$ и *одну* функцию $y \equiv 0$ при $|x| = 1$.

2. Рассмотрим уравнение $y^5 + y - x = 0$. Решение невозможно записать в виде $y = f(x)$, где $f(x)$ — элементарная функция.

3. Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Здесь для любого значения x множество $A_x = \varnothing$, т.е. относительно переменной y уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ решений не имеет.

Аналогично уравнению (3.9) можно рассматривать уравнение

$$F\big(x_1, ..., x_n, y\big) = 0,$$

которое задает неявно функцию $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, если $\exists\, X \subset \mathbf{R}^n : \forall x \in X$ справедливо тождество $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$.

Теорема 3.9 (Юнга[8] о неявной функции). Пусть

1) $F(x, y)$ — непрерывная функция в некоторой окрестности $U_\delta(P_0)$ точки $P_0(x_0, y_0)$;

2) $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ — непрерывные функции в этой окрестности;

3) $F(P_0) = 0$, $F'_y(P_0) \neq 0$.

Тогда уравнение (3.9) определяет однозначную непрерывную на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ неявно заданную функцию $y = y(x)$ такую, что $F(x, y(x)) \equiv 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $y(x_0) = y_0$. В $U_\delta(P_0)$ существует непрерывная производная этой функции:

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x\big(x_0, y_0\big)}{F'_y\big(x_0, y_0\big)}. \tag{3.11}$$

---

[8] Генрих Вильгельм Эвальд Юнг (1876–1953) — немецкий математик, специализировался на геометрии и алгебраической геометрии. Более всего известен арифметической теорией алгебраических функций двух переменных («Введение в алгебраическую теорию функций двух переменных»). Также применил свою теорию к алгебраическим поверхностям («Алгебраические поверхности») и имел дело с бирациональными преобразованиями на плоскости (преобразованиями Кремоны).

Аналогичное утверждение имеет место и для функции n переменных. Например, уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает неявно функцию $z = z(x, y)$ в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$, если:

1) $F(x, y, z)$ — непрерывная функция в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$,

2) $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ — непрерывные функции в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$,

3) $F(P_0) = 0$, $F'_z(P_0) \neq 0$.

При этом снова, не зная явного выражения для функции $z = z(x, y)$, можно вычислить ее частные производные, например, по формулам

$$z'_x\Big|_{P_0} = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad z'_y\Big|_{P_0} = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (3.12)$$

В самом деле, $dF(x, y, z) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \Rightarrow dz = -\frac{F'_x}{F'_z} dx - \frac{F'_y}{F'_z} dy. \qquad (3.13)$$

С другой стороны, по определению

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (3.14)$$

Из (3.13) и (3.14) $\Rightarrow$ (3.12).

Пример 3.20. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ в окрестности точки $A(3; -2)$.

Решение. Пусть $F(x, y) = \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} - 1$. Найдем частные производные функции $F(x, y)$: $\frac{\partial F(A)}{\partial x} = \frac{x}{9}\Big|_{(3;\,-2)} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial F(A)}{\partial y} = \frac{y}{4}\Big|_{(3;\,-2)} = -\frac{1}{2}$.

Так как $\frac{\partial F(A)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \neq 0$, то неявная функция в окрестности точки $A(3; -2)$ существует, и ее производная $y'(3) = -\frac{F'_x(3;-2)}{F'_y(3;-2)} = -\frac{\frac{1}{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$.

Заметим, что в нашем примере функцию $y = y(x)$ в окрестности точки A (3; –2) можно задать явно (рис. 3.10):

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1 \Rightarrow y^2=8\left(1-\frac{x^2}{18}\right)=$$

$$=8-\frac{4x^2}{9} \Rightarrow y=-\sqrt{8-\frac{4x^2}{9}}.$$

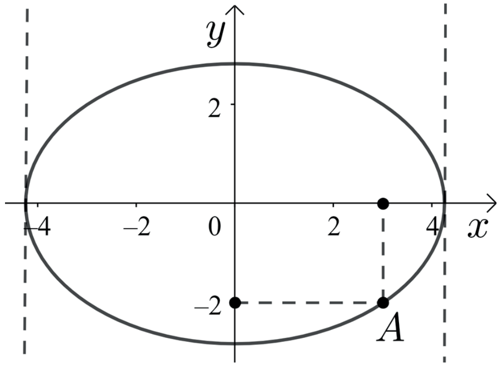


Рис. 3.10. Геометрическая иллюстрация к решению примера 3.20

Обращаем внимание на то, что в окрестности точки A ордината $y < 0$.

Теперь находим:

$$y'(3)=\left(-\sqrt{8-\frac{4x^2}{9}}\right)'\Bigg|_{x=3}=-\frac{1}{2\sqrt{8-\frac{4x^2}{9}}}\cdot\left(8-\frac{4x^2}{9}\right)'\Bigg|_{x=3}=\frac{1}{2\sqrt{8-\frac{4x^2}{9}}}\cdot\frac{8x}{9}\Bigg|_{x=3}=\frac{2}{3}.$$

Очевидно, что первый способ менее трудозатратный.

Заметим также, что в окрестности двух точек $(-3\sqrt{2};0)$ и $(3\sqrt{2};0)$, расположенных на оси Ox (касательная к эллипсу в этих точках вертикальна), функция $y = y(x)$ не определена.

Пример 3.21. Найти частные производные $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной в окрестности точки $P_0(0; 0; 1)$ неявно уравнением

$$xe^y + ye^z + ze^x = 1.$$

Решение. Здесь нельзя выразить z через x и y явно. Пусть $F(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x - 1$. Тогда $F(0, 0, 1) = 0$, частная производная $\frac{\partial F(0;0;1)}{\partial z}=(ye^z+e^x)\big|_{(0;0;1)}=1\neq 0.$ По теореме Юнга, в окрестности точки (0; 0; 1) определена неявная функция. Так как $\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}=(e^y+ze^x)\big|_{(0;0;1)}=2,$ $\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}=(xe^y+e^z)\big|_{(0;0;1)}=e,$ то по формулам (3.12)

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x}=-\frac{F'_x(0,0,1)}{F'_z(0,0,1)}=-\frac{2}{1}=-2,\quad \frac{\partial z(0,0)}{\partial y}=-\frac{F'_y(0,0,1)}{F'_z(0,0,1)}=-\frac{e}{1}=-e.$$

Рассмотрим еще один способ дифференцирования функций, заданных неявно.

Например, чтобы найти производную функции $y = f(x)$, заданной уравнением в неявном виде, нужно продифференцировать обе части этого уравнения и разрешить полученное уравнение относительно y'.

Пример 3.22. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xy^3 - yx^3 + 4x^2 = 1 - xy + y^3.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по независимой переменной x (при этом $y = f(x)$, т. е. y зависит от x):

$$y^3 + 3xy^2 \cdot y' - y'x^3 - 3x^2 y + 8x = -y - xy' + 3y^2 \cdot y'.$$

Затем сгруппируем в одной части слагаемые, содержащие y', а в другой части — остальные слагаемые:

$$y'(3xy^2 - x^3 + x - 3y^2) = -y^3 + 3x^2 y - 8x - y.$$

Тогда

$$y' = -\frac{y^3 - 3x^2 y + 8x + y}{3xy^2 - x^3 + x - 3y^2}.$$

Пример 3.23. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = y(x)$ в точке A (1; 1), если функция задана уравнением $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Решение. Обозначим $F(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5$. Уравнения касательной и нормали к графику функции $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеют вид:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

и, соответственно,

$$y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Воспользуемся формулой (3.11):

$$y'\Big|_{(1;\,1)} = -\frac{F'_x(1,1)}{F'_y(1,1)} = -\frac{3x^2 - 4xy^2 + 5}{-4x^2 y + 1}\Bigg|_{(1,\,1)} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = 1 + \frac{4}{3}(x-1) \quad \text{и} \quad y = 1 - \frac{3}{4}(x-1),$$

соответственно, уравнение касательной и нормали к графику функции $y = y(x)$ в точке A (1; 1) (рис. 3.11).

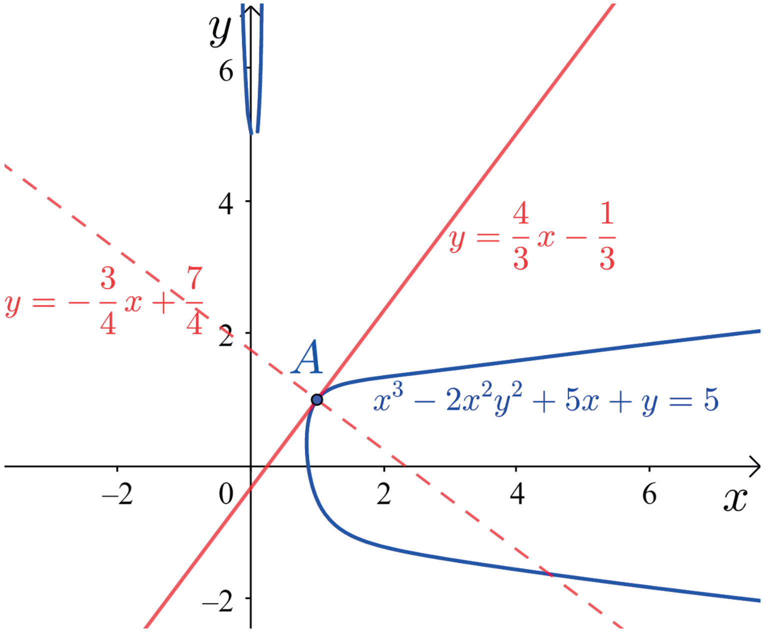


Рис. 3.11. Касательная и нормаль к кривой, заданной неявно

Пример 3.24. Составить уравнения касательной к линии пересечения цилиндра $5x^2 + 4y^2 = 9$ и плоскости $x + 3y + 2z = 6$ в точке P (1; 1; 1).

Решение. Перейдем к параметрическому заданию линии. Возьмем в качестве параметра переменную x (рис. 3.12).

Пусть $L : x = x, y = y(x), z = z(x)$ — линия пересечения цилиндра $5x^2 + 4y^2 = 9$ и плоскости $x + 3y + 2z = 6$. Тогда $\vec{r}' = (x', y', z')\big|_P$ — вектор касательной к кривой L в точке P.

Для определения y', z' продифференцируем обе части каждого уравнения по независимой переменной x:

$$(5x^2 + 4y^2 - 9)'_x = 0,$$
$$(x + 3y + 2z - 6)'_x = 0.$$

При этом $y = y(x)$, $z = z(x)$, т. е. y и z зависят от x:

$$10x + 8y \cdot y' = 0,$$
$$1 + 3y' + 2z' = 0.$$

В точке P(1; 1; 1): $10 + 8y' = 0, 1 + 3y' + 2z' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{5}{4}, z' = \frac{11}{8}$. Так как $x' = 1$, то направляющий вектор касательной: $\vec{r}' = (x', y', z') = \left(1, -\frac{5}{4}, \frac{11}{8}\right)$.

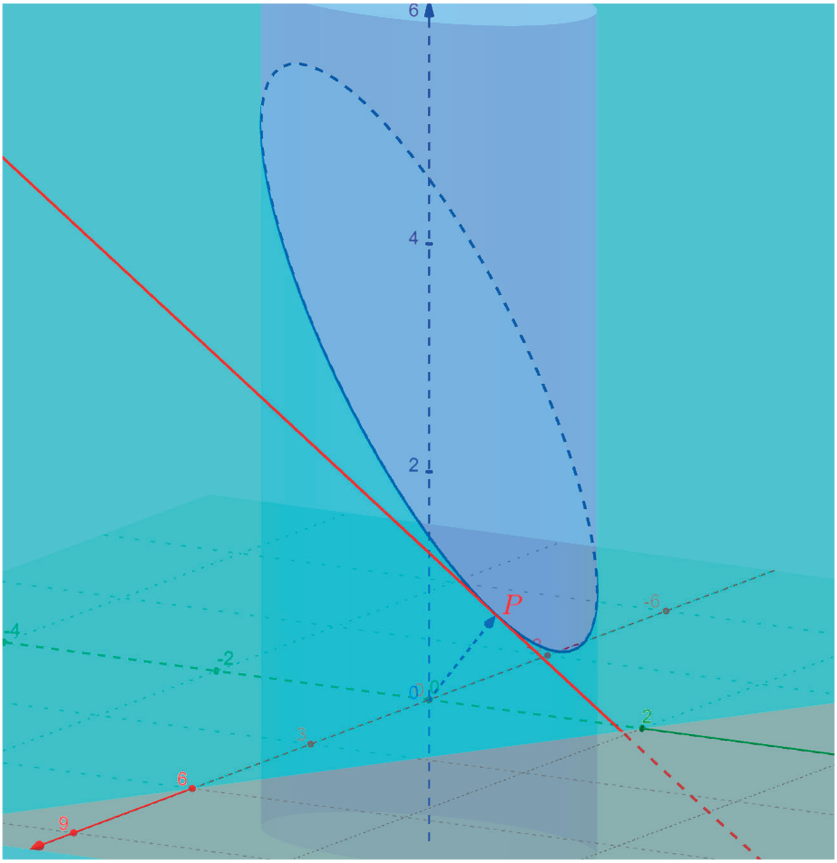


Рис. 3.12. Геометрическая иллюстрация примера 3.24

В качестве направляющего вектора можно взять, конечно, и вектор (8, –10, 11). Поэтому канонические уравнения касательной:

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z-1}{11}.$$

3.10. Производная по направлению и градиент

Рассмотрим скалярное поле, заданное в области $X \subseteq \mathbf{R}^3$ дифференцируемой в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ функцией $f = f(x, y, z)$. Найдем скорость изменения функции в *направлении вектора* $\vec{l}=\overrightarrow{P_0P}$. При перемещении из точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ в точку $P(x, y, z)$ функция получит приращение $\Delta_{\vec{l}} f = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$, соответствующее приращению Δl. Поскольку $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$, приращение в направлении $\vec{l}$ составит

$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Предел отношения $\dfrac{\Delta_{\vec{l}} f}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ называют *производной по направлению* $\vec{l}$ функции $f(x, y, z)$ в точке P_0:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_{\vec{l}} f}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l}.$$

Теорема 3.10. Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке P_0, то в этой точке существует производная $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}$ по любому направлению $\vec{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, причем

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f = f(x, y, z)$ вдоль прямой, проходящей через точку P_0 в направлении $\vec{l}$: $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma. \end{cases}$

$$\Delta l \to 0 \Leftrightarrow |PP_0| \to 0 \Leftrightarrow t \to 0,\ |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = |t|.$$

В этом случае скалярное поле $f = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$ есть функция одной переменной t. Производная этой функции по t (при $t = 0$), если она существует, является производной скалярного поля по направлению $\vec{l}$ в точке P_0.

Согласно определению производной по направлению и правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cdot\cos\alpha, y_0 + t\cdot\cos\beta, z_0 + t\cdot\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} =$$

$$= \left.\frac{d\left[f(x_0 + t\cdot\cos\alpha, y_0 + t\cdot\cos\beta, z_0 + t\cdot\cos\gamma)\right]}{dt}\right|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Производная по направлению характеризует скорость изменения функции при движении точки в этом направлении.

2. Если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением одной из координатных осей, то производная по направлению $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial \vec{l}}$ совпадает с соответствующей частной производной. Так, например, если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением оси Ox $\left(\vec{l}\uparrow\uparrow\vec{i}\right)$, то $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial \vec{i}} = \dfrac{\partial u(P_0)}{\partial x}$.

3. В случае плоского поля формула (3.15) имеет вид:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta. \tag{3.16}$$

Градиент функции

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор

$$f'(P_0) = \operatorname{grad} f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\Bigg|_{P_0},$$

т. е. вектор, координатами которого являются частные производные.

Свойства градиента

1. Первое свойство указывает направление *максимальной скорости* изменения функции $u = f(x, y, z)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, а $|\operatorname{grad} f(P_0)|$ — *величину скорости возрастания* функции $u = f(x, y, z)$ в этом направлении.

Теорема 3.11. Производная $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}$ функции f по направлению $\vec{l}$ равна проекции вектора градиента этой функции на это направление $\vec{l}$:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \text{пр}_{\vec{l}}\left(\operatorname{grad} f(P_0)\right).$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \left(\operatorname{grad} f(P_0), \vec{l_0}\right) = \left|\operatorname{grad} f(P_0)\right|\left|\vec{l_0}\right|\cos\varphi,$$

где φ — угол между $\operatorname{grad} f(P_0)$ и вектором $\vec{l}$. Так как $|\vec{l_0}| = 1$, то

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \left|\operatorname{grad} f(P_0)\right| \cos\varphi = \text{пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} f(P_0).$$

Следствие. $\max\limits_{\vec{l}} \dfrac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial \vec{l}} = \left|\operatorname{grad} f(P_0)\right|$ и достигается при $\vec{l} = \operatorname{grad} f(P_0)$.

Действительно, $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \left|\operatorname{grad} f(P_0)\right| \cos\varphi$ принимает наибольшее значение, равное $\left|\operatorname{grad} f(P_0)\right|$, когда cos φ = 1, т. е. когда φ = 0, или векторы $\vec{l}$ и grad$f(P_0)$ коллинеарны.

Если $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = 0$ и в этом направлении функция не изменяется. Это направление линии уровня функции (рис. 3.13).

2. Вектор grad$f(P_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции (поля) $f(x, y, z)$. Если $\{(x, y, z)\colon f(x, y, z) = \alpha\}$ — поверхность уровня поля f и $\vec{n}$ — нормаль в точке P_0, то

$$\vec{n}(P_0) = \pm\frac{1}{\left|\operatorname{grad} f(P_0)\right|} \cdot \operatorname{grad} f(P_0).$$

Замечание. Если $z = f(x, y)$ — плоское поле, то градиент в каждой точке направлен по нормали к линии уровня, проведенной через эту точку (рис. 3.14).

Действительно, касательная к линии $f(x, y) = \alpha$ имеет угловой коэффициент $k_1 = \dfrac{dy}{dx}$, где функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $f(x, y) = \alpha$. По теореме 3.9 Юнга о неявной функции имеем: $k_1 = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$. С другой стороны, угло-

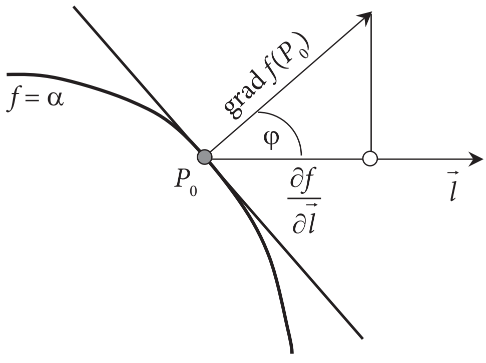


Рис. 3.13. Связь производной по направлению и градиента

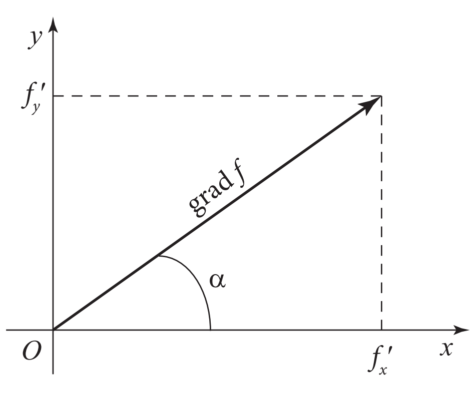


Рис. 3.14. Геометрическая иллюстрация градиента

вой коэффициент прямой, параллельной градиенту, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f'_y}{f'_x}$. Следовательно, $k_1 k_2 = -1$, что является условием перпендикулярности двух прямых. Итак, *градиент перпендикулярен касательной или направлен по нормали к линии уровня*.

