Л. В. Крицков

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ

Учебное пособие

Под редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора, академика РАН
В. А. Ильина

ПРОСПЕКТ
МОСКВА
2014

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К82

Электронные версии книг
на сайте www.prospekt.org

Под редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора, академика РАН
В. А. Ильина

Крицков Л. В.
Высшая математика в вопросах и ответах: учеб. пособие / под ред.
К82 В. А. Ильина. — Москва : Проспект, 2014. — 176 с.

ISBN 978-5-392-14372-6

Данное пособие предлагает краткое изложение курса высшей математики для студентов вузов. Учебный материал изложен в удобной форме ответов на ключевые вопросы и содержит такие разделы, как аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения и т. д.

В пособии приведены все основные определения и утверждения курса, многие из которых снабжены примерами, разъяснениями и иллюстрациями.

Для студентов, обучающихся по техническим специальностям.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Учебное издание

Крицков Леонид Владимирович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ
Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен компанией ООО «Оригинал-макет»
www.o-maket.ru; тел.: (495) 726-18-84

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.004173.04.09 от 17.04.2009 г.

Подписано в печать 25.02.2014. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 11,0. Тираж 500 экз. Заказ №

ООО «Проспект»
111020, г. Москва, ул. Боровая, д. 7, стр. 4.

ISBN 978-5-392-14372-6

Глава 1. Вещественные числа. Множества вещественных чисел

Какие основные числовые множества рассматриваются в математике?

К основным числовым множествам относятся:

– множество *натуральных чисел* (N), вводимых в арифметике для счета, с операциями сложения и умножения;
– множество *целых чисел* ($\boldsymbol{Z}$), расширяющее множество натуральных чисел так, что в нем всегда выполнима операция вычитания;
– множество *рациональных чисел* ($\boldsymbol{Q}$), расширяющее множество целых чисел так, что в нем выполнима операция деления (кроме, конечно, деления на нуль);
– множество *вещественных чисел* ($\boldsymbol{R}$), дополняющее множество рациональных чисел иррациональными так, что в нем выполнимы, например, операции извлечения корня или вычисления логарифма, и, кроме того, более приспособленное для измерения длин, площадей и объемов;
– множество *комплексных чисел* ($\boldsymbol{C}$), в котором, в отличие от множества вещественных чисел, любой многочлен степени не ниже 1 имеет корень (или, как еще говорят, множество $\boldsymbol{C}$ алгебраически замкнуто).

Что такое рациональное число?

Рациональным называется число, представимое в виде отношения двух целых чисел — точнее говоря[1], $a \in \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \exists m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\colon a = m/n$.

[1] Для придания компактной формы математическим высказываниям будем в дальнейшем использовать общепринятые символы: $\exists$ — «существует», $\forall$ — «любой», $\Leftrightarrow$ — равносильность, эквивалентность высказываний, $\Rightarrow$ — импликация (т. е. когда из первого высказывания следует второе).

Неотъемлемыми атрибутами множества рациональных чисел являются правила их сравнения и образования их суммы и произведения.

I. Любые два числа a, $b \in \boldsymbol{Q}$ связаны одним и только одним из трех знаков сравнения >, < или = по следующему правилу:

– если $a=\frac{m_1}{n_1}$ и $b=\frac{m_2}{n_2}$ неотрицательны, то a и b связаны тем же знаком, что и целые числа m_1n_2 и m_2n_1;
– если a и b неположительны, то они связаны тем же знаком, что и числа $|b|$ и $|a|$;
– если a неотрицательно и b отрицательно, то $a > b$.

II. Любым числам $a=\frac{m_1}{n_1}$, $b=\frac{m_2}{n_2}\in Q$ ставится в соответствие их сумма $a + b$, равная рациональному числу $\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$.

III. Любым числам $a=\frac{m_1}{n_1}$, $b=\frac{m_2}{n_2}\in Q$ ставится в соответствие их произведение $a \cdot b$, равное рациональному числу $\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$.

Что относят к основным свойствам рациональных чисел?

К основным относят следующие 13 свойств рациональных чисел.

1. $a > b \Rightarrow b < a$;
$a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$ (транзитивность знака >);
$a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$ (транзитивность знака =).

2. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).

3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения).

4. $\exists 0 \in \boldsymbol{Q}$: $a + 0 = a\ \forall a \in \boldsymbol{Q}$ (особая роль нуля).

5. $\forall a \in \boldsymbol{Q}\ \exists a' \in \boldsymbol{Q}$: $a + a' = 0$ (a' называется противоположным числу a).

6. $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения).

7. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения).

8. $\exists 1 \in \boldsymbol{Q}$: $a \cdot 1 = a\ \forall a \in \boldsymbol{Q}$ (особая роль единицы).

9. $\forall a \in \boldsymbol{Q},\ a \neq 0\ \exists a' \in \boldsymbol{Q}$: $a \cdot a' = 1$ (a' называется обратным числу a).

10. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

11. $a > b \Rightarrow a + c > b + c\ \ \forall c \in \boldsymbol{Q}$.

12. $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c\ \ \forall c \in \boldsymbol{Q},\ c > 0$.

13. Каково бы ни было $a \in \boldsymbol{Q}$, число 1 можно повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма превзойдет a (аксиома Архимеда).

Какую роль играют бесконечные десятичные дроби при введении понятия вещественного числа?

Десятичной дробью называется конечная или бесконечная запись вида $\pm\, a_0,\, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$, в которой a_0 — натуральное число, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — цифры, т. е. целые числа от 0 до 9.

Десятичные дроби являются одним из инструментов для расширения множества $\boldsymbol{Q}$ до множества $\boldsymbol{R}$. Число назовем *вещественным* (или *действительным*), если оно представимо конечной или бесконечной десятичной дробью.

Следует отметить, что конечная десятичная дробь является представлением только рационального числа. При этом есть рациональные числа, представимые и бесконечными десятичными дробями; дроби в этом случае обязательно будут периодическими. Если дробь $A = a_0,\, a_1\, a_2 \ldots a_n$ конечна и $a_n \neq 0$, то ее можно превратить в бесконечную дописыванием нулей в следующих десятичных знаках: $A = a_0,\, a_1\, a_2 \ldots a_n 000$. Однако это же рациональное число A представимо и другой дробью: $A = a_0,\, a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}\, (a_n)\, 999\ldots$. Во избежание такой неоднозначности договоримся не пользоваться вторым представлением.

Тем самым между множеством $\boldsymbol{R}$ и множеством бесконечных десятичных дробей установлено взаимно однозначное соответствие.

Как сравнить вещественные числа?

Для вещественных чисел $a = \pm a_0,\, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ и $b = \pm\, b_0,\, b_1\, b_2 \ldots b_n$ правило сравнения выглядит следующим образом.

Числа a и b называют *равными*, если они имеют одинаковые знаки и справедлива цепочка равенств

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n \ \ldots .$$

Если числа a и b неравны, то:

– в случае неотрицательных чисел a и b поступают так: находят числа a_k и b_k в их представлениях с наименьшим номером k, для которого $a_k \neq b_k$, и считают, что $a < b$, если $a_k < b_k$, и $a > b$, если $a_k > b_k$;
– в случае отрицательных чисел a и b считают, что $a < b$, если $|a| > |b|$, и $a > b$, если $|a| < |b|$ (здесь модулем $|a|$ вещественного числа a называют число, представимое той же бесконечной десятичной дробью, что и число a, но всегда взятой со знаком $+$);

– в случае, когда одно из чисел a и b неотрицательно, а другое отрицательно, считают, что неотрицательное число больше отрицательного.

Какие множества вещественных чисел называют ограниченными?

Множество $X \subset \boldsymbol{R}$ называется *ограниченным сверху* (соответственно *снизу*), если существует число $M \in \boldsymbol{R}$ (соответственно число $m \in \boldsymbol{R}$), для которого $x \leq M \ \ \forall\, x \in X$ (соответственно $x \geq m \ \ \forall\, x \in X$).

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называют просто *ограниченным*.

Число M (соответственно число m) называется *верхней гранью* (соответственно *нижней гранью*) множества X. Отметим, что верхних граней у ограниченного сверху множества существует бесконечно много, так как в качестве верхней грани можно взять любое число, большее M. Аналогичное замечание можно сделать и в отношении нижних граней ограниченного снизу множества.

Из аксиомы Архимеда, в частности, вытекает, что множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел не является ограниченным сверху.

Что называют точной верхней и точной нижней гранями множества?

Так как объединение всех верхних граней ограниченного сверху множества X само ограничено снизу (например, любым элементом X), то естественно поставить вопрос о существовании наименьшей (и по своей сути наилучшей) верхней грани множества X.

Для ограниченного снизу множества X аналогично возникает вопрос о существовании наибольшей нижней грани множества X.

Число $\overline{x}$ называется *точной верхней гранью* ограниченного множества X, если оно является его наименьшей верхней гранью, т. е.

1) $\overline{x}$ — одна из верхних граней: $x \leq \overline{x}\ \forall x \in X$;

2) любое вещественное число x', меньшее $\overline{x}$, уже не является верхней гранью: $\exists x \in X:\ x > x'$. Обозначение: $\overline{x} = \sup X$.

Аналогично число $\underline{x}$ называется *точной нижней гранью* ограниченного снизу множества X, если оно является его наибольшей нижней гранью, т. е.

1) $\underline{x}$ — одна из нижних граней: $x \geq \underline{x}\ \ \forall x \in X$;

2) любое вещественное число x', большее $\underline{x}$, уже не является нижней гранью: $\exists x \in X:\ x < x'$. Обозначение: $\underline{x} = \inf X$.

Вопрос о существовании $\sup X$ и $\inf X$ не является очевидным и исчерпывающе решается в следующем утверждении.

Теорема 1. *У любого непустого ограниченного сверху* (*соответственно ограниченного снизу*) *множества вещественных чисел X существует точная верхняя* (*соответственно точная нижняя*) *грань.*

Как определить сумму и произведение вещественных чисел?

Правила сложения и умножения вещественных чисел основаны на следующем соображении. Если заменить складываемые (соответственно умножаемые) вещественные числа их рациональными приближениями с большой точностью[1], то сумма (соответственно произведение) этих приближений должна с большой точностью аппроксимировать сумму (соответственно произведение) рассматриваемых вещественных чисел.

Суммой чисел $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ называется такое число $x \in \boldsymbol{R}$, которое удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_1 + \beta_1 \le x \le \alpha_2 + \beta_2$$

для любых рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, для которых выполнены неравенства $\alpha_1 \le a \le \alpha_2$, $\beta_1 \le b \le \beta_2$.

Можно доказать, что определенное таким образом число $x = a + b$ всегда существует[2], и притом только одно.

Произведением положительных чисел $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ называется такое число $x \in \boldsymbol{R}$, которое удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \le x \le \alpha_2 \cdot \beta_2$$

для любых положительных рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, для которых выполнены неравенства $\alpha_1 \le a \le \alpha_2$, $\beta_1 \le b \le \beta_2$.

Произведение вещественных *чисел любого знака* определяется по следующему правилу:

---

[1] А это сделать возможно, так как для любого числа $a \in \boldsymbol{R}$ найдутся два числа $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{Q}$, для которых $\alpha_1 \le a \le \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = 10^{-n}$, причем натуральное число n может быть выбрано сколь угодно большим.

[2] В качестве x можно взять, например, точную верхнюю грань ограниченного сверху множества $\{\alpha_1 + \beta_1 \mid \alpha_1 \le a,\ \beta_1 \le b\}$.

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \ \ \forall\ a \in \boldsymbol{R}$;

2) $a \cdot b = |a| \cdot |b|$, если a, $b \in \boldsymbol{R}$ имеют один знак;

3) $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$, если a, $b \in \boldsymbol{R}$ имеют разный знак.

Точно так же, как и для суммы, можно доказать, что определенное таким образом число $x = a \cdot b$ всегда существует[1], и притом только одно.

Какими свойствами обладают вещественные числа?

Вещественные числа обладают всеми 13 основными свойствами, перечисленными выше для рациональных чисел. С их помощью однозначно решается вопрос о введении понятий разности и частного чисел a, $b \in \boldsymbol{R}$. *Разностью чисел* a, $b \in \boldsymbol{R}$ называют число $c \in \boldsymbol{R}$, для которого $b + c = a$. *Частным чисел* a, $b \in \boldsymbol{R}$ ($b \neq 0$) называют число $d \in \boldsymbol{R}$, для которого $b \cdot d = a$.

В чем заключается аксиоматический метод введения вещественных чисел?

Вещественные числа можно ввести как объекты любой природы, для которых указаны правила сравнения, сложения и умножения, удовлетворяющие 14 аксиомам, в качестве которых берутся 13 основных свойств и аксиома о полноте, постулирующая, что определяемое множество нельзя расширить до более широкого множества, в котором также были бы справедливы 13 основных свойств.

Следует отметить, что если отказаться от правила сравнения и связанных с ним свойств 1, 11—13, то множество вещественных чисел удается расширить до множества так называемых *комплексных чисел* $\boldsymbol{C}$.

Какие типы множеств вещественных чисел часто используются в математике?

В названиях множеств вещественных чисел широко используется геометрический язык. В силу возможности установить взаимно однозначное соответствие между множеством $\boldsymbol{R}$ и множеством всех точек

[1] Например, для положительных a, $b \in \boldsymbol{R}$: $a \cdot b = \sup\,\{\alpha_1 \cdot \beta_1 \mid 0 < \alpha_1 \leq a,\ 0 < \beta_1 \leq b\}$.

прямой линии элементы произвольного множества X вещественных чисел называют *точками*, и если при этом справедливо неравенство $x_1 < x_2$ (соответственно $x_1 > x_2$) между числами $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, то говорят, что точка x_1 лежит *левее* (соответственно правее) точки x_2. Терминология, относящаяся к наиболее часто используемым множествам вещественных чисел, содержится в следующей таблице.

Множество	**Название и обозначение**
$\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\}$	*Сегмент* $[a, b]$ с *концами* a и b; любое число x: $a < x < b$ называется *внутренней* точкой этого сегмента
$\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x < b\}$ и $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \le b\}$	*Полусегменты* $[a, b)$ и $(a, b]$
$\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$	*Интервал* (a, b)
Любой интервал, содержащий число c	*Окрестность* точки c
Интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$	ε-*окрестность* точки c
Объединение интервалов $(c - \varepsilon, c)$ и $(c, c + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$	*Проколотая* ε-*окрестность* точки c
Множество $\boldsymbol{R}$ всех вещественных чисел	*Числовая* (*бесконечная*) *прямая* $(-\infty, \infty)$
$\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \ge a\}$ и $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \le b\}$	*Полупрямые* $[a, \infty)$ и $(-\infty, b]$
$\{x \in \boldsymbol{R} \mid x > a\}$ и $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x < b\}$	*Открытые полупрямые* (a, ∞) и $(-\infty, b)$

Глава 2. Системы координат и их простейшие применения

Что называют осью?

Осью называют любую прямую линию с указанным на ней направлением.

Что такое направленный отрезок на оси и его величина?

Отрезок на оси называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Рассматриваются также *нулевые* направленные отрезки, т. е. те, у которых начало и конец совпадают. *Величиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется его длина $|\overrightarrow{AB}|$, взятая со знаком «+», если его направление совпадает с направлением оси, и со знаком «–» — в противном случае. Величины всех нулевых направленных отрезков на оси считаются равными нулю.

Какие направленные отрезки называют равными?

Два ненулевых направленных отрезка называются *равными*, если совпадают их длины и их направления. Любые два нулевых направленных отрезка считаются равными. Отметим, что равенство направленных отрезков не означает их совпадения, а необходимым и достаточным условием равенства направленных отрезков на оси является равенство величин этих отрезков.

Какие операции над направленными отрезками называют линейными?

Линейными операциями над направленными отрезками называют операцию сложения таких отрезков и операцию умножения направленного отрезка на число.

Для нахождения *суммы направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ необходимо совместить начало C второго отрезка с концом B первого отрезка — тогда направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ считается суммой $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (рис. 2.1).

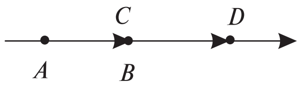


Рис. 2.1

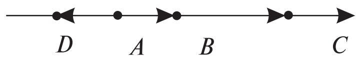


Рис. 2.2

Произведением направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на число α называется направленный отрезок, обозначаемый $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, длина которого равна $|\alpha| \cdot |\overrightarrow{AB}|$ и направление которого[1] совпадает с направлением $\overrightarrow{AB}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$ (на рис. 2.2: $\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD} = -1 \cdot \overrightarrow{AB}$).

Очевидно, что величина суммы направленных отрезков на оси равна сумме их величин, а величина произведения $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ равна произведению α на величину $\overrightarrow{AB}$.

Как вводятся декартовы координаты на прямой?

Говорят, что *на прямой* задана *декартова система* координат, если на этой прямой выбрано направление (т. е. она является осью), некоторая точка O (начало координат) и указана единица масштаба, т. е. указан какой-либо отрезок, длина которого считается равной 1. В этом случае *декартовой координатой* точки M на прямой будем называть величину направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ и обозначать ее $M(x)$.

Как найти величину и длину заданного направленного отрезка на оси?

Если известны координаты начала M_1 и конца M_2 направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$: $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то его величина равна $x_2 - x_1$, а его длина равна $|x_2 - x_1|$.

---

[1] В случае, когда $\alpha = 0$ или $A = B$, произведение $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ является нулевым направленным отрезком и его направление не требует определения.

Как вводятся декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве?

Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом O и одинаковой масштабной единицей (рис. 2.3) образуют *декартову прямоугольную систему координат на плоскости*. Три попарно перпендикулярные оси в пространстве с общим началом O и одинаковой масштабной единицей (рис. 2.4) образуют *декартову прямоугольную систему координат в пространстве*.

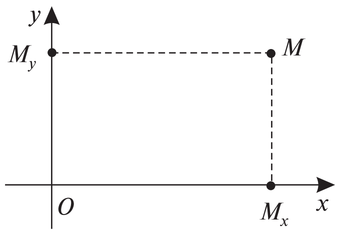


Рис. 2.3

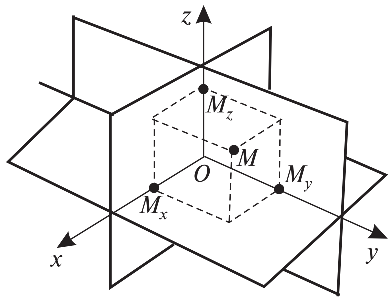


Рис. 2.4

На плоскости одну из осей называют *осью Ox*, или *осью абсцисс*, а вторую — *осью Oy*, или *осью ординат*. В пространстве к осям абсцисс Ox и ординат Oy добавляется еще третья ось — *ось Oz*, или *ось аппликат*.

Для нахождения координат точки M на плоскости необходимо построить проекции M_x и M_y этой точки на оси Ox и Oy соответственно; тогда величины x и y направленных отрезков $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ соответственно будут называться *декартовыми прямоугольными координатами точки M* на плоскости: $M(x, y)$, при этом координата x называется *абсциссой* точки M, а координата y — ее *ординатой*.

Аналогично в пространстве — необходимо построить проекции M_x, M_y и M_z точки M на оси Ox, Oy и Oz соответственно; тогда величины x, y и z направленных отрезков $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$ соответственно будут называться *декартовыми прямоугольными координатами точки M* в пространстве: $M(x, y, z)$, при этом координаты x, y, z точки M называются соответственно ее *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*.

Отметим, что направленные отрезки можно рассматривать не только на оси, но на плоскости и в пространстве.

Как найти расстояние между точками на плоскости и в пространстве?

Если точки M_1 и M_2 заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости или в пространстве, то расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между ними вычисляется по одной из формул:

– на плоскости

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

для точек $M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$;

– в пространстве

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

для точек $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$.

Как найти координаты точки, делящей заданный отрезок в известном отношении?

Пусть в пространстве заданы две различные точки M_1 и M_2, и рассмотрим на прямой, проходящей через эти точки, любую точку M, отличную от M_2. Тогда число λ, определяемое из соотношения $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, называется *отношением*, в котором *точка M делит направленный отрезок* $\overrightarrow{M_1M_2}$. Из этого определения вытекает, что число λ может быть любым вещественным числом, отличным от -1 (рис. 2.5).

Если известны декартовы прямоугольные координаты точек $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$, то координаты (x, y, z) точки M деления направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ определяются равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

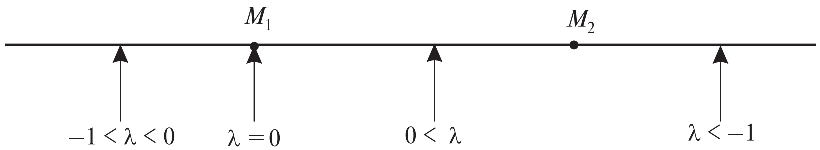


Рис. 2.5. Стрелками указано положение точки при данном начении λ

Как вводятся полярные координаты на плоскости?

Точка O плоскости (полюс), выходящий из нее луч Ox и заданная масштабная единица образуют *полярную систему координат* на плоскости (рис. 2.6).

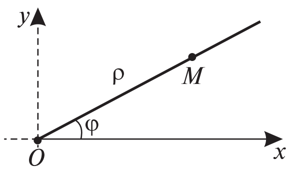


Рис. 2.6

Для нахождения полярных координат точки M на плоскости необходимо провести луч OM из полюса O; тогда число ρ, равное длине отрезка OM, и число φ, равное углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки луч Ox до совмещения с лучом OM, будут называться *полярными координатами*[1] точки M: $M(\rho, \varphi)$. При этом ρ называется *полярным радиусом*, а φ — *полярным углом*.

Очевидно, что полярные координаты (ρ, φ) точки M и ее декартовы прямоугольные координаты (x, y) (при условии, что последняя система координат согласована с полярной, как это показано на рис. 2.6) связаны равенствами

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \cdot \sin\varphi.$$

Как вводятся цилиндрические координаты в пространстве?

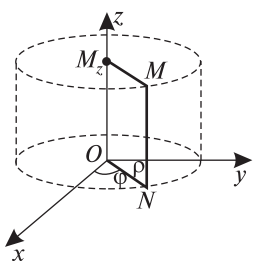


Рис. 2.7

Пусть в пространстве задана плоскость Π, на ней — точка O и выходящий из нее луч Ox. Рассмотрим, кроме того, ось Oz, выходящую из точки O перпендикулярно плоскости Π (рис. 2.7).

Для нахождения цилиндрических координат точки M в пространстве необходимо найти проекцию N этой точки на плоскость Π и проекцию M_z точки M на ось Oz. Тогда *цилиндрическими координатами* точки M называется тройка чисел (ρ, φ, z), в которой (ρ, φ) — полярные коорди-

[1] Если точка M совпадает с полюсом O, то $\rho = 0$, а угол φ считается неопределенным.

наты точки N в плоскости Π относительно полюса O и полярной оси Ox, а число z — величина отрезка $\overrightarrow{OM_z}$ на оси Oz.

Если декартова прямоугольная система координат в пространстве согласована с цилиндрической системой координат, как это показано на рис. 2.7, то имеют место соотношения:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \cdot \sin\varphi, \quad z = z.$$

Как вводятся сферические координаты в пространстве?

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Для нахождения сферических координат точки M в пространстве необходимо найти ее проекцию N на координатную плоскость Oxy (рис. 2.8). Тогда *сферическими координатами* точки M называется тройка чисел (ρ, φ, θ), в которой ρ — расстояние от M до O, θ — угол, который образует направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ с осью Oz, а φ — угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки (если смотреть со стороны положительного направления оси Oz) ось Ox до совмещения с лучом ON. Числа θ и φ называют *широтой* и *долготой* точки M соответственно[1].

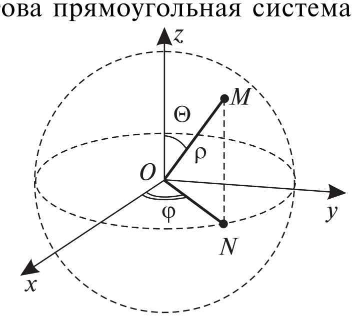


Рис. 2.8

Декартовы прямоугольные координаты (x, y, z) точки M и ее сферические координаты (ρ, φ, θ) связаны соотношениями: $x = \rho \cdot \sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho \cdot \cos\theta$.

Что такое комплексные числа и как определяются алгебраические операции над ними?

Комплексным числом называют упорядоченную пару (x, y) вещественных чисел, первое из которых x называется *действительной частью*, а второе y — *мнимой частью* этого комплексного числа. Используются следующие обозначения: если $z = (x, y)$, то $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

[1] Если точка M совпадает с началом O, то $\rho = 0$, а широта θ и долгота φ считаются неопределенными.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются *равными*, если одновременно $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Правила сложения и умножения комплексных чисел вводятся следующим образом.

Суммой комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ назовем комплексное число

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ назовем комплексное число

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1 y_2 + x_2y_1).$$

Какими основными свойствами обладают комплексные числа?