Пример 3.25. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $P_0(6; 4)$ в направлении вектора $\vec{l} = (2; 1)$. Найти направление максимальной скорости изменения функции в точке P_0 и ее величину.

Решение. Найдем частные производные в точке P_0:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = \left.\frac{1\cdot 2x}{x^2+4y^2}\right|_{P_0} = \frac{12}{100}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = \left.\frac{8y}{x^2+4y^2}\right|_{P_0} = \frac{32}{100}.$$

Далее находим:

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5},\ \vec{l}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;1) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поэтому, согласно (3.16):

$$\frac{\partial z(P_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{12}{100}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{32}{100}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{28\sqrt{5}}{250} \approx 0{,}25.$$

Направлением максимальной скорости изменения функции в точке $P_0(6; 4)$ является:

$$\operatorname{grad} z(P_0) = \left(\frac{12}{100}, \frac{32}{100}\right).$$

Величина скорости возрастания функции в точке $P_0(6; 4)$ равна:

$$\max_{\vec{l}} \frac{\partial z(P_0)}{\partial \vec{l}} = \left|\operatorname{grad} z(P_0)\right| = \sqrt{\frac{12^2+32^2}{100^2}} \approx 0{,}34.$$

Пример 3.26. Найти уравнение касательной, проведенной к линии $\ln y = 2xy - 2y$ в точке $A(1; 1)$.

Решение. Найдем градиент функции $f(x, y) = \ln y - 2xy + 2y$ в точке $A(1; 1)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A = -2y\big|_{(1;\,1)} = -2,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A = \frac{1}{y} - 2x + 2\big|_{(1;\,1)} = 1 \Rightarrow \operatorname{grad} f(A) = (-2; 1).$$

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0)$ с вектором нормали $\vec{N} = (A, B)$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Так как *градиент* направлен по нормали к заданной линии, то уравнение касательной можно записать в виде $-2(x - 1) + 1 \cdot (y - 1) = 0$ или $y = 2x - 1$ (рис. 3.15).

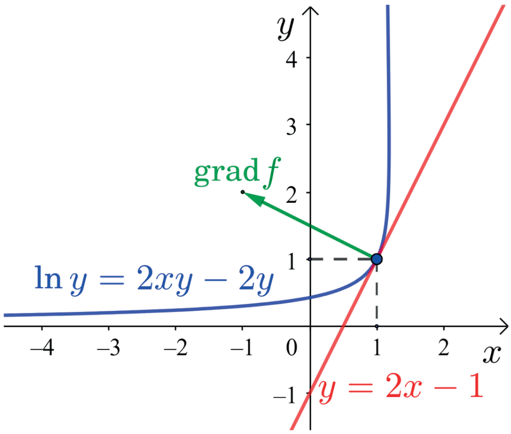


Рис. 3.15. Геометрическая иллюстрация
к решению примера 3.26

Замечание. Сравните это решение с решением примера 3.23.

Пример 3.27. Для функции $z = 4x^2 + 9y^2 - 16x$ изобразить на плоскости $\mathbf{R}^2$ линии уровня

$$L_\alpha(f) = \{(x; y)\colon f(x, y) = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Выделить линию уровня, проходящую через точку $P_0(1; 1)$. Найти градиент поля в этой точке. Проверить ортогональность $\operatorname{grad} f(P_0)$ и касательной прямой к выделенной линии уровня в точке P_0.

Решение. Линиями уровня являются эллипсы: $4x^2 + 9y^2 - 16x = \alpha$ или $4(x - 2)^2 + 9y^2 = \alpha + 16$. Найдем уравнение линии уровня, проходящей через точку $P_0(1; 1)$. Значение функции $z_0 = \alpha$ (ее уровень), соответствующее этой линии уровня, равно: $z_0 = \alpha = 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 = -3$. Следовательно, уравнением линии уровня при $\alpha = -3$ будет $4(x - 2)^2 + 9y^2 = -3 + 16$ или $4(x - 2)^2 + 9y^2 = 13$.

Найдем градиент функции в этой точке. Для этого сначала определим частные производные первого порядка от функции $z = 4x^2 + 9y^2 - 16x$ в точке $P_0(1; 1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = (8x - 16)\big|_{(1,1)} = -8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = (18y)\big|_{(1,1)} = 18.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} f(P_0) = (-8, 18)$.

Уравнение касательной $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $\vec{N} = (A, B) = \operatorname{grad} f(P_0)$, имеет вид: $-8(x - 1) + 18(y - 1) = 0$ или $y = \frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$.

Угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас.}} = \frac{4}{9}$. Градиент $\operatorname{grad} f(P_0) = (-8, 18)$ образует с осью Ox угол, тангенс которого определяем как отношение координат градиента: $\frac{18}{-8} = -\frac{9}{4}$. Тогда произведение угловых коэффициентов касательной и градиента равно $\frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = -1$. Следовательно, градиент функции в точке P_0 является перпендикуляром к касательной линии уровня функции в выбранной точке. На рис. 3.16 изображена линия уровня поля $4(x - 2)^2 + 9y^2 = 13$ при уровне $z_0 = \alpha = -3$, а также градиент этой функции в точке $P_0(1; 1)$.

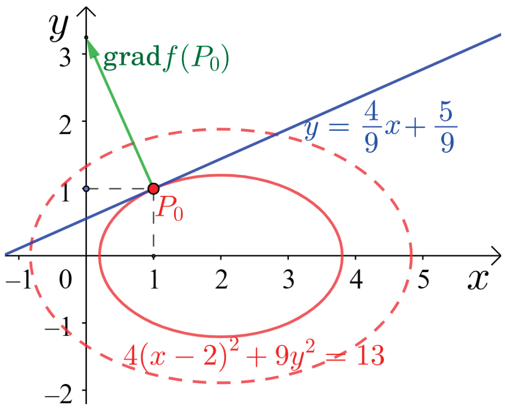


Рис. 3.16. Ортогональность $\operatorname{grad} f(P_0)$ и касательной к выделенной линии уровня

3.11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность S задана уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0. \tag{3.17}$$

Прямая линия называется *касательной* к поверхности в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, если она является касательной к какой-либо кривой L, лежащей на поверхности и проходящей через точку P_0.

Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через точку P_0, называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке P_0.

Пусть в точке P_0 существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial F(P_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(P_0)}{\partial y}, \dfrac{\partial F(P_0)}{\partial z}$, одновременно не равные нулю:

$$\left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\right)^2 > 0.$$

Пусть $L \subset S$; L: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (L — некоторая линия на поверхности S). Дифференцируя (3.17) по t, в точке P_0 получим

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\right|_{P_0} = 0. \tag{3.18}$$

Введем обозначения:

$$\overrightarrow{N} := \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\right), \tag{3.19}$$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left.\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)\right|_{P_0}$ — вектор касательной к кривой L в точке P_0.

В силу (3.18) $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \perp \overrightarrow{N}$, причем это справедливо $\forall\, L \subset S$ и проходящей через точку P_0, т. е. вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ перпендикулярен касательной плоскости, тогда ее уравнение

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0. \tag{3.20}$$

Прямая, проходящая через точку P_0 поверхности S, перпендикулярно касательной плоскости в точке P_0, называется *нормалью* к поверхности в точке P_0. Ее уравнение

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}.$$

Замечание. Пусть поверхность $F(x, y, z) = 0$ есть поверхность уровня для некоторой функции $u = u(x, y, z)$, т. е. $F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0$.

Вектор $\overrightarrow{N}$, определяемый по формуле (3.19), направлен по нормали к поверхности уровня $F(x, y, z) = u(x, y, z) - C$ и

$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Bigg|_{P_0}, \text{ т.е. } \overrightarrow{N} = \operatorname{grad} u(P_0).$$

Таким образом, градиент функции $u = u(x, y, z)$ в точке P_0 *направлен по нормали к поверхности уровня*, проходящей через данную точку P_0 (или ортогонально поверхности уровня).

Пример 3.28. Найти касательную плоскость к параболоиду $x^2 + 4y^2 - 8 = 16z$, параллельную плоскости $x - 2y - 2z = -12$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $F(x, y, z) \equiv \equiv x^2 + 4y^2 - 8 - 16z = 0$.

Пусть $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — неизвестная пока точка на поверхности параболоида, в которой искомая касательная плоскость параллельна данной плоскости $x - 2y - 2z + 12 = 0$. Находим:

$$F'_x(P_0) = 2x\big|_P = 2x_0,\ F'_y(P_0) = 8y\big|_P = 8y_0,\ F'_z(P_0) = -16,$$

т. е. $\operatorname{grad} F(P_0) = (2x_0, 8y_0, -16)$. Так как касательная плоскость параллельна плоскости $x - 2y - 2z + 12 = 0$, то $\operatorname{grad} F(P_0)$ и нормальный вектор $\overrightarrow{N} = (1; -2; -2)$ плоскости $x - 2y - 2z + 12 = 0$ коллинеарны, и следовательно, их координаты пропорциональны:

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{8y_0}{-2} = \frac{-16}{-2} \Rightarrow x_0 = 4,\ y_0 = -2.$$

Так как точка P_0 принадлежит параболоиду, то $4^2 + 4(-2)^2 - 16z_0 - 8 = 0$ и $z_0 = \frac{3}{2}$. Подставляя координаты найденной точки касания $P_0\left(4; -2; \frac{3}{2}\right)$ в уравнение (3.20), получим уравнение искомой касательной плоскости:

$$8(x-4) - 16\big(y - (-2)\big) - 16\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

или

$$x - 2y - 2z - 5 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости (рис. 3.17).

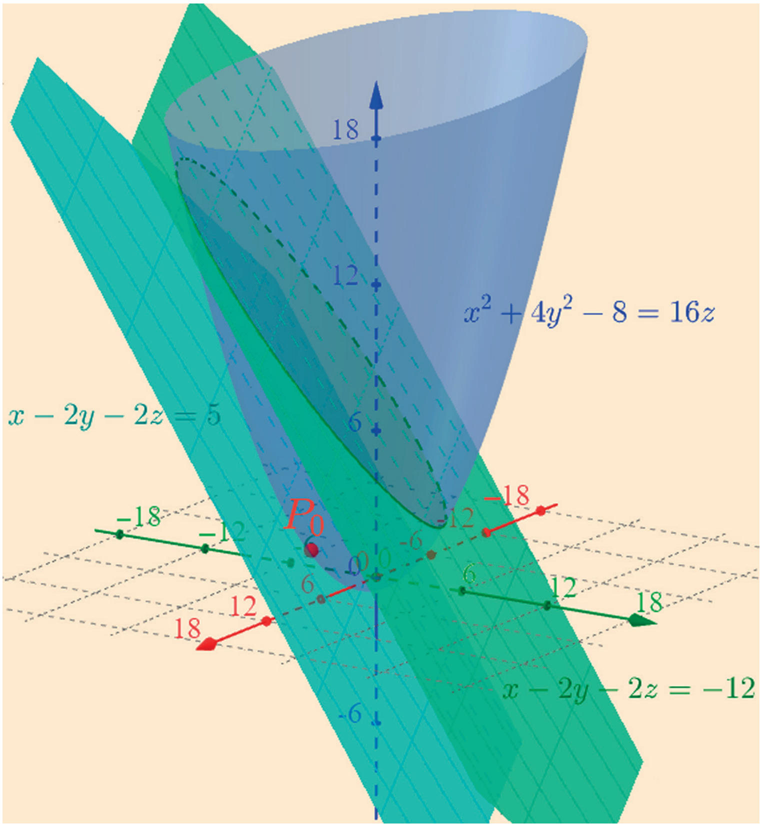


Рис. 3.17. Геометрическая иллюстрация к решению примера 3.28

Задания для самостоятельного решения

Предел и непрерывность ФНП

3.1. Найти и изобразить область определения функции:

а) $z = \dfrac{\sqrt{y - \sqrt{x}}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; б) $z = \arcsin(x + y) + \arccos(x - 1)$.

3.2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \dfrac{\sin(x-a)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(1 + x^2 y^2\right)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; г) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(1 + x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$.

3.3. Доказать, что функция $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке (0, 0).

3.4. Доопределить функцию $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ в точках, где она не определена, так, чтобы она стала непрерывной в этих точках.

3.5. Исследовать функцию $z=\dfrac{x^2+y}{x^2-y}$ на непрерывность и определить точки разрыва, если они имеются.

Частные производные и полный дифференциал функции

3.6. Доказать, что функция $z=\dfrac{\sin x}{\cos y}$ удовлетворяет данному уравнению:

$$z'_x\cdot z'_y\cdot z''_{xx}=z\cdot z''_{xy}.$$

3.7. Найти все частные производные первого и второго порядка функции $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x - y)$ в точке P (2; 1).

3.8. Для выпуска некоторого товара определена производственная функция $f(x, y) = 20x + 10y + 4x^2 - 2y^2 + 3xy$, где x, y — факторы производства. Определить: а) закон изменения производственной функции; б) эластичность функции по каждому фактору; в) коэффициент эластичности по факторам при $x = 1$, $y = 1$.

3.9. Найти полный дифференциал функции трех переменных $u = x^2y\sin(xyz)$ в точке $M_0(1; 2; \pi)$.

Использование дифференциала и формулы Тейлора для приближенных вычислений и линеаризации функций

3.10. Для функции $z = f(x; y) = 5x^2y + xy^2$ вычислить $\Delta f(P_0)$ и $df(P_0)$, если $P_0(1; -1)$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}02$. Найти абсолютную и относительную погрешности замены приращения функции $\Delta f(P_0)$ ее дифференциалом $df(P_0)$.

3.11. Линеаризовать функцию $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ в окрестности точки $M_0(3; 4)$.

3.12. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $A = 1{,}001\cdot 2{,}002^2\cdot 3{,}003^3$; б) $B=\sqrt{(1{,}04)^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$.

3.13. Найти второй дифференциал d^2z функции $z = e^y \sin x + \dfrac{x^2}{y}$ в точке M_0 $(\pi; 1)$.

3.14. Разложить функцию $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1; 1; 0)$ до членов второго порядка включительно.

Дифференцирование сложных и неявно заданных функций

3.15. Найти производную $\dfrac{dz}{dt}$ сложной функции $z = (x + y) \ln (x + y)$, где $x = t^2$, $y = 1 - 2t$.

3.16. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $\ln (x^2 + y^2)$, где $x = u^2v$, $y = \dfrac{u^2}{v}$.

3.17. Найти $\dfrac{dz}{dx}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $y = e^{x^2}$.

3.18. Найти первую производную в точке A (0; 1) неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $xe^y + ye^x = 1$.

3.19. Найти первый дифференциал в точке A (1; 2) функции y: $x \to y(x)$, которая определяется уравнением $x^y - y^x + 1 = 0$.

3.20. Найти уравнение касательной и нормали, проведенной к линии $x^4 y + xy^4 - 2x^2y^2 = 32$ в точке A (2; 2).

3.21. Найти полный дифференциал функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $ze^z + ye^y = xe^x$.

Производная по направлению. Градиент и его свойства

3.22. Для функции $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ изобразить на плоскости $\mathbf{R}^2$ линии уровня

$$L_\alpha(f) = \left\{(x; y) : f(x, y) = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}\right\}.$$

Выделить линию уровня, проходящую через точку $P_0(4; 3)$. Найти градиент поля в этой точке. Проверить ортогональность $\operatorname{grad} f(P_0)$ и касательной прямой к выделенной линии уровня в точке P_0.

3.23. Найти производную $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ функции $u = f(x; y; z) = x^2 + y^3 + z^4$ в точке $P(2; -1; 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Найти направление и скорость наибольшего возрастания функции.

3.24. Найти производную функции $u = f(x, y, z) = \dfrac{y}{z^2} + 2e^{xyz}$ в точке $A(0; 1; 1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$, где $B(3; 3; 7)$, а также направление и скорость наибольшего возрастания (убывания) функции $u = f(x, y, z)$ в точке A.

3.25. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $P(3; 4)$ в направлении градиента этой функции.

3.26. Найти точки, в которых производные функции $z = x^2 - 2xy + y^2$ по любому направлению равны нулю.

3.27. Показать, что производные по любому направлению функции $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ в точке $\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$ равны нулю.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

3.28. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 676$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $3x - 12y + 4z = 0$.

3.29. Записать уравнение нормали к поверхности $2x^2 = z - 4y^2$, перпендикулярной данной плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$.

3.30. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 5x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 1$ в точке $(1; -1; 2)$.

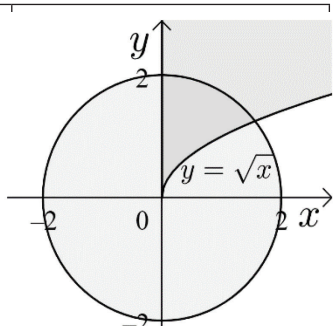
3.31. Для поверхности $z = xy$ написать уравнение касательной плоскости перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

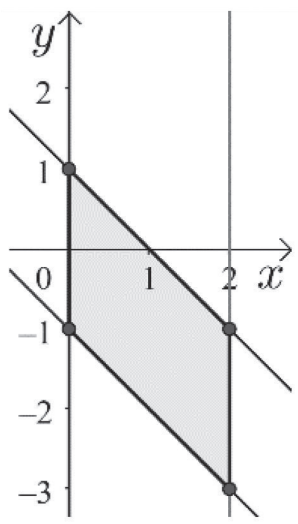
3.32. Показать, что касательная плоскость к поверхности $xyz = a^3$ в любой ее точке образует с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема. Найти этот объем.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

3.1

а) $\begin{cases} y \geq \sqrt{x} \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$



б) $\begin{cases} -1 \le x + y \le 1 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$	

3.2. а) 0; б) 1; в) 2; г) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

3.3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$ зависит от k, значит, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не существует.

3.4. $z = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, x \ne 0, y \ne 0, \\ 0, x = y = 0. \end{cases}$

3.5. Линия разрыва $y = x^2$. $\lim\limits_{y \to x^2} \frac{x^2 + y}{x^2 - y} = \infty$, т.е. в окрестности этой линии функция бесконечно велика.

3.7. $f'_x(2,1) = \frac{1}{2}$, $f'_y(2,1) = -\frac{1}{2}$, $f''_{xx}(2,1) = -\frac{1}{2}$, $f''_{yy}(2,1) = -\frac{1}{2}$, $f''_{xy}(2,1) = \frac{1}{2}$.

3.8. а) Изменения производственной функции по факторам x и y, соответственно, равны: $\frac{\partial f}{\partial x} = 20 + 8x + 3y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 10 + 3x - 4y$;

б) эластичность функции по каждому из факторов:

$$E_x(z) = \frac{x}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}\left(20 + 8x + 3y\right); \; E_y(z) = \frac{y}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}\left(10 + 3x - 4y\right),$$

где z = $f(x, y) = 20x + 10y + 4x^2 - 2y^2 + 3xy$;

в) коэффициенты эластичности при $x = 1$, $y = 1$: $E_x(z) = \frac{31}{35}$, $E_y(z) = \frac{9}{35}$.

3.9. $du = 4\pi dx + 2\pi dy + 4dz$.

3.10. Абсолютная погрешность $|\Delta f(P_0) - df(P_0)| = 0{,}0203$, относительная — $\delta = 3{,}83\ \%$.

3.11. $f(x, y) \approx -7 - \dfrac{17}{5}(x-3) - \dfrac{11}{5}(y-4)$.

3.12. $A \approx 100{,}648$; $B \approx 1{,}05$.

3.13. $d^2z = 2dx^2 - 2(e + 2\pi)dxdy + 2\pi^2 dy^2$.

3.14. $\ln(xy + z^2) = (x-1) + (y-1) + \dfrac{1}{2}\left(-(x-1)^2 - (y-1)^2 + 2z^2\right) + o(\rho^2)$,

где $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$.

3.15. $\dfrac{dz}{dt} = 2(t-1)\left(2\ln|t-1| + 1\right)$.

3.16. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{4}{u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}$.

3.17. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + \dfrac{2x^2 e^{x^2}}{x^2+y^2}$.

3.18. $-e - 1$.

3.19. $dy = (2 - 2\ln 2)\, dx$.

3.20. $x + y - 4 = 0$; $x - y = 0$.

3.21. $dz = -\dfrac{1}{e^z + ze^z}\left(\left(-e^x - xe^x\right)dx + \left(e^y + ye^y\right)dy\right)$.

3.22. $\alpha = \dfrac{1}{25}$, $\operatorname{grad} f(P_0) = \left(-\dfrac{8}{625}; -\dfrac{6}{625}\right)$; уравнение касательной $y = -\dfrac{4}{3x} + \dfrac{25}{3}$.

3.23. $\dfrac{\partial u(P)}{\partial \vec{l}} = -\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{grad} u(P) = (4, 3, 4)$, $\left|\operatorname{grad} u(P)\right| = \sqrt{41}$.

3.24. $\operatorname{grad} u(A) = (2; 1; -2)$; $\left|\operatorname{grad} u(A)\right| = 3$; $\dfrac{\partial u(A)}{\partial l} = -\dfrac{4}{7}$.

3.25. $\operatorname{grad} z(P) = 0{,}4$.

3.26. $\{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : y = x\}$.

3.28. $(6; -24; 8)$, $(-6; 24; -8)$.

3.29. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{-8} = \dfrac{z-18}{-1}$.

3.30. $9x + 5y - z - 2 = 0$;

3.31. $2x + 2y - z - 4 = 0$;

3.32. $V = \frac{9}{2}a^3$.

Тесты к главе 3

3.1. Значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = \ln(\cos(xy^2))$ в точке $P\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ равно…

3.2. Смешанная частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = \ln(2x + \sin y)$ в точке (1; 0) равна…

3.3. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$ в точке (1; 2) равна…

3.4. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial õ^2}$ функции $z = (x + y)e^{xy}$ в точке (0; 2) равна…

3.5. Если функция $z = f(x; y) = 2x^2 + 3y$, $P_0(1; -1)$, $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}02$, то:

а) полное приращение функции $\Delta f(P_0)$ при заданных x, y, Δx и Δy равно…;

б) разность $|\Delta f(P_0) - df(P_0)|$ равна…;

в) дифференциал функции $df(P_0)$ при заданных x, y, Δx и Δy равен…

3.6. Значение дифференциала первого порядка функции $z = \sqrt{x^2 + y}$ в точке (2; 5), если $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}1$, равно…

3.7. Приближенное значение функции $z = f(x, y) = \frac{x^3}{y^2}$ в точке A (1,98; 1,95), вычисленное с помощью первого дифференциала, равно…

3.8. Дифференциал второго порядка функции $z = xe^{2y} + ye^{-2x}$ в точке $P(-1; 1)$ равен:

а) $d^2z(P) = 4e^2$; б) $d^2z(P) = 4e^2 + d^2x - dy^2$; в) $d^2z(P) = 4e^2(dx^2 - dy^2)$; г) $d^2z(P) = 4e^2(dx^2 + dy^2)$.

3.9. Частные производные $z'_x(1, 0)$ и $z'_y(1, 0)$ неявной функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $e^{z-1} + 3xyz - 1 = 0$, и если $z(1, 0) = 1$, соответственно, равны:

а) 0; б) 2; в) 3; г) –3; д) 1.

3.10. Первая производная $y'(0)$ неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $xe^y + ye^x = 1$, если $y(0) = 1$, равна:

а) $-1-e$; б) -1; в) $-e$; г) 1.

3.11. Градиент функции $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ равен нулевому вектору в точке:

а) (2; 1; 1); б) (–2; 1; 1); в) (–2; –1; 1); г) (2; 2; 1).

3.12. Модуль градиента функции $f(x, y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{1-y}}$ в точке A (1; 0) равен:

а) $\sqrt{2}\mathrm{e}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}$; в) 2e; г) 2.

3.13. Производная функции трех переменных $u = y\sqrt{x} - \frac{x}{z}$ в точке A (4; 3; –1) по направлению к точке B (0; 1; –5) равна…

3.14. Производная функции $f = 2x^2z + 3yz^2$ трех переменных в точке P (1; –2; 1) в направлении градиента в этой точке равна:

а) $5\sqrt{5}$; б) 5; в) –1; г) $5\sqrt{2}$.

3.15. Касательная плоскость к поверхности $z = xy$ в точке P (–1; 2; –2) параллельна плоскости:

а) $-x + 2y + z = 0$; б) $2x - y - z = 0$; в) $x + y + z = 0$; г) $2x + y - z = 0$.

3.16. Уравнение нормали к поверхности $z^2 = x^2 - 2x + 6y - 8$, параллельной прямой $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$, имеет вид:

а) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+4}{4}$; б) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+4}{-4}$;

в) $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-4}{4}$; г) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+4}{4}$.

Ответы к тестам

3.1. –1. **3.2.** –0,5. **3.3.** 0,25. **3.4.** 12. **3.5.** а) –0,135; б) 0,005; в) –0,14. **3.6.** 0,15. **3.7.** 2,01. **3.8.** $d^2z(P) = 4\mathrm{e}^2(dx^2 - dy^2)$. **3.9.** $z'_x(1, 0) = 0$; $z'_y(1, 0) = -3$. **3.10.** –1 – e. **3.11.** (–2; 1; 1). **3.12.** $\sqrt{2}\mathrm{e}$. **3.13.** –4,5. **3.14.** $5\sqrt{5}$. **3.15.** $2x - y - z = 0$. **3.16.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+4}{4}$.

4. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

4.1. Экстремумы функций нескольких переменных

Задачи отыскания наибольших и наименьших величин часто возникают в науке, технике и экономике. В этой главе рассмотрим некоторые математические методы их анализа и решения. С этой целью научимся переходить от содержательной к математической постановке задачи. Введем ряд определений.

Пусть $X \subseteq \mathbf{R}^n$, f: $X \to \mathbf{R}$ и $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, X — открытое множество.

Задачами *оптимизации* (*экстремальными* задачами) называют задачи отыскания точек *экстремума* функций на заданных множествах. Формально математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

$$f(x) \to \text{extr},\ x \in X. \tag{4.1}$$

При этом функция f называется *целевой* функцией, X — *допустимым множеством* (*областью допустимых решений* (ОДР)), любой элемент $x \in X$ — *допустимой точкой* задачи (4.1). Значение целевой функции $f(x)$ выражает собой качество (цену) допустимой точки x. Требование принадлежности точки x множеству X выражает собой наличие некоторых ограничений, вытекающих, например, из возможностей реализации управления предприятием, ограниченности имеющихся ресурсов отрасли и т. д.

Под символом extr понимают min или max, при этом

$$\max f(x) = -\min\,(-f(x)).$$

Тогда $x^* \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ называется:

1) точкой *глобального* (или *абсолютного*) *минимума* (*максимума*) функции f на множестве X, если

$$f(x^*) < f(x)\ \left(f(x^*) > f(x)\right) \forall x \in X, x \neq x^*;$$

2) точкой *локального минимума* (*максимума*) функции f, если существует такая ε-окрестность $U_\varepsilon(x^*)$ точки x^*, что

$$f(x^*) < f(x)((f(x^*) > f(x)) \forall x \in U_\varepsilon(x^*) \cap X, x \neq x^*. \tag{4.2}$$

Замечание. Неравенство (4.2) равносильно

$$\Delta f(x^*) > 0 \left(\Delta f(x^*) < 0\right) \forall x \in U_\varepsilon(x^*) \cap X,\, x \neq x^*. \tag{4.3}$$

То есть, ФНП $f(x)$ имеет в точке x^* локальный extr, если существует окрестность $U_\varepsilon(x^*)$ точки x^*, для всех точек $x \neq x^*$ которой приращение функции $\Delta f(x^*)$ сохраняет знак, причем min при $\Delta f(x^*) > 0$ и max при $\Delta f(x^*) < 0$.

Введем обозначения: $f'(x) = \text{grad}\, f(x) = \left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$ — вектор первых частных производных — *градиент* функции f в точке $x \in X$;

$$H(f) = f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,\, j=\overline{1,\, n}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{\,2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^{\,2}} \end{pmatrix}$$

— *матрица Гессе*[9] (*гессиан*) функции f в точке $x \in X$.

Пусть x^* — внутренняя точка множества X: $x^* \in U_\varepsilon(x^*) \subset X$.

Рассмотрим сначала задачу *безусловной* оптимизации целевой функции f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (без ограничений):

$$f(x) \to \text{extr},\; x \in \mathbf{R}^n.$$

Теорема 4.1 (Ферма) (необходимые условия существования локального экстремума). Пусть x^* — точка локального экстремума функции $f(x)$, тогда в этой точке ее частные производные либо равны нулю, либо не существуют.

Для *дифференцируемой* в точке экстремума функции $f(x)$ *все* частные производные $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0,\, i = \overline{1, n},$ т. е.

$$\text{grad}\, f(x^*) = \mathbf{0}\; (\Leftrightarrow f'(x^*) = \mathbf{0}), \tag{4.4}$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор.

Точка x^*, удовлетворяющая (4.4) или в которой $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$ не существуют, называется *критической* точкой функции $f(x)$.

Всякая точка экстремума, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, является *стационарной*. Обратное, вообще говоря, неверно.

[9] Людвиг Отто Гессе (1811–1874) — немецкий математик. Гессе родился в Кенигсберге (ныне Калининград). Работал в основном над алгебраическими инвариантами и геометрией. В действительности, профессором Гессе было введено понятие определителя подобной матрицы, названного позднее *гессианом*.

Пример 4.1. Показать, что стационарная точка функции $z = 2 + 2\,xy - 4x^2 - 6y^2$ является точкой экстремума.

Применяя необходимые условия (НУ), находим точки, в которых может быть экстремум:

$$\text{НУ: } \begin{cases} z'_x \equiv -8x + 2y = 0, \\ z'_y \equiv -12y + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Таким образом, функция имеет одну критическую точку, которая является стационарной: $O\,(0;\,0)$.

Представим заданную функцию в виде

$$z = 2 - (x - y)^2 - 3x^2 - 5y^2.$$

Имеем $z\,(0,\,0) = 2$. Так как $z\,(x,\,y) < z\,(0,\,0) = 2$ для всех $(x,\,y) \neq (0,\,0)$, то $O\,(0;\,0)$ — точка локального максимума заданной функции (рис. 4.1).

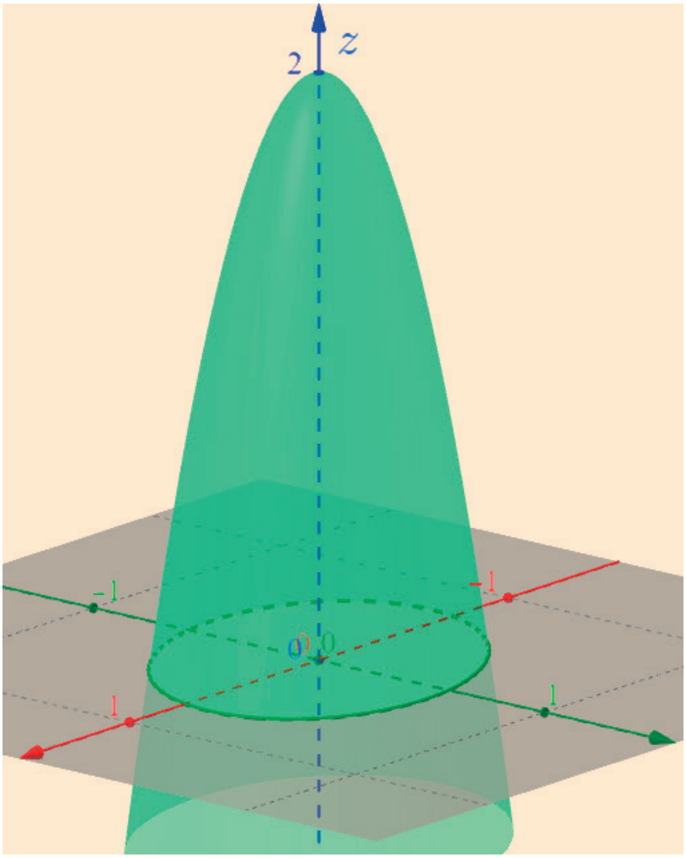


Рис. 4.1. Геометрическая иллюстрация примера 4.1

Пример 4.2. Показать, что стационарная точка функции $z = \frac{1}{4}y^2 - x^2$ не является точкой экстремума. Аналогично предыдущему примеру находим точки возможного экстремума:

$$\text{НУ: } \begin{cases} z'_x \equiv -2x = 0, \\ z'_y \equiv \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Имеем:

$$\Delta_x z(0,0) = z(0+\Delta x, 0) - z(0,0) = \frac{1}{4}\cdot(0+0)^2 - (0+\Delta x)^2 = -(\Delta x)^2 < 0,$$

$$\Delta_y z(0,0) = z(0,\Delta y) - z(0,0) = \frac{1}{4}\cdot(\Delta y)^2 > 0.$$

Таким образом, в окрестности точки (0; 0) функции $z = \frac{1}{4}y^2 - x^2$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Согласно неравенству (4.4) в точке (0; 0) экстремума нет (рис. 4.2).

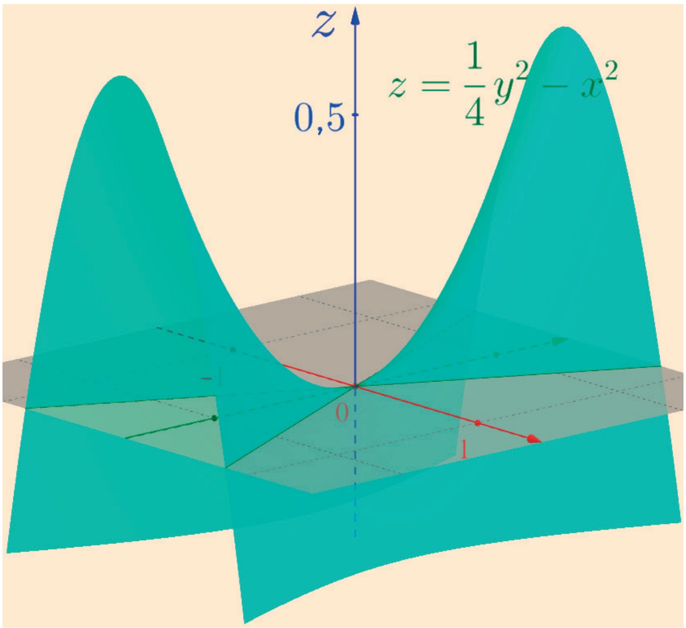


Рис. 4.2. Геометрическая иллюстрация примера 4.2

Замечание. Непрерывная функция может иметь экстремум, но не иметь стационарных точек. Рассмотрим функцию $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Ее графиком является верхняя половина конуса ($z \geq 0$), и, очевидно, (0; 0) — точка минимума (рис. 4.3). Но $z'_x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow z'_x(0,0), z'_y(0,0)$ в точке (0; 0) не существуют и точка (0; 0) стационарной не является (конечно, является критической точкой).

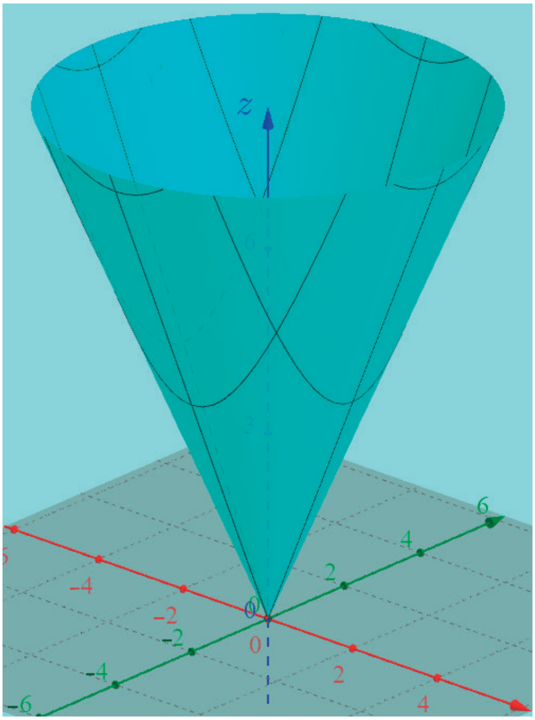


Рис. 4.3. Пример функции, имеющей экстремум, но не имеющей стационарных точек

4.2. Некоторые сведения о квадратичных формах

Квадратичной формой в базисе $\{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n\}$ называется сумма

$$F(\boldsymbol{x}) = X^{T}AX = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots +$$

$$+ a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij} = a_{ji},$$

где $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица порядка n, которая называется *матрицей квадратичной формы* $F(\boldsymbol{x})$. Квадратичная форма $F(\boldsymbol{x})$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ выполняется неравенство $F(\boldsymbol{x}) > 0$ $(F(\boldsymbol{x}) < 0)$.

Например, квадратичная форма $F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}y^2$ является положительно определенной (рис. 4.4); $F(x,y)=-x^2-\frac{1}{2}y^2$ — отрицательно определенной (рис. 4.5).

Если F ($\boldsymbol{x}$) ≥ 0 (F ($\boldsymbol{x}$) ≤ 0) ∀ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\theta}$, то квадратичная форма F ($\boldsymbol{x}$) называется *неотрицательно* (*неположительно*) *определенной* (обращается в ноль не только при $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$). Например, F $(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ — неотрицательно определенная квадратичная форма, так как F $(x, y) \geq 0$ ∀ x, y, но F $(x, y) = 0$ не только при $x = y = 0$; так, F (2, 2) = 0 (рис. 4.6).