Комплексные числа обладают перечисленными выше (см. гл. 1) свойствами 2—10 рациональных (и вещественных) чисел, при этом роль нуля в свойстве 4 играет комплексное число (0, 0), роль противоположного к числу $z = (x, y)$ в свойстве 5 играет число $z' = (-x, -y)$, в роли единицы в свойстве 8 выступает комплексное число (1, 0), а обратным к ненулевому комплексному числу $z = (x, y)$ является число

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Как известно, указанные свойства полностью решают вопрос о вычитании комплексных чисел (как о действии, обратном их сложению) и о делении этих чисел (как о действии, обратном их умножению). При этом, если $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, то

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

и в случае $z_2 \neq (0, 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

В множестве $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел можно выделить подмножество всех пар вида $(x, 0)$, $x \in \boldsymbol{R}$, которое можно *отождествить с множеством* $\boldsymbol{R}$ *вещественных чисел* по правилу $x = (x, 0)$. Такое отождествление корректно, так как в применении к этим парам правила сложения и умножения комплексных чисел приводят к тем же результатам, что и известные правила сложения и умножения вещественных чисел.

Что называется алгебраической формой записи комплексного числа?

Для пары (0,1) используется отдельное обозначение i и специальный термин — *мнимая единица*. С учетом указанного выше отождествления части множества комплексных чисел с вещественными любое комплексное число $z = (x, y)$ можно представить в виде

$$z = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy,$$

который называют *алгебраической формой записи* комплексного числа z.

В чем состоит операция сопряжения комплексных чисел и какими свойствами она обладает?

Комплексное число $\bar{z} = (x, -y)$ называют *сопряженным* к числу $z = (x, y) = x + iy$. Операция сопряжения обладает следующими свойствами.

1. $(\bar{\bar{z}}) = z$.

2. $z \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.

3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;\ \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$.

5. $z \cdot \bar{z} \in \boldsymbol{R}\ \forall z \in \boldsymbol{C}$.

Как изображаются комплексные числа?

Комплексное число $z = (x, y)$ изображается точкой M с координатами (x, y) в некоторой декартовой прямоугольной системе координат Oxy. При этом на оси абсцисс расположены вещественные числа $(x, 0)$; из-за чего ось Ox называют *действительной осью*, а на оси ординат расположены числа $(0, y) = iy$, из-за чего ось Oy называют *мнимой осью*. Плоскость координат Oxy в этом случае называют *комплексной плоскостью*.

Правило сложения комплексных чисел допускает простую геометрическую интерпретацию: сумма $z = z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ на комплексной плоскости изображается точкой M, являющейся концом направленного отрезка $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, где точки M_1 и M_2 изображают числа z_1 и z_2 соответственно.

Отметим также, что в результате применения операции сопряжения к числу $z = (x, y)$ изображающая его точка M переходит в симметричную относительно действительной оси Ox точку.

Что называется тригонометрической формой записи комплексного числа?

Если (ρ, φ) — это полярные координаты изображающей число $z = (x, y)$ точки M, то от алгебраической формы записи $z = x + iy$ можно перейти к равенству

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

которое называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа z. Полярный радиус ρ в этой формуле называется *модулем* $|z|$, а полярный угол φ — *аргументом* $\arg z$ числа z.

Обычно считается, что $\arg z \in (-\pi, \pi]$, и в этом случае называют значение аргумента *главным*. Всю бесконечную совокупность значений угла $\varphi = \arg z + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, обозначают $\operatorname{Arg} z$.

Как можно использовать тригонометрическую форму записи при умножении и делении комплексных чисел?

При умножении двух комплексных чисел $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\{z_1 z_2 = (\rho_1\rho_2)\cdot[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\}.$$

При делении их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Из этих двух свойств, в частности, вытекает так называемая *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

в которой n — любое целое число.

Как извлекается корень степени *n* из комплексного числа?

Извлечь корень степени n ($n \geq 2$) из числа $z \in \boldsymbol{C}$ — значит найти все решения уравнения $w^n = z$.

Для этого необходимо записать заданное число z в тригонометрической форме:

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и искать решения w этого уравнения также в тригонометрической форме

$$w = r \cdot (\cos\psi + i\sin\psi).$$

Тогда искомые модуль r и аргумент ψ числа w должны удовлетворять соотношениям:

$$r^n = \rho; \quad \cos n\psi = \cos\varphi; \quad \sin n\psi = \sin\varphi.$$

Поэтому

$$r = \sqrt[n]{\rho}; \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}; \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

При $z \neq 0$ среди получившихся таким образом решений

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

имеется только n различных комплексных чисел, и тем самым достаточно взять значения $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Отметим, что указанные n решений уравнения $w^n = z$: $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ имеют одинаковые модули, а их аргументы образуют арифметическую прогрессию с разностью $2\pi / n$. Поэтому на комплексной плоскости эти числа расположены в вершинах некоторого правильного n-угольника, вписанного в окружность $|w| = \sqrt[n]{\rho}$.

Глава 3. Определители и системы линейных уравнений

Что называют квадратной матрицей?

Матрицей размера $m \times n$ называют прямоугольную таблицу из чисел, содержащую m строк и n столбцов. Если в матрице число строк совпадает с числом столбцов, то матрицу называют *квадратной*. Числа, входящие в состав матрицы, называют ее *элементами*.

Что называют определителем второго порядка?

Определителем второго порядка называют число, которое сопоставляется квадратной матрице 2×2 по правилу $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \to a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Обозначение: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Элементами определителя второго порядка обычно называют элементы его матрицы.

Очевидно, что определитель второго порядка *равен нулю* тогда и только тогда, когда элементы его строк (или соответственно элементы его столбцов) пропорциональны.

Как можно использовать определители второго порядка для исследования и отыскания решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = h_1, \\ a_2 x + b_2 y = h_2, \end{cases}$$

в которой коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 и свободные члены h_1, h_2 считаются заданными. Введем следующие три определителя второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

1. Если определитель системы Δ отличен от нуля, то единственное решение системы определяется по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

называемым *формулами Крамера*.

2. Если определитель системы Δ равен нулю, то может представиться только две возможности:

а) оба определителя Δ_x и Δ_y равны нулю, тогда система имеет бесконечно много решений[1];

б) оба определителя Δ_x и Δ_y отличны от нуля, тогда система не имеет решений.

Следует отметить, что *однородная система*

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0, \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases}$$

(в ней $h_1 = h_2 = 0$) всегда имеет тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$, и потому равенство нулю определителя этой системы равносильно наличию у нее нетривиального решения.

Что называют определителем третьего порядка?

Определителем третьего порядка называют число, которое сопоставляется квадратной матрице 3×3 по правилу

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \to a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3.$$

[1] Все эти решения образуют пары (x_0, y_0), удовлетворяющие, например, первому уравнению системы.

Обозначение:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Как и для определителя второго порядка, элементы матрицы определителя третьего порядка называют его *элементами*. Элементы a_1, b_2, c_3 называют *главной диагональю,* а элементы a_3, b_2, c_1 — *побочной*.

Для запоминания выражения определителя третьего порядка через его элементы используется следующее правило. В матрице

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

произведения троек элементов, соединенных сплошной чертой, входят в выражение для определителя со знаком «+», а произведения троек элементов, соединенных пунктирной чертой, — со знаком «–».

Какими основными свойствами обладают определители?

Определители третьего порядка[1] обладают следующими свойствами.

1. Значение определителя не изменится, если в нем строки и столбцы поменять ролями:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

В силу подобного *равноправия строк и столбцов* определителя все дальнейшие свойства приведем только для строк. Для столбцов все свойства формулируются аналогично.

2. Перестановка двух строк определителя равносильна умножению его на число -1.

3. Если определитель имеет две одинаковые строки, то он равен нулю.

4. Умножение всех элементов некоторой строки определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число λ.

[1] А также определители второго, как, впрочем и любого другого порядка.

5. Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6. Если элементы двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Если все элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух чисел, то этот определитель может быть представлен в виде суммы двух следующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1' + b_1'' & c_1' + c_1'' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1'' & c_1'' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки этого определителя, умноженные на произвольный множитель λ, то значение определителя не изменится.

Как можно свести определитель третьего порядка к вычислению определителей второго порядка?

Для построения соответствующей формулы необходимо ввести понятие минора и алгебраического дополнения элемента определителя.

Минором данного элемента определителя n-го порядка (здесь $n = 3$) называется определитель $(n - 1)$-го порядка, получаемый из данного определителя вычеркиванием в нем той строки и того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Алгебраическим дополнением данного элемента определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма номеров строки и столбца, в которых он расположен, четна, и со знаком «–» — если сумма нечетна.

Теорема (о разложении определителя). *Сумма произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) определителя на их алгебраические дополнения равна величине этого определителя.*

Например, разложение определителя третьего порядка по первой строке имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что если при построении такого разложения элементы строки (или столбца) умножать не на свои алгебраические дополнения, а на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (соответственно другого столбца), то такая сумма произведений всегда будет *равна нулю*.

Как можно использовать определители третьего порядка для отыскания решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными?

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3, \end{cases}$$

в которой коэффициенты при неизвестных x, y, z и свободные члены h_1, h_2, h_3 считаются заданными. Введем следующие четыре определителя: так называемый *определитель системы*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и три дополнительных определителя

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы Δ не равен нулю, то единственное решение системы определяется по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

так же, как и выше, называемым *формулами Крамера*.

Как можно использовать определители для отыскания решений однородной системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными?

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{cases}$$

Из матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

составим всевозможные определители второго порядка:

$$\Delta_x = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

1. Если все эти определители равны нулю, то одно из уравнений системы (например, второе) является следствием другого и решениями системы являются все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие только одному (соответственно первому) уравнению.

2. Если хотя бы один из этих определителей отличен от нуля, то система имеет бесконечное множество решений, определяемых формулами

$$x = \Delta_x \cdot t, \quad y = \Delta_y \cdot t, \quad z = \Delta_z \cdot t,$$

где t — любое вещественное число.

Как можно использовать определители для исследования однородной системы трех уравнений с тремя неизвестными?

Однородная система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

всегда имеет тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Равенство же нулю ее определителя Δ равносильно наличию у нее нетривиального решения.

Что можно сказать о множестве решений неоднородной системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, если ее определитель равен нулю?

Если в системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными свободные члены h_1, h_2, h_3 не все равны нулю, то в случае, когда определитель системы Δ равен нулю, могут представиться следующие возможности:

1) если хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y или Δ_z отличен от нуля, то система не имеет решений;

2) если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система может как иметь, так и не иметь решений; но если хотя бы одно решение имеется, то у системы — бесконечное множество различных решений.

Как можно ввести определители любого порядка?

Установленное выше для определителя третьего порядка разложение по строке (столбцу) может быть положено в основу последовательного введения определителей любого порядка по индукции.

Пусть уже имеется правило, по которому каждой квадратной матрице размера $(n - 1) \times (n - 1)$ сопоставляется значение ее определителя.

Тогда *определителем порядка n*, отвечающим квадратной матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

называют число, равное сумме

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot M_{1j} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n}.$$

Здесь M_{1j} — миноры элементов a_{1j}, расположенных в первой строке матрицы (они являются определителями $(n-1)$-го порядка — см. выше).

Отметим, что это разложение при $n = 3$ совпадает с разложением определителя третьего порядка по первой строке.

Можно показать, что введенный таким образом определитель n-го порядка обладает свойствами, аналогичными свойствам определителей второго и третьего порядка, и, кроме того, с помощью этого определителя можно исследовать и решать систему n линейных уравнений с n неизвестными.

Следует также обратить внимание на то, что определитель порядка n может быть введен непосредственно через элементы его матрицы (см. по этому поводу: *Ильин В. А*, *Ким Г. Д*. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2007).

В чем состоит метод Гаусса исследования и отыскания решения линейной системы?

Метод Гаусса по своей сути является методом последовательного исключения неизвестных в линейной системе.

Поясним его на следующих трех примерах.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Выберем любой ненулевой коэффициент при неизвестном x_1, например, равный 1 во втором уравнении, и назовем его *ведущим* коэффициентом первого шага. Для исключения неизвестного x_1 из остальных уравнений вычтем почленно — из первого второе, умноженное на 2, а из третьего второе, умноженное на 3. Получим новую систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_2 - 3x_3 = -8, \\ -x_2 - 5x_3 = -14. \end{cases}$$

Теперь повторим выбор ведущего коэффициента при неизвестном x_2 в укороченной системе

$$\begin{cases} -x_2 - 3x_3 = -8, \\ -x_2 - 5x_3 = -14. \end{cases}$$

Пусть ведущим выбран коэффициент -1 в первом из этих уравнений. Исключим неизвестное x_2 из второго уравнения, вычитая из него почленно первое:

$$\begin{cases} -x_2 - 3x_3 = -8, \\ -2x_3 = -6. \end{cases}$$

В последнем уравнении теперь осталось только неизвестное x_3. Следовательно, *прямой ход* метода Гаусса завершен.

Теперь в *обратном ходе* метода Гаусса последовательно найдем все неизвестные, начиная с последнего, из получившейся приведенной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_2 - 3x_3 = -8, \\ -2x_3 = -6. \end{cases}$$

Получим $x_3 = 3$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$. *Единственное* решение системы найдено.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ -3x_1 + x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$$

Для этой системы прямой ход метода Гаусса сводится к следующим переходам:

$$\to \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 5x_2 - 5x_3 = 5, \\ -5x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Из последней системы видно, что третье уравнение превратилось в верное тождество, а из второго и первого уравнений в обратном ходе метода Гаусса можно однозначно найти неизвестные x_1 и x_2, только если неизвестному x_3 придать произвольное значение.

Получим, что если $x_3 = t$, где $t \in \boldsymbol{R}$ — произвольное, то $x_2 = 1 + t$ и $x_1 = 3 - 2t$. Таким образом, система имеет *бесконечно много* решений:

$$x_1 = 3 - 2t,\ x_2 = 1 + t,\ x_3 = t,\ \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

В этом случае прямой ход метода Гаусса выглядит следующим образом:

$$\to \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 - 10x_3 = -1, \\ x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 - 5x_3 = 1, \\ 0 = -3. \end{cases}$$

В последней системе третье уравнение превратилось в неверное тождество. Следовательно, эта система, как и исходная, решений не имеет.

Глава 4. Векторная алгебра

Что такое геометрический вектор?

Геометрическим вектором, или просто *вектором*, называется направленный отрезок. Начало вектора называют *точкой его приложения*. Для вектора пользуются обозначением $\boldsymbol{a}$, и если он приложен к точке A, то пишут $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$. *Длина вектора* обозначается $|\boldsymbol{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают. Нулевой вектор не имеет направления, а его длина равна нулю.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых. Два ненулевых вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными.

Отметим, что точка приложения вектора в силу такого определения равенства векторов может быть выбрана произвольно, в соответствии с чем векторы часто называют *свободными*.

Какие операции над векторами принято называть линейными?

Линейными принято называть операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на число.

Суммой векторов $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\boldsymbol{a}$ в конец вектора $\boldsymbol{b}$, при условии, что вектор $\boldsymbol{b}$ приложен к концу вектора $\boldsymbol{a}$. Такое правило сложения обычно называют *правилом треугольника* (рис.4.1).

Отметим, что сумма двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ может быть найдена и по *правилу параллелограмма*, согласно которому сумма

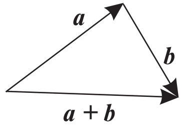


Рис. 4.1

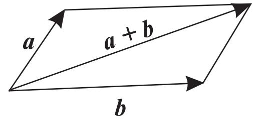


Рис. 4.2

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, приложенных к общему началу (рис. 4.2).

Произведением $\alpha \cdot \boldsymbol{a}$ *вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ называется вектор $\boldsymbol{b}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}|$, и направление[1], совпадающее с направлением $\boldsymbol{a}$ в случае $\alpha > 0$ и противоположное этому направлению в случае $\alpha < 0$.

Какими свойствами обладают линейные операции над векторами?

К основным свойствам линейных операций над векторами относятся следующие 7 свойств.

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (коммутативность сложения).

2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (ассоциативность сложения).

3. Для нулевого вектора $\mathbf{0}$: $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}\ \forall \boldsymbol{a}$ (особая роль нулевого вектора).

4. $\forall \boldsymbol{a}\ \exists \boldsymbol{a}'$: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{O}$ (существование противоположного вектора).

5. $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов).

6. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел).

7. $\alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{a}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{a}$ (ассоциативность умножения на число).

Свойства 1—4 позволяют исчерпывающе решить вопрос о вычитании векторов.

Разностью $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{c}$, который в сумме с вектором $\boldsymbol{b}$ дает вектор $\boldsymbol{a}$. Нетрудно показать, что вектор разности $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ равен $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}'$, где $\boldsymbol{b}'$ — вектор, противоположный $\boldsymbol{b}$.

В чем состоит критерий коллинеарности двух векторов?

Критерий коллинеарности утверждает: *вектор* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарен ненулевому вектору* $\boldsymbol{a}$ *тогда и только тогда, когда* $\exists\lambda\in\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{b} = \lambda\cdot\boldsymbol{a}$.

Что такое проекция вектора на ось и каковы ее основные свойства?

Для нахождения проекции вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l необходимо опустить из точек A и B перпендикуляры на ось l. Пусть A' и B' — основания соответствующих перпендикуляров. Тогда *проекцией вектора*

[1] В случае, когда $\alpha = 0$ или $\boldsymbol{a} = 0$, произведение $\alpha \cdot \boldsymbol{a}$ является нулевым вектором и его направление не требует определения.

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l называется величина направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ на оси l.

Отметим, что:

1) проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось l равна длине $|\,\boldsymbol{a}\,|$, умноженной на косинус угла наклона вектора $\boldsymbol{a}$ к оси l;

2) при сложении двух векторов их проекции на произвольную ось l складываются; при умножении вектора на число $\lambda \in \boldsymbol{R}$ проекция этого вектора на произвольную ось l также умножается на число λ.

Последнее свойство принято называть *свойством линейности проекции* вектора на ось.

Как определяются декартовы прямоугольные координаты вектора?

Пусть в пространстве введена декартова прямоугольная система координат с началом в точке O и векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ имеют единичную длину, лежат на осях Ox, Oy, Oz соответственно и их направления совпадают с направлениями этих осей. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{d}$ существуют три однозначно определяемых числа X, Y и Z, таких, что

$$\boldsymbol{d} = X\cdot\boldsymbol{i} + Y\cdot\boldsymbol{j} + Z\cdot\boldsymbol{k}.$$

Эти числа называются *декартовыми прямоугольными координатами*, или просто *координатами*, вектора $\boldsymbol{d}$.

При этом пишут:

$$\boldsymbol{d} = \{X, Y, Z\}.$$

Можно показать, что координаты X, Y, Z вектора $\boldsymbol{d}$ равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy и Oz соответственно и эти координаты, как и проекции векторов на ось, обладают свойством линейности.

Что называется скалярным произведением векторов?

Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, обозначаемое $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, которое равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними в случае, когда оба вектора ненулевые, и равно нулю в случае, когда хотя бы один из векторов нулевой:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{cases} |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}), \text{ если } \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}, \\ 0, \text{ если } \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \text{ или } \boldsymbol{b} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Здесь под *углом между ненулевыми векторами* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ понимается наименьший угол между лучами OA и OB, если $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$.

Если один из векторов (например, $\boldsymbol{b}$) является ненулевым, то скалярное произведение ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) совпадает с произведением длины этого вектора $\boldsymbol{b}$ на проекцию другого вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{b}$.

Какими свойствами обладает скалярное произведение?

Следует отметить сначала, что скалярное произведение ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) равно нулю лишь в двух случаях: либо когда один из векторов нулевой, либо когда угол между ними прямой. Если ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) = 0, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют *ортогональными*.

К основным свойствам скалярного произведения относятся следующие 4 свойства.

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (коммутативность).

2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

3. $(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (свойства 2 и 3 называют свойством линейности скалярного произведения по первому множителю).

4. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > \mathbf{0}$ $\forall \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ (свойство положительной определенности).

Из свойств 1—3 вытекает, что скалярное произведение линейно и по второму множителю, т. е

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), \; (\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Как найти скалярное произведение векторов, зная их координаты?

Если два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими декартовыми прямоугольными координатами $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то имеет место равенство

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

Как следствие, получается, что два вектора ***a*** и ***b*** ортогональны тогда и только тогда, когда их координаты удовлетворяют соотношению

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Как определяется ориентация тройки векторов в пространстве?

Векторы называются *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Понятие ориентации вводится только для упорядоченных троек некомпланарных векторов и состоит в следующем.

Тройка некомпланарных векторов ***a***, ***b***, ***c*** называется *правой* (соответственно *левой*), если после приведения этих векторов к общему началу третий вектор ***c*** располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами ***a*** и ***b***, откуда кратчайший поворот от первого вектора ***a*** ко второму вектору ***b*** кажется совершающимся против часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке) (рис. 4.3 и 4.4).

Если две тройки векторов обе являются правыми или левыми, то говорят, что эти тройки имеют *одинаковую ориентацию*. В противном случае — *противоположную ориентацию*.

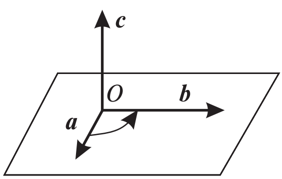


Рис. 4.3

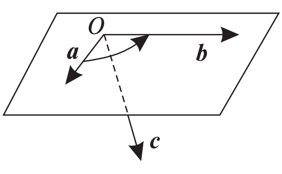


Рис. 4.4

Всего из трех некомпланарных векторов ***a***, ***b***, ***c*** можно составить шесть упорядоченных троек:

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}; \quad \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b};$$

$$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}; \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}.$$

Из них первые три тройки имеют ту же ориентацию, что и тройка ***a***, ***b***, ***c***, а также последние три тройки имеют ориентацию, противоположную ориентации тройки ***a***, ***b***, ***c***.

Ради определенности будем рассматривать только те декартовы прямоугольные системы координат, в которых векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ образуют правую тройку (такие системы координат называются *правыми*).

Что называется векторным произведением векторов?

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$ удовлетворяющий трем требованиям:

1) длина $|\boldsymbol{c}|$ равна произведению длин этих векторов на синус угла между ними:

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}});$$

2) вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

3) вектор $\boldsymbol{c}$ (в случае, если оказался ненулевым) направлен так, что тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — правая. *Векторное произведение* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, хотя бы один из которых нулевой, считается равным нулевому вектору.

Обозначается векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ символом $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Что называется смешанным произведением векторов?

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется число, обозначаемое $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, которое равно скалярному произведению векторов $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и $\boldsymbol{c}$, т. е.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) .$$

В чем состоит геометрический смысл векторного произведения?

Во-первых, *векторное произведение* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны.*

Во-вторых, в случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, длина $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$ векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

И в третьих, вектор $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$ всегда перпендикулярен плоскости, определяемой приведенными к общему началу неколлинеарными векторами $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

В чем состоит геометрический смысл смешанного произведения?

Во-первых, *смешанное произведение* ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$) *равно нулю тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *компланарны.*

Во-вторых, в случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, абсолютная величина $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ смешанного произведения равна объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

И в-третьих, смешанное произведение ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$) некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ положительно тогда и только тогда, когда тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ правая.

Какими алгебраическими свойствами обладают векторное и смешанное произведения?

К основным алгебраическим свойствам векторного произведения относят следующие 4 свойства.

1. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ (антикоммутативность).

2. $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$.

3. $[\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (свойства 2 и 3 называют свойством линейности векторного произведения по первому множителю).

4. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{a}$.

Из свойств 1–3 вытекает, что векторное произведение линейно и по второму множителю, т. е.

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}],\ [\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}] = \lambda [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

К основным алгебраическим свойствам смешанного произведения относят следующие 3 свойства.

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

2. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_2)$.

3. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda \boldsymbol{c}) = \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (свойства 2 и 3 называют свойством линейности смешанного произведения по последнему множителю).

С учетом свойства 1 из свойств 2 и 3 вытекает, что смешанное произведение линейно по любому из трех своих множителей.

Как найти векторное и смешанное произведения, зная координаты перемножаемых векторов?

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими декартовыми прямоугольными координатами[1] $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то имеет место равенство

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1, Z_1 X_2 - Z_2 X_1, X_1 Y_2 - X_2 Y_1\}$$

или в удобном для запоминания виде[2]

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ заданы своими декартовыми прямоугольными координатами $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\boldsymbol{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$, то имеет место равенство

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Что называют двойным векторным произведением?

Двойным векторным произведением называется вектор $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$. Справедливо равенство

$$[\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})] = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

---

[1] Система координат, как сказано выше, всегда предполагается правой.

[2] Значением этого определителя является вектор, получающийся при разложении определителя по первой строке.

Глава 5. Преобразование декартовых прямоугольных координат

Как меняются координаты точки на плоскости при параллельном переносе системы координат и при повороте системы координат вокруг начала?

Если новая система координат $O'x'\,y'$ получена из старой системы координат Oxy посредством ее *параллельного переноса* и при этом новое начало координат O' имеет координаты (a, b) (рис. 5.1), то для каждой точки M плоскости ее старые координаты (x, y) связаны с ее новыми координатами (x', y') равенствами:

$$x = x' + a,\ y = y' + b.$$

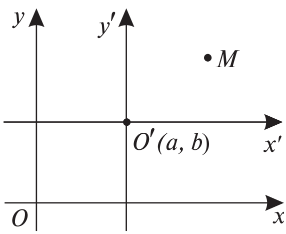


Рис. 5.1

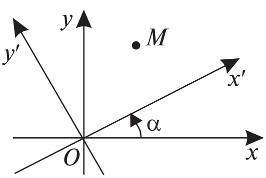


Рис. 5.2

Если новая система координат $O'x'y'$ получена из старой системы координат Oxy посредством ее *поворота* на угол α[1] (рис. 5.2), то для каждой точки M плоскости ее старые координаты (x, y) связаны с ее новыми координатами (x', y') равенствами

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

[1] Угол α считается положительным, если поворот выполняется против часовой стрелки, и отрицательным — если по часовой стрелке.

Как меняются координаты точки в пространстве при параллельном переносе?

В полной аналогии с параллельным переносом на плоскости, если известно, что новая система координат $O'x'y'z'$ получена из старой системы координат $Oxyz$ посредством ее *параллельного переноса* и при этом новое начало координат O' имеет координаты (a, b, c), то для каждой точки M пространства ее старые координаты (x, y, z) связаны с ее новыми координатами (x', y', z') равенствами

$$x = x' + a,\ y = y' + b,\ z = z' + c.$$

Как связаны координаты точки пространства в двух произвольных системах координат с общим началом?

Если две правые декартовы прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ имеют общее начало O, то для задания положения одной системы координат относительно другой используются так называемые *углы Эйлера*.

Обозначим через Ou ось, совпадающую с линией пересечения координатных плоскостей Oxy и $Ox'y'$ и направленную в ту сторону, откуда кратчайший поворот от оси Oz к оси Oz' кажется совершающимся против часовой стрелки (рис. 5.3).

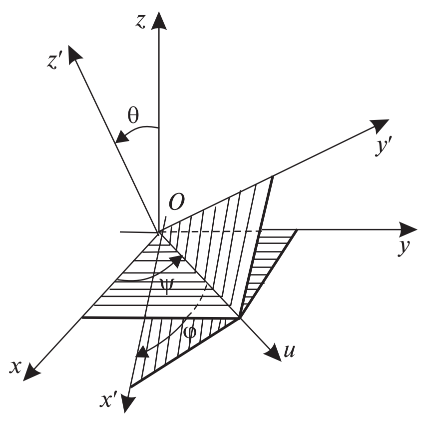


Рис. 5.3

Углами Эйлера называются три угла φ, ψ и θ, определяемые следующим образом:

– угол ψ — это угол между осями Ox и Ou, отсчитываемый в плоскости Oxy от оси Ox в направлении кратчайшего поворота от оси Ox к оси Oy;

– угол θ — это не превосходящий π угол между осями Oz и Oz';

– угол φ — это угол между осями Ou и Ox', отсчитываемый в плоскости $Ox'y'$ от оси Ou в направлении кратчайшего поворота от оси Ox' к оси Oy'.

Если заданы углы Эйлера, то переход от старой системы координат Oyz к новой системе $Ox'y'z'$ можно представить в виде последовательного проведения трех поворотов на углы ψ, θ и φ вокруг соответствующим образом выбранных координатных осей. При этом старые координаты (x, y, z) каждой точки M пространства связаны с ее новыми координатами (x', y', z') равенствами

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z', \\ y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \\ z = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z', \end{cases}$$

где

$$a_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi, \quad a_{12} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi,$$
$$a_{13} = \sin\theta\sin\varphi, \quad a_{21} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi,$$
$$a_{22} = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi, \quad a_{23} = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$a_{31} = \sin\psi\cos\theta, \quad a_{32} = -\cos\psi\sin\theta, \quad a_{33} = \cos\theta.$$

Глава 6. Основы аналитической геометрии

Что называется алгебраической линией *n*-го порядка?

Линия на плоскости называется *алгебраической линией n-го порядка*, или просто *линией n-го порядка*, если эта линия в некоторой декартовой прямоугольной системе координат Oxy определяется уравнением $\Phi(x,\ y) = 0$, в котором функция $\Phi(x,\ y)$ является алгебраическим многочленом степени n относительно двух переменных x, y.

Данное определение математически корректно, так как линия n-го порядка в любой другой декартовой прямоугольной системе координат также будет задаваться алгебраическим уравнением степени n с двумя неизвестными.

Уравнение $Ax + By + C = 0$, в котором либо A, либо B отлично от нуля, является общим уравнением линии *первого порядка*. Уравнение $Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$, в котором либо A, либо B, либо C отлично от нуля, является общим уравнением линии *второго порядка*.

Что называется алгебраической поверхностью *n*-го порядка?

Поверхность в пространстве называется *алгебраической поверхностью n-го порядка*, или просто *поверхностью n-го порядка*, если эта поверхность в некоторой декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ определяется уравнением $\Phi(x,\ y,\ z) = 0$, в котором функция $\Phi(x,\ y,\ z)$ является алгебраическим многочленом степени n относительно трех переменных x, y, z.

Математическая корректность этого определения понимается в смысле, аналогичном корректности определения линии n-го порядка, сформулированного выше.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, в котором либо A, либо B, либо C отлично от нуля, является общим уравнением поверхности *первого порядка*. Общее уравнение поверхности *второго порядка* имеет вид

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{12}xy + A_{23}yz + A_{13}xz +$$
$$+B_1x + B_2y + B_3z + C = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A_{ij} отличен от нуля.

Как можно описать линию в пространстве?

Линию в пространстве обычно рассматривают как пересечение двух поверхностей. Поэтому если известны уравнения $\Phi_1(x, y, z) = 0$ и $\Phi_2(x, y, z) = 0$ двух таких поверхностей, то система двух уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

определяет рассматриваемую линию.

Другим способом описания линии в пространстве является задание ее *параметрических уравнений*

$$x = \varphi(t), \quad , y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

в которых координаты (x, y, z) точки на линии определяются как некоторые непрерывные функции переменной t, называемой *параметром*.

Как можно задать прямую линию на плоскости?

1. Основным способом задания прямой линии на плоскости является задание ее *общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором либо A, либо B отлично от нуля. Таким образом, прямые линии на плоскости, и только они, являются алгебраическими линиями первого порядка. Отметим также, что коэффициенты A и B в общем уравнении имеют простой геометрический смысл: вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B\}$ перпендикулярен прямой (и потому называется ее *нормальным вектором*).

2. Общее уравнение $Ax + By + C = 0$ прямой линии называется *полным*, если все его коэффициенты A, B и C отличны от нуля. Любое полное уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках*. Это уравнение имеет следующий геометрический смысл: числа a и b в нем равны величинам направленных отрезков, которые эта прямая отсекает на осях Ox и Oy соответственно.

3. Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$

является уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{q}=\{l,\ m\}$ (вектор $\boldsymbol{q}$ в данном случае называется *направляющим вектором* этой прямой). Вектор $\boldsymbol{q}$ ненулевой, однако при этом одна из его координат l или m может оказаться равной нулю. Тогда каноническое уравнение прямой понимается как пропорция, т. е. эквивалентно равенству $(x-x_0)m=(y-y_0)l$.

4. С помощью канонического уравнения можно написать уравнение прямой, *проходящей через две* данные и отличные друг от друга *точки* $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5. Из канонического уравнения можно получить *параметрические уравнения* прямой

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\end{cases}$$

в которых параметр t принимает любые вещественные значения.

6. Любую прямую, не параллельную оси Oy, можно описать *уравнением с угловым коэффициентом*

$$y=kx+b,$$

в котором угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox.

Как выяснить взаимное расположение двух прямых на плоскости?

Как известно, две прямые L_1 и L_2 на плоскости могут быть параллельными, могут сливаться в одну и могут пересекаться в одной точке. Будем далее называть две прямые *коллинеарными*, если они либо параллельны, либо сливаются.

Все условия того или иного взаимного расположения двух прямых в зависимости от способа их задания сведем в таблицу.

	L_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ L_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$	L_1: $y=k_1x+b_1$ L_2: $y=k_2x+b_2$	$L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}$ $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}$
L_1 и L_2 **коллинеарны**	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$	$k_1=k_2$	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$
L_1 и L_2 **параллельны**	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$	$k_1=k_2,\ b_1\neq b_2$	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}\neq\dfrac{y_1l_1-x_1m_1}{y_2l_2-x_2m_2}$
L_1 и L_2 **сливаются**	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	$k_1=k_2,\ b_1=b_2$	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{y_1l_1-x_1m_1}{y_2l_2-x_2m_2}$
L_1 и L_2 **пересекаются**	$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$	$k_1\neq k_2$	$\dfrac{l_1}{l_2}\neq\dfrac{m_1}{m_2}$

В следующей таблице приведены условия ортогональности (перпендикулярности) двух прямых и формулы для вычисления угла между прямыми.

	Условие ортогональности	**Косинус угла между прямыми**
L_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ L_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$	$A_1A_2+B_1B_2=0$	$\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$
L_1: $y=k_1x+b_1$ L_2: $y=k_2x+b_2$	$k_1k_2=-1$	$\dfrac{k_1k_2+1}{\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^2+1}}$
$L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}$ $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}$	$l_1l_2+m_1m_2=0$	$\dfrac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$

Как с помощью нормированного уравнения прямой найти расстояние от точки до прямой?

Нормированным уравнением прямой называется уравнение вида

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Расстояние d от точки $M(x, y)$ плоскости до этой прямой равно абсолютной величине левой части ее нормированного уравнения, т. е.

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Как можно задать плоскость в пространстве?

1. Основным способом задания плоскости в пространстве является задание ее *общим уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором либо A, либо B, либо C отлично от нуля. Таким образом, плоскости в пространстве, и только они, являются алгебраическими поверхностями первого порядка. Отметим также, что, как и для прямой на плоскости, коэффициенты A, B, C в общем уравнении плоскости имеют простой геометрический смысл: вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости (он называется ее *нормальным вектором*).

2. Общее уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ плоскости называется *полным*, если все его коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля. Любое полное уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках*. Это уравнение имеет следующий геометрический смысл: числа a, b и c в нем равны величинам направленных отрезков, которые эта плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно.

3. Уравнение плоскости, *проходящей через три заданные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Как выяснить взаимное расположение двух плоскостей?

Как известно, две плоскости π_1 и π_2 в пространстве могут быть параллельны, могут сливаться в одну и могут пересекаться по некоторой прямой линии L.

Все условия того или иного взаимного расположения двух плоскостей сведем в таблицу.

	π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
π_1 и π_2 **параллельны**	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
π_1 и π_2 **сливаются**	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
π_1 и π_2 **пересекаются**	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

Условием ортогональности (перпендикулярности) двух плоскостей π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ является равенство

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

а косинус двугранного угла, получающегося при их пересечении, равен

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Как с помощью нормированного уравнения плоскости найти расстояние от точки до плоскости?

Нормированным уравнением плоскости называется уравнение вида

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+$$

$$+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Расстояние d от точки $M(x, y, z)$ пространства до этой плоскости равно абсолютной величине левой части ее нормированного уравнения, т. е.

$$d=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Как можно задать прямую линию в пространстве?

1. Прямую линию L в пространстве можно задать как линию пересечения двух различных плоскостей, ее содержащих[1]:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

2. Однако более удобным является задание прямой L ее *каноническим уравнением*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

в котором $\{l, m, n\}$ — координаты *направляющего вектора* $\boldsymbol{q}$ прямой L (т. е. вектора, параллельного L), а (x_0, y_0, z_0) — координаты некоторой точки M_0 на прямой L. Направляющий вектор $\boldsymbol{q}$ ненулевой,однако при этом некоторые его координаты могут оказаться равными нулю. Тогда каноническое уравнение прямой понимается как двойная пропорция.

[1] Как отмечалось выше, при этом должно быть выполнено одно из неравенств: $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

3. С помощью канонического уравнения можно написать уравнение прямой, *проходящей через две* данные и отличные друг от друга *точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. Из канонического уравнения можно получить *параметрические уравнения* прямой в пространстве

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \end{cases}$$

в которых параметр t принимает любые вещественные значения.

Как выяснить взаимное расположение двух прямых в пространстве?

Две прямые L_1 и L_2 в пространстве могут быть параллельными, могут сливаться в одну прямую, могут пересекаться в одной точке и, наконец, могут скрещиваться. Только в последнем случае две прямые не лежат ни в одной плоскости пространства.

Сведем все условия того или иного взаимного расположения двух прямых пространства в следующую таблицу:

	$L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$
L_1 и L_2 **лежат в одной плоскости**	$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$
L_1 и L_2 **сливаются**	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}, \quad \dfrac{x_2-x_1}{l_1}=\dfrac{y_2-y_1}{m_1}=\dfrac{z_2-z_1}{n_1}$
L_1 и L_2 **параллельны**	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}; \quad \dfrac{x_2-x_1}{l_1}\neq\dfrac{y_2-y_1}{m_1}$ или $\dfrac{y_2-y_1}{m_1}\neq\dfrac{z_2-z_1}{n_1}$
L_1 и L_2 **пересекаются**	$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0; \ \dfrac{l_1}{l_2}\neq\dfrac{m_1}{m_2}$ или $\dfrac{m_1}{m_2}\neq\dfrac{n_1}{n_2}$

Окончание табл.

L_1 и L_2 **скрещиваются**	$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Условием ортогональности (перпендикулярности) двух прямых в пространстве $L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и $L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ является равенство

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

которое выражает собой условие ортогональности направляющих векторов этих двух прямых. Косинус угла между прямыми L_1 и L_2 равен

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

т. е. равен косинусу угла между направляющими векторами этих прямых.

Как выяснить взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?

Прямая L и плоскость π в пространстве могут быть параллельными, могут пересекаться в одной точке, и, наконец, прямая L может целиком лежать в плоскости π.

Все условия того или иного взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве сведены в таблицу.

	$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad \pi: Ax + By + Cz = D = 0$
L **лежит в плоскости** π	$Al + Bm + Cn = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$
L **параллельна плоскости** π	$Al + Bm + Cn = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$
L **и** π **пересекаются в одной точке**	$Al + Bm + Cn \neq 0$

Условием ортогональности (перпендикулярности) прямой $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$ является равенство

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n},$$

а синус угла между прямой L и плоскостью π равен

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Что называют стандартным упрощением уравнения линии второго порядка?

Стандартным упрощением общего уравнения $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ *линии второго порядка* на плоскости принято называть переход к новому уравнению вида

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

в котором отсутствует слагаемое, содержащее произведение $x'y'$. Такое упрощение всегда можно сделать, выполнив поворот[1] исходной системы координат Oxy на угол α, определяемый равенством $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{A-C}{B}$.

Какие линии второго порядка называют центральными?

Пусть линия второго порядка задана уравнением

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

прошедшим стандартное упрощение. Если в этом уравнении *оба коэффициента* A и C *отличны от нуля*, то его можно привести к виду[2]

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = H.$$

Такая линия второго порядка имеет единственный центр симметрии — точку $O'(x_0, y_0)$, и поэтому ее принято называть *центральной*. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что прямые

[1] Напомним, что при этом $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$.

[2] Для этого необходимо выделить полные квадраты по переменной x и по переменной y.

$x = x_0$ и $y = y_0$ являются осями симметрии такой линии второго порядка.

Какие центральные линии второго порядка относятся к эллиптическому типу, а какие — к гиперболическому?

Пусть уравнение центральной линии второго порядка приведено к виду[1]

$$Ax^2 + Cy^2 = H.$$

Принята следующая классификация центральных линий второго порядка:

1) линия, определяемая уравнением $Ax^2 + Cy^2 = H$, называется линией *эллиптического типа*, если коэффициенты A и C одного знака. В этом случае линия является:

а) либо *эллипсом*, если все три числа A, C, H одного знака;

б) либо *вырожденным эллипсом* и определяет на плоскости Oxy только одну точку $x = 0$, $y = 0$, если $H = 0$;

в) либо *мнимым эллипсом* и не определяет никакого геометрического образа, если у коэффициента H знак противоположен знакам коэффициентов A и C;

2) линия, определяемая уравнением $Ax^2 + Cy^2 = H$, называется линией *гиперболического типа*, если коэффициенты A и C имеют разный знак. В этом случае линия является:

а) либо *гиперболой*, если $H \neq 0$;

б) либо *вырожденной гиперболой* и определяет на плоскости Oxy пару пересекающихся прямых, если $H = 0$.

Какая линия называется эллипсом и каковы его основные свойства?

Эллипсом называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат Oxy (называемой канонической) задается уравнением

[1] Для этого достаточно в уравнении $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = H$ положить $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, т. е. выполнить параллельный перенос системы Oxy, поместив точку O в новое начало координат $O'(x_0, y_0)$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

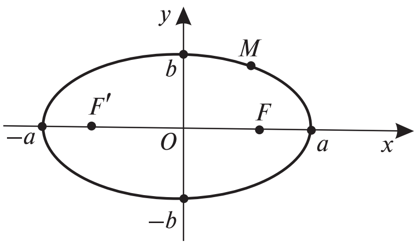


Рис. 6.1

где числа a и b удовлетворяют условию $0 < b \le a$. Это уравнение называется *каноническим*, а числа a и b — его *полуосями* (рис. 6.1).

Положим $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Точки $F(c,\ 0)$ и $F'(-c,\ 0)$ называются *фокусами* эллипса и обладают следующим свойством: *для всех точек M эллипса, и только для них, сумма расстояний от точки M до фокусов F и F' есть величина постоянная*[1]. Такое свойство эллипса называют *характеристическим* и часто принимают за его определение.

Величина $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет эллипса удовлетворяет условию $0 \le \varepsilon < 1$ и показывает, сколь сильно эллипс отличается от окружности:

– при $\varepsilon = 0$ эллипс является окружностью;

– чем ближе ε к 1, тем больше отношение полуосей $\dfrac{a}{b}$.

Какая линия называется гиперболой и каковы ее основные свойства?

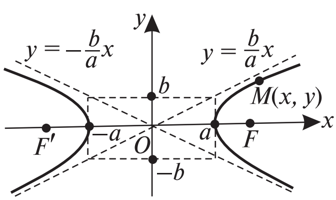


Рис. 6.2

Гиперболой называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат Oxy (называемой канонической) задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где числа a и b положительны. Это уравнение называется *каноническим*, а числа a и b — *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы соответственно (рис. 6.2).

[1] Равная числу $2a$.

Положим $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Точки $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы и обладают следующим свойством: *для всех точек M гиперболы, и только для них, модуль разности расстояний от точки M до фокусов F и F' есть величина постоянная*[1]. Такое свойство гиперболы называют *характеристическим* и часто принимают за ее определение.

Прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы в том смысле, что при увеличении $|x|$ точка $M(x, y)$ на гиперболе неограниченно приближается либо к первой, либо ко второй из этих прямых.

Величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Эксцентриситет гиперболы удовлетворяет условию $\varepsilon > 1$ и характеризует модуль угловых коэффициентов асимптот гиперболы:

– чем ближе ε к 1, тем ближе к нулю угол наклона асимптот к оси Ox;

– чем больше ε, тем ближе этот угол наклона к прямому углу.

Какая линия второго порядка относится к нецентральным и каковы ее основные свойства?

Пусть линия второго порядка задана уравнением

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

в котором *один из коэффициентов A или C равен нулю*. Пусть, например, $A = 0$ и $C \neq 0$. Тогда уравнение можно привести к виду[2]

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Если в исходном уравнении $D \neq 0$, то параметр p в приведенном уравнении также отличен от нуля. Такая линия второго порядка имеет одну ось симметрии $y = y_0$ и не имеет центра симметрии.

Будем далее считать, что приведенное уравнение имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

в котором параметр p положителен[3].

[1] Равная числу $2a$.

[2] Для этого необходимо выделить полный квадрат по переменной y.

[3] Для этого достаточно в уравнении $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ положить $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, т. е. выполнить параллельный перенос системы Oxy, а затем, если $p < 0$, изменить направление оси абсцисс на противоположное.

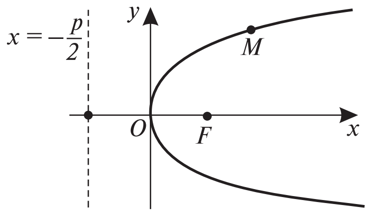


Рис. 6.3

Линия, заданная таким уравнением, называется *параболой* (рис. 6.3).

Точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется *фокусом параболы*, а прямая d: $x=-\frac{p}{2}, 0$ — ее *директрисой*. Имеет место следующее свойство: *для всех точек M параболы, и только для них, расстояния от M до фокуса F и до директрисы d равны между собой.* Это свойство параболы называют *характеристическим* и часто принимают за ее определение.

Каковы основные типы поверхностей второго порядка?

Основные типы поверхностей второго порядка сведены в следующую таблицу, первый столбец которой содержит названия поверхностей, второй — их канонические уравнения (в некоторой декартовой прямоугольной системе координат Oxy), а в третьем столбце указаны ссылки на соответствующие рисунки.

Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Рис. 6.4
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Рис. 6.5
Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Рис. 6.6
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Рис. 6.7
Эллиптический параболоид	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	Рис. 6.8
Гиперболический параболоид	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	Рис. 6.9

Окончание табл.

Эллиптический цилиндр второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Рис. 6.10
Гиперболический цилиндр второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Рис. 6.11
Параболический цилиндр второго порядка	$y^2=2px$	Рис. 6.12

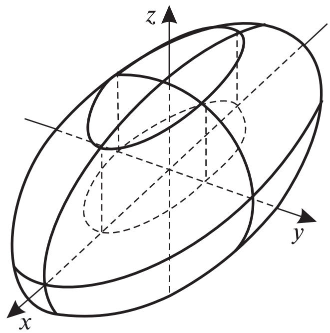


Рис. 6.4

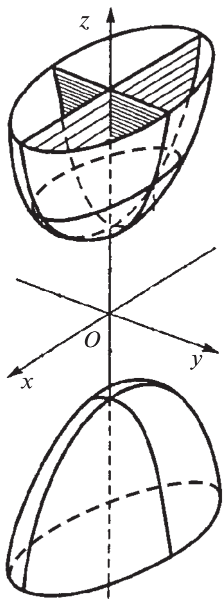


Рис. 6.6

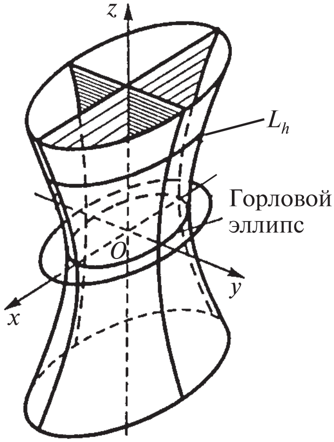


Рис. 6.5

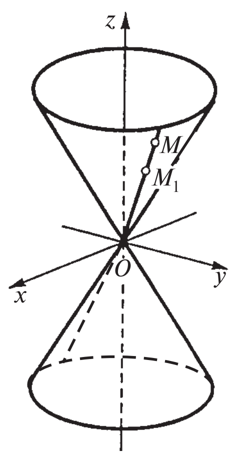


Рис. 6.7

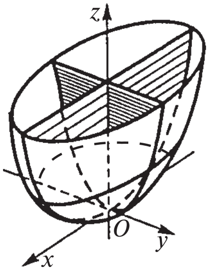


Рис. 6.8

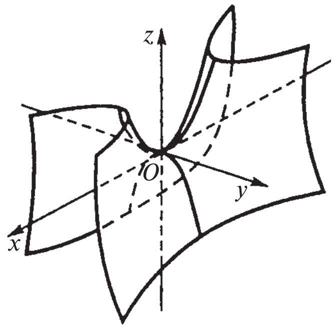


Рис. 6.9

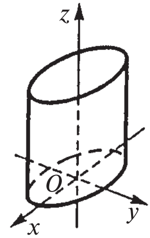


Рис. 6.10

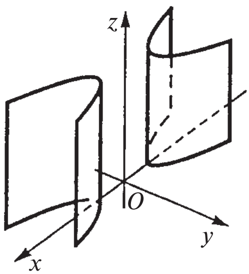


Рис. 6.11

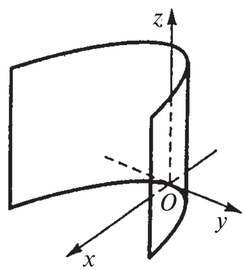


Рис. 6.12

Отметим, что для двух типов поверхностей второго порядка — для однополостного гиперболоида и для гиперболического параболоида — справедливо следующее свойство: *через каждую точку поверхности проходят две различные прямые линии, целиком на этой поверхности лежащие*. Такие прямые называются *прямолинейными образующими* поверхности[1].

[1] Очевидно, что прямолинейные образующие имеют конус и все цилиндры второго порядка.

Глава 7. Предел последовательности

Что называют числовыми последовательностями и какие арифметические операции допустимы над ними?

Если $\forall n \in \boldsymbol{N}$ поставлено в соответствие число $x_n \in \boldsymbol{R}$, то говорят, что числа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ образуют *числовую последовательность*, или просто *последовательность*. Отдельные числа x_n последовательности называют ее *элементами*, или *членами*, а саму последовательность обозначают $\{x_n\}$.

Последовательности можно складывать, вычитать, умножать и делить. Под этими действиями понимают почленное выполнение операций, т. е. для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ их *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* называют последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ и $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ соответственно.

Какие последовательности называют ограниченными?