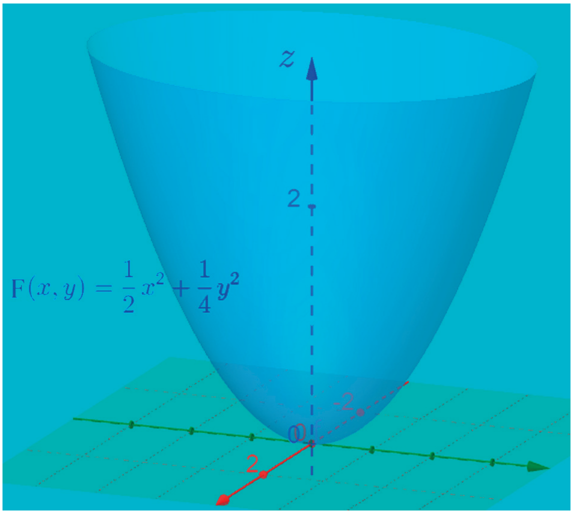


Рис. 4.4. Пример положительно
определенной квадратичной формы

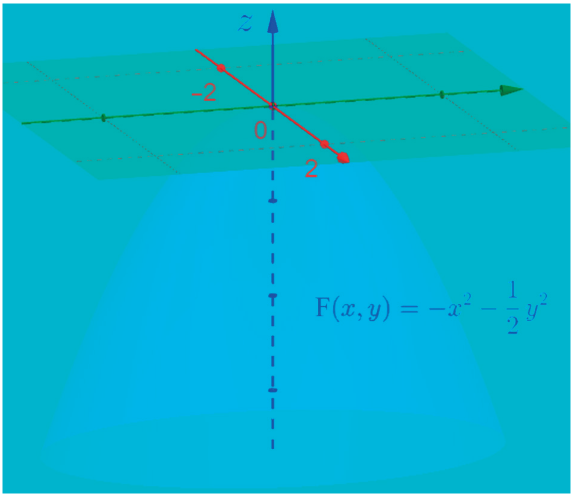


Рис. 4.5. Пример отрицательно
определенной квадратичной формы

Квадратичная функция F($\boldsymbol{x}$) называется *знакопеременной* (*неопределенной*), если она принимает как положительные, так и отрицательные значения. Например, F $(x, y) = x^2 - y^2$ — знакопеременная квадратичная форма, так как она имеет как положительные, так и отрицательные значения; так, F $(2, 1) > 0$, F $(1, 2) < 0$ (рис. 4.7).

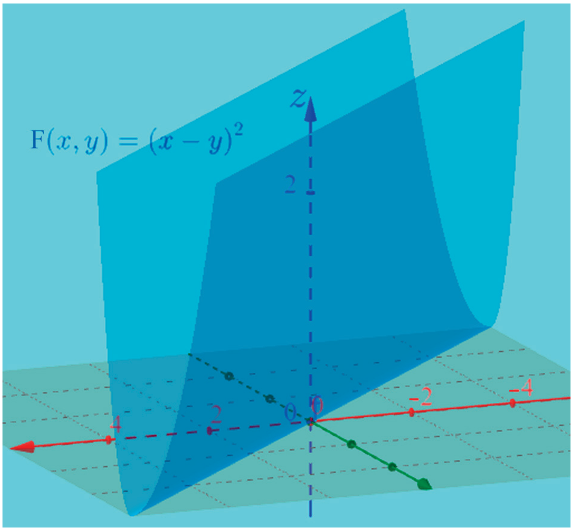


Рис. 4.6. Пример неотрицательно определенной квадратичной формы

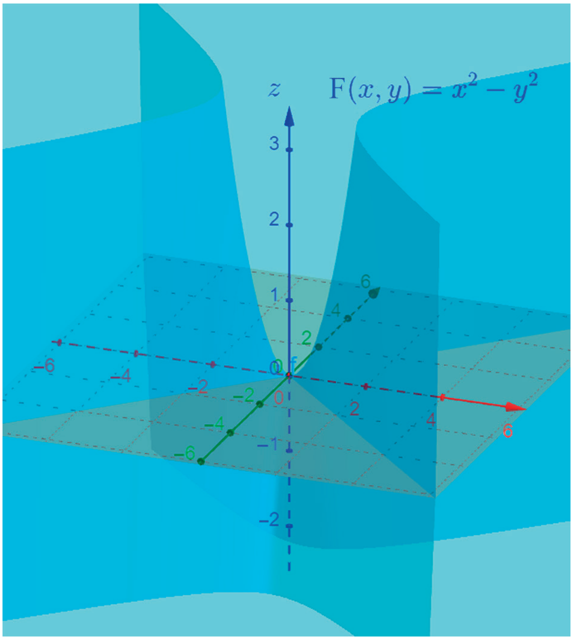


Рис. 4.7. Пример знакопеременной квадратичной формы

Критерий Сильвестра

Составим ряд *главных миноров* квадратичной формы F ($\boldsymbol{x}$):

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 4.2 (критерий Сильвестра[10] знакоопределенности квадратичной формы).

1. Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны.

2. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \left(-1\right)^n \Delta_n > 0.$$

Если $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, …, $\Delta_n \geq 0$ или $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, …, $(-1)^n \Delta_n \geq 0$ и имеется j, при котором $\Delta_j = 0$, то F($\boldsymbol{x}$) является неотрицательно определенной или, соответственно, неположительно определенной квадратичной формой.

Во всех остальных случаях квадратичная форма является неопределенной.

Достаточные условия существования локального экстремума

Теорема 4.3. Пусть функция $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ определена и имеет непрерывные вторые производные в некоторой окрестности точки $x^* \in X$. Пусть $f'(x^*) = \mathbf{0}$. Тогда, если квадратичная форма

$$d^2 f(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j = F\left(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\right) \tag{4.5}$$

является положительно (отрицательно) определенной, то x^* — точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$.

Если же квадратичная форма (4.5) неопределенная, то в точке x^* нет экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора при $m = 2$:

$$\Delta f(x^*) = f\left(x^* + \Delta x\right) - f(x^*) = df(x^*) + \frac{1}{2!} d^2 f(x^*) + o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2} < \delta.$ Но по условию

[10] Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) — английский математик. Известен своими работами в теории матриц, теории чисел и комбинаторике. Играл ведущую роль в американской математике второй половины XIX в. в качестве профессора в Университете Джонса Хопкинса. Основатель Американского математического журнала.

$$df(x^*)=0\left(\Leftrightarrow f'(x^*)=\mathbf{0}\Leftrightarrow \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}=0, i=\overline{1,n}\right).$$

Поэтому

$$\Delta f(x^*)=\frac{1}{2}d^2 f(x^*)+o(\rho^2).$$

Ясно, что в достаточно малой окрестности точки x^* знаки $\Delta f(x^*)$ и $d^2f(x^*)$ совпадают. Если знак $\Delta f(x^*)$ постоянен в окрестности точки x^*, то точка x^* является точкой минимума, если $d^2f(x^*) > 0$ ($\Leftrightarrow \Delta f(x^*) > 0$), точка x^* является точкой максимума, если $d^2f(x^*) < 0$ ($\Leftrightarrow \Delta f(x^*) < 0$).

Для установления знака квадратичной формы используют критерий Сильвестра.

Замечание. Если $df(x^*) = 0$ и $d^2f(x^*)$ является неотрицательно определенной (неположительно определенной) квадратичной формой, то в точке x^* функция может иметь локальный экстремум, а может и не иметь.

Пример 4.3. Рассмотрим три функции:

1. $z = x^4 + y^4$. Имеем $dz = 0$, $d^2z = 0$ в точке (0, 0).
2. $z = x^2y$. Аналогично $dz = 0$, $d^2z = 0$ в точке (0, 0).
3. $z=\mathrm{e}^{-(x-y)^2}$. Имеем $dz = 0$, $d^2z = 0$ во всех точках прямой $y = x$.

При этом, очевидно, что функция $z = x^4 + y^4$ имеет минимум в точке (0, 0) (рис. 4.8), вторая функция не имеет экстремума в точке (0, 0) (рис. 4.9), а третья имеет бесконечно много точек экстремума (рис. 4.10).

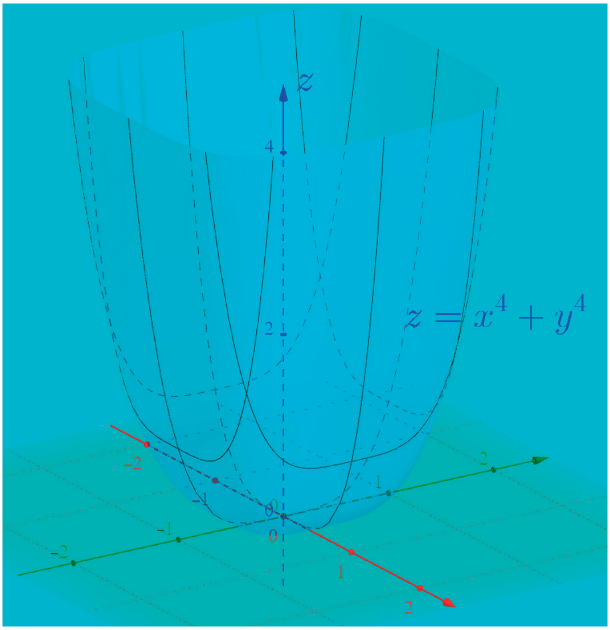


Рис. 4.8. Пример функции, имеющей минимум в точке (0, 0)

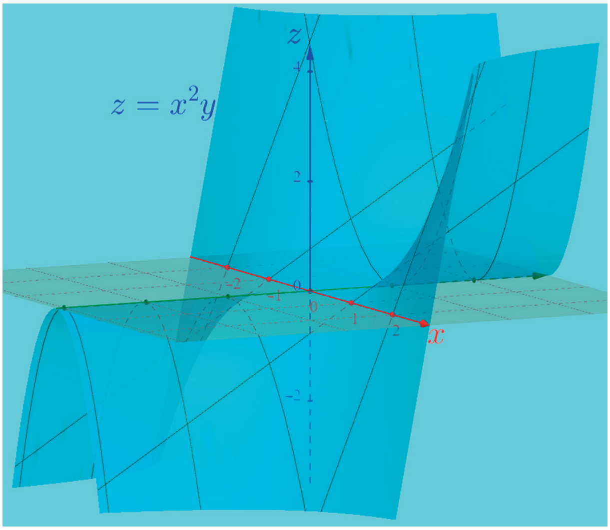


Рис. 4.9. Пример функции,
не имеющей экстремум в точке (0, 0)

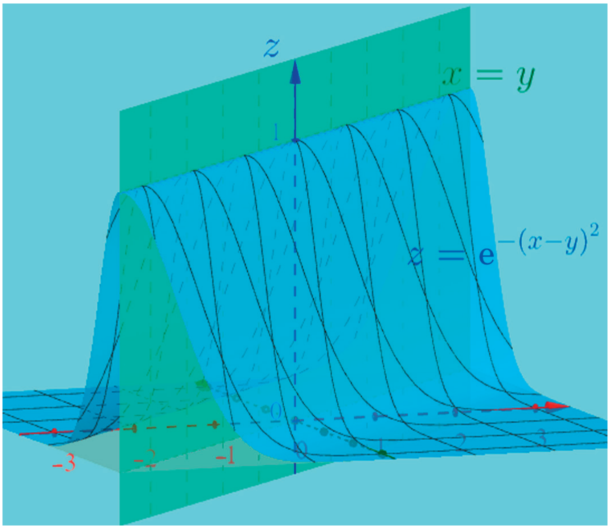


Рис. 4.10. Пример функции, имеющей
бесконечно много точек экстремума

Пример 4.4. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f\left(x,y,z\right)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z.$$

Решение. Если дифференцируемая функция $u=f(x,\ y,\ z)$ достигает экстремума в точке, то согласно необходимому условию экстремума, в этой точке частные производные первого порядка равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 3x^2 + 12y = 0, \\ f'_y \equiv 2y + 12x = 0, \\ f'_z \equiv 2z + 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow z = -1,\ y = -6x,\ 3x^2 + 12(-6x) = 0,$$

Итак, P_1 (0, 0, –1), P_2 (24; –144; –1) — точки возможного локального экстремума.

Для применения достаточных условий (ДУ) составим матрицу Гессе $H(f) = f''(x, y, z)$ квадратичной формы $d^2f(x, y, z)$. Находим:

$$f''_{x^2} = 6x,\ f''_{y^2} = 2,\ f''_{xy} = 12,\ f''_{z^2} = 2,\ f''_{xz} = 0,\ \ f''_{yz} = 0.$$

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f''(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ f''(P_2) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В точке P_1 главные миноры: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -144$, $\Delta_3 = -288$. Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма $d^2f(P_2)$ знакопеременная. Экстремума нет.

В точке P_2 главные миноры: $\Delta_1 = 144$, $\Delta_2 = 144$, $\Delta_3 = 288$. По критерию Сильвестра $d^2f(P_2)$ — положительно определенная квадратичная форма ($d^2f(P_2) > 0$), т. е. в точке (24, –144, –1) функция имеет локальный минимум и принимает значение:

$$f_{\min} = f(24, -144, -1) = 24^3 + 144^2 + 1 + 12 \cdot 24 \cdot (-144) - 2 = -6\,913.$$

Пример 4.5. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$.

Как и в предыдущем примере, найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 3x^2 - 6y = 0, \\ f'_y \equiv 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ x = 4y^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

С учетом $y = \dfrac{x^2}{2}$ получаем две точки возможного локального экстремума: O (0; 0), $P\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.

Для исследования этих точек вычислим дифференциал второго порядка. Находим: $f''_{x^2}=6x$, $f''_{y^2}=48y$, $f''_{xy}=-6$.

Следовательно, $d^2f(x, y) = 6xdx^2 + 2\cdot(-6)\,dxdy + 48ydy^2$.

Для исследования знака квадратичной формы применим критерий Сильвестра. Запишем матрицу квадратичной формы (гессиан):

$$f''(x, y)=\begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}.$$

Запишем: $f''(O)=f''(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$,

$$f''(P)=f''\left(1,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}.$$

Находим главные миноры квадратичной формы.

В точке O (0; 0): $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -36$. Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма $d^2f(P)$ знакопеременная. Экстремума нет.

В точке P: $\Delta_1 = 6$, $\Delta_2 = 108$. Согласно критерию Сильвестра, $d^2f(P)$ — положительно определенная квадратичная форма ($d^2f(P) > 0$), т.е. в точке $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$ функция имеет локальный минимум (на рис. 4.11 ему соответствует точка A) и принимает значение:

$$f_{\min}=f\left(1,\frac{1}{2}\right)=1^3-6\cdot1\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=-1.$$

Пример 4.6. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 - 2x + y$.

Решение. Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 3x^2-2=0, \\ f'_y \equiv 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

стационарных (и критических) точек нет, и, следовательно, функция не имеет экстремума.

Пример 4.7. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 2 - x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2.$$

Решение. Найдем стационарные точки функции $f(x, y)$:

НУ: $\begin{cases} f'_x \equiv -2xy^2+2y-2x=0, \\ f'_y \equiv -2x^2y+2x-2y=0. \end{cases}$

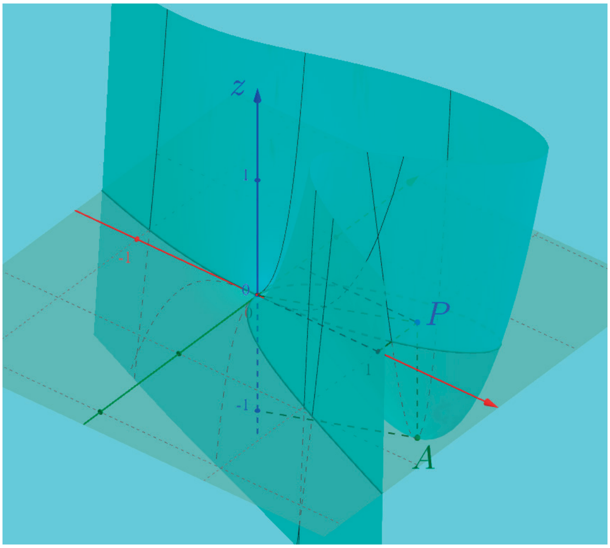


Рис. 4.11. Геометрическая иллюстрация
к решению примера 4.5

Сложив два уравнения, получаем:

$$xy(x+y)=0 \Leftrightarrow x=0, \text{ или } y=0, \text{ или } y=-x \Leftrightarrow x=y=\ 0.$$

Получили одну точку возможного локального экстремума: O (0; 0).

Для применения достаточных условий составим матрицу Гессе $H(f)=f''(x,y)$ квадратичной формы $d^2f(x,y)$. Находим:

$$f''_{x^2}=-2y^2-2,\ f''_{y^2}=-2x^2-2,\ \ f''_{xy}=-4xy+2.$$

$$H(f)=f''(x,y)=\begin{pmatrix}-2y^2-2 & -4xy+2\\ -4xy+2 & -2x^2-2\end{pmatrix},\ \ f''(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Находим главные миноры квадратичной формы.

В точке O (0; 0): $\Delta_1=-2$, $\Delta_2=4-4=0$. Квадратичная форма $d^2f(x,y)$ является неположительно определенной, достаточные условия экстремума не выполняются. Требуются дополнительные исследования.

Представим заданную функцию в виде

$$z=2-x^2y^2-(x-y)^2.$$

Имеем $z(0,0)=2$. Так как $z(x,y)<z(0,0)=2$ для любых $(x,y)\neq(0,0)$, то O (0; 0) — точка локального максимума заданной функции и $f_{max}=f(0;0)=2$.

4.3. Условный экстремум

В п. 4.1 рассматривался вопрос об отыскании локального экстремума функции, аргументы которой не связаны никакими дополнительными условиями (в качестве допустимого множества выступает все пространство $\mathbf{R}^n$). На практике же часто возникает потребность, главным образом, под запросы экономики, в решении задач об отыскании экстремумов функции, аргументы которой удовлетворяют определенным условиям связи (ограничениям). Такие экстремумы называются условными.

Классической задачей на *условный экстремум* принято называть задачу минимизации (или максимизации) функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве X, заданном системой из конечного числа уравнений «связей»:

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n: g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, k\}.$$

Записывается эта задача в виде

$$f(x) \to \text{extr}, g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, k. \tag{4.6}$$

Точка $x^* \in X$ называется точкой *условного локального минимума* (*максимума*) функции $f(x)$ при условиях $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, если существует такая окрестность этой точки $U_\delta(x^*)$, что для любой точки $x \in U_\delta(x^*) \cap X$, $x \neq x^*$ имеет место неравенство

$$f(x) > f(x^*) \quad \big(f(x) < f(x^*)\big).$$

Заметим, что, как и в случае безусловного экстремума, последние неравенства соответственно равносильны:

$$\Delta f(x^*) > 0\big(\Delta f(x^*) < 0\big) \forall x \in U_\varepsilon(x^*) \cap X, x \neq x^*.$$

Пример 4.8. Исследовать $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \to \text{extr}$, $x + y = 1$.