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (соответственно *снизу*), если $\exists M \in \boldsymbol{R}$ (соответственно $\exists m \in \boldsymbol{R}$), для которого $x_n \le M$ (соответственно $x_n \ge m$) $\exists n \in \boldsymbol{N}$. Число M (соответственно m) называется *верхней гранью* (соответственно *нижней гранью*) этой последовательности. Если последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной и сверху, и снизу, то она называется просто *ограниченной*.

В соответствии с этими определениями последовательность $\{x_n\}$ является *неограниченной*, если для любого сколь угодно большого числа $A > 0$ $\exists x_n$, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

Какие последовательности называют бесконечно большими?

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа $A > 0$ $\exists N \in N$ найдется номер N, обеспечивающий справедливость неравенства $| x_n | > A$ для всех $n \geq N$, т. е.

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N}: \quad \forall n \geq N \Rightarrow | x_n | > A.$$

Тот факт, что $\{x_n\}$ — бесконечно большая, обозначают одним из символов: либо x_n при $n \to \infty$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$.

Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной, но не наоборот. Например, последовательность 1, 2, 1, 4, ..., 1, $2n$, ... неограниченная, но не является бесконечно большой.

Какие последовательности называют бесконечно малыми?

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ $\exists N \in N$, обеспечивающий справедливость неравенства $| \alpha_n | < \varepsilon$ для всех $n \geq N$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N}: \quad \forall n \geq N \Rightarrow | \alpha_n | < \varepsilon.$$

Тот факт, что $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, обозначают одним из символов: либо $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Следующие последовательности, например, являются бесконечно малыми:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ при } q \in \boldsymbol{R}\text{: } |q| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ при } \alpha \in \boldsymbol{R}\text{: } \alpha > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{ при } \forall a \in \boldsymbol{R},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \text{ при } \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall a > 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\alpha}=0 \text{ при } \forall a>1 \text{ и } \forall\alpha>0.$$

Какими основными свойствами обладают бесконечно малые последовательности?

К основным относят следующие 5 свойств бесконечно малых последовательностей.

1. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми, т. е. если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые, то

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=0, \quad \lim_{n\to\infty}(\alpha_n-\beta_n)=0.$$

2. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой, т. е. если $\{x_n\}$ ограниченная, $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\alpha_n)=0.$$

3. Всякая бесконечно малая последовательность ограничена.

4. Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой, т. е. если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые, то

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\beta_n)=0.$$

5. Если последовательность $\{y_n\}$ — бесконечно большая, то начиная с некоторого номера определено частное $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$, которое является бесконечно малой последовательностью.

Какие последовательности называют сходящимися?

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если $\exists a\in\boldsymbol{R}$, для которого последовательность $\{x_n-a\}$ — бесконечно малая. При этом число a называют *пределом* последовательности $\{x_n\}$ и пишут: либо $x_n\to a$ при $n\to\infty$, либо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Используя определение бесконечно малой последовательности, данное определение можно сформулировать в другой, эквивалентной форме.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся к числу* $a \in R$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N, обеспечивающий справедливость неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N}: \quad \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последнее условие имеет простую геометрическую интерпретацию: для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности точки a, т. е. на интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, содержатся все элементы последовательности, начиная с некоторого номера N.

Последовательности, не являющиеся сходящимися, называют *расходящимися*.

Какими основными свойствами обладают сходящиеся последовательности?

К основным относят следующие 5 свойств сходящихся последовательностей.

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

3. Сумма, разность, произведение и частное двух сходящихся последовательностей являются также сходящимися последовательностями, и при этом, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

(для частного необходимо требовать, чтобы $b \neq 0$, и рассматривать элементы $\dfrac{x_n}{y_n}$ только начиная с того номера N, с которого $y_n \neq 0$ $\forall\ n \geq N$).

4. Если $x_n \to x$ при $n \to \infty$ и, начиная с некоторого номера N, выполнено неравенство $x_n \geq a$ (соответственно $x_n \leq b$), то предел x удовлетворяет тому же неравенству: $x \geq a$ (соответственно $x \leq b$). Это свойство часто называют теоремой о *предельном переходе под знаком неравенства.*

Из этого свойства, в частности, следует, что если для двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера N, выполнено неравенство $x_n \le y_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Отметим, что если для сходящейся последовательности $\{x_n\}$ выполнено строгое неравенство $x_n > a$, то это не означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a.$ Достаточно рассмотреть пример

$$x_n = \frac{1}{n},\ a = 0.$$

5. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к общему пределу a, при этом элементы третьей последовательности $\{z_n\}$, начиная с некоторого номера N, удовлетворяют неравенствам $x_n \le z_n \le y_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sup\{x_n\}.$$

Какие последовательности называют монотонными и каким основным свойством они обладают?

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (соответственно *невозрастающей*), если для $\forall n \ge N$ справедливо неравенство $x_n \le x_{n+1}$ (соответственно $x_n \ge x_{n+1}$).

Неубывающие и невозрастающие последовательности называют *монотонными.*

Имеет место следующая теорема о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

Теорема. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *не убывае*т (*соответственно не возрастает*) *и ограничена сверху* (*соответственно снизу*), *то она сходится*, *при этом*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sup\{x_n\}.\ (\textit{соответственно}\ \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}).$$

Как определяется число *e*?

Число *e* определяется как предел последовательности $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n.$

Можно показать, что эта последовательность возрастает и ограничена сверху, что позволяет применить вышеупомянутую теорему о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

Число e является иррациональным и имеет с точностью до 15 знаков после запятой вид:

$$e = 2{,}718281828459045\ldots .$$

Что называют предельной точкой последовательности?

Если из последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ выбрать некоторое бесконечное подмножество элементов $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots,$ номера которых образуют возрастающую последовательность $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, то получится новая последовательность $\{x_{k_n}\}$ которая называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Любая подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_n\}$ также сходится, причем к тому же пределу. Если же последовательность $\{x_n\}$ произвольна (не обязательно сходится), то ее подпоследовательности могут как сходиться, так и расходиться.

Точка $x \in \boldsymbol{R}$ называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу x.

Понятие предельной точки допускает также следующее геометрическое толкование: точка $x \in \boldsymbol{R}$ является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой ε-окрестности точки x лежит бесконечно много элементов этой последовательности.

В чем состоит утверждение теоремы Больцано–Вейерштрасса?

Теорема Больцано–Вейерштрасса утверждает, что *любая ограниченная последовательность* $\{x_n\}$ *имеет хотя бы одну предельную точку или*, иными словами, *из любой ограниченной последовательности* $\{x_n\}$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Какие множества называют замкнутыми?

Множество $X \subset \boldsymbol{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои *предельные точки*[1], т. е. те точки, в любой ε-окрестности которых содержится бесконечно много элементов этого множества.

Что называют верхним и нижним пределами последовательности?

Наибольшая (соответственно наименьшая) предельная точка последовательности $\{x_n\}$ называется ее *верхним* (соответственно *нижним*) *пределом* и обозначается

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \text{ (соответственно } \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \text{)}.$$

Справедливо следующее утверждение: *у всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ существуют верхний предел $\overline{x}$ и нижний предел $\underline{x}$, причем для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ все элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера $N = N(\varepsilon)$, лежат на интервале $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$.*

Из этого утверждения, в частности, вытекает, что если ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет единственную предельную точку x, то эта последовательность сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

В чем состоит критерий Коши сходимости последовательности?

Критерий Коши сходимости последовательности позволяет сделать заключение о сходимости лишь по самим элементам x_n последовательности и не использует величины ее предполагаемого предела.

Теорема. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна*, т. е. для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ нашелся бы номер N, обеспечивающий справедливость неравенства $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для $\forall n \geq \boldsymbol{N}$ и $\forall p \in \boldsymbol{N}$.

---

[1] Для предельных точек множества X с бесконечным числом элементов также справедлива теорема Больцано–Вейерштрасса.

Глава 8. Функция и ее предел

Что называется пределом функции в точке?

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором бесконечном множестве $X \subset \boldsymbol{R}$ и пусть a — предельная точка[1] этого множества X.

Число b называется *пределом функции $y = f(x)$ в точке a* (или *при $x \to a$*), если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества X, сходящейся[2] к a и состоящей из чисел x_n, отличных от a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b, т. е.

$$\forall \{x_n\} \subset X,\ x_n \neq a\colon \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to b.$$

Данное определение принято называть определением предела функции *по Гейне*. Наряду с ним используется и эквивалентное ему определение предела функции *по Коши*.

Число b называется *пределом функции $y = f(x)$ в точке a* (или *при $x \to a$*), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее ему число $\delta > 0$ такое, что для всех значений $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

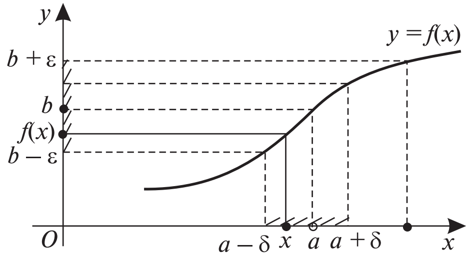


Рис. 8.1

Обозначение: $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Последнему определению можно дать такую геометрическую интерпретацию. Число $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки b найдется проколотая δ-окрестность точки a, такая, что всем зна-

---

[1] Например, X — интервал (x_1, x_2). Тогда в качестве a можно взять как любую точку этого интервала, так и его концы x_1, x_2.

[2] Именно для возможности выбора такой последовательности $\{x_n\}$ точка a и считается предельной.

чениям x из этой проколотой δ-окрестности соответствуют значения функции из ε-окрестности точки b (рис. 8.1).

Что называется односторонним пределом функции в точке?

Это понятие, как и обычный предел функции в точке, можно ввести двумя эквивалентными способами.

Определение (по Гейне). Число b называется *правым* (соответственно *левым*) *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке*[1] a, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к a и состоящей из чисел x_n, бо́льших a (соответственно меньших a), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b, т. е.

$$\forall \{x_n\} \subset X, x_n > a : \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to b$$

для правого предела и

$$\forall \{x_n\} \subset X, x_n < a : \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to b$$

для левого предела.

Определение (по Коши). Число b называется *правым* (соответственно *левым*) *пределом функции* $y = f(x)$ в точке a, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее ему число $\delta > 0$, такое, что для всех значений $x \in X$, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$ (соответственно условию $a - \delta < x < a$), справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in X, a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

для правого предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in X, a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

для левого предела.

Используются обозначения: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ или $f(a + 0) = b$ для правого предела, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ или $f(a - 0) = b$ для левого предела.

Если оба односторонних предела функции $y = f(x)$ в точке a существуют и равны одному и тому же числу b, то эта функция имеет в точке a предел, равный b.

[1] Здесь также считается, что точка a — предельная для области определения X функции $y = f(x)$.

С другой стороны, если односторонние пределы функции в точке a не равны друг другу, то эта функция не имеет предела в точке a.

Так, например, функция[1]

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

имеет разные односторонние пределы в точке $a = 0$: $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$; значит, эта функция не имеет предела при $x \to 0$.

Как определяется предел функции при $x \to \infty$?

Будем считать, что функция $y = f(x)$ определена на множестве X, имеющем хотя бы один элемент x, лежащий вне любого сегмента вида $[-\delta, \delta]$[2].

Определение (по Гейне). Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\} \subset X$ соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b, т. е.

$$\forall \{x_n\} \subset X : \{x_n\} \to \infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \to b.$$

Определение (по Коши). Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее ему число $\delta > 0$, такое, что для всех значений $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Используется обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b.$

Отметим, что данные два определения предела функции при $x \to \infty$ эквивалентны.

Если в первом определении (по Гейне) рассматривать не все бесконечно большие последовательности $\{x_n\}$, а только те, у которых все элементы $x_n \geq 0$ (соответственно $x_n \leq 0$), и совершенно аналогично во втором определении (по Коши) рассматривать только те $x \in X$, которые удовлетворяют условию $x > \delta$ (соответственно условию

[1] Функция «знак числа x», или «сигнум x».

[2] Например, в качестве X может быть взята полупрямая $[a, +\infty)$ или полупрямая $(-\infty, a]$.

$x < -\delta$), то получатся определения предела функции при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \ \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

В чем состоит критерий Коши существования предела функции?

Как и в случае числовой последовательности, критерий Коши позволяет решить вопрос о существовании предела функции, не находя самого предела, а только анализируя поведение функции в окрестности предельного значения аргумента.

Ради определенности сформулируем критерий Коши существования предела в точке a.

Теорема. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ удовлетворяла в точке a условию Коши*, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее ему число $\delta > 0$, такое, что для любых значений x', $x'' \in X$, удовлетворяющих условиям

$$0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta,$$

справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Какими арифметическими свойствами обладают функции, имеющие предел?

Ограничимся только случаем предела функции в точке.

К арифметическим свойствам функций, имеющих предел в точке a, относят следующее утверждение.

Теорема. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном множестве X и имеют в точке a пределы*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \ \ и \ \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

то их сумма, разность, произведение и частное также имеют пределы в точке a, причем

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c, \quad \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = b - c,$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b + c, \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

(*для частного необходимо дополнительно потребовать, чтобы* $c \neq 0$).

Каким образом сравнивают две бесконечно малые и две бесконечно большие функции в данной точке?

Функция $y = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* в точке a, если $\alpha(x)$ имеет в точке a нулевой предел: $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 0.$

Функция $y = A(x)$ называется *бесконечно большой* в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и все элементы которой отличны от a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ является бесконечно большой[1]. Используются обозначения:

$$\lim_{x\to a} A(x) = \infty \text{ или } A(a) = \infty.$$

Если соответствующая последовательности $\{x_n\}$ последовательность $\{f(x_n)\}$ бесконечно большая и все ее элементы, начиная с некоторого номера, положительны или отрицательны, то пишут:

$$\lim_{x\to a} A(x) = +\infty \text{ или } A(a) = +\infty$$

или соответственно

$$\lim_{x\to a} A(x) = -\infty \text{ или } A(a) = -\infty.$$

Правило сравнения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций основано на вычислении предела их отношения.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые при $x \to a$ функции, заданные на одном и том же множестве X.

Говорят, что $\alpha(x)$ является в точке a бесконечно малой *более высокого порядка*, чем $\beta(x)$ (имеет в точке *a более высокий порядок малости*, чем $\beta(x)$), если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

---

[1] Аналогично вводятся понятия бесконечно малой и бесконечно большой функции при $x \to a + 0$, при $x \to a - 0$, при $x \to \infty$, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

В этом случае пишут: $\alpha = o(\beta)$ при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ равен числу, отличному от нуля, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке a бесконечно малыми *одного порядка* (имеют в точке *a одинаковый порядок малости*). Если же этот предел равен единице, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* в точке a.

Аналогично сравниваются две бесконечно большие в точке a функции $A(x)$ и $B(x)$. Пусть для определенности

$$\lim_{x\to a} A(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} B(x) = +\infty.$$

Тогда говорят, что:

– $A(x)$ имеет при $x \to$ *a более высокий порядок роста*, чем $B(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)} = +\infty$;

– функции $A(x)$ и $B(x)$ имеют при $x \to$ *a одинаковый порядок роста*, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ равен конечному числу, отличному от нуля.

Глава 9. Непрерывность функции

Какая функция называется непрерывной в точке?

Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве X и пусть точка a принадлежит множеству X и является его предельной точкой.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Привлекая сформулированные выше определения предела функции в точке по Гейне и по Коши, получим два развернутых определения непрерывности.

Определение (по Гейне). Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\forall \{x_n\} \subset X:\ \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a).$$

Определение (по Коши). Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Аналогично можно ввести понятие *односторонней* непрерывности функции в точке. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a *справа* (соответственно *слева*), если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)\ \text{(соответственно}\ \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)).$$

Если функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке a, то говорят, что точка a — *точка разрыва* данной функции.

Что значит, что функция непрерывна на множестве *X*?

Определение непрерывности функции на множестве дается по-разному для разных множеств X.

Если X — интервал, открытая полупрямая или вся бесконечная прямая, то говорят, что функция $y = f(x)$ *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если же X — например, сегмент $[a, b]$, то говорят, что функция $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого сегмента и, кроме того, непрерывна в точке a справа и непрерывна в точке b слева.

Какие свойства непрерывных функций называют локальными?

К локальным относят те свойства непрерывных функций, которые характеризуют ее поведение в окрестности рассматриваемой точки $x = a$.

Теорема 1 (о локальной ограниченности). *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и непрерывна в точке a, то найдется такая δ-окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограниченна* (рис. 9.1).

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* X, если $\exists m,\ M \in \boldsymbol{R}$, обеспечивающие справедливость неравенств $m \le y = f(x) \le y = M$ для $\forall x \in X$.

Теорема 2 (об устойчивости знака). *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, непрерывна в точке a и ее значение $f(a) > 0$ (соответственно $f(a) < 0$), то найдется такая δ-окрестность точки a, всюду в которой функция $f(x)$ положительна (соответственно отрицательна)* (рис. 9.2).

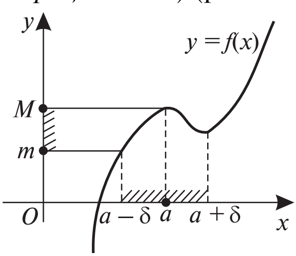


Рис. 9.1

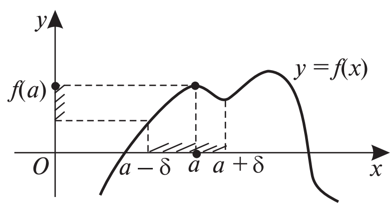


Рис. 9.2

Аналог теоремы 2 справедлив и для функции, обладающей лишь односторонней непрерывностью в точке a. Будем называть для каждого $\delta > 0$ полусегмент $[a, a + \delta)$ *правой δ-полуокрестностью* точки a, а полусегмент $(a - \delta, a]$ — ее *левой δ-полуокрестностью*.

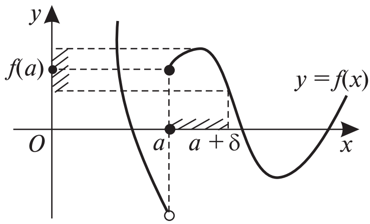


Рис. 9.3

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ определена в некоторой правой (соответственно левой) полуокрестности точки a, непрерывна в точке a справа (соответственно слева) и ее значение $f(a) \neq 0$, то найдется такая правая (соответственно левая) δ-полуокрестность точки a, всюду в которой функция $f(x)$ имеет тот же знак, что и в точке a* (рис. 9.3, на котором функция $f(x)$ непрерывна справа в точке a и $f(a) > 0$).

Теорема 4 (об арифметических операциях над непрерывными функциями). *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a и обе непрерывны в точке a, то каждая из функций*

$$[f(x)+g(x)],\quad [f(x)-g(x)],\quad [f(x)\cdot g(x)],\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

непрерывна в точке a (для частного нужно дополнительно потребовать, чтобы $g(a) \neq 0$).

Какие утверждения характеризуют свойство непрерывной функции принимать любое промежуточное значение?

К подобным утверждениям относятся следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ее значения на концах сегмента $f(a)$ и $f(b)$ — разного знака, то внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка c, в которой $f(c) = 0$* (рис. 9.4)

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и принимает на его концах различные значения $\alpha = f(a)$* и *$\beta = f(b)$, то для любого числа γ, заключенного между α и β, внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка c, в которой $f(c) = \gamma$* (рис. 9.5).

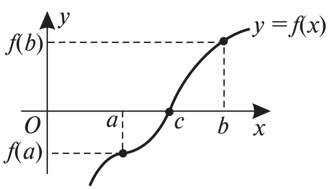


Рис. 9.4

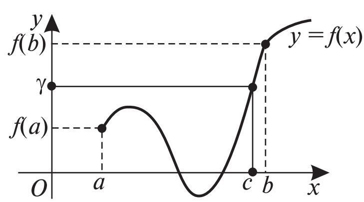


Рис. 9.5

На рис. 9.6 показано, что если функция $y = f(x)$ имеет разрыв лишь в одной точке x_0 сегмента $[a, b]$, то она может принимать не все значения между $\alpha = f(a)$ и $\beta = f(b)$ (например, значение γ не принимается ни в одной точке c данного сегмента).

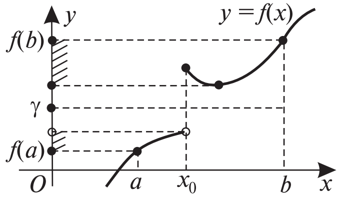


Рис. 9.6

Какие функции называют монотонными и каковы их основные свойства?

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* (соответственно *невозрастающей*) на множества X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

(соответственно

$$\forall x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Неубывающие и невозрастающие на множестве X функции называются *монотонными* на этом множестве.

Если же

$$\forall x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(соответственно

$$\forall x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)),$$

то функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (соответственно *убывающей*) на множестве X.

Возрастающие и убывающие на множестве X функции называют *строго монотонными* на этом множестве.

1. Строгая монотонность функции обеспечивает существование для нее обратной функции.

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на сегменте $[a, b]$ и пусть $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогда, если множеством всех значений функции $f(x)$ является весь сегмент $[\alpha, \beta]$ (соответственно весь сегмент $[\beta, \alpha]$, то на этом сегменте определена обратная для $y = f(x)$* функция[1] $x = f^{-1}(y)$, *которая также возрастает (соответственно убывает) на указанном сегменте.*

[1] Обратная для $f(x)$ функциякаждому значению y из области значений функции $f(x)$ ставит в соответствие единственное решение x уравнения: $f(x) = y$.

2. Монотонные на сегменте $[a, b]$ функции в каждой точке этого сегмента имеют односторонние пределы.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ монотонна на сегменте $[a, b]$, то в каждой внутренней точке сегмента $[a, b]$ она имеет правый и левый пределы и, кроме того, у нее существует правый предел в точке a и левый предел в точке b.*

3. Критерий непрерывности строго монотонной функции содержит следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на сегменте $[a, b]$ и пусть $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогда для того, чтобы функция $y = f(x)$ являлась непрерывной на сегменте $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы любое число $\gamma \in [\alpha, \beta]$ (соответственно $[\beta, \alpha]$ являлось значением этой функции в некоторой точке $c \in [a, b]$.*

На рис. 9.7 изображена убывающая функция $y = f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$. Изображенная же на рис. 9.8 функция $y = f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$, однако терпит разрыв в точке $x_0 \in [a, b]$.

4. Строгая монотонность и непрерывность функции обеспечивает существование для нее строго монотонной и непрерывной обратной функции.

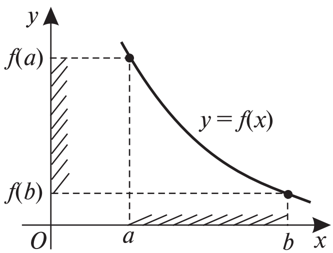


Рис. 9.7

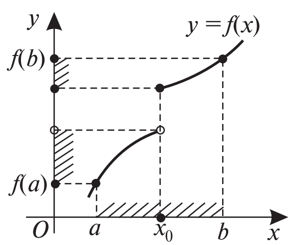


Рис. 9.8

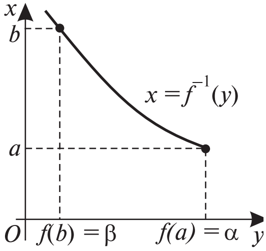


Рис. 9.9

Теорема 4. *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (соответственно убывает) и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и пусть $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогда на сегменте $[\alpha, \beta\ ]$ (соответственно на сегменте $[\alpha, \beta]$) определена обратная для $y = f(x)$ функция $x = f^{-1}(y)$, которая также возрастает (соответственно убывает) и непрерывна на указанном сегменте.*

На рис. 9.9 изображена функция $x = f^{-1}(y)$, обратная к убывающей непрерывной функции $y = f(x)$ (см. рис. 9.7).

Что такое сложная функция и какие условия обеспечивают ее непрерывность?

Пусть на некотором множестве T задана функция $x = \varphi(t)$ и пусть множество X является множеством ее значений. Тогда если на X задана функция $y = f(x)$, то говорят, что на множестве T определена *сложная функция* $y = f(\varphi(t))$ (или *суперпозиция функций* φ и f).

Условие непрерывности сложной функции содержит следующее утверждение.

Теорема. *Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке $t = a$, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = \varphi(a)$, то сложная функция $y = f(\varphi(t)$ непрерывна в точке $t = a$.*

Какие функции относятся к простейшим элементарным, как они определяются и каковы их основные свойства?

К простейшим элементарным обычно относят следующие функции: степенную функцию $y = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \boldsymbol{R}$), показательную функцию $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), логарифмическую функцию $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определим эти функции и исследуем их на непрерывность.

1. Для определения *показательной функции* необходимо сначала ввести любую вещественную степень числа $a > 0$.

Натуральная степень n числа a определяется как результат n-кратного умножения числа a на самого себя. Таким образом на полупрямой $[0, +\infty)$ полностью задана степенная функция $y = x^n$, которая возрастает и непрерывна на этой полупрямой. Следовательно, она имеет обратную функцию $x = y^{1/n}$, которая также непрерывна и возрастает на полупрямой $[0, +\infty)$. Тем самым можно ввести любую рациональную степень числа a равенствами:

$$a^r = \left(a^{1/n}\right)^m, \text{ если } r = \frac{m}{n},\ m, n \in \boldsymbol{N},$$
$$a^0 = 1,$$
$$a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r, \quad \text{если } r \in \boldsymbol{Q} \text{ и } r > 0.$$

Пусть теперь $x \in \boldsymbol{R}$ и $a > 1$. Если для всех чисел α, $\beta \in \boldsymbol{Q}$, удовлетворяющих неравенствам $\alpha < x < \beta$, число $y \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяет неравенствам $a^\alpha \le y \le a^\beta$, то определим число a^x равным y. Если $a \in (0, 1)$, то положим a^x равным $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$.