Графиком функции $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ является параболоид (рис. 4.12). Эта функция имеет максимум в начале координат; ему соответствует вершина A параболоида. Если же рассматривать плоскость $x + y = 1$, то геометрически ясно, что для точек этой плоскости наибольшее значение функции $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ достигается в точке $P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Это и есть точка условного экстремума (максимума) функции в данной плоскости $x + y = 1$. Ей соответствует точка B на параболоиде и $z_{\max} = z(B) = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

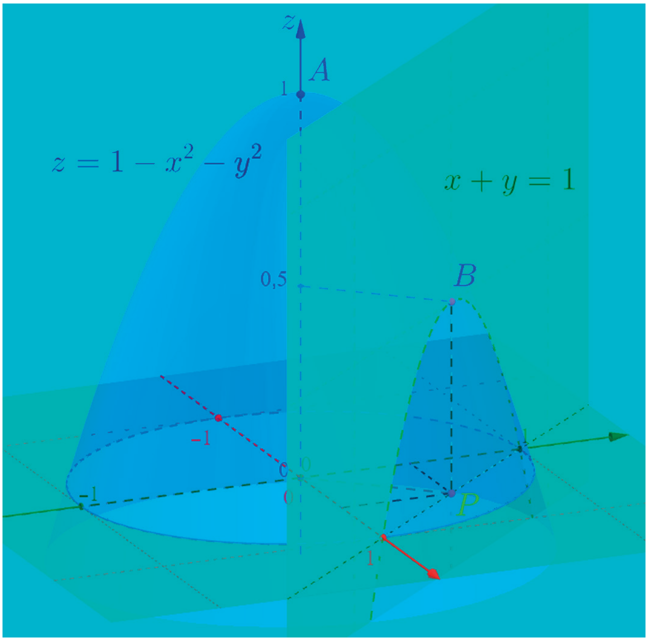


Рис. 4.12. Геометрическая иллюстрация примера 4.8

Рассмотрим аналитический способ решения этой задачи. Благодаря уравнению $x + y = 1$ исключим из функции $f(x, y)$ переменную $y = 1 - x$, что сведет задачу к исследованию функции одной переменной:

$$f(x, y)\big|_{y=1-x} = 1 - x^2 - (1-x)^2 = -2x^2 + 2x =: g(x).$$

Найдем критические точки функции $g(x) = -2x^2 + 2x$:

$$g'(x) \equiv -4x + 2 = 0 \Rightarrow x^* = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $x^* = \dfrac{1}{2}$ — точка возможного экстремума функции одной переменной.

Проверим достаточное условие экстремума функции одной переменной:

$$g''(x) = g''(x^*) = -4 < 0.$$

Следовательно, $x^* = \dfrac{1}{2}$ — точка безусловного максимума для функции $g(x) = -2x^2 + 2x$. Соответствующая ей точка $(x^*, y^*) = \left(\dfrac{1}{2}, 1 - \dfrac{1}{2}\right)$ — точка условного максимума функции $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ при условии $x + y = 1$.

Таким образом, задачу поиска условного экстремума можно свести к решению задачи о нахождении локального экстремума функции одной переменной в случае, когда одну переменную можно выразить из уравнения связи через другую.

Замечание. Условный экстремум может достигаться не в единственной точке.

Рассмотрим задачу:

$$f(x, y) = |x| + |y| \to \text{extr},\ x + y = 1.$$

Все точки отрезка прямой AB являются точками условного минимума функции $f(x, y)$ при условии $x + y = 1$ (рис. 4.13).

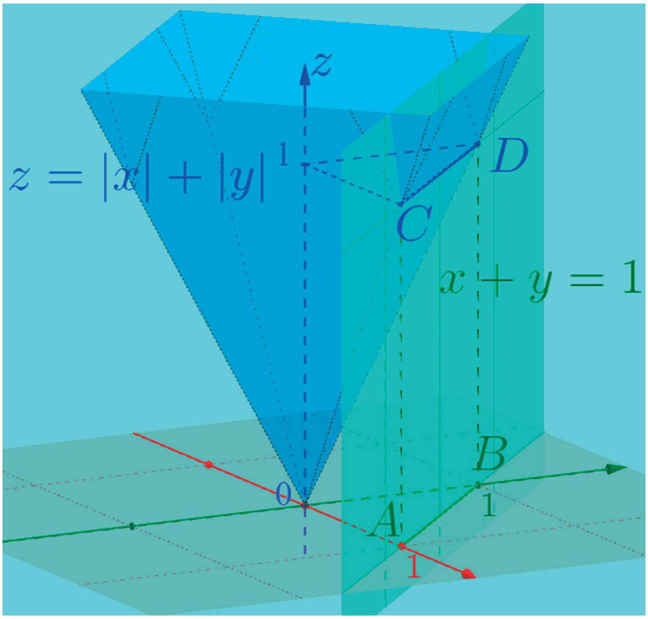


Рис. 4.13. Условный экстремум достигается на отрезке прямой AB

Так как концы A и B этого отрезка имеют координаты (1; 0) и (0; 1), соответственно, то любая точка минимума функции $f(x, y)$ представима в виде $(x^*, y^*) = \alpha(1; 0) + (1 - \alpha)(0; 1) = (\alpha; 1 - \alpha)$, где $\alpha \in [0, 1]$.

Условному минимуму функции $z = |x| + |y|$ при дополнительном условии $g(x, y) \equiv x + y - 1 = 0$ соответствуют точки отрезка CD и

$$z_{\min} = z(\alpha, 1 - \alpha) = |\alpha| + |1 - \alpha| = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Локальный же безусловный минимум функции $z = |x| + |y|$ достигается в начале координат: $z_{\min} = z(0, 0) = 0$.

Метод Лагранжа

Справедливы следующие утверждения.

1. Если функции $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, *непрерывны* на $\mathbf{R}^n$, то множество X — замкнутое.

2. **Теорема Вейерштрасса.** Если функция $f(x)$ *непрерывна* на *ограниченном замкнутом множестве* X, то решение задачи (4.6) существует.

Для нахождения условного экстремума ФНП используют метод *Лагранжа* (*принцип множителей Лагранжа*). Этот метод формулирует необходимые условия локальной оптимальности функций при заданных ограничениях.

1°. Введем функцию Лагранжа задачи (4.6):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — множители Лагранжа.

Задача на условный экстремум (4.6) преобразована к задаче безусловной оптимизации. Неизвестными задачи безусловной оптимизации (4.6) являются $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

2°. **Теорема** (необходимые условия существования условного экстремума).

Пусть:

функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке $x^* \in X$,

функции $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ *непрерывно дифференцируемы* в некоторой окрестности этой точки.

Если x^* — точка локального экстремума задачи (4.6), то найдутся множители Лагранжа $\lambda^* = \left(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*\right)$, одновременно не равные нулю $\left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i^*)^2 > 0\right)$, такие, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1, n}, \\ \dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1, k}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial L\left(x^*, \lambda^*\right)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1, k} \Leftrightarrow g_i(x^*) = 0, i = \overline{1, k} \Leftrightarrow x^* \in X.$$

3°. Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается либо непосредственной проверкой неравенств

$$f(x^*) < f(x)\left(\Delta f(x^*) > 0\right) \text{ или } f(x^*) > f(x)\left(\Delta f(x^*) < 0\right)$$

$\forall x \in U_\delta(x^*) \cap X$, $x \neq x^*$, либо с помощью *достаточных условий* существования решения задачи (4.6): на основании исследования знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа $d^2L(x^*, \lambda^*)$. При этом следует учесть, что дифференциалы независимых переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ связаны уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} dx_j = 0, \ \sum_{j=1}^{n} d^2 x_j > 0, i = \overline{1, k},$$

получающимися из уравнений связи $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, k$ в задаче (4.6).

Пример 4.9. Исследовать функцию $f(x, y, z) = x^2y^3z^4 \to \text{extr}$ при условии

$$2x + 3y + 4z = 9, x > 0, y > 0, z > 0.$$

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

1°. $L(x, y, z, \lambda) = x^2y^3z^4 + \lambda(2x + 3y + 4z - 9)$.

2°. НУ: $\begin{cases} L'_x \equiv 2xy^3z^4 + 2\lambda = 0, \\ L'_y \equiv 3x^2y^2z^4 + 3\lambda = 0, \\ L'_z \equiv 4x^2y^3z^3 + 4\lambda = 0, \\ g(x, y, z) \equiv 2x + 3y + 4z - 9 = 0. \end{cases}$

Исключая λ из первых трех уравнений, с учетом уравнения $2x + 3y + 4z = 9$, находим $\lambda^* = -1$, $x^* = y^* = z^* = 1$.

Итак, точка $P^*(1; 1; 1)$ — точка возможного экстремума.

3°. Находим вторые частные производные:

$$L''_{x^2} = 2y^3z^4, L''_{xy} = 6xy^2z^4, L''_{xz} = 8xy^3z^3, L''_{y^2} = 6x^2yz^4,$$
$$L''_{yz} = 12x^2y^2z^3, L''_{z^2} = 12x^2y^3z^2$$

и составляем второй дифференциал функции Лагранжа в точке $P^*(1, 1, 1)$:

$$d^2L\left(x^*, y^*, z^*, \lambda_1^*\right) = d^2L\left(1, 1, 1, -1\right) = 2dx^2 + 6dy^2 + 12dz^2 +$$
$$+12dxdy + 16dxdz + 24dydz = \left[2x + 3y + 4z = 9 \Rightarrow 2dx + 3dy + 4dz = 0\right] =$$
$$= \left(\overbrace{2dx + 3dy + 4dz}^{=0}\right)^2 - 2dx^2 - 3dy^2 - 4dz^2 < 0,$$

поэтому точка $P^*(1;\ 1;\ 1)$ — точка локального условного максимума и $\max\limits_{(x,y,z)\in X} f = f(1,1,1) = 1.$

Пример 4.10. Исследовать функцию $z = (x-1)^2 + y^2 \to \text{extr}$, если $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1.$

Решение. Составим функцию Лагранжа:

1°. $L(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 3y^2 - 9).$

$$2°.\ \text{НУ:}\ \begin{cases} L'_x \equiv 2(x-1) + 2\lambda x = 0, \\ L'_y \equiv 2y + 6\lambda y = 0, \\ x^2 + 3y^2 - 9 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{1+\lambda}, \\ y(1+3\lambda) = 0, \\ x^2 + 3y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения или $y = 0$, или $\lambda = -\dfrac{1}{3}.$

Пусть $y = 0$. Тогда из последнего уравнения $x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3$. С учетом первого уравнения $\lambda_1 = -\dfrac{2}{3}, \lambda_2 = -\dfrac{4}{3}.$

Пусть теперь $\lambda = -\dfrac{1}{3}.$ Из первого уравнения $x = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{3}{2}.$ С учетом последнего уравнения $y_1 = \dfrac{3}{2}, y_2 = -\dfrac{3}{2}.$

Итак, получены четыре точки, подозрительные на экстремум:

$$P_1^*(3,0),\ \lambda_1^* = -\frac{2}{3},\ P_2^*(-3,0),\ \lambda_2^* = -\frac{4}{3},$$

$$P_3^*\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),\ \lambda_3^* = -\frac{1}{3},\ P_4^*\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right),\ \lambda_4^* = -\frac{1}{3}.$$

3°. Находим вторые частные производные:

$$L''_{x^2} = 2 + 2\lambda,\ L''_{y^2} = 2 + 6\lambda,\ L''_{xy} = 0$$

и составляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L(x^*, y^*, \lambda^*) = (2 + 2\lambda)dx^2 + 2 \cdot 0 \cdot dxdy + (2 + 6\lambda)dy^2 =$$
$$= (2 + 2\lambda)dx^2 + (2 + 6\lambda)dy^2.$$

Проверим теперь знак второго дифференциала функции Лагранжа во всех четырех точках:

$$d^2L(P_1^*) = d^2L\left(3, 0, \underbrace{-\frac{2}{3}}_{\lambda_1}\right) = \left(2 - \frac{4}{3}\right)dx^2 + (2-4)dy^2 = \frac{2}{3}dx^2 - 2dy^2.$$

Так как $x^2 + 3y^2 - 9 = 0 \Rightarrow 2xdx + 6ydy = 0$, то

$$d^2L\left(3, 0, \underbrace{-\frac{2}{3}}_{\lambda_1}\right) = \left[\begin{matrix} xdx + 3ydy = 0 \Rightarrow \\ 3dx + 3\cdot 0\cdot dy = 0 \Rightarrow dx = 0 \end{matrix}\right] = \frac{2}{3}\cdot 0 - 2dy^2 < 0.$$

Поэтому точка $P_1^*(3; 0)$ — точка локального условного максимума и $f_{\max} = f(3, 0) = 4$. На рис. 4.14 ей соответствует точка A.

Далее

$$d^2L(P_2^*) = d^2L\left(-3, 0, \underbrace{-\frac{4}{3}}_{\lambda_2}\right) = \left(2 - \frac{8}{3}\right)dx^2 + (2-8)dy^2 = -\frac{2}{3}dx^2 - 6dy^2 < 0.$$

Точка $P_2^*(-3; 0)$ — точка локального условного максимума и $f_{\max} = f(-3, 0) = 16$. На рис. 4.14 ей соответствует точка B.

Наконец,

$$d^2L(P_{3,4}^*) = d^2L\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}, \underbrace{-\frac{1}{3}}_{\lambda_{3,4}}\right) = \left(2 - \frac{2}{3}\right)dx^2 + (2-2)dy^2 = \frac{4}{3}dx^2 > 0.$$

Поэтому имеем две точки, в которых достигается локальный минимум:

$$f_{\min} = f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2},\ \ f_{\min} = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

На рис. 4.15 им соответствуют точки C и D соответственно.

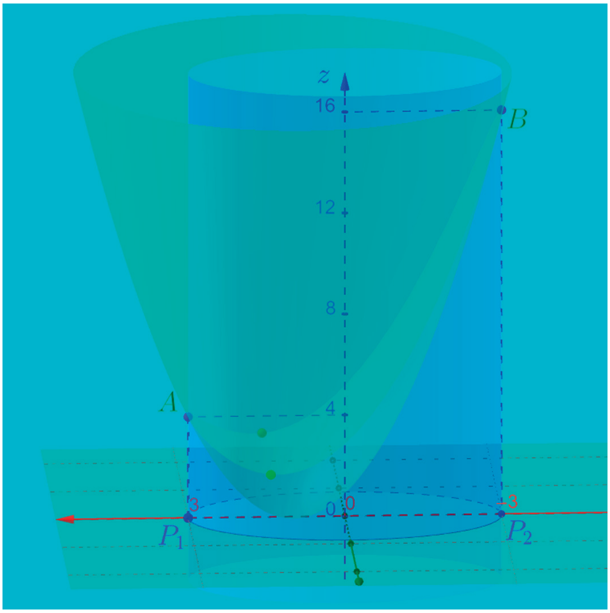


Рис. 4.14. Геометрическая иллюстрация точек
условного максимума

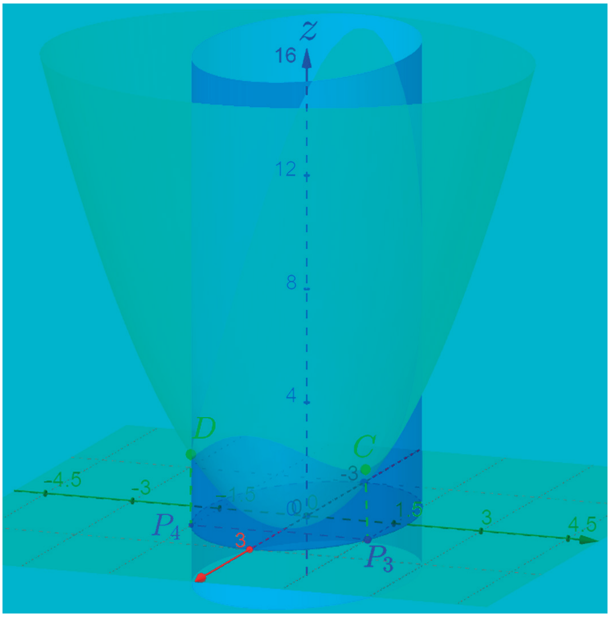


Рис. 4.15. Геометрическая иллюстрация точек
условного минимума

Геометрический смысл необходимых условий локального условного экстремума

Рассмотрим задачу на условный экстремум функции

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \to \text{extr},$$

при наличии одного ограничения:

$$g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

В этом случае функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, λ — множитель Лагранжа.

Система уравнений (4.7) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \lambda \dfrac{\partial g(x^*)}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1, n}, \\ g(x^*) = 0. \end{cases}$$

Первые n уравнений системы равносильны векторному равенству

$$f'(x^*) + \lambda g'(x^*) = \mathbf{0}, \tag{4.8}$$

которое означает, что градиенты $f'(x^*)$, $g'(x^*)$ линейно зависимы, т. е. $f'(x^*)$ и $g'(x^*)$ коллинеарны.

Эти градиенты, если они отличны от нуля, направлены ортогонально к поверхностям (линиям) уровня $f(x) = f(x^*)$ и $g(x) = g(x^*)$, причем их коллинеарность говорит о том, что решение x^* должно быть точкой касания данных поверхностей (линий) (рис. 4.16).

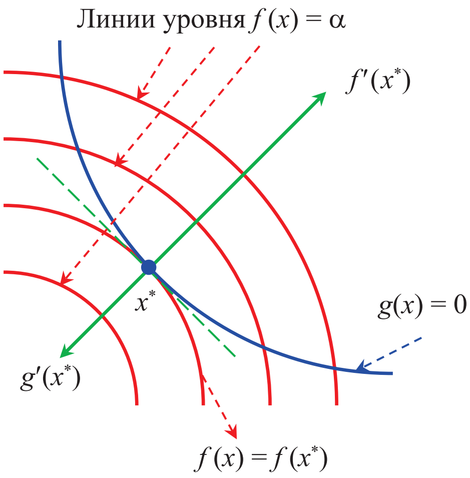


Рис. 4.16. Геометрическая иллюстрация необходимых условий условного экстремума

Пример 4.11. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = -3x + 4y$$

при условии $g(x, y) := x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Приведем *геометрическую* иллюстрацию задачи. Множество X представляет собой окружность радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 4.17). Линиями уровня являются параллельные прямые: $-3x + 4y = \alpha$. На этих прямых функция $f(x, y)$ принимает постоянное значение, равное α, в частности, это же значение она принимает в точках пересечения указанной прямой с окружностью X: $x^2 + y^2 = 4$. Например, значению $\alpha = 0$ соответствует прямая, проходящая через начало координат, и на этой прямой функция принимает значение, равное нулю. Свое минимальное значение функция $f(x, y)$ будет принимать на прямой, которая касается справа окружности, а именно, в точке касания $P_1\ (x_1, y_1)$ указанной прямой с окружностью, т. е.

$$\min_{(x,\, y)\in X} f(x, y) = f(P_1).$$

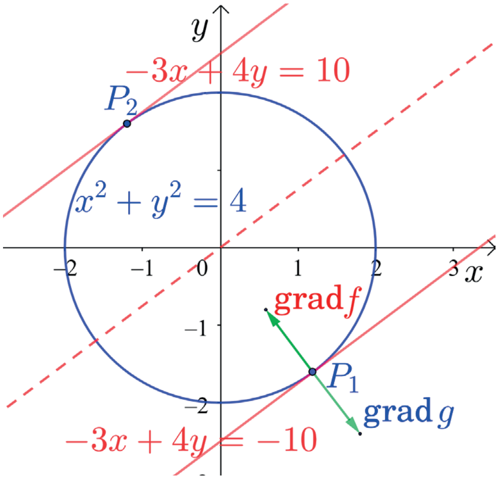


Рис. 4.17. Геометрическая интерпретация решения примера 4.11

Свое максимальное значение функция $f(x, y)$ будет принимать на прямой, которая касается слева окружности, а именно, в точке касания $P_2\ (x_2, y_2)$ указанной прямой с окружностью X, т. е.

$$\max_{(x,\, y)\in X} f(x, y) = f(P_2).$$

Итак, задача сводится к нахождению точек $P_1\ (x_1, y_1)$ и $P_2\ (x_2, y_2)$.