Таким образом, на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$ полностью определена показательная функция $y = a^x$.

Приведем ее основные свойства:

а) множеством значений функции $y = a^x$ является открытая полупрямая $(0, +\infty)$, причем

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \text{ если } a > 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \text{ если } 0 < a < 1;$$

б) показательная функция непрерывна на всей прямой $(-\infty, +\infty)$;

в) функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ на всей прямой $(-\infty, +\infty)$;

г) для любых $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ справедливы соотношения

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \ (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}.$$

Графики показательной функции изображены на рис. 9.10 и 9.11.

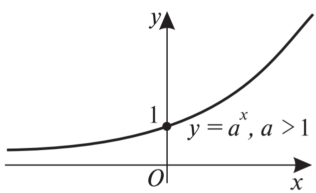


Рис. 9.10

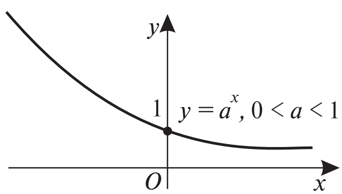


Рис. 9.11

В заключение отметим, что соотношение $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$ может быть положено в основу функционального определения показательной функции. Можно доказать, что существует единственная функция $y = f(x)$, определенная на всей прямой $\boldsymbol{R}$ и такая, что: 1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$; 2) $f(0) = 1$, $f(1) = a$; 3) $f(x)$ непрерывна при $x = 0$. Такой функцией и является функция $y = a^x$.

2. В силу монотонности и непрерывности показательной функции $y = a^x$ у нее существует обратная функция, которая называется *логарифмической* и обозначается символом $x = \log_a y$. Приведем ее основные свойства:

а) логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена и непрерывна на открытой полупрямой $(0, +\infty)$;

б) множеством ее значений является вся бесконечная прямая $(-\infty, +\infty)$, причем

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty, \ \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty, \ \text{если } a > 1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = +\infty, \ \lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty, \ \text{если } 0 < a < 1;$$

в) функция $y = \log_a x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ на открытой полупрямой $(0, +\infty)$;

г) для любых $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ справедливо соотношение

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Графики логарифмической функции изображены на рис. 9.12 и 9.13.

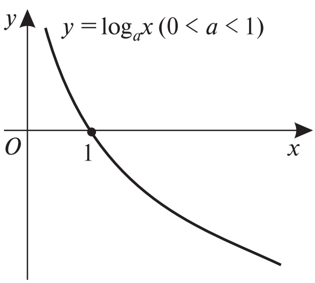


Рис. 9.12

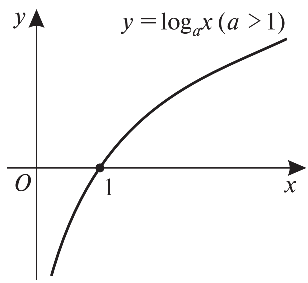


Рис. 9.13

В заключение отметим, что если основание a логарифма равно e, то этот логарифм называется *натуральным* и обозначается $\ln x$.

3. *Степенная функция* $y = x^\alpha$ с показателем $\alpha \in \boldsymbol{R}$ определяется как суперпозиция логарифмической и показательной функции по формуле

$$x^\alpha = a^{\alpha \log_a x},$$

где $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 1$.

Перечислим ее основные свойства:

а) степенная функция определена и непрерывна на открытой полупрямой $(0, +\infty)$;

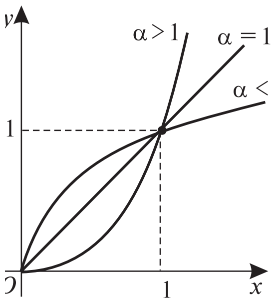
б) множеством ее значений является множество $(0, +\infty)$, причем

$$\lim_{x\to 0+0} x^\alpha = 0, \ \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty, \ \text{если } \alpha > 0,$$

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\alpha} = +\infty, \ \lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha < 0;$$

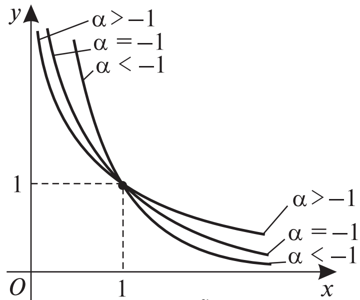
в) функция $y = x^{\alpha}$ возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$ на открытой полупрямой $(0, +\infty)$.

Графики степенной функции при различных показателях α изображены на рис. 9.14 и 9.15.



$y = x^{\alpha}, \alpha > 0$

Рис. 9.14



$y = x^{\alpha}, \alpha > 0$

Рис. 9.15

4. *Тригонометрические функции* $y = \sin x$ и $y = \cos x$ были введены в курсе элементарной математики из наглядных геометрических соображений. Отметим, что логически безупречным способом введения этих функций является следующий подход.

Можно доказать, что *существует единственная пара функций* $y = f(x)$ и $y = g(x)$, *определенных на всей прямой* $\boldsymbol{R}$ *и удовлетворяющих соотношениям*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2) + f(x_2) \cdot g(x_1);$$

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) \cdot g(x_2) - f(x_1) \cdot f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{R};$$

$$f^2(x) + g^2(x) = 1 \ \forall x \in \boldsymbol{R};$$

$$f(0) = 0, g(0) = 1, \ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$0 < f(x) < x \ \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Таковой и является пара функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$.

Приведем основные их свойства:

а) функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на всей бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$;

б) эти функции являются периодическими[1] с периодом 2π. Множеством их значений является сегмент $[-1, 1]$;

в) функция $y = \sin x$ возрастает на каждом сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}$ и убывает на каждом сегменте $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}$. Функция $y = \cos x$ возрастает на сегментах $[-\pi+2\pi k, 2\pi k]$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}$ и убывает на сегментах $[2\pi k, \pi+2\pi k]$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}$.

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ изображены на рис. 9.16 и 9.17.

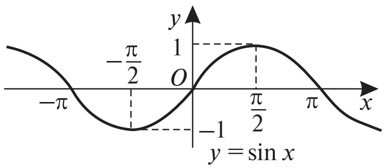


Рис. 9.16

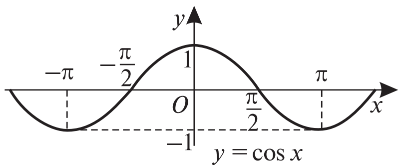


Рис. 9.17

К тригонометрическим также относятся функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. В силу теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями функция $y = \operatorname{tg} x$ определена и непрерывна в любой точке $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена и непрерывна в любой точке $x \neq \pi k$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}$. Кроме того, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на любом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, причем

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+\pi k+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+\pi k-0} \operatorname{tg} x = +\infty;$$

функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на любом интервале $(-\pi + \pi k, \pi k)$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}$, причем

$$\lim_{x\to-\pi+\pi k+0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x\to\pi k-0} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ изображены на рис. 9.18 и 9.19.

[1] То есть $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ и $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\forall x\in \boldsymbol{R}$.

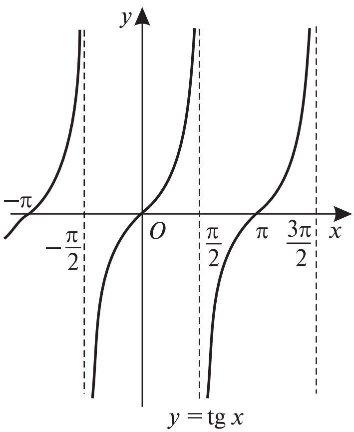


Рис. 9.18

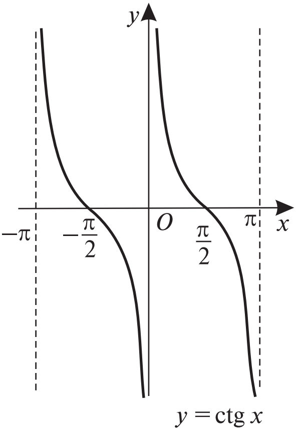


Рис. 9.19

5. Так как функция $y = \sin x$ непрерывна и возрастает на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и имеет множеством своих значений сегмент $[-1, 1]$, то на этом последнем сегменте определена обратная функция $x = \arcsin y$, которая также возрастает и непрерывна на сегменте $[-1, 1]$. Аналогично:

– функция $x = \arccos y$, обратная к непрерывной и убывающей на сегменте $[0, \pi]$ функции $y = \cos x$, является непрерывной и убывающей на сегменте $[-1, 1]$;

– функция $x = \operatorname{arctg} y$, обратная к непрерывной и возрастающей на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функции $y = \operatorname{tg} x$, является непрерывной и возрастающей на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$, причем $\lim\limits_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$;

– функция $x = \operatorname{arcctg} y$, обратная к непрерывной и убывающей на интервале $(0, \pi)$ функции $y = \operatorname{ctg} x$, является непрерывной и убывающей на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$, причем $\lim\limits_{y\to-\infty} \operatorname{arcctg} y = \pi$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{arcctg} y = 0$.

Графики *обратных тригонометрических функций* изображены на рис. 9.20–9.23.

В заключение отметим, что любая *элементарная функция*, т. е. та, которая получена из простейших элементарных функций посредством конечного числа арифметических операций и конечного числа суперпозиций, непрерывна в каждой точке своей области определения.

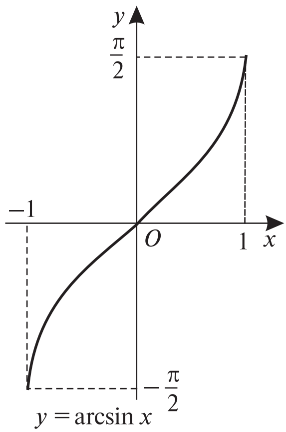


Рис. 9.20

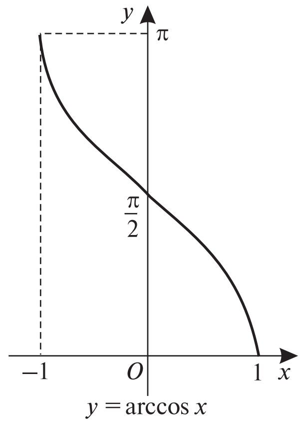


Рис. 9.21

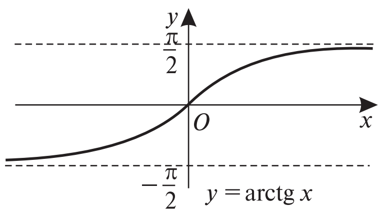


Рис. 9.22

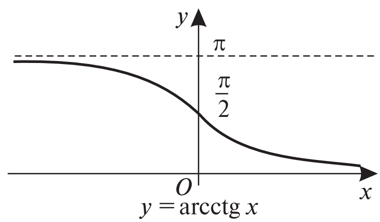


Рис. 9.23

Какой предел называют первым замечательным?

Первым замечательным пределом называют равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Основными его следствиями являются следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Какой предел называют вторым замечательным?

Вторым замечательным пределом называют равенство

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Основными его следствиями являются следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

Как классифицируются точки разрыва функции?

Точки разрыва функции принято подразделять на три типа.

1. Точка a называется *точкой устранимого разрыва* функции $y=f(x)$, если предел этой функции в точке a существует, но он не равен значению $f(a)$:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x)\neq f(a).$$

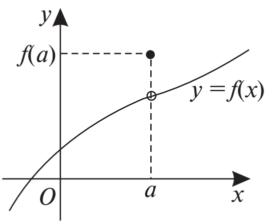


Рис. 9.24

Если функция имеет устранимый разрыв в точке a (рис. 9.24), то ее можно превратить в непрерывную функцию в этой точке, заменив значение $f(a)$ на значение $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2. Точка a называется *точкой разрыва первого рода* функции $y=f(x)$, если эта функция имеет в этой точке конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)\neq \lim_{x\to a-0} f(x).$$

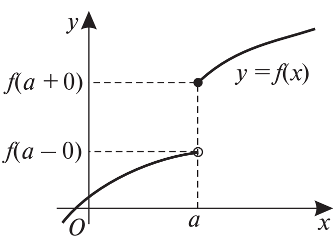


Рис. 9.25

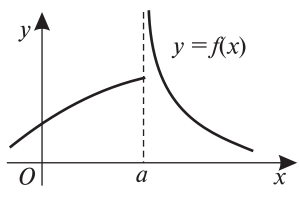


Рис. 9.26

Как видно из рис. 9.25, разрыв первого рода можно назвать *конечным скачком* в данной точке.

3. Точка a называется *точкой разрыва второго рода* функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке либо не существует, либо является бесконечным.

На рис. 9.26 точка a является точкой разрыва второго рода, так как предел $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ конечный, однако $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

Какие свойства непрерывных функций относятся к ее глобальным свойствам?

К глобальным относят те свойства непрерывной функции, которые характеризуют ее поведение сразу на всем множестве X, где эта функция непрерывна.

Кроме упомянутых выше теорем о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения к глобальным свойствам непрерывных функций относят также следующие три утверждения.

Теорема 1 (первая теорема Веерштрасса). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то она ограничена на этом сегменте* (рис. 9.27).

Отметим, что требование непрерывности функции именно на сегменте $[a, b]$, а не на интервале (a, b) или на полусегментах $(a, b]$ и $[a, b)$ является в теореме 1 существенным. Функция $y = f(x)$ на рис. 9.28 непрерывна на интервале (a, b), но не на сегменте $[a, b]$, так как $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$; соответственно функция $y = f(x)$ не является ограниченной сверху на интервале (a, b).

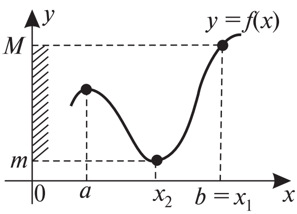


Рис. 9.27

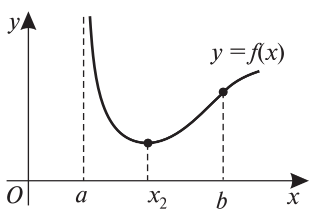


Рис. 9.28

Для ограниченной на множестве X функции, очевидно, ограниченным является множество ее значений $\{f(x) \mid x \in X\}$ на этом множестве. Поэтому можно ввести точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x)$ на множестве X:

$$M = \sup_{x\in X} f(x), \quad m = \inf_{x\in X} f(x).$$

Теорема 2 (вторая теорема Веерштрасса). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то на этом сегменте найдутся такие точки* x_1 *и* x_2: $f(x_1) = M$ и $f(x_2) = m$ (см. рис. 9.27).

В этой теореме, так же как и в теореме 1, требование непрерывности функции именно на сегменте $[a, b]$ является существенным. Функция $y = f(x)$ на рис. 9.28 достигает на интервале (a, b) только своей точной нижней грани. Но даже если функция ограничена на

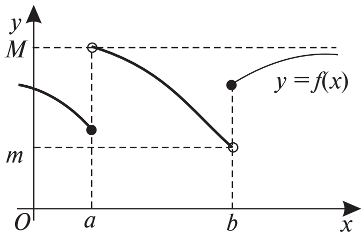


Рис. 9.29

сегменте $[a, b]$, а непрерывна лишь на интервале (a, b), она может ни в одной точке сегмента не достигать своих точной верхней и точной нижней граней (рис. 9.29).

Последнее утверждение, относящееся к глобальным свойствам непрерывных функций, касается свойства равномерной непрерывности.

Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, обеспечивающее справедливость неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для любых точек $x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность функции $y = f(x)$ на множестве X означает, что чем ближе произвольные точки x' и x'' находятся на множестве X, тем меньше друг от друга отличаются значения $f(x')$ и $f(x'')$ функции в этих точках, причем малость величины отклонения $|f(x') - f(x'')|$ не зависит от положения x' и x'' на множестве X.

Теорема 3 (теорема Кантора). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом сегменте.*

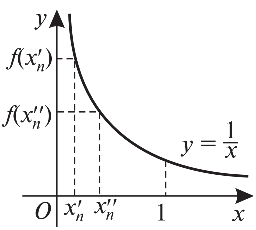


Рис. 9.30

В этой теореме также существенно требование непрерывности функции на сегменте. Рассмотрим пример функции $y = \dfrac{1}{x}$, непрерывной на интервале $(0, 1)$ (рис. 9.30).

Точки $x_n' = \dfrac{1}{n+1}$ и $x_n'' = \dfrac{1}{n}$ с ростом номера n становятся все ближе и ближе друг к другу. Однако значения рассматриваемой функции в них: $f(x_n') = n+1, f(x_n'') = n$ всегда отличаются друг от друга на 1. Таким образом, функция $y = \dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$.

Глава 10. Основы дифференциального исчисления

Что называется производной функции в точке?

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале (a, b) и пусть x — некоторая точка этого интервала. Наряду с точкой x рассмотрим близкую к ней точку $x + \Delta x$ этого же интервала. Величина Δx называется *приращением переменной* x, а соответствующая ей разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — *приращением функции* $f(x)$ *в точке* x.

Производной функции $y = f(x)$ в данной точке x называется предел при $\Delta x \to 0$ так называемого разностного отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. отношения приращения функции Δy в точке x к соответствующему приращению аргумента Δx.

Итак, используя обозначение производной $f'(x)$ или $y'(x)$, имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Каковы физический и геометрический смыслы производной?

Если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т. е. определяет зависимость пути y, пройденного этой точкой за время x от начала отсчета, то производная $f'(x)$ определяет *мгновенную скорость* точки в момент времени x.

Это одно из физических приложений производной.

Для выяснения геометрического смысла производной рассмотрим график функции $y = f(x)$, определенной и непрерывной на интервале (a, b) (рис. 10.1).

Пусть M — точка графика функции с координатами $(x, f(x))$, а P — другая точка графика с координатами $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Прямая MP называется *секущей* графика функции $y = f(x)$. При $\Delta x \to 0$ точка P приближается вдоль графика к точке M, а секущая занимает пре-

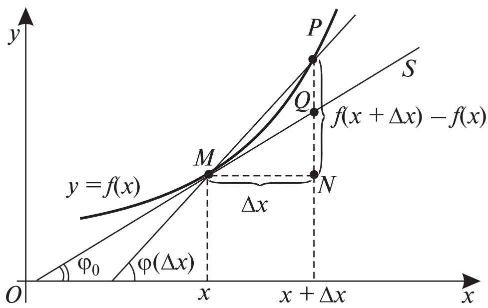


Рис. 10.1

дельное положение — переходит в прямую MS, называемую *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке M.

Разностное отношение $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ в точке x равно угловому коэффициенту секущей MP, т. е. равно $\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)$. Если производная функции $y = f(x)$ в точке x существует, то существует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, а следовательно, существует предельное положение секущей MP, т. е. касательная MS к графику в точке M. При этом $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\operatorname{tg}\varphi_0$ и *угловой коэффициент наклона касательной* к графику функции в точке $M(x, f(x))$ будет совпадать со значением производной $f'(x)$ в этой точке.

Отсюда, в частности, следует, что уравнение касательной[1] к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Что называют правой и левой производными в точке?

Правой (соответственно *левой*) *производной* функции $y = f(x)$ в точке x называют правый (соответственно левый) предел разностного отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $x \to 0$, т. е.

$$f'(x+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{и} \quad f'(x-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке правую и левую производные и они равны друг другу.

[1] Если, конечно, касательная существует, или, что то же самое, существует производная $f'(x_0)$.

Какую функцию называют дифференцируемой в точке?

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале (a, b) и пусть x и $x + \Delta x$ — точки этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в данной точке x, если приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ этой функции в точке x, соответствующее приращение аргумента Δx, представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A — число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ — функция, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

Таким образом,

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Имеет место следующее утверждение: *для того чтобы функция $y = f(x)$ являлась дифференцируемой в данной точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную*. Константа A из определения дифференцируемости равна значению $f'(x)$.

Итак, окончательно для дифференцируемой функции получим представление

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Какая связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке?

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в этой точке.

Обратное, как показывает пример функции $y = |x|$, неверно. Эта функция непрерывна в точке $x = 0$, однако в этой точке производной не имеет, так как в точке $x = 0$ ее правая производная $f'(0 + 0) = 1$ и ее левая производная $f'(0 - 0) = -1$ не равны между собой.

Что называется дифференциалом функции в точке?

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующим приращению аргумента Δx, называется первое слагаемое $A \cdot \Delta x$ правой части представления приращения, или, что то же самое, главная (линейная относительно Δx) часть приращения функции в данной точке x.

На рис. 10.1 дифференциалом функции, соответствующим изображенному приращению Δx, является величина отрезка NQ[1].

Дифференциал функции обозначается символом dy; величина приращения Δx называется дифференциалом независимой переменной и обозначается символом dx. Таким образом,

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Как найти производную сложной функции в точке?

Пусть сложная функция $y = f(\varphi(t))$ является суперпозицией двух функций $x = \varphi(t)$ и $y = f(x)$.

Если функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t, а $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = \varphi(t)$, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$дифференцируема в точке t, причем справедливо равенство

$$[f(\varphi(t))]' = f'(x) \cdot \varphi'(t).$$

В чем суть свойства инвариантности формы первого дифференциала?

Под инвариантностью формы первого дифференциала понимают следующее свойство: равенство

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

полученное выше для дифференциала dy функции $y = f(x)$ независимой переменной x, остается справедливым, если переменная x сама является функцией $x = \varphi(t)$ другой независимой переменной t и соответственно дифференциал dx в правой части является дифференциалом этой функции $x = \varphi(t)$.

[1] В то время как приращение функции Δy равно величине отрезка NP, не равной дифференциалу NQ.

Как найти производную обратной функции?

Пусть функция $y = f(x)$ монотонна и непрерывна в окрестности некоторой точки x_0. Пусть, кроме того, эта функция имеет производную $f'(x_0)$ в этой точке, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$ и справедлива формула

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Каковы правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций?

Пусть каждая из функций $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируема в данной точке x. Тогда их сумма, разность, произведение и частное также дифференцируемы в этой точке, причем

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

(в случае частного дополнительно предполагается, что $v(x) \neq 0$ в рассматриваемой точке x).

Как найти производные простейших элементарных функций?

1. *Производная функции* $y = \sin x$.

По определению производной имеем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right\}.$$

В силу непрерывности функции $y = \cos x$ предел первого сомножителя равен $\cos x$, а в силу первого замечательного предела предел второго сомножителя равен 1.

Итак, $(\sin x)' = \cos x$.

2. *Производная функции* $y = \cos x$.

Из тождества $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и правила дифференцирования сложной функции следует

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x.$$

Итак, $(\cos x)' = -\sin x$.

3. *Производная функций* $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Из определений этих функций и правила дифференцирования частного имеем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

4. *Производная показательной функции* $y = a^x$.

По определению производной имеем

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x\cdot\ln a\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\ln a\cdot\Delta x} - 1}{\ln a\cdot\Delta x}.$$

Последний предел в силу одного из следствий второго замечательного предела равен 1. Итак, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(e^x)' = e^x$.

5. *Производная логарифмической функции* $y = \log_a x$.

По определению производной имеем:

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Последний предел в силу непрерывности логарифмической функции и второго замечательного предела равен $\log_a e$. Итак, $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

6. *Производная степенной функции* $y = x^\alpha$.

Воспользуемся тождеством $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$ и правилом дифференцирования сложной функции

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \cdot \ln x})' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Итак, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

7. *Производная функции* $y = \arcsin x$.

Так как функция $y = \arcsin x$ на интервале $-1 < x < 1$ является обратной для функции $x = \sin y$, определенной на интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, и $(\sin y)' = \cos y$, что отлично от нуля на этом интервале, то по правилу дифференцирования обратной функции получим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ при $x \in (-1, 1)$.

8. *Производная функции* $y = \arccos x$.

Так как для всех $x \in [-1, 1]$ сраведливо равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ при } x \in (-1, 1).$$

9. *Производная функции* $y = \operatorname{arctg} x$.

Так как функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, определенной на интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, и $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$, то по правилу дифференцирования обратной функции получим

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

10. *Производная функции* $y = \operatorname{arcctg} x$.

Так как для всех $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Как найти производную степенно-показательной функции?

Степенно-показательной принято называть функцию вида $y = u(x)^{v(x)}$, где функция $u(x)$ строго положительна. Для нахождения производной такой функции можно использовать два подхода.

Во-первых, можно перейти к сложной функции вида $y = e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$, откуда по правилу дифференцирования сложной функции следует, что

$$y' = (e^{v(x)\cdot\ln u(x)})' = e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\cdot(v(x)\cdot\ln u(x))' =$$
$$= u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Во-вторых, можно использовать так называемую логарифмическую производную. *Логарифмической производной* функции $y = f(x)$ в точке x называют производную сложной функции $w = \ln f(x)$, равную

$$w' = (\ln y)'\cdot y' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Если $y = u(x)^{v(x)}$, то получим

$$y' = y\cdot(\ln y)' = y\cdot(v(x)\cdot\ln u(x))' =$$
$$= u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Что называется *n*-й производной функции?