Для этого найдем градиенты целевой функции $f(x, y) = -3x + 4y$ и функции связи $g\ (x, y) = x^2 + y^2 - 4$:

$$f'(x, y) = \operatorname{grad} f(x, y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-3, 4),$$

$$g'(x, y) = \operatorname{grad} g(x, y) := \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (2x, 2y).$$

Пусть $P\ (x, y)$ — точка возможного условного экстремума. В точке экстремума градиенты коллинеарны, поэтому

$$\frac{2x}{-3} = \frac{2y}{4} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x.$$

Так как точка $P\left(x, -\frac{4}{3}x\right)$ удовлетворяет уравнению связи $x^2 + y^2 = 4$, то решением задачи на extr служат точки, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$x^2+\frac{16}{9}x^2=4\Rightarrow x^2=\frac{36}{25}\Rightarrow x_1=\frac{6}{5},\ x_2=-\frac{6}{5}.$$

С учетом $y=-\frac{4}{3}x$ имеем *две* точки, подозрительные на экстремум: $P_1\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$. Вычислим значения функции $f(x, y)$ в найденных точках:

$$f(P_1)=f\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)=-3\cdot\frac{6}{5}+4\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=-10,$$

$$f(P_2)=f\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)=-3\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)+4\cdot\frac{8}{5}=10.$$

Поскольку функция $f(x, y) = -3x + 4y$ непрерывна на ограниченном и замкнутом множестве $x^2 + y^2 = 4$, то, согласно теореме Вейерштрасса, глобальный максимум и глобальный минимум функции $f(x, y)$ достигаются, причем каждая точка экстремума содержится во множестве точек, подозрительных на уловный экстремум. Понятно, что

$$f(P_1)=f\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)=\min_{(x,\,y):\,x^2+y^2=4} f=-10,$$

$$f(P_2)=f\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)=\max_{(x,\,y):\,x^2+y^2=4} f=10.$$

Пример 4.12. Найти точки экстремумов функции $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, если $x^2 + y^2 = 2$.

Решение. Находим градиенты функций $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ и $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$:

$$f'(x,y)=(2x+y,2y+x),$$

$$g'(x,y)=(2x,2y).$$

В точке экстремума градиенты функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ коллинеарны, поэтому

$$\frac{2x+y}{2x}=\frac{2y+x}{2y}\Rightarrow y^2=x^2\Leftrightarrow y=\pm x.$$

Решением задачи на extr служат точки, удовлетворяющие системам:

$$\begin{cases} y=x, \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \text{и} \begin{cases} y=-x, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

Решая их, находим $x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$. С учетом $y = \pm x$ получаем *четыре* точки, подозрительные на экстремум:

$$P_1(1;\ 1),\ P_2(-1;\ -1),\ P_3(-1;\ 1),\ P_4(1;\ -1).$$

Найдем значения функции в точках P_1, P_2, P_3 и P_4:

$$f(P_1) = f(1;1) = 3,\ f(P_2) = f(-1;-1) = 3,$$
$$f(P_3) = f(1;-1) = 1,\ f(P_4) = f(-1;1) = 1.$$

Согласно теореме Вейерштрасса, глобальный максимум и глобальный минимум непрерывной функции $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ на ограниченном и замкнутом множестве $x^2 + y^2 = 2$ достигаются, причем точки экстремума содержатся среди точек, подозрительных на условный экстремум (рис. 4.18). Несложно видеть, что

$$f(P_1) = f(1;1) = f(P_2) = f(-1;-1) = \max_{(x,\ y):\, x^2+y^2=2} f = 3,$$

$$f(P_3) = f(-1;1) = f(P_4) = f(1;-1) = \min_{(x,\ y):\, x^2+y^2=2} f = 1.$$

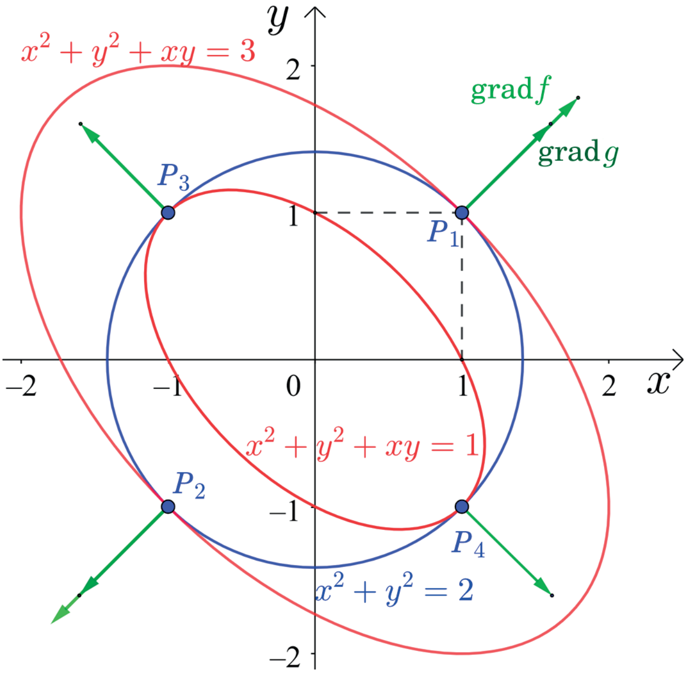


Рис. 4.18. Геометрическая интерпретация решения примера 4.12

Глобальный экстремум на множестве X, задаваемом системой неравенств

Рассмотрим задачу поиска глобального экстремума для ФНП:

$$f(x) \to \max(\min),\ x \in X,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция на $X \subseteq \mathbf{R}^n$, X — ограниченное, замкнутое множество, задаваемое системой ограничений:

$$X: \begin{cases} g_i(x) \le b_i,\ i = \overline{1, k_1}, \\ g_i(x) \ge b_i,\ i = \overline{k_1 + 1, k}. \end{cases}$$

Функции $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, *непрерывны* на $\mathbf{R}^n$.

Так как функция $f(x)$ *непрерывна на ограниченном замкнутом множестве* X, то, согласно теореме Вейерштрасса, она достигает на нем глобального минимума и максимума (среди ее значений на этом множестве есть как наибольшее, так и наименьшее).

Здесь минимум (максимум) функции могут достигаться в любой точке множества X, в том числе и на границе множества (т. е. точка экстремума может быть расположена на одной из линий, ограничивающих X).

Алгоритм решения задачи нахождения глобального экстремума:

1) найти все внутренние точки в множестве X, подозрительные на локальный экстремум;

2) найти точки, подозрительные на экстремум на границе множества X;

3) во всех выделенных точках P_k вычислить значения функции $f(P_k)$; выбрать наименьшее число $\min\{f(P_k)\}$ и наибольшее число $\max\{f(P_k)\}$.

Пример 4.13

$z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \to \max(\min)$,

$(x, y) \in X$, $X = \{(x, y){:}\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3\}$.

Решение. Допустимым множеством задачи является треугольник OAB (рис. 4.19). Найдем стационарные точки функции, принадлежащие множеству X.

$$\text{НУ: } \begin{cases} f'_x \equiv 3x^2 - 3y = 0, \\ f'_y \equiv 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем: $3x^2 - 3y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = 0$ или $x = y = 1$. Обе точки $O(0; 0)$ и $P_1(1; 1) \in X$.

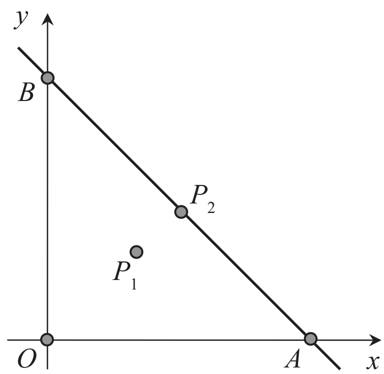


Рис. 4.19. Геометрическая иллюстрация к решению примера 4.13

Исследуем функцию на границе X. Граница состоит из трех участков OA, OB и AB. На каждом из этих участков будем решать задачу на условный экстремум.

На OA: $y = 0$, $x \in [0; 3]$, поэтому $z_{OA} = x^3$ — функция одной переменной, заданная на отрезке. Здесь уравнение связи $y = 0$ учтено подстановкой в $z\,(x; y)$. Следуя алгоритму поиска наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции, найдем $z' \equiv 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, опять получили точку $O\,(0; 0)$.

На OB аналогично: $x = 0$, $y \in [0; 3]$, поэтому $z_{OB} = y^3$; $z' \equiv 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$, получаем точку $O\,(0; 0)$.

На AB: $x + y = 3$ — уравнение связи. Подставим $y = -x + 3$ в $z\,(x, y)$: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(3 - x)$.

Находим: $z' \equiv 3x^2 + 3(3-x)^2 \cdot (-1) - 9 + 6x \equiv -36 + 24x = 0 \Rightarrow x = y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ — стационарная точка на AB.

Присоединим к найденным точкам вершины $A\,(0; 3)$ и $B\,(3; 0)$. Во всех выделенных точках вычисляем значения функции:

$$f(O) = f(0;0) = 0,\ \ f(P_2) = f\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = 0,\ \ f(P_1) = f(1;1) = -1,$$

$$f(A) = f(0;3) = 27,\ \ f(B) = f(3;0) = 27.$$

Итак,

$$\operatorname*{abs\,min}_{(x,\,y)\in D} f(x, y) = f(1,1) = -1,\ \ \operatorname*{abs\,max}_{(x,\,y)\in D} f(x, y) = f(3,0) = f(0,3) = 27.$$

Пример 4.14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = 2x - 2y + z$ в области, заданной неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$.

Решение. Находим стационарную точку функции $f(x, y, z)$ из системы:

$$\begin{cases} u'_x \equiv 2 \neq 0, \\ u'_y \equiv -2 \neq 0, \\ u'_z \equiv 1 \neq 0. \end{cases}$$

Итак, стационарных точек нет, т.е. внутри X: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ экстремума нет.

Исследуем функцию на границе области: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$. Для этого найдем градиенты целевой функции $f(x, y, z) = 2x - 2y + z$ и функции связи $g = x^2 + y^2 + z^2 - 36$:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2, -2, 1),$$

$$\operatorname{grad} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z).$$

Пусть $P(x, y, z)$ — точка, подозрительная на условный экстремум. Воспользуемся коллинеарностью градиентов в точке экстремума функций $f(x, y, z) = 2x - 2y + z$ и $g = x^2 + y^2 + z^2 - 36$:

$$\frac{2x}{2} = \frac{2y}{-2} = \frac{2z}{1} \Rightarrow y = -x,\ z = \frac{x}{2}.$$

Так как точка $P(x, y, z)$ принадлежит сфере, то решением задачи на экстремум служит точка, удовлетворяющая системе:

$$\begin{cases} y = -x, \\ z = \dfrac{x}{2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 36. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$x^2 + x^2 + \frac{x^2}{4} = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36 \cdot 4}{9} \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -4.$$

С учетом $y = -x$, $z = \dfrac{x}{2}$ находим точки, подозрительные на экстремум: $P_1(4; -4; 2)$, $P_2(-4; 4; -2)$. Найдем значения функции в точках P_1 и P_2:

$$f(4; -4; 2) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) + 2 = 18,$$
$$f(-4; 4; -2) = 2 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 - 2 = -18.$$

Поскольку функция $u = f(x, y, z) = 2x - 2y + z$ непрерывна на ограниченном и замкнутом множестве $x^2 + y^2 + z^2 \le 36$ и так как других критических точек нет, то

$$f(P_1) = f(4; -4; 2) = \max_{(x,\, y,\, z):\, x^2 + y^2 + z^2 \le 36} f = 18.$$

$$f(P_2) = f(-4; 4; -2) = \min_{(x,\, y,\, z):\, x^2 + y^2 + z^2 \le 36} f = -18.$$

Геометрическая интерпретация задачи оптимизации в $\mathbf{R}^2$

Задачу максимизации (минимизации) функции $f = f(x, y)$ на множестве X будем записывать в виде

$$f(x, y) \to \max(\min),\ (x, y) \in X \subset \mathbf{R}^2. \tag{4.9}$$

Для геометрической интерпретации задачи (4.9) необходимо изобразить на плоскости множество X и несколько линий уровня функции f: $f(x, y) = \alpha$, $\alpha = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Чтобы отразить характер изменения функции $f(x, y)$, около данной линии уровня полезно ставить знак «плюс» с той стороны, где функция принимает значения, большие α, и знак «минус» с другой стороны. Можно определить направление возрастания целевой функции и с помощью градиента целевой функции. Поиск глобального решения задачи сводится к нахождению минимального числа α^* среди всех таких чисел α, что линии уровня $L_\alpha(f)$ имеют непустое пересечение с X. При этом любая точка $(x^*, y^*) \in L_{\alpha^*}(f) \cap X$ является глобальным решением задачи, а число $\alpha^* = f^* = f(x^*, y^*)$ — ее значением.

Пример 4.15. Найти глобальное решение задачи: $2x - y = \alpha \to \max$ (min) на множестве $X = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le 4, x - y \le 0, x + y \le 2\}$.

Построим множество X (рис. 4.20). Далее строим несколько линий уровня: $2x - y = \alpha$. Это параллельные прямые. При $\alpha = 0$ имеем прямую, проходящую через начало координат: $y = 2x$. Далее передвигаем ее так, чтобы она имела непустое пересечение с множеством X. Около линий уровня поставим знаки «плюс» с той стороны, где $2x - y > 0$ ($y < 2x$), и «минус» — с противоположной. Знаки «плюс» и «минус» указывают соответственно направление возрастания и убывания функции.

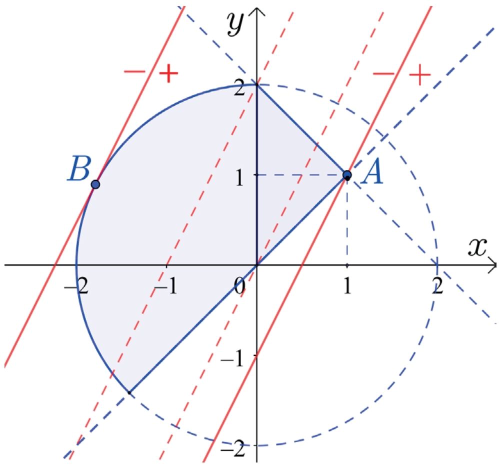


Рис. 4.20. Геометрическая иллюстрация к решению примера 4.15

Решением задачи на max служит точка A пересечения прямых:

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

т. е. $x^* = y^* = 1$. Таким образом, $\max\limits_{(x, y)\in X}(2x - y) = (2x - y)\big|_{x=1,\, y=1} = 1.$

Точка B является точкой касания линии уровня и окружности. Уравнение линии уровня $y = 2x - \alpha$. Уравнение прямой, проходящей через точку B, имеет угловой коэффициент $y' = \dfrac{dy}{dx} = 2.$ С другой стороны, $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = 1$. Обозначим $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Тогда $y' = \dfrac{dy}{dx} \equiv -\dfrac{2x}{2y} = 2 \Rightarrow x = -2y.$ Решением задачи на min служит точка, удовлетворяющая системе: $\begin{cases} 2y + x = 0, \\ x^2 + y^2 = 4, x < 0. \end{cases}$ Ее решением является точка $\hat{x} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\hat{y} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, $\min\limits_{(x,\,y)\in X}(2x - y) = (2x - y)\big|_{x=-4/\sqrt{5},\; y=2/\sqrt{5}} = -\frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = -2\sqrt{5}.$

Пример 4.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ в области, ограниченной линиями:

$$x + y = 8,\ 2x + y = 12,\ x = 0,\ y = 0.$$

Решение. Построим множество $X = \{(x, y)\colon x + y \le 8,\ 2x + y \le 12,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ (на рис. 4.21 многоугольник $OABD$) и несколько линий уровня. Линии уровня $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \alpha$, $\alpha \ge 0$ — окружности радиуса $\sqrt{\alpha}$. Ясно, что $\min z = \min \alpha = 0 = z\,(2; 3)$. Будем увеличивать радиус окружности до тех пор, пока окружность имеет непустое пересечение с X: $\max z = z(A) = z(0; 8) = (0 - 2)^2 + (8 - 3)^2 = 29$. Итак, радиус искомой окружности $\sqrt{\alpha} = \sqrt{29}$.

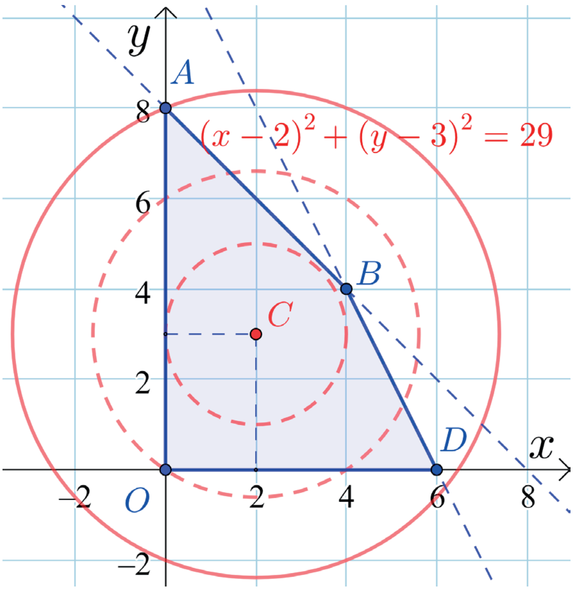


Рис. 4.21. Геометрическая иллюстрация к решению примера 4.16

Заметим, что наименьшее значение достигается во внутренней точке множества X, а наибольшее — в граничной точке.

4.4. Задачи оптимизации в экономике

Рассмотрим несколько задач экономического содержания, иллюстрирующих применение навыков нахождения локального экстремума, условного локального экстремума, а также задачи на наибольшее и наименьшее значения функции.