Если функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b), то значение ее производной $f'(x)$ также можно рассматривать как функцию независимой переменной x, определенную на том же интервале (a, b). Если эта функция $f'(x)$ сама дифференцируема в некоторой точке $x \in (a, b)$, то ее производную называют *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции $y = f(x)$ в точке x и обозначают символом $f^{(2)}(x)$ или $f''(x)$.

В соответствии с таким принципом вводятся и производные других, более высоких порядков. Если определена $(n - 1)$-я производная и она сама является дифференцируемой функцией в некоторой точке x, то *n-й производной* (или *производной n-го порядка*) называют величину

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Как можно найти *n*-е производные некоторых простейших элементарных функций?

Непосредственным дифференцированием можно убедиться в справедливости следующих формул:

$$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n};$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a,\ (e^x)^n = e^x;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Какое правило носит название формулы Лейбница?

Формула Лейбница позволяет найти n-ю производную произведения функций, зная производные сомножителей:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v^{(2)} + C_n^3 u^{(n-3)}v^{(3)} + \ldots + uv^{(n)},$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, вычисляемые по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Как определяются второй дифференциал и другие дифференциалы высших порядков?

Рассмотрим первый дифференциал $dy = f'(x) \cdot dx$ как функцию аргумента x, и пусть эта функция дифференцируема в данной точке[1].

Значение $\delta(dy)$ дифференциала от первого дифференциала dy, взятое при $\delta x = dx$, называется *вторым дифференциалом* функции $y = f(x)$ в данной точке x и обозначается символом d^2y.

Дифференциал d^ny любого порядка, так же как и n-я производная, вводится по индукции: *n-м дифференциалом* функции $y = f(x)$ называется значение $\delta(d^{n-1}y)$ дифференциала от $(n-1)$-го дифференциала, взятое при $\delta x = dx$.

Обладают ли дифференциалы высших порядков свойством инвариантности формы?

В отличие от первого дифференциала функции $y = f(x)$ уже при вычислении ее второго дифференциала необходимо различать два случая.

1. Пусть аргумент x является *независимой переменной*. Тогда dx не зависит от x (ведь $dx = \Delta x$ по определению) и потому $\delta(dx) = (dx)' \times \delta x = 0$. Следовательно,

$$d^2y = \{\delta(dy)\}\big|_{\delta x = dx} = \{\delta(f'(x)dx)\}\big|_{\delta x = dx} = \{\delta(f'(x))dx + f'(x)\delta(dx)\}\big|_{\delta x = dx} =$$
$$= f^{(2)}(x)\delta x \cdot dx\}\big|_{\delta x = dx} = f^{(2)}(x)\cdot(dx)^2.$$

2. Пусть теперь аргумент x является *два раза дифференцируемой функцией* некоторой независимой переменной t. Тогда из определения второго дифференциала следует, что $\delta(dx)\big|_{\delta x = dx} = d^2x$ и, следовательно,

$$d^2y = \{\delta(f'(x) \cdot dx)\}\big|_{\delta x = dx} + \{f'(x)\delta(dx)\}\big|_{\delta x = dx} = f^{(2)}(x) \cdot (dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Сопоставление выражений для d^2y в этих двух случаях говорит о том, что второй дифференциал уже не обладает свойством инвариантности формы.

---

[1] Для этого достаточно потребовать, чтобы функция $y = f(x)$ была два раза дифференцируема в точке x, а аргумент x являлся либо независимой переменной, либо также два раза дифференцируемой функцией другой переменной t.

Глава 11. Теоремы о дифференцируемых функциях

Что означает возрастание или убывание в точке и какие условия обеспечивают такое свойство функции?

Говорят, что функция $y = f(x)$ *возрастает* (соответственно *убывает*) *в данной точке* x_0, если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$).

На рис. 11.1 функция $y = f(x)$ убывает в точке x_0 и возрастает в точке x_0'.

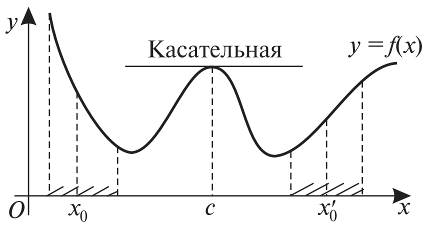


Рис. 11.1

Условие, обеспечивающее возрастание или убывание функции $y = f(x)$ в данной точке, содержится в следующем утверждении.

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и* $f'(x_0) > 0$ (*соответственно* $f'(x_0) < 0$), *то данная функция* $f(x)$ *возрастает* (*соответственно убывает*) *в точке* x_0.

Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Действительно, функция $y = x^3$ возрастает в точке $x_0 = 0$, однако ее производная в этой точке равна нулю.

Что означает наличие у функции локального экстремума в точке и какое условие необходимо для этого свойства?

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум* (соответственно *локальный минимум*), если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой значение $f(x_0)$ является наибольшим (соответственно наименьшим) среди всех остальных значений $f(x)$

этой функции. Точки локального максимума и локального минимума называют также точками *локального экстремума*.

На рис. 11.1 функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум в точке c.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Это утверждение имеет простой геометрический смысл: если в точке кривой $y = f(x)$, соответствующей локальному экстремуму, есть касательная, то эта касательная параллельна оси Ox (см. рис. 11.1).

Как показывает поведение функции $y = x^3$ при $x = 0$, утверждение, обратное данной теореме, может быть неверно. Действительно, несмотря на то, что производная функции $y = x^3$ равна нулю в точке $x = 0$, сама функция в этой точке возрастает и, следовательно, не имеет локального экстремума.

Отметим также существенность условия дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке локального экстремума. Так, например, функция $y = |x|$ имеет в точке $x = 0$ локальный минимум, однако у нее нет в этой точке производной.

В чем состоит теорема Ролля и каков ее геометрический смысл?

Теорема Ролля. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента и если, кроме того, $f(a) = f(b)$, то внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ, производная $f'(\xi)$ в которой равна нулю.*

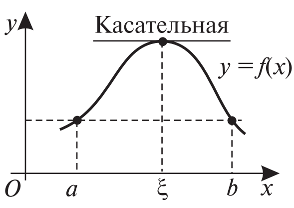


Рис. 11.2

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: если значения функции $y = f(x)$ на концах сегмента равны, то на кривой $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox (см. рис. 11.2).

В чем состоит теорема Лагранжа и каков ее геометрический смысл?

Теорема Лагранжа. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента, то внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ, для которой справедливо равенство*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a),$$

называемое формулой Лагранжа.

Теорема Лагранжа имеет следующий геометрический смысл: между точками A и B на кривой $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к этой кривой параллельна секущей AB (рис. 11.3).

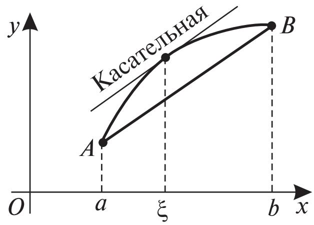


Рис. 11.3

Каковы основные следствия теоремы Лагранжа?

К основным следствиям теоремы Лагранжа относят следующие три утверждения.

1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и если всюду на этом интервале $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ является постоянной на этом интервале.*

Иными словами, если в каждой точке некоторого участка кривой $y = f(x)$ касательная к кривой параллельна оси Ox, то этот участок кривой представляет собой отрезок прямой, параллельной оси Ox.

2. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не убывала (соответственно не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ этой функции была неотрицательна (соответственно неположительна) всюду на интервале (a, b).*

3. *Если производная $f'(x)$ положительна (соответственно отрицательна) на интервале (a, b), то функция $y = f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.*

Отметим, что утверждение, обратное последнему утверждению, вообще говоря, неверно. Действительно, функция $y = x^3$ возрастает на интервале $(-1, 1)$, однако ее производная $y = 3x^2$ обращается в нуль на этом интервале.

В чем состоит теорема Коши?

Теорема Коши. *Если каждая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента и если, кроме того, производная $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$, то внутри этого сегмента найдется точка ξ, такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

называемая формулой Коши.

Отметим, что формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши при $g(x) = x$.

Что называют неопределенностью типа $\frac{0}{0}$ или типа $\frac{\infty}{\infty}$?

В математике неопределенностями при $x \to a$ называют такие выражения с переменной x, для которых формальная поставка в них значения $x = a$ не позволяет судить о поведении этого выражения при $x \to a$.

Например, если в отношении двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ обе функции являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что имеет место *неопределенность типа* $\frac{0}{0}$. Действительно, для бесконечно малых при $x \to 0$ функций $f(x) = x^{\alpha}$ и $g(x) = x^{\beta}$ (α, $\beta > 0$) предел их отношения $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{\alpha-\beta}$ в зависимости от α и β может быть как равен нулю (при $\alpha > \beta$), так и быть равен ∞ (при $\alpha < \beta$).

Если в отношении $\frac{f(x)}{g(x)}$ обе функции являются бесконечно большими при $x \to a$, то говорят, что имеет место *неопределенность типа* $\frac{\infty}{\infty}$. Действительно, те же функции $f(x) = x^{\alpha}$ и $g(x) = x^{\beta}$ (α, $\beta > 0$) являются бесконечно большими при $x \to +\infty$, однако

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha > \beta, \\ 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Раскрыть неопределенность[1] — значит вычислить предел рассматриваемого выражения при $x \to a$.

[1] Наряду с неопределенностями типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ рассматривают также неопределенности других типов: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, 0^{∞} и т. д.

В чем состоит правило Лопиталя?

Правило Лопиталя дает возможность раскрыть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, сводя вычисление предела отношения функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ к вычислению предела отношения их производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ *и производная $g'(x)$ отлична от нуля в указанной окрестности точки a. Тогда если существует (конечный или бесконечный) предел*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Отметим, что данная теорема переносится на случай, когда аргумент x стремится не к конечному, а к бесконечному пределу $a = +\infty$ или $a = -\infty$. В этом случае лишь необходимо в качестве окрестности точки a рассматривать либо полупрямую $(c, +\infty)$ (при $a = +\infty$), либо полупрямую $(-\infty, c)$ (при $a = -\infty$).

Какое соотношение называют формулой Тейлора?

Формулой Тейлора называют следующее представление для функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x).$$

Величина $R_{n+1}(x)$ в правой части называется *остаточным членом.* Сумма остальных слагаемых правой части является многочленом переменой x степени не выше n; этот многочлен называется *многочленом Тейлора* функции $f(x)$.

Практическую ценность формулы Тейлора определяет возможность оценить поведение ее остаточного члена $R_{n+1}(x)$ в окрестности точки a.

Теорема Тейлора. *Пусть $n \in N$ и функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка $(n + 1)$. Тогда для любой точки x этой окрестности найдутся такие лежащие между a и x точки ξ_1 и ξ_2, что справедлива формула Тейлора, в которой для остаточного члена $R_{n+1}(x)$ справедливо любое из следующих представлений*:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_1) \text{ — \textit{остаточный член в форме Лагранжа},}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)(x-\xi_2)}{n!} f^{(n+1)}(\xi_2) \text{ — \textit{остаточный член в форме Коши}.}$$

На практике формулу Тейлора применяют, приближенно заменяя функцию *f(x)* ее многочленом Тейлора, а представления остаточного члена $R_{n+1}(x)$ позволяют при этом оценить погрешность такого приближения.

Если необходимо оценить лишь порядок малости остаточного члена $R_{n+1}(x)$ при $x \to a$, можно использовать представление остаточного члена в *форме Пеано*[1]:

$$R_{n+1}(x) = o[(x-a)^n] \text{ при } x \to a.$$

Отметим в заключение, что формула Тейлора при $a = 0$ называется *формулой Маклорена* и, соответственно, имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где остаточный член $R_{n+1}(x)$ представим либо в форме Лагранжа, либо в форме Коши, либо в форме Пеано с $a = 0$.

[1] Для этого достаточно потребовать, например, чтобы функция $f(x)$ имела в окрестности точки a производную порядка n и чтобы эта производная $f^{(n)}(x)$ была непрерывна в самой точке a.

Каковы основные разложения по формуле Маклорена?

1. *Функция* $y = e^x$.

Формула Маклорена для любого $n \in N$ имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

где на любом сегменте $-r \le x \le r$ выполнена оценка

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r.$$

2. *Функция* $y = \sin x$.

Формула Маклорена для любого нечетного $n \in N$ имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x),$$

где на любом сегменте $-r \le x \le r$ выполнена оценка

$$|R_{n+2}(x)| < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}.$$

3. *Функция* $y = \cos x$.

Формула Маклорена для любого четного $n \in N$ имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x),$$

где на любом сегменте $-r \le x \le \mathrm{r}$ выполнена оценка

$$|R_{n+2}(x)| < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}.$$

4. *Функция* $y = \ln(1 + x)$.

Формула Маклорена для любого $n \in N$ имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где на сегменте $0 \le x \le 1$ выполнена оценка

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1},$$

а на любом сегменте $-1 < -r \le x \le 0$ — оценка

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Какие условия достаточны для наличия экстремума в данной точке?

Как уже было отмечено выше, условие $f'(c) = 0$ является лишь необходимым условием локального экстремума в точке c. Поэтому корни уравнения $f'(x) = 0$ называют *точками возможного экстремума*, или *стационарными точками функции*.

Укажем три достаточных условия наличия экстремума.

1. Пусть точка c является стационарной для функции $f(x)$, дифференцируемой всюду в некоторой окрестности точки c. Тогда *если в пределах указанной окрестности*

$$f'(x) > 0 \text{ } при \text{ } x < c \text{ и } f'(x) < 0 \text{ } при \text{ } x > c,$$

то c — точка локального максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x < c$ и $f'(x) > 0$ при $x > c$, то c — точка локального минимума функции $f(x)$. В случае, когда производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, экстремума в точке c нет (рис. 11.4 и 11.5).

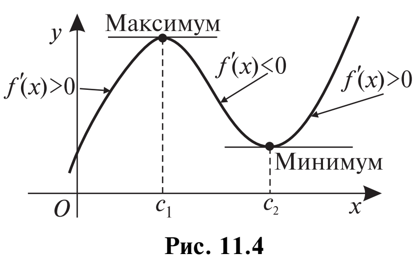


Рис. 11.4

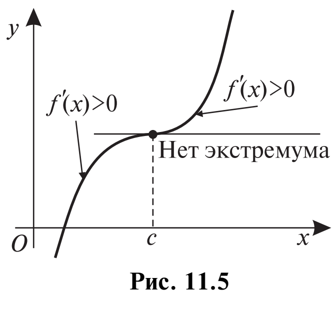


Рис. 11.5

2. Пусть точка c является стационарной для функции $f(x)$, которая имеет в точке c конечную вторую производную. Тогда *если $f^{(2)}(c) > 0$, то c — точка локального минимума функции $f(x)$; если же $f^{(2)}(c) < 0$, то c — точка локального максимума.*

3. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, *за исключением, быть может, самой точки c*, и непрерывна в точке c. Тогда *если в пределах указанной окрестности*

$$f'(x) > 0 \text{ } при \text{ } x < c \text{ } и \text{ } f'(x) < 0 \text{ } при \text{ } x > c,$$

то c — точка локального максимума функции $f(x)$; если же

$$f'(x) < 0 \text{ при } x < c \text{ и } f'(x) > 0 \text{ при } x > c,$$

то c — точка локального минимума. В случае, когда производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, экстремума в точке c нет (рис. 11.6 и 11.7).

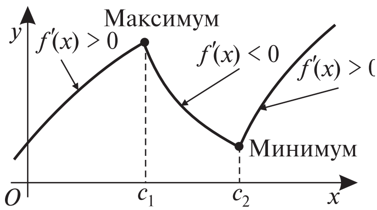


Рис. 11.6

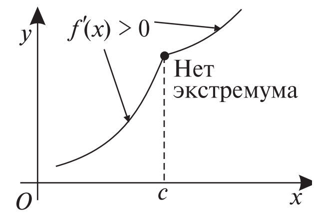


Рис. 11.7

Что называется краевым экстремумом и как его найти?

Пусть функция $y = f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и граничная точка b такова, что в некоторой ее левой полуокрестности значение $f(b)$ является наибольшим (соответственно наименьшим) среди всех других значений функции. Тогда говорят, что функция имеет в точке b *краевой максимум* (соответственно *краевой минимум*). Аналогично определяется краевой максимум и краевой минимум в граничной точке a.

Справедливо следующее утверждение: *если функция $y = f(x)$ имеет в точке b положительную (соответственно отрицательную) левую производную $f'(b - 0)$, то эта функция имеет в этой точке краевой максимум (соответственно краевой минимум).*

Как определяется направление выпуклости графика функции и что такое точка перегиба?

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b). Говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) *выпуклость, направленную вниз* (соответственно *вверх*), если график этой функции в пределах указанного интервала лежит не ниже (соответственно не выше) любой своей касательной.

График функции на рис. 11.8 имеет выпуклость, направленную вниз, а на рис. 11.9 — выпуклость, направленную вверх.

Точка $M(c, f(c))$ графика функции $y = f(x)$ называется *точкой перегиба*, если существует такая окрестность точки c оси абсцисс, в

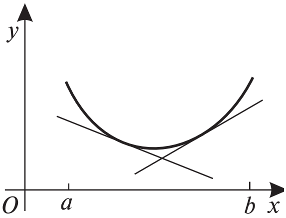


Рис. 11.8

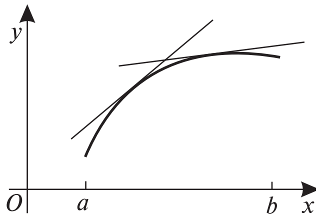


Рис. 11.9

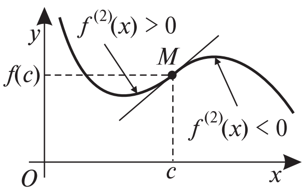


Рис. 11.10

пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от c имеет разные направления выпуклости.

На рис. 11.10 график функции имеет перегиб в точке $M\,(c, f(c))$.

Как выяснить направление выпуклости графика функции и найти его точки перегиба?

1. Если функция $y = f(x)$ имеет на (a, b) конечную вторую производную $f^{(2)}(x)$ и эта производная неотрицательна (соответственно неположительна) на этом интервале, то график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (соответственно вверх).

2. Для нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$ сначала отметим, что если $M\,(c, f(c))$ — точка перегиба и $f^{(2)}(x)$ непрерывна в точке c, то $f^{(2)}(c) = 0$. Это означает, что решения уравнения $f^{(2)}(x) = 0$ являются абсциссами возможных точек перегиба.

Наличие перегиба графика в данной точке решает любое из следующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки c и $f^{(2)}(c) = 0$. Тогда если в пределах указанной окрестности $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки слева и справа от c, то график этой функции имеет перегиб в точке $M\,(c, f(c))$* (см. рис. 11.10).

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке c конечную третью производную и $f^{(2)}(c) = 0$, $f^{(3)}(c) \neq 0$, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M\,(c, f(c))$.*

Что называют асимптотами графика функции и как их найти?

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

Для функции $y = f(x)$ на рис. 11.11 прямая $x = a_1$ является вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x\to a_1-0} f(x) = -\infty$, прямая $x = a_2$ также является вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x\to a_2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a_2+0} f(x) = +\infty$.

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$), если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$).

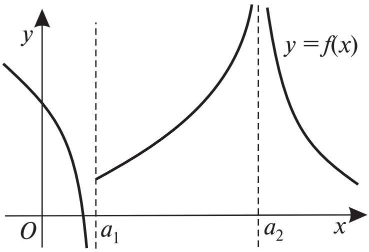


Рис. 11.11

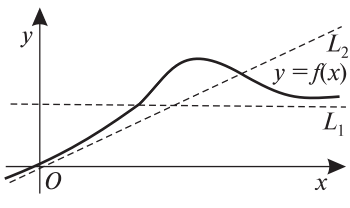


Рис. 11.12

Для функции $y = f(x)$ на рис. 11.12 горизонтальная прямая L_1 является асимптотой при $x \to +\infty$, а прямая L_2 — асимптотой при $x \to -\infty$.

Справедливо следующее утверждение[1]: *для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно*, *чтобы существовали два предела*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \textit{и} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

1 Определенности ради это утверждение сформулировано здесь только для асимптоты при $x \to +\infty$.

Глава 12. Неопределенный интеграл

Что называют первообразной функцией?

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* (или просто *первообразной*) функции $f(x)$ на интервале (a, b), если в любой точке $x \in (a, b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Связь между первообразными одной и той же функции проясняет следующее утверждение: *если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции на интервале (a, b), то всюду на этом интервале: $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C — некоторая постоянная.*

Что называют неопределенным интегралом функции?

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на интервале (a, b) называют совокупность всех ее первообразных на этом интервале и обозначают символом $\int f(x)dx$.

Здесь $\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным*, а сама функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

С учетом свойства первообразных можно утверждать, что если $F(x)$ — одна из первообразных функций $f(x)$ на (a, b), то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Операцию нахождения неопределенного интеграла или первообразной функции принято называть *интегрированием*.

Какими основными свойствами обладает неопределенный интеграл?

К основным принято относить следующие свойства неопределенного интеграла.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int dF(x) = F(x) + C, \forall C \in \boldsymbol{R}.$

3.$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

4. $\int [Af(x)]dx = A \cdot \int f(x)dx$, A — постоянная.

Свойства 3 и 4 называют свойствами линейности неопределенного интеграла.

Для интегрирования необходимо также составить таблицу основных неопределенных интегралов. Она заполняется на основе таблицы производных простейших элементарных функций.

1. $\int 0dx = C.$
2. $\int 1dx = x + C.$
3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (при $\alpha \neq -1$).
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ (при $0 < \alpha \neq 1$), $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C + \dfrac{\pi}{2}$
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C + \dfrac{\pi}{2}.$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$
13. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C.$

Отметим, что если операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций, то операция интегрирования таким свойством уже не обладает. Так, например, неопределенные интегралы $\int e^{-x^2}dx, \int \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx, \int \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}dx, \int \dfrac{dx}{\ln x}, \int \dfrac{\sin x}{x}dx$ не выражаются через элементарные функции.

Как выполнить замену переменной в неопределенном интеграле?

Если функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b) и T является множеством значений этой функции, причем на множестве T

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

то функция $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ имеет на (a, b) первообразную и выполнено равенство

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C.$$

В чем состоит метод интегрирования по частям?

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) и если функция $v(x) \cdot u'(x)$ имеет на этом интервале первообразную, то и функция $u(x) \cdot v'(x)$ имеет на (a, b) первообразную и выполнено равенство

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)dx.$$

С учетом определения первого дифференциала это равенство часто пишут в виде

$$\int u \cdot dv = u \cdot vx - \int v \cdot du.$$

Отыскание интеграла в левой части с помощью этой формулы называют *интегрированием по частям*.

В чем состоит основной метод интегрирования рациональных дробей?

Рациональной дробью называется отношение $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ двух алгебраических многочленов с вещественными коэффициентами. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$

Любую рациональную дробь можно проинтегрировать в элементарных функциях. Для этого необходимо выполнить следующие преобразования этой дроби.

1. Если рациональная дробь не является правильной, то представить ее в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $P_0(x)$ — некоторый многочлен, а дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная[1].

2. Если дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ правильная, то представить ее в виде суммы дробей

$$\sum_{l=1}^{k}\left[\frac{B_1^{(l)}}{x-b_l} + \frac{B_2^{(l)}}{(x-b_l)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta_l}^{(l)}}{(x-b_l)^{\beta_l}}\right] +$$

$$+\sum_{s=1}^{r}\left[\frac{M_1^{(s)}x + N_1^{s}}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{M_2^{(s)}x + N_2^{(s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} + \ldots + \frac{M_{\lambda_s}^{(s)}x + N_{\lambda_s}^{(s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\lambda_s}}\right].$$

Здесь $b_1, \ldots, b_k$ — вещественные корни многочлена $Q(x)$ кратностей $\beta_1,\ldots, \beta_k$ соответственно; многочлен $x^2 + p_s x + q_s$ для каждого $s = 1,\ldots, r$ порождается парой комплексно сопряженных (не вещественных) корней a_s и $\overline{a}_s$ многочлена $Q(x)$ по формуле $x^2 + p_s x + q_s = (x - a_s)(x - \overline{a}_s)$; числа $\lambda_1,\ldots, \lambda_r$ — кратности корней $a_1,\ldots,a_s$. Коэффициенты, стоящие в числителях дробей этой суммы, можно найти, если привести все эти дроби к общему знаменателю и приравнять результат к дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

3. Проинтегрировать по отдельности каждую дробь полученной суммы:

а) $\displaystyle\int \frac{B}{x-b}dx = B\ln|x-b| + C;$

б) $\displaystyle\int \frac{B}{(x-b)^{\beta}}dx = \frac{B}{1-\beta}\cdot(x-b)^{1-\beta} + C;$

в) в интеграле $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ представить знаменатель подынтегральной функции в виде $x^2 + px + q = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \dfrac{p^2}{4}\right)$ и, положив $a = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$, выполнить в интеграле линейную замену $t = x + \dfrac{p}{2}$. Тогда интеграл преобразуется к следующему виду:

[1] Для этого можно разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ с остатком.

$$\int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2 + a^2} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C;$$

г) выполняя те же замены, что и в пункте в), интеграл

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\lambda} dx$$

можно преобразовать к следующему виду:

$$\int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^\lambda} dt = \frac{M}{2(1-\lambda)} (t^2 + a^2)^{1-\lambda} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\lambda};$$

последний интеграл $K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\lambda}$ может быть вычислен по рекуррентной формуле

$$K_\lambda = \frac{(t^2 + a^2)^{1-\lambda}}{2a^2(\lambda - 1)} + \frac{2\lambda - 3}{a^2(2\lambda - 2)} \cdot K_{\lambda-1}, \ \lambda \geq 2.$$

Какие другие классы функций можно проинтегрировать в элементарных функциях?