Задачи максимизации прибыли

Пусть x_1, x_2 — количества производимых двух разновидностей товара, а их цены, соответственно — p_1, p_2. Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек $C(x_1, x_2)$. Тогда функция прибыли имеет вид:

$$\Pi = p_1 x_1 + p_2 x_2 - C(x_1, x_2).$$

Для нахождения максимальной прибыли необходимо решить задачу на локальный экстремум функции двух переменных при $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (при отсутствии других ограничений). А значит, нужно найти сначала точки, подозрительные на экстремум из условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} \equiv p_1 - \dfrac{\partial C}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} \equiv p_2 - \dfrac{\partial C}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что полученная система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена p_i) товара равна предельным издержкам $\dfrac{\partial C}{\partial x_i}$ на его производство. Далее, все найденные точки нужно проверить на наличие в них экстремумов при помощи достаточного условия.

Пример 4.17. Фирма производит товар двух видов в количествах x и y. Функция затрат на их производство определена соотношением $C(x, y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 350$. Цены этих товаров на рынке равны $p_1 = 80$ и $p_2 = 130$. Найти количество товаров первого и второго видов, при котором прибыль будет максимальной.

Решение. Функция прибыли имеет вид:

$$\Pi(x, y) = p_1 x + p_2 y - C(x, y) = 80x + 130y - 2x^2 - 6xy - 5y^2 - 350.$$

Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} \equiv 80 - 4x - 6y = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} \equiv 130 - 6x - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 10.$$

Итак, заданная функция имеет единственную стационарную точку P (5; 10). Проверим, является ли она экстремальной. Для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \equiv -4, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \equiv -10, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} = -6.$$

Вторая производная прибыли (гессиан) имеет вид: $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$. Главные миноры $\Delta_1 = -4$, $\Delta_2 = 4$. Следовательно, согласно критерию Сильвестра, точка $P(5; 10)$ является точкой максимума (квадратичная форма $d^2\,\Pi(x, y)$ отрицательно определена), и товар первого вида в количестве 5 штук, товар второго вида в количестве 10 штук обеспечат максимальную прибыль $\Pi_{max} = 500$ у. е.

Минимизация затрат

Пример 4.18. Фирма реализует автомобили двумя способами: через оптовую и розничную торговлю. При реализации x автомобилей в розницу расходы на реализацию составляют $8x + x^2$ (у. е.), а при продаже y автомобилей оптом — y^2 (у. е.). Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 100 штук.

Решение. Необходимо найти план реализации автомобилей (x; y), минимизирующий суммарные расходы

$$R = 8x + x^2 + y^2$$

и удовлетворяющий условиям-ограничениям:

$$x + y = 100,$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Составим математическую модель задачи:

$$R = 8x + x^2 + y^2 \to \min,$$

$$x + y = 100,$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Для ее решения применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = 8x + x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 100).$$

Найдем ее частные производные и, приравнивая их к нулю, найдем стационарную точку:

$$\begin{cases} L'_x \equiv 2x+8+\lambda=0, \\ L'_y \equiv 2y+\lambda=0, \\ x+y=100 \end{cases} \Rightarrow x=48,\ y=52,\ \lambda=-104.$$

Проверим наличие условного экстремума в найденной точке. Для этого найдем знак второго дифференциала функции Лагранжа:

$$L''_{x^2}=2,\ L''_{y^2}=2,\ L''_{xy}=0 \Rightarrow d^2L=2dx^2+2dy^2>0.$$

По теореме о достаточном условии существования условного экстремума функция $R = 8x + x^2 + y^2$ в точке $x = 48$, $y = 52$ имеет условный минимум. Найдем значение функции суммарных расходов: $R_{\min} = R(48, 52) = 5\,392$.

Данную задачу можно было решить и *графическим методом* (рис. 4.22). Областью допустимых решений (допустимым множеством) задачи является отрезок AB. Функцию расходов запишем в виде

$$R = 8x + x^2 + y^2 = (x + 4)^2 + y^2 - 16.$$

Линиями уровня функции $R = 8x + x^2 + y^2$ являются концентрические окружности $(x + 4)^2 + y^2 = \alpha + 16$ с центром в точке $C(-4, 0)$ и радиусом $\sqrt{\alpha+16}$. Из рис. 4.22 видно, что минимальное значение функции, принадлежащее области допустимых решений, достигается в точке P, в которой градиенты функций R: $(x + 4)^2 + y^2 = \alpha + 16$ и g: $x + y = 100$ коллинеарны, т. е.

$$\frac{2(x+4)}{1}=\frac{2y}{1} \Rightarrow y=x+4.$$

Так как точка P лежит на прямой $x + y = 100$, то для определения координат точки P осталось решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x+4, \\ x+y=100 \end{cases} \Rightarrow x=48,\ y=52.$$

И, следовательно,

$$R_{\min} = R(48, 52) = 5\,392.$$

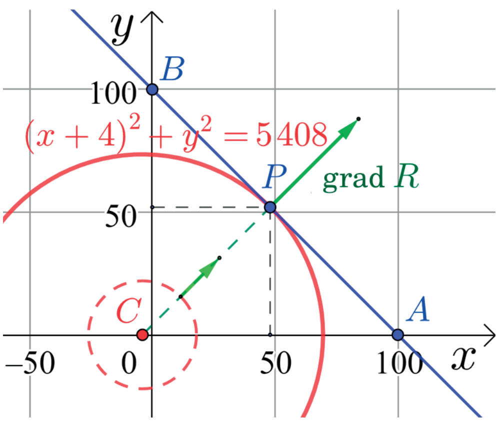


Рис. 4.22. Геометрическая интерпретация решения задачи

Задача потребительского выбора

Пусть потребитель располагает доходом I, который он тратит на приобретение благ. Цены благ считаются заданными. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество некоторых благ, и математическая модель такого его поведения называется моделью потребительского выбора. Пусть $U(x)$ — функция потребления, характеризующая предпочтения потребителя (функция полезности), $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — потребительский набор, где x_i — количество единиц i-го блага. Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — цены соответствующих благ, I — доход потребителя, то соответствующее бюджетное ограничение задается соотношением: $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \le I$ (денежные расходы на продукты не могут превышать денежные доходы).

Задача оптимизации потребительского поведения заключается в выборе такого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который максимизирует его функцию потребления при заданном бюджетном ограничении:

$$\begin{cases} U(x) \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \le I. \end{cases}$$

Пример 4.19. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена p_1 на благо x равна 4, цена p_2 на благо y равна 1, доход потребителя I равен 200. Найти оптимальный набор благ потребителя.

Решение. Для вычисления оптимального набора благ потребителя необходимо решить задачу:

$$u = \sqrt{xy} \to \max, \ \ 4x + y = 200.$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для этого построим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{xy} + \lambda(4x + y - 200).$$

Вычислим частные производные первого порядка и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} \equiv \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + 4\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} \equiv \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + \lambda = 0, \\ \quad 4x + y = 200. \end{cases}$$

Выразив λ из каждого уравнения, получим:

$$\lambda = -\frac{\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{4} = -\frac{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}}{1}. \tag{4.10}$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$y = 4x. \tag{4.11}$$

Тогда, так как $4x + y = 200$, $x = 25$, $y = 100$.

Найдем знак второго дифференциала функции Лагранжа. Для этого находим:

$$L''_{x^2} = -\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}}, L''_{y^2} = -\frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}, L''_{xy} = \frac{1}{4\sqrt{xy}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2L\Big|_{(25,\,100)} = -\frac{1}{50}dx^2 + \frac{2}{200}dxdy - \frac{1}{800}dy^2 =$$

$$= -\frac{1}{50}\left(dx^2 - \frac{2}{4}dxdy + \frac{1}{16}dy^2\right) = -\frac{1}{50}\left(dx - \frac{1}{4}dy\right)^2 < 0.$$

По теореме о достаточном условии существования условного экстремума функция $u = \sqrt{xy}$ в точке $x = 25$, $y = 100$ имеет условный максимум:

$$u_{\max} = \sqrt{25 \cdot 100} = 50.$$

Замечание. Из равенства (4.10) вытекает, что предельные полезности первого и второго благ, соответственно, приходящиеся на один рубль, затраченный на единицу каждого товара, равны между собой и равны ($-\lambda$):

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{p_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{p_2} = -\lambda^*.$$

Коэффициент λ^* отражает предельную полезность одной денежной единицы и показывает, как возрастает функция полезности потребителя при увеличении его денежного дохода на 1 д. е.

Из последнего равенства и предыдущих рассуждений вытекает, что

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

То есть в точке экстремума вектор предельных полезностей потребляемых товаров пропорционален вектору цен на эти товары.

Так как $xp_1 + yp_2 = I$, то оптимальный набор благ для функции $u = \sqrt{xy}$ равен:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{I}{2p_1}, \frac{I}{2p_2}\right).$$

Следовательно, количество приобретаемых благ прямо пропорционально доходу и обратно пропорционально цене блага.

Приведем геометрическое решение этой задачи (рис. 4.23).

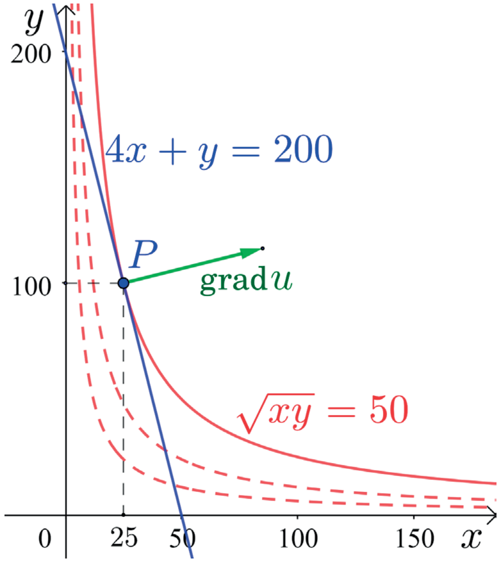


Рис. 4.23. Геометрическая интерпретация решения задачи

Рассмотрим линии уровня $\sqrt{xy} = \alpha$ (кривые безразличия или линии постоянной полезности) и будем увеличивать значение α: оптимальный набор благ потребителя достигается в точке P касания кривой безразличия и бюджетной линии $4x + y = 200$. В точке P градиенты функций g: $4x + y = 200$ и u: $\sqrt{xy} = \alpha$ коллинеарны, т. е.

$$\frac{\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}}{4} = \frac{\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}}{1} \Rightarrow y = 4x.$$

Так как точка P лежит на прямой $4x + y = 200$, то $x = 25$, $y = 100$. Максимуму функции на рисунке соответствует точка A (рис. 4.24).

Задача о банке

Пример 4.20. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 5 млрд руб. Часть этих средств, но не менее 1,5 млрд руб., должна быть размещена в кредитах, а вложения в ценные бумаги должны составлять не менее 40 % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах. Если доходность кредитов — 10 % годовых, доходность ценных бумаг — 5 % годовых, то каково должно быть размещение средств, чтобы прибыль банка была максимальной?

Замечание. Отметим, что кредиты являются неликвидными активами банка, так как при необходимости быстро обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно. Ценные же бумаги можно в любой момент продать без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно

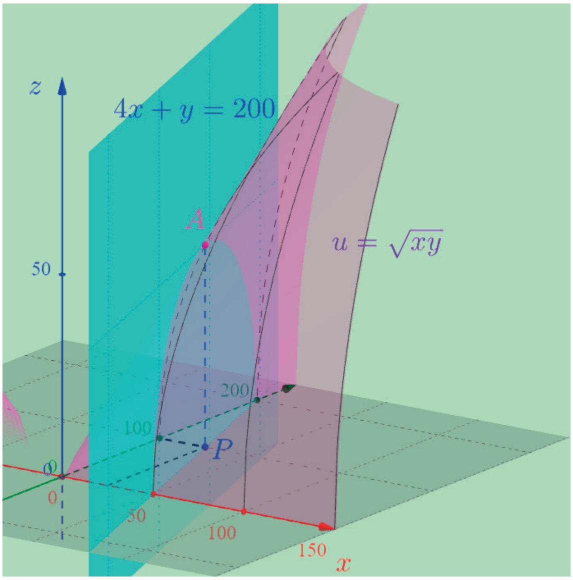


Рис. 4.24. Геометрическая иллюстрация
к решению задачи в $\mathbf{R}^3$

которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные и неликвидные активы, и ограничения примера являются вполне естественными.

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x — средства, размещенные в кредитах, y — средства, вложенные в ценные бумаги. Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг:

$$f(x, y) = 0{,}10\, x + 0{,}05\, y \to \max.$$

Учитывая балансовое, кредитное и ликвидное ограничения, получим систему ограничений неравенств:

$$\begin{cases} x + y \leq 5, \\ x \geq 1{,}5, \\ y \geq 0{,}4(x+y), \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Пересечение областей решений каждого из ограничений (допустимое множество или область допустимых решений (ОДР)) представляет собой треугольник ABC (рис. 4.25). Для того, чтобы найти решение задачи о банке, нужно рассмотреть поведение целевой функции $f(x, y) = 0{,}1\, x + 0{,}05\, y$ в ОДР.

Найдем градиент целевой функции f: $\operatorname{grad} f = (0{,}1;\ 0{,}05)$ и построим его (на рис. 4.25 он изображен в увеличенном масштабе, важна не его длина, а направление). Этот вектор показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции. Построим линии уровня $0{,}1\,x + 0{,}05\,y = \alpha$. Это параллельные прямые. Определим $\alpha = 0$ и построим прямую $0{,}1\,x + 0{,}05\,y = 0$, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\operatorname{grad} f = (0{,}1; 0{,}05)$. Перемещаем линию уровня $0{,}1\,x + 0{,}05y = 0$ по направлению $\operatorname{grad} f$ (так как задача на отыскание максимума). Это перемещение проводим до тех пор, пока у линии уровня не окажется только одна общая точка с треугольником *ABC*. Получаем точку *C* — точку максимума целевой функции в ОДР. Точка *C* является точкой пересечения прямых $x + y = 5$ и $y = 0{,}4\,(x + y)$. Решая систему соответствующих уравнений, определим ее координаты:

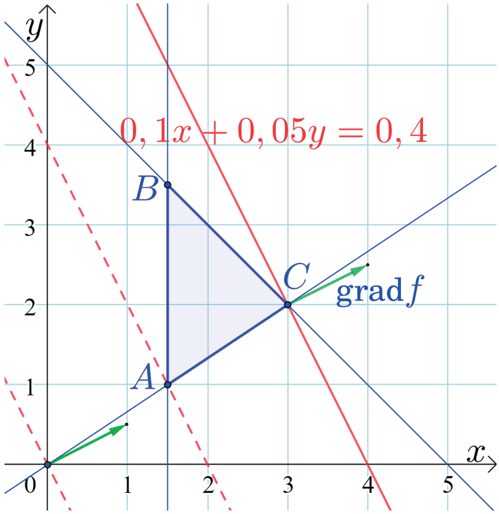


Рис. 4.25. Геометрическая иллюстрация к решению задачи о банке

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 0{,}6y = 0{,}4x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1{,}5y \Rightarrow 2{,}5y = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2,\ x = 3 \Rightarrow C(3;\,2).$$

Итак, точка *C* определяет оптимальное решение, при этом $f_{\max} = f\,(3;\,2) = 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}4$.

Вывод: для того, чтобы получить максимальную прибыль $f_{\max} = f\,(3;\,2) = 0{,}4$ (млрд руб.), необходимо 3 млрд руб. собственных средств банка разместить в кредитах и 2 млрд руб. разместить в ценных бумагах.

Составление плана выпуска продукции

Пример 4.21. Фирма производит два вида товаров: А и В. Для производства x единиц товара А и y единиц товара В требуется заранее приобрести $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ кг сырья, суточный запас которого не должен превышать 4 400 кг. Доход от реализации единицы товара А составляет 4 у. е., а от реализации единицы товара В — 5 у. е. Определить суточный план выпуска продукции, максимизирующий доход.

Решение. Доход фирмы определяется функцией $F\,(x, y) = 4x + 5y$ при ограничениях

$$x^2 + 2y^2 - xy \le 4\,400,\ x \ge 0,\ y \ge 0. \tag{4.12}$$

Условия (4.12) задают допустимое множество X. Требуется найти точку множества X, в которой функция $F(x, y)$ достигает наибольшего значения, т. е. имеем задачу на наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции двух переменных на ограниченном и замкнутом множестве X.

Рассмотрим геометрическое решение этой задачи. Построим множество X, ограниченное положительными полуосями Ox, Oy, справа эллипсом $x^2 + 2y^2 - xy = 4\,400$ (рис. 4.26). Найдем градиент целевой функции F: $\operatorname{grad} F = (4; 5)$ и построим его. Рассмотрим линии уровня $4x + 5y = \alpha$. Определим $\alpha = 0$ и построим прямую $4x + 5y = 0$, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\operatorname{grad} F = (4; 5)$. Перемещаем линию уровня $4x + 5y = 0$ по направлению $\operatorname{grad} F$ (так как задача на отыскание максимума) до тех пор, пока линия уровня не пересечет точку P, которая и есть решение задачи. В точке P градиенты функций $F(x, y) = 4x + 5y$ и $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - 4\,400$ коллинеарны, т. е.

$$\frac{2x - y}{4} = \frac{4y - x}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x.$$

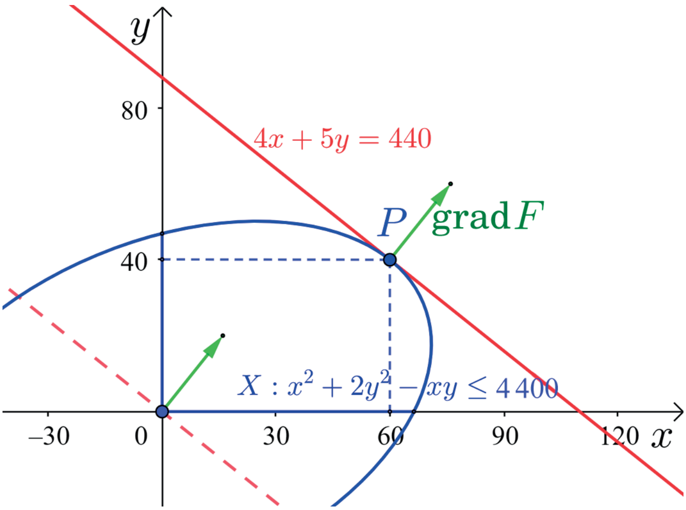


Рис. 4.26. Геометрическая интерпретация решения задачи составления плана выпуска продукции

Решением сформулированной задачи служит точка, удовлетворяющая системе:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x, \\ x^2 + 2y^2 - xy = 4\,400. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$x^2 + \frac{8x^2}{9} - \frac{2x^2}{3} = 4\,400 \Rightarrow x^2 = \frac{4\,400 \cdot 9}{11} \Rightarrow x = 60.$$

С учетом $y = \frac{2}{3}x$ находим точку P (60; 40). Итак, точка P определяет оптимальное решение, при этом $F_{\max} = \max F = F(60; 40) = 4 \cdot 60 + 5 \cdot 40 = 440$.

То есть, максимальный суточный доход достигается при производстве товара А в количестве 60 единиц и товара В — 40 единиц и составляет 440 у. е.