Укажем еще три класса функций, интегрирование которых можно свести к интегрированию рациональной дроби.

1. Для интегрирования тригонометрических выражений вида $R(\sin x, \cos x)$, где $R(y, z)$ — рациональная дробь[1] $\frac{P(y, z)}{Q(y, z)}$ от двух аргументов y и z, обычно применяют универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. В результате этого интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной дроби аргумента t.

1 В ней $P(y, z)$ и $Q(y, z)$ — алгебраические многочлены от двух переменных y и z.

2. Пусть $R(y, z)$ — снова рациональная дробь от двух аргументов y и z. Для интегрирования *дробно-линейной иррациональности* вида $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ достаточно сделать подстановку $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Тогда интеграл сведется к интегралу от рациональной дроби аргумента t.

3. Для интегрирования *квадратичной иррациональности* вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, где $R(y, z)$ — рациональная дробь от двух аргументов y и z, а квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет совпадающих вещественных корней, рассмотрим два случая:

а) трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет комплексные корни и $a > 0$. Тогда интеграл от квадратичной иррациональности переходит в интеграл от рациональной дроби, если выполнить так называемую *первую подстановку Эйлера*

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a};$$

б) трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два несовпадающих вещественных корня x_1 и x_2. Тогда интегрирование следует проводить, выполняя так называемую *вторую постановку Эйлера*

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

Глава 13. Определенный интеграл

Что называется определенным интегралом функции?

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Рассмотрим внутри этого сегмента точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ и положим $x_0 = a$, $x_n = b$. Эти точки тем самым производят *разбиение сегмента* $[a, b]$ *на n частичных сегментов* $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$. Длину каждого частичного сегмента обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и возьмем на каждом сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k (рис. 13.1)

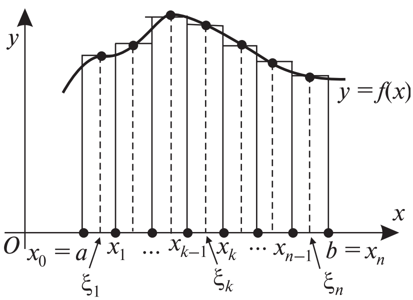


Рис. 13.1

Сумму

$$\sigma = \sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k,$$

составленную для данного разбиения сегмента точками x_k и данного выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, будем называть *интегральной суммой для функции f(x) на сегменте* $[a, b]$.

Для неотрицательной функции $y = f(x)$ интегральная сумма σ имеет простой геометрический смысл: число σ равно площади ступенчатой фигуры, определяемой графиком функции $y = f(x)$ так, как, например, это показано на рис. 13.1.

Обозначим через d максимальную длину частичных сегментов разбиения и назовем число d *диаметром* данного разбиения:

$$d = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}.$$

Число I называется *пределом интегральных сумм* $\sigma(x_k, \xi_k)$ *при стремлении к нулю диаметра разбиения d*, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется отвечающее ему число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при единственном условии $d < \delta$ (независимо от выбора точек разбиения с таким диаметром d и независимо от выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$) справедливо неравенство

$$|\sigma(x_k, \xi_k) - I| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой на сегменте* $[a, b]$, если для этой функции существует на сегменте $[a, b]$ конечный предел I ее интегральных сумм $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ при стремлении к нулю диаметра разбиения d. При этом указанный предел I называется *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *по сегменту* $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

В этом обозначении функция $f(x)$ называется *подынтегральной*, число a — *нижним*, а число b — *верхним пределом интегрирования*. Переменная x интегрирования в обозначении определенного интеграла может быть заменена на любую другую букву.

Отметим также, что предположение об ограниченности подынтегральной функции $f(x)$ является существенным. Можно доказать, что *если функция* $y = f(x)$ *не ограничена на* $[a, b]$, *то множество интегральных сумм* $\sigma(x_k, \xi_k)$, *отвечающих разбиениям с данным диаметром* d, *является неограниченным*.

Какое необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла можно сформулировать с помощью верхних и нижних сумм?

Обозначим через M_k (соответственно через m_k) точную верхнюю (соответственно точную нижнюю) грань функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$:

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$$

и составим две следующие суммы:

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k, \quad s = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k.$$

Сумма S называется *верхней*, а сумма s — *нижней суммой*, отвечающей данному разбиению сегмента.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы для функции* $f(x)$ *существовал определенный интеграл по сегменту* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого числа* $\varepsilon > 0$ *существовало отвечающее ему число* $\delta(\varepsilon) > 0$, *обеспечивающее справедливость неравенства*

$$S - s < \varepsilon$$

для верхней суммы S *и нижней суммы* s *любого разбиения сегмента* $[a, b]$, *у которого диаметр* $d < \delta(\varepsilon)$.

Отметим, что более глубокий анализ показывает, что необходимым и достаточным условием интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ является требование справедливости неравенства $S - s < \varepsilon$ *хотя бы для одного разбиения* сегмента $[a, b]$.

Каковы основные классы интегрируемых функций?

Интегрируемыми на сегменте $[a, b]$ являются:

а) все функции $f(x)$, непрерывные на этом сегменте;

б) все функции $f(x)$, которые не убывают или не возрастают на этом сегменте;

в) все *кусочно-непрерывные* на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$, т. е. те, которые непрерывны во всех внутренних точках сегмента $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек $\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, ..., \mathring{x}_p$, в которых эти функции определены и имеют разрыв первого рода, и, кроме того, существуют конечный правый предел $f(a + 0)$ и конечный левый предел $f(b - 0)$.

Какими свойствами обладает определенный интеграл?

1. Принимается как *соглашение*, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ и } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции.

2. *Свойство линейности*. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $\alpha \cdot f(x)$ $(\forall\ \alpha \in \boldsymbol{R})$ также интегрируемы на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

3. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и их *произведение* $[f(x) \cdot g(x)]$ является интегрируемой на $[a, b]$ функцией.

4. *Свойство аддитивности*. Если $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$ и выполнено равенство

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и *неотрицательна* на нем, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и если в каждой точке $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

7. *Формула среднего значения*. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x), \quad m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x),$$

то найдется число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$ и обеспечивающее справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a),$$

называемого формулой среднего значения.

8. *Формула среднего значения для непрерывной функции*. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на этом сегменте найдется точка ξ, такая, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$$

также называемое формулой среднего значения.

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и функция $|f(x)|$ интегрируема на этом сегменте, причем справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

В чем состоит формула Ньютона–Лейбница?

Формула Ньютона–Лейбница, или, как еще ее называют, основная формула интегрального исчисления, устанавливает связь между определенным интегралом функции и ее первообразными.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$ *и* $\Phi(x)$ — *любая ее первообразная на этом сегменте*, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Последнее равенство называют *формулой Ньютона–Лейбница* и часто записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x) - \Big|_a^b.$$

Обоснование формулы Ньютона–Лейбница проводится с помощью определенного интеграла $\int_a^x f(t)dt$, называемого *интегралом с переменным верхним пределом*. При этом доказывается, что интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции $f(x)$ является одной из первообразных этой функции $f(x)$.

Отметим также, что формула Ньютона–Лейбница позволяет перенести на случай определенного интеграла два метода вычисления неопределенного интеграла — *метод замены переменной* и *метод интегрирования по частям*.

1. Пусть выполнены следующие условия: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) сегмент $[a, b]$ является множеством значений некоторой функции $x = g(t)$, определенной при $t \in [\alpha, \beta]$ и имеющей на $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную $g'(t)$; 3) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\cdot g'(t)dt.$$

2. Пусть каждая из двух функций $u(x)$ и $v(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx.$$

Что называется площадью плоской фигуры?

Пусть на плоскости задана плоская фигура, ограниченная замкнутой кривой линией L — своей границей.

Назовем плоскую фигуру Q *элементарной*, если площадь ее известна (например, из курса элементарной математики). Примером элементарных фигур могут служить многоугольники (т. е. фигуры на плоскости, границами которых являются замкнутые ломаные линии).

Рассмотрим множество $\{s\}$ площадей всех элементарных фигур, содержащихся в плоской фигуре Q, и множество $\{S\}$ площадей всех элементарных фигур, содержащих фигуру Q. Множество $\{s\}$ ограничено сверху, обозначим через $\underline{I}$ его точную верхнюю грань; аналогично множество $\{S\}$ ограничено снизу, обозначим через $\overline{I}$ его точную нижнюю грань. Очевидно, что $\underline{I} \le \overline{I}$.

Плоская фигура Q называется *квадрируемой* (т. е. имеющей площадь), если $\underline{I} = \overline{I}$. При этом число $I = \underline{I} = \overline{I}$ называется *площадью* плоской фигуры Q.

Как используется определенный интеграл для нахождения площади плоской фигуры?

1. Пусть на сегменте $[a, b]$ задана непрерывная и неотрицательная функция $y = f(x)$. *Криволинейной трапецией*, лежащей под графиком этой функции, будем называть плоскую фигуру Q, ограниченную графиком этой функции на $[a, b]$, ординатами, проведенными в точках a и b оси Ox, и отрезком $[a, b]$ оси Ox (рис. 13.2).

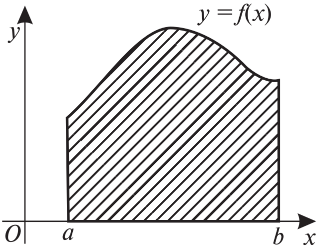


Рис. 13.2

Теорема. *Криволинейная трапеция Q, лежащая под графиком непрерывной и неотрицательной на сегменте [a, b] функции f(x), квадрируема, и ее площадь I равна*

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

2. Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ при $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[\alpha, \beta]$. *Криволинейным сектором* будем называть плоскую фигуру Q, ограниченную кривой L и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 13.3).

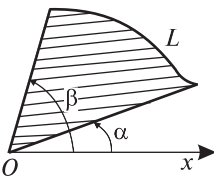


Рис. 13.3

Теорема. *Криволинейный сектор Q квадрируем, и его площадь I равна*

$$I=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Как используется определенный интеграл для нахождения объема тела вращения?

В полной аналогии с понятием квадрируемости плоской фигуры вводятся понятия кубируемости ограниченного тела Q и его объема.

Назовем *элементарными* такие тела, объемы которых известны (из курса элементарной математики таковыми являются, например, многогранники и объединения круговых цилиндров). Множество $\{s\}$ объемов элементарных тел, содержащихся в теле Q, ограничено сверху, его точную верхнюю грань обозначим через $\underline{I}$. Множество $\{S\}$ объемов элементарных тел, содержащих тело Q, ограничено снизу, и его точную нижнюю грань обозначим через $\overline{I}$.

Тело Q называется *кубируемым* (т. е. имеющим объем), если $\underline{I}=\overline{I}$. При этом число $I=\underline{I}=\overline{I}$ называется *объемом* тела Q.

Пусть криволинейная трапеция, лежащая под графиком непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a, b]$ функции $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Тогда возникающее при этом *тело вращения Q кубируемо и его объем I равен* $I=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Как используется определенный интеграл для нахождения длины спрямляемой кривой?

Дуга кривой $\overset{\smile}{AB}$ называется *спрямляемой* (т. е. имеющей длину), если существует предел l, к которому стремится длина вписанной[1] в эту дугу ломаной линии при стремлении к нулю ее наибольшего звена. При этом указанный предел l называется *длиной* дуги $\overset{\smile}{AB}$.

Пусть кривая является графиком функции $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и эта функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$, также непрерывную на этом сегменте. Такую кривую называют *гладкой*.

Теорема. *Если кривая, задаваемая уравнением $y = f(x)$ при $a \le x \le b$, является гладкой, то она спрямляема, и ее длина l равна*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Отметим, что если гладкая кривая задана параметрически, т. е. равенствами

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \text{ при } t_1 \le t \le t_2,$$

то для длины l этой кривой справедливо равенство

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Если же гладкая кривая задана уравнением в полярной системе координат

$$\rho = \rho(\varphi) \text{ при } \alpha \le \varphi \le \beta,$$

то длина l этой кривой определяется из равенства

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2}\, d\varphi.$$

---

[1] Ломаная линия считается вписанной в кривую L, если концы каждого ее звена лежат на L.

Какие методы применяются для приближенного вычисления определенных интегралов?

Основными методами приближенного вычисления определенного интеграла являются метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол.

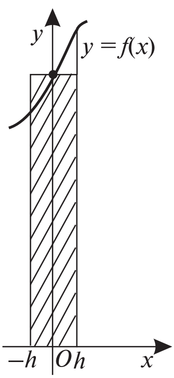


Рис. 13.4

1. В основе *метода прямоугольников* лежит идея замены криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y = f(x)$ на малом сегменте $[-h, h]$, прямоугольником с основанием $[-h, h]$ высоты $f(0)$ (рис. 13.4):

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx 2h \cdot f(0).$$

Если функция $y = f(x)$ задана на некотором сегменте $[a, b]$, то сначала разбивают этот сегмент на n равных частей точками $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$ и затем, обозначая через x_{2k-1} середину частичного сегмента $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, заменяют интеграл $\int_a^b f(x)dx$ на сумму

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot [f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})]$$

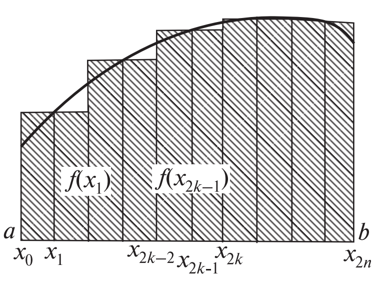


Рис. 13.5

площадей прямоугольников с высотами, соответственно равными $f(x_{2k-1})$, и основаниями, равными $x_{2k} - x_{2k-1} = \dfrac{b-a}{n}$ (рис. 13.5).

Погрешность R_n такой приближенной замены при условии, что вторая производная $f^{(2)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, удовлетворяет оценке

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{a \le x \le b} |f^{(2)}(x)|,$$

из которой следует, что с ростом количества n точек разбиения погрешность R_n стремится к нулю.

2. В основе *метода трапеций* лежит идея замены криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y = f(x)$ на малом сегменте $[-h, h]$, трапецией $ABCD$ (рис. 13.6):

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx h\cdot[f(-h)+f(h)].$$

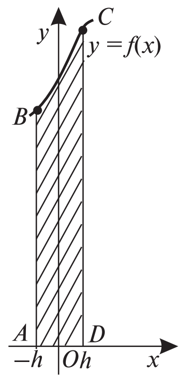


Рис. 13.6

Если функция $y = f(x)$ задана на некотором сегменте $[a, b]$, то сначала разбивают этот сегмент на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, а затем заменяют интеграл $\int_a^b f(x)dx$ на сумму

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2f(f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(b)\right]$$

площадей трапеций с основаниями, соответственно равными $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$, и высотами, равными

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \text{ (рис. 13.7).}$$

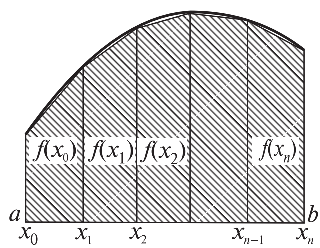


Рис. 13.7

Погрешность R_n такой приближенной замены при условии, что вторая производная $f^{(2)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, удовлетворяет оценке

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot \max_{a\le x\le b}|f^{(2)}(x)|.$$

3. В основе *метода парабол* (или *метода Симпсона*) лежит идея замены криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y = f(x)$ на малом сегменте $[-h, h]$, параболой, проходящей через точки графика этой функции с абсциссами $-h$, 0 и h (рис. 13.8):

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(-h)+4f(0)+f(h)].$$

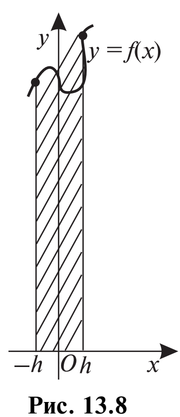


Рис. 13.8

Если функция $y = f(x)$ задана на некотором сегменте $[a, b]$, то сначала (как в методе прямоугольников) разбивают этот сегмент на n равных частей точками $a = x_0 < x_2 < ... < x_{2n} = b$ и затем, обозначая через x_{2k-1} середину частичного сегмента $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, заменяют интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ на сумму

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +$$
$$+2f(x_4) + ... + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b)]$$

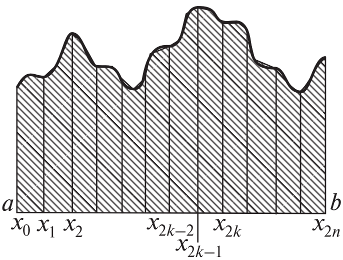


Рис. 13.9

площадей криволинейных трапеций, лежащих под параболами, проходящими через три точки графика функции $y = f(x)$ с абсциссами x_{2k-2}, x_{2k-1} и x_{2k} на каждом частичном сегменте (рис. 13.9).

Погрешность R_n такой приближенной замены, при условии что четвертая производная $f^{(4)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, удовлетворяет оценке:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|.$$

Что называют несобственным интегралом?

Для распространения понятия определенного интеграла на случай, когда либо промежуток интегрирования бесконечен, либо интегрируемая функция не является ограниченной, требуется дополнительный предельный переход.

1. Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $[a, +\infty)$ и интегрируема по любому сегменту вида $[a, b]$, где $b > a$. Тогда если существует предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx,$$

то этот предел называется *несобственным интегралом* (первого рода) от функции $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$ и обозначается символом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и функция $\Phi(x)$ является ее первообразной, то из формулы Ньютона–Лейбница при дополнительном условии, что существует предел, следует равенство:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) - \Phi(a).$$

2. Пусть теперь функция $f(x)$ определена на полусегменте $[a, b)$, не ограничена в окрестности точки b, однако интегрируема на любом сегменте вида $[a, b - \delta]$ при любом достаточно малом $\delta > 0$. Тогда если существует предел

$$\lim_{\delta\to 0+0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx,$$

то этот предел называется *несобственным интегралом* (второго рода) от функции $f(x)$ по сегменту $[a, b]$ и обозначается обычным символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и ее первообразная $\Phi(x)$ имеет предел $\Phi(b - 0)$ при $x \to b - 0$, то из формулы Ньютона–Лейбница следует равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b-0) - \Phi(a).$$

Глава 14. Криволинейные интегралы

Что называется криволинейным интегралом первого рода?

Пусть на плоскости Oxy задана спрямляемая кривая $L = \overset{\smile}{AB}$ без точек самопересечения, параметризуемая уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ a \le t \le b.$$

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определенную в каждой точке кривой L. Разобьем сегмент $a \le t \le b$ при помощи точек $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$ и рассмотрим соответствующее этому разбиению разбиение кривой L на дуги $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$, где $M_k(x_k, y_k)$, $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$. На каждой частичной дуге $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$ выберем любую точку[1] $N_k(\xi_k, \eta_k)$.

Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k,$$

в которой Δl_k — длина частичной дуги $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$.

Число I называется *пределом интегральной суммы* σ при стремлении к нулю длины наибольшей частичной дуги $d = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при условии $d < \delta$ и при произвольном выборе промежуточных точек N_k справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Это число I называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$ по дуге $L = \overset{\smile}{AB}$ и обозначают символом $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dl$ или $\int\limits_{L} f(x, y)dl$.

---

[1] Очевидно, что точке N_k соответствует некоторое значение $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, такое, что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$.

Отметим, что криволинейный интеграл первого рода дает массу так называемой нагруженной кривой L, если $f(x, y)$ равна линейной плотности распределения массы вдоль кривой L.

Что называется криволинейным интегралом второго рода?

Пусть так же, как и в определении криволинейного интеграла первого рода, произведено разбиение спрямляемой кривой $L = \overset{\cup}{AB}$ на частичные дуги $\overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$, $k = 1, 2, ..., n$, и на каждой из этих частичных дуг выбрана промежуточная точка $N_k(\xi_k, \eta_k)$.

Рассмотрим теперь две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, определенные в каждой точке кривой L, и составим для них следующие интегральные суммы:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}).$$

Число I называется *пределом интегральной суммы* σ_1 (соответственно σ_2) при стремлении к нулю длины наибольшей частичной дуги $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при условии $d < \delta$ и при произвольном выборе промежуточных точек N_k справедливо неравенство $|\sigma_1 - I| < \varepsilon$ (соответственно $|\sigma_2 - I| < \varepsilon$).

Это число I называется *криволинейным интегралом второго рода* и обозначается символом $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx$ (соответственно $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Q(x, y)dy$).

Сумму $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx + \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Q(x, y)dy$, называют *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначают символом $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy.$

Отметим, что в отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейные интегралы второго рода при изменении направления обхода кривой $\overset{\cup}{AB}$ меняют знак на противоположный.

Если кривая $L = \overset{\cup}{AB}$ является замкнутой (т. е. точки A и B совпадают), то принято считать, что кривая L обходится в направлении «против часовой стрелки»; это направление обхода называют *положительным*.

Отметим, что общий криволинейный интеграл второго рода дает работу по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы $\boldsymbol{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$.

Как свести криволинейные интегралы к определенным интегралам?

Пусть кривая L, параметризуемая уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \le t \le b$ является гладкой[1] и не имеет *особых точек*, т. е. производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ ни в одной точке $t \in [a, b]$ не обращаются в нуль одновременно. Пусть, кроме этого, подынтегральные функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *непрерывны вдоль кривой* L, т. е. для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) кривой L, связанных условием[2] $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$, справедливо соответствующее неравенство:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon, |P(x_1, y_1) - P(x_2, y_2)| < \varepsilon \quad \text{или}$$

$$|Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Тогда все криволинейные интегралы первого и второго родов существуют и вычисляются по формулам

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx = \int\limits_a^b P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Q(x, y)dy = \int\limits_a^b Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\,dt.$$

Отметим, что эти формулы остаются в силе, если кривая L является не гладкой, а кусочно гладкой (т. е. распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек участков, каждый из которых является гладкой кривой) и если интегрируемые функции f, P и Q не непрерывны, а кусочно непрерывны вдоль кривой L.

---

[1] То есть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на $[a, b]$ непрерывные производные.

[2] Иными словами, расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) меньше δ.

В каком случае криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования и как его при этом можно вычислить?

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области G и в этой области G фиксированы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Говорят, что интеграл $\int\limits_{\overset{\smile}{M_1 M_2}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ *не зависит от пути интегрирования*, если он принимает одно и то же значение для любой гладкой кривой L, соединяющей точки M_1 и M_2.

Справедливо следующее утверждение: *если в области G существует такая дифференцируемая функция $U(x, y)$, что выполнено равенство*[1]

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

то криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\smile}{M_1 M_2}} Pdx + Qdy$ *не зависит от пути интегрирования.*

Отсюда, в частности, следует, что если такая функция $U(x, y)$ существуется, то криволинейный интеграл можно вычислить по формуле, аналогичной формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{M_1 M_2}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1).$$

Кроме того, если путь интегрирования L в области G является замкнутым, то[2]

$$\oint\limits_L P(x, y) + Q(x, y)dy = 0.$$

---

[1] То есть подынтегральное выражениие является полным дифференциалом функции $U(x, y)$ и выполнены равенства $P(x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial x}(x, y)$ и $Q(x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial y}(x, y)$.

[2] Кружок у знака интеграла символизирует замкнутость контура L.

Глава 15. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Что такое m-мерное евклидово пространство?

Множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, ..., x_m)$ m вещественных чисел будем называть *m-мерным координатным пространством*. Его элементы, следуя геометрическим аналогиям, называют *точками* и обозначают символом $M(x_1, x_2, ..., x_m)$; при этом сами числа $x_1, x_2, ..., x_m$ называют *координатами* точки M.

Если в m-мерном координатном пространстве каждой паре точек $M'(x_1', x_2', ..., x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', ..., x_m'')$ поставлено в соответствие число $\rho(M', M'')$, называемое *расстоянием между M' и M''* и определяемое соотношением

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + ... + (x_m' - x_m'')^2}$$

то такое координатное пространство называют *евклидовым* и обозначают символом $\boldsymbol{R}^m$.

Какие основные множества рассматриваются в m-мерном евклидовом пространстве?

1. Множество всевозможных точек $M \in \boldsymbol{R}^m$, удовлетворяющих условию $\rho(M, M_0) < R$, называется *открытым m-мерным шаром* радиуса R с центром в точке M_0. *Замкнутым m-мерным шаром* радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всевозможных точек $M \in \boldsymbol{R}^m$: $\rho(M, M_0) \le R$. Все же точки $M \in \boldsymbol{R}^m$, для которых $\rho(M, M_0) = R$, образуют так называемую *m-мерную сферу* радиуса R с центром в точке M_0.

Открытый m-мерный шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M_0 будем также называть *ε-окрестностью точки M_0*.

2. Множество всех точек $M(x_1, x_2, ..., x_m)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$|x_1 - \overset{\circ}{x}_1| < d_1,\ |x_2 - \overset{\circ}{x}_2| < d_2,\ \ldots,\ |x_m - \overset{\circ}{x}_m| < d_m,$$

где d_1, d_2 , ..., d_m — некоторые положительные числа, называется *открытым m-мерным координатным параллелепипедом* с центром в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, или *прямоугольной окрестностью точки M_0*.