Пример 4.22. Фирма производит два вида товаров А и В в количестве x и y соответственно. Функция полных издержек имеет вид:

$$C(x, y) = x + 2y + 120,$$

а кривые спроса для каждого товара:

$$p_1 = 23 - x, p_2 = 26 - y,$$

где p_1 и p_2 — цена единицы, соответственно, товаров А и В. Определить, при каких объемах выпуска достигается максимальная прибыль на множестве производственных возможностей, ограниченном издержками производства в объеме $C_0 = 140$. Найти эту прибыль.

Решение. Составим функцию прибыли: $\pi = R - C$, где $R = R_1 + R_2$, $R_1 = p_1 x$ и $R_2 = p_2 y$ — доходы фирмы от продажи товаров А и В соответственно. Функция прибыли равна:

$$\pi = R - C = p_1 x + p_2 y - x - 2y - 120 = (23 - x)x + (26 - y)y - x - 2y - 120 =$$
$$= 23x - x^2 + 26y - y^2 - x - 2y - 120 = -(x - 11)^2 - (y - 12)^2 + 145.$$

Далее исследуем функцию $\pi = R - C \to \max$ в области (допустимое множество): $x + 2y + 120 \le 140$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. На рис. 4.27 это треугольник OAB.

Так как

$$\max \pi(x, y) = -\min(-\pi(x, y)), \qquad (4.13)$$

то для удобства решения рассмотрим задачу:

$$f(x, y) = -\pi(x, y) = (x - 11)^2 + (y - 12)^2 - 145 \to \min,$$
$$x + 2y + 120 \le 140, x \ge 0, y \ge 0.$$

Для решения задачи применяем метод Лагранжа. Воспользуемся геометрической иллюстрацией необходимых условий условного экстремума.

Рассмотрим линии уровня $(x - 11)^2 + (y - 12)^2 - 145 = \alpha$. Из рис. 4.27 видно, что минимальное значение функции $f(x, y)$, принадлежащее области допусти-

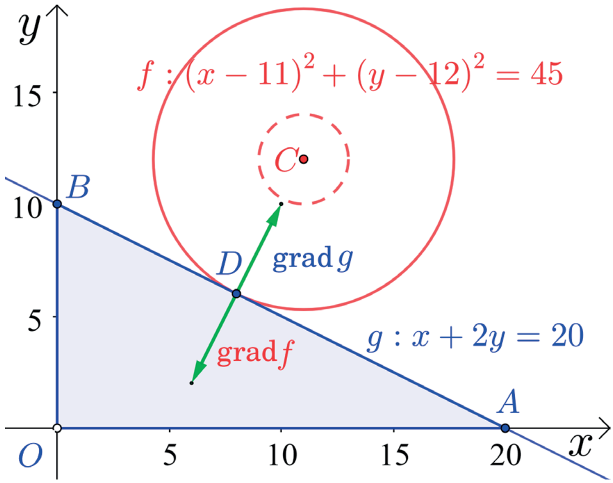


Рис. 4.27. Геометрическая интерпретация решения примера 4.22

мых решений, достигается в точке D, в которой градиенты функций $f(x, y) = (x - 11)^2 + (y - 12)^2 - 145$ и $g(x, y) = x + 2y + 120$ коллинеарны, т. е.

$$\frac{2(x-11)}{1} = \frac{2(y-12)}{2} \Rightarrow y = 2x - 10.$$

Так как точка D лежит на прямой $x + 2y = 20$, то для определения координат точки D осталось решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - 10, \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow x = 8,\ y = 6.$$

И, следовательно,

$$f_{\min} = f(D) = f(8, 6) = (8 - 11)^2 + (6 - 12)^2 - 145 = -100.$$

С учетом (4.13)

$$\pi_{\max} = \pi(8, 6) = -f_{\min} = f(8, 6) = 100.$$

Задания для самостоятельного решения

Задачи на локальный безусловный экстремум

4.1. Исследовать на локальный экстремум следующие функции двух переменных:

а) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

б) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y$;

в) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$;

г) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$;

д) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy$;

е) $f(x, y) = x^2 y + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}$.

4.2. Исследовать на локальный экстремум следующие функции трех переменных:

а) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 4y - 6$;

б) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 12x - 27y - 48$;

в) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 2z^2 + xy - 2xz + 3y - 1$;

г) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$;

д) $f(x, y, z) = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

Задачи на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

4.3. Исследовать на условный экстремум функции:

а) $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \to \text{extr}$, если $x + y = 2$;

б) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 \to \text{extr}$, если $x + y + 3 = 0$;

в) $f(x, y) = xy \to \text{extr}$, если $x^2 + y^2 = 2$;

г) $f(x, y, z) = e^{xyz} \to \text{extr}$, если $x + y + z = 3$;

д) $f(x, y, z) = xy^2z^3 \to \text{extr}$, если $x + 2y + 3z = 6$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

4.4. Найти глобальные экстремумы функции $z = f(x, y)$ в области Q, заданной ограничениями:

а) $z = 3x + 2y$; $Q = \{(x, y)\colon 4x^2 + y^2 \le 16, y \ge 0\}$;

б) $z = (x - 6)^2 + (y - 8)^2$; $Q = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le 9, x \ge 0, y \ge 0\}$;

в) $z = (x - 11)^2 + (y - 1)^2$; $Q = \{(x, y)\colon 3x + 5y \le 30, y \le 3, x \ge 0, y \ge 0\}$;

г) $z = x^2 - y$; $Q = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$;

д) $z = x^2 + y^2 - 2xy$; $Q = \{(x, y)\colon |x| \le 2, |y| \le 2\}$;

е) $z = x^2 - y$; $Q = \{(x, y)\colon x + y = 6, x \ge 1, x^2 + y^2 \le 26\}$;

ж) $z = x + y^2$; $Q = \{(x, y)\colon 2x + y \le 4, x + 2y \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$;

з) $z = 3x + y$; $Q = \{(x, y)\colon 2x - y \le 4,\ y - 1 + x^3 \le 0,\ x \ge 0\}$;

и) $z = x$; $Q = \{(x, y)\colon 2x - y \le 3,\ y - (1 - x)^2 \le 0,\ 0 \le x \le 4\}$.

Задачи оптимизации в экономике

4.5. Завод производит два вида товаров, функции спроса на которые имеют вид $p_1 = 50 - 2q_1 + q_2$ и $p_2 = 48 - 2q_2 + q_1$. Функция издержек равна: $C(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_2^2$ (q_1, q_2 — объемы производства товаров). Найти оптимальные объемы производства.

4.6. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $p_1 = 4$, $p_2 = 7$, $p_3 = 14$. Издержки производства равны: $C(q_1, q_2, q_3) = 2q_1^2 + q_2^2 + 2q_3^2 + q_2q_3$ (q_1, q_2, q_3 — объемы производства товаров). Найти оптимальные объемы производства.

4.7. Фирма продает единственный товар на двух рынках. Функции спроса на этих рынках линейны и имеют вид соответственно: $q_1 = 15{,}75 - 0{,}25p_1$, $q_2 = 21 - 0{,}2p_2$; p_1, p_2 — цены на эти товары соответственно. Функция затрат имеет вид: $C = 20 + 15(q_1 + q_2)$. Определить цены, при которых фирма получит максимальную прибыль.

4.8. Производственная функция равна $\Pi(x, y) = 25\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 10, второго — 20. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 1 350 д. е. В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов и соответствующее значение целевой функции.

4.9. Найти экстремум полезности $u = x^2y$ при бюджетном ограничении $2x + 3y = 90$. Дать экономическую интерпретацию производственной функции и ее параметров.

4.10. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $p_1 = 10$ и $p_2 = 20$, бюджет составляет \$1 200. Производственная функция предприятия равна $u(x, y) = \sqrt{xy}$. Найти количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы. Дать экономическую интерпретацию производственной функции и ее параметров.

4.11. Фирма-монополист производит два вида товаров G_1 и G_2 в количестве q_1 и q_2 соответственно. Функция затрат имеет вид:

$$C = 10q_1 + q_1q_2 + 10q_2,$$

а кривые спроса для каждого товара:

$$p_1 = 50 - q_1 + q_2,\quad p_2 = 30 + 2q_1 - q_2,$$

где p_1 и p_2 — цена единицы, соответственно, товаров G_1 и G_2. Кроме того, фирма связана ограничением на общий объем производства товаров G_1 и G_2, ее квота составляет 15 единиц, т. е. $q_1 + q_2 = 15$. Требуется найти максимальную прибыль, которая может быть достигнута при этом условии.

4.12. Фирма производит два вида продукции: А и В. Фирма должна выполнить заказ на производство 14 единиц продукции А. Для изготовления продукции А и В используются два вида сырья, суточный запас первого сырья ограничен величиной 96 фунтов, расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В — 4 фунта. Суточный запас второго сырья ограничен величиной 210 фунтов, расход сырья на единицу продукции А составляет 7 фунтов, а на единицу продукции В — 5 фунтов. Цены продукции А и В равны 20 и 40 долларов соответственно. Определить оптимальные объемы выпуска продукции А и В.

4.13. Функция полезности имеет вид:

$$U(x, y) = 2\ln(x-1) + 3\ln(y-1).$$

Цена единицы первого блага равна 20, второго — 40. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 2 010. Как следует распределить сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была наибольшей?

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

4.1. а) $f_{\min} = f(4, 1) = -152$; $f_{\max} = f(-4, -1) = 152$;

б) $f_{\min} = f(1, 2) = -20$; $f_{\max} = f(-1, -2) = 20$;

в) $f_{\min} = f(\pm 1;\ \mp 1) = -2.$ В точке (0, 0) экстремума нет ((0, 0) — седловая точка);

г) $f_{\min} = f(0; 0) = 0$;

д) имеем $dz = 0$, $d^2z = 0$ в точке (0, 0);

$\Delta_x z(0, 0) = z(0 + \Delta x, 0) - z(0, 0) = (\Delta x)^2 > 0$,

$\Delta_y z(0, 0) = z(0, 0 + \Delta y) - z(0, 0) = -(\Delta y)^2 < 0$.

В окрестности точки (0; 0) функции $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, т. е. в точке (0; 0) экстремума нет;

е) $f_{\max} = f(-1, -1) = -4$; $f_{\min} = f(1, 1) = 4$.

4.2. а) $f_{\min} = f(1, 1, 1) = -6$;

б) $f_{\max} = f(-2, -3, -4) = 198$; $f_{\min} = f(2, 3, 4) = -198$;

в) $f_{\min} = f\left(1, -2, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$;

г) экстремума нет;

д) $f_{\max} = f\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{1}{7^7}$.

4.3. а) $f_{\min} = f(1, 1) = 2$;

б) $f_{\min} = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -4{,}75$;

в) $f_{\max} = f(\pm 1, \pm 1) = 1$, $f_{\min} = f(\pm 1, \mp 1) = -1$;

г) $f_{\min} = f(1, 1, 1) = e$;

д) $f_{\max} = f(1, 1, 1) = 1$.

4.4. а) $z_{\text{наиб}} = z(1, 3, 5) = 10$, $z_{\text{наим}} = z(0, 0) = 0$;

б) $z_{\text{наим}} = z\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) = 49$; $z_{\text{наиб}} = z(0, 0) = 100$;

в) $z_{\text{наим}} = z(10, 0) = 2$; $z_{\text{наиб}} = z(0, 6) = 146$;

г) $z_{\text{наим}} = z(0, 1) = -1$; $z_{\text{наиб}} = z(1, 0) = (-1, 0) = 1$;

д) $z_{\text{наиб}} = f(2, -2) = f(-2, 2) = 16$, $z_{\text{наим}} = f(-2\alpha + 1, -2\alpha + 1) = 0$, $\alpha \in [0, 1]$;

е) $z_{\text{наим}} = z(1, 5) = -4$; $z_{\text{наиб}} = z(5, 1) = 24$;

ж) $z_{\text{наим}} = z(0, 0) = 0$; $z_{\text{наиб}} = z(0, 2) = 4$;

з) $z_{\text{наим}} = z(0, -4) = -4$; $z_{\text{наиб}} = z(1, 0) = 3$;

и) $z_{\text{наим}} = z(0, -2(1 - \alpha)) = 0$, где $\alpha \in [0; 1]$; $z_{\text{наиб}} = z(4, 9 - 4\alpha) = 4$.

4.5. $q_1 = 9$, $q_2 = 11$.

4.6. $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$.

4.7. $p_1 = 39$, $p_2 = 60$. В данном случае функция прибыли зависит не от количества товара, а от его цены и имеет вид:

$\Pi = q_1p_1 + q_2p_2 - C = q_1p_1 + q_2p_2 - (20 + 15(q_1 + q_2))$.

4.8. $x = 81$, $y = 27$, $\Pi_{\max} = 675$.

4.9. $u_{\max} = u(30, 10) = 9000$.

4.10. $u_{\max} = u(60, 30) = 30\sqrt{2}$.

4.11. $q_1 = 10$, $q_2 = 5$, $\pi(10, 5) = 475$.

Указание. Составить функцию прибыли: $\pi = R - C$, где $R = R_1 + R_2$, $R_1 = p_1q_1$ и $R_2 = p_2q_2$ — доходы фирмы от продажи товаров G_1 и G_2 соответственно. Далее исследуем функцию $\pi = R - C \to \max$ при ограничении $q_1 + q_2 = 15$. Для решения задачи применить метод Лагранжа.

4.12. (14; 19), (16; 16), (18; 15), (20; 14).

Указание. Задача формализуется следующим образом:

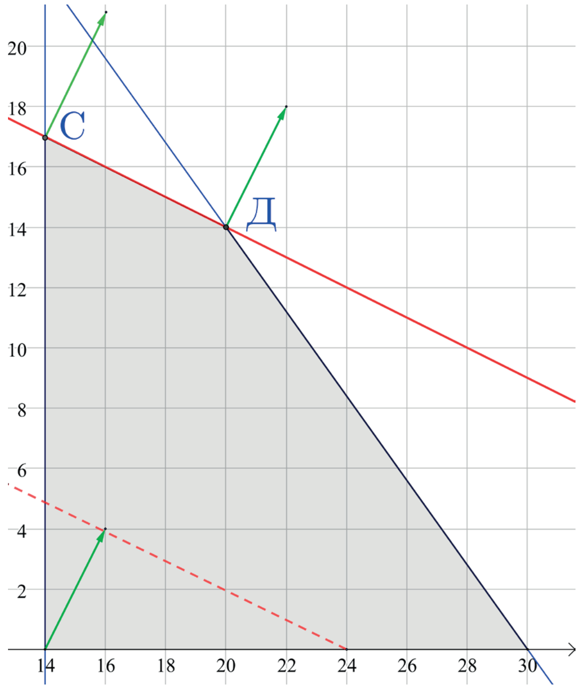
$$\Pi(x, y) = 20x + 40y \to \max,$$

$$\begin{cases} x \geq 14, \\ 2x + 4y \leq 96, \\ 7x + 5y \leq 210, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Точками условного максимума функции П (x, y) являются точки отрезка СД (см. рисунок). Так как концы С и Д этого отрезка имеют координаты (14; 17) и (20; 14) соответственно, то любая точка максимума функции П (x, y) представима в виде

$$(x^*, y^*) = \alpha(14; 17) + (1 - \alpha)(20; 14) = (-6\alpha + 20; 3\alpha + 14),$$

где $\alpha \in [0, 1]$ и $П_{max} = 820$.



Условный экстремум достигается
на отрезке прямой СД

4.13. $x = 40$, $y = 30{,}25$.

Тесты к главе 4

4.1. Значения функции $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y$ в точках локального минимума и максимума, соответственно, равны:

а) –18; б) –152; в) 18; г) 152; д) –126; е) 126.

4.2. Для функции $f(x, y) = 2x^2 + y^3 - 6xy + 1$ точкой локального минимума является:

а) (0; 0); б) (4; 6); в) (4,5; 3); г) (3; 4,5); д) (3; 2).

4.3. Значение функции $z = 4x^2 + 3y^2 - 4xy - 8y$ в точке минимума равно…

4.4. Значение функции $f(x, y) = x^2 y + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ в точке максимума равно…

4.5. Для заданной функции $f(x, y) = y^3 + 3x^2 y - 18x - 30y$ точка $(x_0; y_0)$ является:

$(x_0; y_0) = (1; 3)$	седловой точкой
$(x_0; y_0) = (-1; -3)$	точкой локального минимума
$(x_0; y_0) = (-3; -1)$	точкой локального максимума
	точкой, в которой нет экстремума

4.6. Наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2x + 3y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 13$, соответственно, равны:

а) –13; б) –23; в) 13; г) 23; д) –5; е) 5.

4.7. Наименьшее и наибольшее значения функции $z = (x - 4)^2 + (y - 2)^2$ на множестве $X = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$, соответственно, равны:

а) 34; б) 20; в) 5; г) 25; д) 0; е) 5.

4.8. Значение функции $z = xy + 5x^2 - 4y$ в точке минимума при условии, что $y = 4x - 2$, равно…

4.9. Значение функции $z = \frac{y}{x^2}$ в точке максимума при условии, что $y + 2x + 2 = 0$, равно…

4.10. В процессе производства используются два вида ресурсов: капитал K и труд L. Функция выпуска имеет вид $Z = aK^{0,5}L^{0,5}$, на аренду фондов (капитала) и оплату труда выделено 80 у. е., стоимость аренды единицы фондов равна 4 у. е., ставка заработной платы 5 у. е. Наибольший объем выпуска достигается при значении L, равном…

4.11. Оптимальный набор потребителя составляет 6 единиц продукта x_1 и 8 единиц продукта x_2. Известно, что доход потребителя 240 у. е., и он собирается его истратить весь, а функция полезности имеет вид: $u\ (x_1, x_2) = x_1 x_2$. Максимальная полезность функции равна…

4.12. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $p_1 = 10$ и $p_2 = 20$, бюджет составляет \$1 200. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы равно…

В ответе указать сумму $x + y$.

Ответы к тестам

4.1. $z_{\min} = -126$, $z_{\max} = 126$. **4.2.** (4,5; 3). **4.3.** –8. **4.4.** –4.

4.5

$(x_0; y_0) = (1; 3)$	точка локального минимума
$(x_0; y_0) = (-1; -3)$	точка локального максимума
$(x_0; y_0) = (-3; -1)$	точка, в которой нет экстремума

4.6. $z_{\text{наим}} = -13$, $z_{\text{наиб}} = 13$. **4.7.** $z_{\text{наим}} = 5$, $z_{\text{наиб}} = 25$. **4.8.** –1. **4.9.** 0,5. **4.10.** 8. **4.11.** 3. **4.12.** $x + y = 90$.

Учебное издание

Шевалдина Ольга Яковлевна
Выходец Евгения Владимировна
Трофимова Елена Александровна

МАТЕМАТИКА

РЯДЫ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *С. Г. Галинова*
Корректор *С. Г. Галинова*
Компьютерная верстка *В. К. Матвеев*

Подписано в печать 28.11.2022 г. Формат 70 ×100 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 12,9.
Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 30 экз. Заказ 92

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2020

9785799634872