3. Точка M множества $X \subset \boldsymbol{R}^m$ называется *внутренней точкой* этого множества, если существует некоторая ε-окрестность точки M, целиком лежащая в множестве X. Точка M называется *внешней точкой* множества X, если существует некоторая ε-окрестность точки M, не имеющая с X общих точек. Точки, не являющиеся ни внутренними, ни внешними точками множества X, называются его *граничными точками*.

Отметим, что граничная точка может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству. Например, все точки m-мерной сферы радиуса R с центром в точке M_0 являются граничными как для замкнутого, так и для открытого m-мерного шара того же радиуса и с тем же центром — первому множеству они принадлежат, а второму нет.

4. Множество $X \subset \boldsymbol{R}^m$ называется *открытым*, если любая его точка является внутренней, и *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

5. Произвольное открытое множество $X \subset \boldsymbol{R}^m$, содержащее данную точку M_0, принято называть *окрестностью точки M_0*.

6. Точку $A \in \boldsymbol{R}^m$ называют *предельной точкой* множества $X \subset \boldsymbol{R}^m$, если в любой ε-окрестности точки A содержится хотя бы одна точка этого множества, отличная от A. Справедливо следующее утверждение: *множество X замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

7. Множество $X \subset \boldsymbol{R}^m$ называется *ограниченным*, если найдется m-мерный шар, содержащий все точки этого множества.

8. *Непрерывной кривой L* в $\boldsymbol{R}^m$ будем называть множество точек, координаты x_1, x_2, ..., x_m которых представляют собой некоторые непрерывные функции параметра t:

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t),\ \alpha \le t \le \beta.$$

Точки $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ с координатами

$$x_1' = \varphi_1(\alpha),\ x_2' = \varphi_2(\alpha), \ldots, x_m' = \varphi_m(\alpha),$$
$$x_1'' = \varphi_1(\beta),\ x_2'' = \varphi_2(\beta), \ldots, x_m'' = \varphi_m(\beta)$$

будем называть *концами* кривой L и говорить, что кривая *L соединяет точки M'* и *M''*.

9. Множество $X \subset \boldsymbol{R}^m$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в множестве X.

10. Всякое открытое и связное множество в $\boldsymbol{R}^m$ называется *областью*. Если X представляет собой область в $\boldsymbol{R}^m$, то множество $\overline{X}$, полученное присоединением к X всех его граничных точек[1], называется *замкнутой областью*.

Как определяется предел последовательности точек евклидова пространства?

Пусть каждому числу $n \in \boldsymbol{N}$ поставлена в соответствие точка $M_n \in \boldsymbol{R}^m$. Тогда говорят, что в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^m$ задана *последовательность точек* $\{M_n\}$: $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$.

Последовательность $\{M_n\}$ называется *сходящейся*, если существует точка $A \in \boldsymbol{R}^m$, такая, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать отвечающий ему номер N, такой, что при $n \geq N$ выполнено неравенство $\rho\,(M_n, A) < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \boldsymbol{N}:\ \forall n \geq N\ \ \rho(M_n, A) < \varepsilon.$$

При этом число A называют *пределом* последовательности $\{M_n\}$ и используют один из символов: $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = A$ или $M_n \to A$ при $n \to \infty$.

Отметим, что справедливо следующее утверждение: *последовательность* $\{M_n\}$ *сходится к точке A тогда и только тогда, когда числовые последовательности* $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ *координат точек* M_n *сходятся соответственно к числам* $a_1, a_2, \ldots, a_m$, *представляющим собой координаты точки A.*

Как формулируется критерий Коши сходимости последовательности точек в R^m?

Критерий Коши сходимости последовательности точек в $\boldsymbol{R}^m$ совершенно аналогичен критерию Коши сходимости числовой последовательности.

Теорема. *Для того чтобы последовательность* $\{M_n\}$ *точек пространства* $\boldsymbol{R}^m$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна*, т. е. для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно

[1] Такая операция называется *замыканием* множества X.

указать номер N, такой, что при $n \geq N$ и любом $p \in \boldsymbol{N}$ выполнялось неравенство $\rho(M_{n+p}, M_n) < \varepsilon$.

Как формулируется теорема Больцано–Вейерштрасса в $\boldsymbol{R}^m$?

Последовательность $\{M_n\}$ точек пространства $\boldsymbol{R}^m$ называется *ограниченной*, если существует такое число $a > 0$, что для $\forall n \in \boldsymbol{N}$ выполнено неравенство $\rho(O, M_n) \leq a$, где $O(0, 0, ..., 0)$ — начало координат в $\boldsymbol{R}^m$. Иными словами, последовательность $\{M_n\}$ ограничена, если все ее точки принадлежат замкнутому шару достаточно большого радиуса с центром в начале координат.

Теорема Больцано–Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности $\{M_n\}$ в $\boldsymbol{R}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Отметим, что предел A последовательности $\{M_n\}$ точек, принадлежащих замкнутому множеству $X \subset \boldsymbol{R}^m$, также принадлежит этому множеству.

Как определяется предел функции m переменных?

Пусть на множестве $X \subset \boldsymbol{R}^m$ задана функция[1] $u = f(M)$, т. е. каждой точке $M \in X$ поставлено в соответствие некоторое число $f(M) \in \boldsymbol{R}$. Пусть точка $A \subset \boldsymbol{R}^m$ является предельной точкой области задания X этой функции.

Определение (по Гейне). Число b называется *пределом функции $u = f(M)$ в точке A* (или *при $M \to A$*), если для любой сходящейся к A последовательности $\{M_n\}$ точек множества X, все элементы M_n которой отличны от A, соответствующая числовая последовательность $\{f(M_n)\}$ сходится к числу b, т. е.

$$\forall \{M\} \subset X, M_n \neq A : \{M_n\} \to A \Rightarrow \{f(M_n)\} \to b.$$

Определение (по Коши). Число b называется *пределом функции $u = f(M)$ в точке A* (или при $M \to A$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее ему число $\delta > 0$, такое, что для любой точки $M \in X$, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, A) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$, т. е.

[1] Наряду с обозначением $u = f(M)$ будем также использовать символ $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, где $(x_1, x_2, ..., x_m)$ — координаты точки M.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall M \in X, 0 < \rho(M, A) < \delta \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon.$$

Как и в случае функции одной переменной, определения и по Гейне, и по Коши эквивалентны.

Для обозначения предела функции $u = f(M)$ в точке A используется символика:

$$\lim_{M \to A} f(M) = b \text{ или } \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b.$$

По аналогичной схеме[1] можно ввести понятие предела функции $u = f(M)$ при $M \to \infty$, сформулировать критерий Коши существования предела функции m переменных, теорему об арифметических операциях над функциями, имеющими предел, ввести понятие бесконечно малой функции и описать правила сравнения двух бесконечно малых функций.

Какие функции *m* переменных называются непрерывными?

Пусть $A \in \boldsymbol{R}^m$ — некоторая точка, принадлежащая области задания X функции m переменных $u = f(M)$ и являющаяся для этого множества X предельной.

Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке A*, если

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(A).$$

Привлекая любое из сформулированных выше определений предела функции, получим два развернутых определения непрерывности.

Определение (по Гейне). Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке A*, если

$$\forall \{M_n\} \subset X : \to A \Rightarrow \{f(M_n)\} \to f(A).$$

Определение (по Коши). Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке A*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :\ \forall M \in X, \rho(M, A) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(A)| < \varepsilon.$$

1 Достаточно в соответствующих определениях для функций одной переменной аргумент x заменить на точку M, а расстояние $|x' - x''|$ на числовой оси заменить расстоянием $\rho(M', M'')$.

Точки пространства $\boldsymbol{R}^m$, в которых функция $u = f(M)$ не является непрерывной, называются ее *точками разрыва*.

Пусть теперь множества точек $X \subset \boldsymbol{R}^m$ таково, что любая его точка M является предельной точкой множества X (такие множества X называют *плотными в себе*).

Функция $u = f(M)$, определенная на таком множестве X, *называется непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой точке $M \in X$.

Какая существует связь между непрерывностью функции *m* переменных по каждой своей переменной и обычной непрерывностью этой функции?

Введем понятие непрерывности функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ по одной из переменных при фиксированных значениях остальных переменных в разностной форме.

Пусть точка $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ принадлежит области задания X функции $u = f(M)$. Зафиксируем аргументы $x_2, ..., x_m$, а аргументу x_1 придадим произвольное приращение Δx_1, такое, чтобы точка с координатами $(x + \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m)$ тоже принадлежала множеству X. Соответствующее приращение функции

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

называется *частным приращением функции* $f(M)$ в точке M, соответствующим приращению Δx_1 аргумента x_1. Аналогично вводятся частные приращения $\Delta_{x_2} u, ..., \Delta_{x_m} u$, соответствующие приращениям других аргументов.

Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называется *непрерывной в точке* $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ по переменной x_k, если[1]

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0.$$

Отметим, что если функция $u = f(M)$ просто непрерывна в точке M, то ее *полное приращение*

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

[1] Иными словами, функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ является непрерывной функцией одной переменной x_k при фиксированных значениях остальных переменных.

является бесконечно малой функцией при $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$. Поэтому справедливо следующее утверждение: *если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке M, то она непрерывна в этой точке по каждой своей переменной.*

Обратное утверждение уже, вообще говоря, неверно. Действительно, функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $O(0, 0)$ по каждой из переменных x и y, так как на координатных осях она равна нулю. Если же для каждого $k \in \boldsymbol{R}$ рассмотреть последовательности точек $M_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{k}{n}\right)$, $n = 1, 2, ...$, сходящиеся к точке O, то соответствующие значения функции $u(M_n) = \dfrac{1}{1+k^2}$ образуют постоянные последовательности, пределы которых, очевидно, зависят от k. Значит, рассматриваемая функция не имеет предела в точке O.

Какими основными свойствами обладают непрерывные функции нескольких переменных?

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом аналогичны свойствам непрерывных функций одной переменной.

Теорема 1 (об арифметических операциях над непрерывными функциями). *Если функции $f(M)$ и $g(M)$ заданы на одном и том же множестве X и непрерывны в некоторой точке $A \in X$, то функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ и $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ также непрерывны в точке A (в случае частного нужно дополнительно потребовать, чтобы $g(A) \neq 0$).*

Теорема 2 (о непрерывности сложной функции). *Пусть функции $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$, $i = 1, 2, ..., m$ непрерывны в точке $A(a_1, a_2, ..., a_k)$, а функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ непрерывна в точке $B(b_1, b_2, ..., b_m)$, где $b_i = \varphi_i(a_1, a_2, ..., a_k)$ при $i = 1, 2, ..., m$. Тогда сложная функция*

$$u = f(\varphi_1(t_1, ..., t_k), \varphi_2(t_1, ..., t_k), ..., \varphi_m(t_1, ..., t_k))$$

непрерывна в точке $A(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Теорема 3 (об устойчивости знака). *Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке $A \in \boldsymbol{R}^m$ и если $f(A) \neq 0$, то существует такая δ-окрестность точки A, в пределах которой $f(M)$ имеет знак, совпадающий со знаком $f(A)$.*

Теорема 4 (о прохождении через любое промежуточное значение). *Пусть функция $u = f(M)$ непрерывна на связном множестве $X \subset \boldsymbol{R}^m$, причем $f(A)$ и $f(B)$ — значения этой функции в некоторых точках A, $B \in X$. Пусть, далее, γ — число, заключенное между $f(A)$ и $f(B)$. Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в X, найдется точка N, такая, что $f(N) = \gamma$.*

Теорема 5 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве X, то она ограничена на этом множестве.*

Так как множество значений функции ограничено, то оно имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани, которые будем называть соответственно *точной верхней* и *точной нижней гранями функции* $f(M)$ на множестве X и обозначать

$$\overline{u} = \sup_X f(M), \quad \underline{u} = \inf_X f(M).$$

Теорема 6 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве X, то она достигает на этом множестве своих точной верхней и точной нижней граней.*

Функция $u = f(M)$ называется *равномерно непрерывной* на плотном в себе множестве $X \subset \boldsymbol{R}^m$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любых точек M' и M'' этого множества, удовлетворяющих условию $\rho(M', M'') < \delta$, выполняется неравенство $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$.

Теорема 7 (теорема Кантора). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.*

Что называется частной производной функции?

Пусть $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ — внутренняя точка области задания X функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Рассмотрим в этой точке следующее разностное отношение

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_m) - f(x_1, ..., x_m)}{\Delta x_k}.$$

Если существует предел этого разностного отношения при $\Delta x_k \to 0$, то этот предел называется *частной производной* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке M по переменной x_k и обозначается одним из символов: $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}, u'_{x_k}, f'_{x_k}$.

Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$.

Отметим, что частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ является обычной производной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ как функции одного аргумента x_k при фиксированных значениях остальных ее переменных.

В отличие от функций одной переменной из существования всех частных производных функции в точке M не следует даже непрерывность этой функции в точке M. Так как функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

на координатных осях тождественно равна нулю, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, хотя, как было показано выше, эта функция не имеет предела в точке $O(0, 0)$.

Какую функцию нескольких переменных называют дифференцируемой?

Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называется *дифференцируемой* в данной точке $M(x_1, x_2, ..., x_m)$, если ее полное приращение

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_m \cdot \Delta x_m + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta x + ... + \alpha_m \cdot \Delta x_m,$$

где $A_1, A_2, ..., A_m$ — некоторые не зависящие от приращений переменных числа, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ — бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$ функции, равные нулю при $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ...\ \Delta x_m = 0$.

Последнее соотношение обычно называют *условием дифференцируемости* функции в точке M.

Можно показать, что *если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в точке M, то в этой точке существуют все частные произ-*

водные, *причем* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$ *при* $i = 1, 2, ..., m$, *где числа* A_i *определяются из условия дифференцируемости*.

С учетом этого свойства и символики, связанной со сравнением бесконечно малых, условие дифференцируемости функции в данной точке M может быть записано в следующей форме:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M)\cdot\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\cdot\Delta x_m \overset{=}{=} o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$.

Справедливо следующее утверждение: *если функция* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *дифференцируема в точке* M, *то она непрерывна в этой точке*.

В чем состоит геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных?

Дифференцируемость функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ с геометрической точки зрения означает наличие касательной плоскости к графику[1] функции $u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u_0)$, где $u_0 = f(x_0, y_0)$ рис. 15.1). *Касательной плоскостью* к поверхности S называется плоскость, проходящая через точку поверхности N_0 и удовлетворяющая условию: угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку N_0 и любую точку N_1 поверхности, стремится к нулю, когда точка N_1 стремится к N_0.

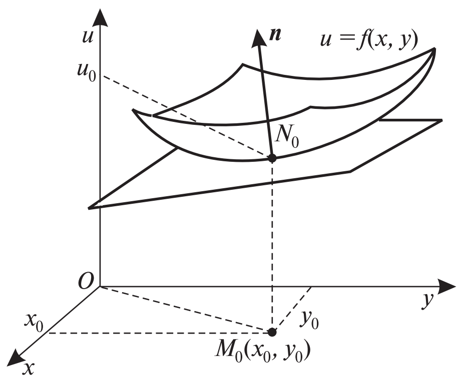


Рис. 15.1

Уравнение касательной плоскости к графику функции $u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u_0)$ имеет вид

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

[1] То есть к поверхности, задаваемой в системе координат Oxy уравнением $u = f(x, y)$.

Тем самым вектор $\boldsymbol{n} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right\}$ является нормальным вектором этой касательной плоскости.

Какие условия достаточны для дифференцируемости функции нескольких переменных?

Справедливо следующее утверждение: *если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки M_0, причем все эти частные производные непрерывны в самой точке M_0, то указанная функция дифференцируема в точке M_0.*

В чем состоит правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных?

Пусть задана сложная функция вида $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, где

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k), i = 1, 2, \ldots, m.$$

Если все функции $\varphi_i(t_1, ..., t_k)$, $i = 1, 2, ..., m$, дифференцируемы в точке $N(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$, а функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в соответствующей точке $M(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, где $\overset{\circ}{x}_i = \varphi_i(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$,

$i = 1, 2, ..., m$, то и сложная функция дифференцируема в точке N и выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{d x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$
$$\ldots..,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k},$$

где все частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ берутся в точке M, а производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ — в точке N.

Отметим, что в частном случае, когда в сложной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ все функции $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_m = \varphi_m(t)$ являются функциями одной переменной t, производная $\frac{du}{dt}$ этой сложной функции определяется равенством

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{dx_m}{dt}$$

Что называют дифференциалом функции нескольких переменных и обладает ли он свойством инвариантности своей формы?

Дифференциалом du дифференцируемой в точке M функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называется главная линейная часть приращения этой функции в точке M из условия дифференцируемости: $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m$.

Если все коэффициенты A_i равны нулю, то дифференциал du считается равным нулю.

Используя формулы для коэффициентов A_i и считая дифференциалами dx_i независимых переменных их приращения Δx_i, получим равенство:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

Отметим, что, как и для функции одной переменной, дифференциал du обладает свойством *инвариантности* своей *формы*. Это значит, что написанное выше равенство для du остается справедливым и в случае, когда переменные x_i сами являются функциями других переменных (например, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$, $i = 1, 2, ..., m$).

Данное свойство инвариантности формы позволяет установить следующие аналоги правил дифференцирования функций одной переменной:

$$d(\alpha u) = \alpha \cdot du \quad (\alpha \text{ — постоянная});$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \ d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2},$$

где u, v — функции любых (не обязательно независимых) переменных.

Что называется производной по направлению и как ее найти с помощью градиента функции?

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ трех переменных определена в некоторой окрестности точки $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z})$ и дифференцируема в самой точке M_0.

Рассмотрим некоторый луч, выходящий из точки M_0 и определяемый единичным вектором $\boldsymbol{e}$ с координатами[1] $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Как известно, координаты точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой, содержащей этот луч, определяются равенствами:

$$x = \overset{\circ}{x} + l\cos\alpha,\ y = \overset{\circ}{y} + l\cos\beta,\ z = \overset{\circ}{z} + l\cos\gamma,\ \ l \in \boldsymbol{R}.$$

Производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению, определяемому единичным вектором $\boldsymbol{e}$, называют производную сложной функции $u = f(\overset{\circ}{x} + l\cos\alpha), (\overset{\circ}{y} + l\cos\beta), (\overset{\circ}{z} + l\cos\gamma)$ по переменной l, взятую в точке $l = 0$, и обозначают символом $\dfrac{\partial u}{\partial e}$.

Из правила дифференцирования сложной функции следует, что справедливо равенство:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cdot\cos\gamma.$$

Назовем *градиентом* $\operatorname{grad} u$ функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 вектор с координатами

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right\}.$$

Тогда формула для производной по направлению может быть записана в виде скалярного произведения

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{e}} = (\boldsymbol{e}, \operatorname{grad} u).$$

Отметим следующие два основных свойства градиента.

1. Производная функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению, определяемому градиентом этой функции в указанной точке, имеет максимальное значение по сравнению с производной в этой точке

[1] Эти координаты (очевидно, удовлетворяющие условию $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + {}$ $+\cos^2\gamma = 1$) называются направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{e}$ и равны косинусам углов α, β и γ, которые этот вектор образует с соответствующими осями координат.

по любому другому направлению и равна длине |grad u| вектора градиента в данной точке.

2. Вектор |grad u| в каждой точке M поверхности уровня $f(x, y, z) = C$ (C — константа) ортогонален к этой поверхности в том смысле, что он является нормальным вектором касательной плоскости к поверхности уровня в точке M.

Как определяются частные производные высших порядков?

Если частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ существует в каждой точке некоторой области $X \subset \boldsymbol{R}^m$, то ее можно рассматривать саму как функцию переменных $x_1, x_2, ..., x_m$. Если функция $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет частную производную по аргументу x_k в некоторой точке $M \in X$, то эту частную производную называют *второй частной производной*, или *частной производной второго порядка*, функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке M по аргументам x_i и x_k и обозначают одним из символов

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, f^{(2)}_{x_i x_k}, u^{(2)}_{x_i x_k}.$$

Если $i = k$, то используется обозначение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Если $i \neq k$, то частная производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i^2}$ называется *смешанной*.

Частные производные n-го порядка определяются аналогичным образом через частные производные $(n-1)$-го порядка, так что

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right).$$

Если не все индексы $i_1, ..., i_n$ совпадают между собой, то такая частная производная n-го порядка называется *смешанной*.

Функцию $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ назовем *n раз дифференцируемой в точке* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$, если эта функция $(n-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и все ее частные производные порядка $(n-1)$ являются дифференцируемыми в точке M_0 функциями.

Из приведенных выше утверждений следует, что *если все частные производные n-го порядка функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ существуют в окрестности точки M_0 и являются непрерывными в точке M_0 функциями, то эта функция n раз дифференцируема в точке M_0.*

Какие условия обеспечивают независимость значения смешанных частных производных от порядка выполнения дифференцирования?

Естественно поставить вопрос о том, зависит ли значение смешанной частной производной от порядка выполнения отдельных операций дифференцирования в ней, т. е., например, для функции $u = f(x, y)$ двух переменных различны ли смешанные производные $\frac{\partial u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y \partial x}$.

Ответ на этот вопрос в общей ситуации положительный. Так, например, для функции

$$u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

обе смешанные частные производные второго порядка в точке $O(0, 0)$ существуют, и при этом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0,0) = -1,$$

Следующие утверждения содержат условия, обеспечивающие совпадение смешанных производных при разном порядке выполнения дифференцирования.

Теорема 1. *Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ n раз дифференцируема в точке M_0. Тогда в этой точке значение любой смешанной производной n-го порядка не зависит от порядка, в котором проводятся последовательные дифференцирования.*

Теорема 2. *Пусть в некоторой окрестности точки M_0 функция $u = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x, f'_y, f^{(2)}_{xy}, f^{(2)}_{yx}$. Пусть, кроме того, производные $f^{(2)}_{xy}$ и $f^{(2)}_{yx}$ непрерывны в точке M_0. Тогда в этой точке $f^{(2)}_{xy} = f^{(2)}_{yx}$.*

Как определяются дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных?

Будем наряду с символами $dx_1, \ldots, dx_m$ и du использовать символы $\delta x_1, \ldots, \delta x_m$ и δu и введем понятие второго дифференциала функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ по схеме, аналогичной той, которая была использована для определения второго дифференциала функции одной переменной.

Рассмотрим величину в правой части равенства для первого дифференциала

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m$$

как функцию аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Если эта функция дифференцируема[1] в данной точке M, то рассмотрим ее дифференциал $\delta(du)$.

Значение дифференциала $\delta(du)$, взятое при $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$, ..., $\delta x_m = dx_m$, называется ***вторым дифференциалом*** функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в данной точке M и обозначается символом d^2u.

Дифференциал $d^n u$ любого порядка n вводится через дифференциал $d^{n-1}u$ аналогичным образом.

Уже при вычислении второго дифференциала приходится существенно различать два случая.

1. Пусть аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются независимыми переменными. Тогда справедливо равенство

$$d^2u = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\cdot dx_i \cdot dx_k.$$

Иными словами, второй дифференциал d^2u представляет собой симметричную квадратичную форму[2] от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ с коэффициентами, равными значениям $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ в данной точке M.

2. Пусть аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ сами являются дважды дифференцируемыми функциями независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_s$. Тогда справедливо равенство:

[1] Для этого достаточно потребовать, чтобы все частные производные были дифференцируемы в точке M, а аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ были либо независимыми переменными, либо два раза дифференцируемыми функциями.

[2] *Квадратичной формой* называют функцию переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$ вида $\Phi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}t_i t_k$. Если ее коэффициенты удовлетворяют условиям $a_{ik} = a_{ki}$ для всех индексов i и k, то квадратичная форма Φ называется *симметричной*.

$$d^2u = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}dx_i dx_k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}d^2 x_k.$$

Сопоставляя эти два случая, приходим к выводу, что второй и все последующие дифференциалы не обладают свойством инвариантности своей формы.

В заключение укажем компактную форму записи дифференциала $d^n u$ в случае, когда аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ рассматриваемой функции являются независимыми переменными. Для этого используем формальный символ

$$d = dx_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Тогда выражение для второго дифференциала приобретает вид

$$d^2 u = \left(dx_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 u,$$

и точно так же — для дифференциала любого порядка n:

$$d^n u = \left(dx_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u.$$

Какой вид имеет формула Тейлора для функции нескольких переменных?

Как и для функции одной переменной, формула Тейлора для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ позволяет заменить полное приращение $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ этой функции на сумму многочленов относительно приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ и оценить совершаемую при такой замене погрешность.

Ради сокращения записи приведем формулу Тейлора для функции $u = f(x, y)$ двух переменных.

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена и $(n + 1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(\mathring{x}, \mathring{y})$. Тогда для достаточно малых приращений Δx и Δy справедливо равенство:

$$f(\mathring{x} + \Delta x, \mathring{y} + \Delta y) - f(\mathring{x}, \mathring{y}) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(\mathring{x}, \mathring{y}) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\mathring{x}, \mathring{y}) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(\mathring{x}, \mathring{y}) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\overset{\circ}{x}+\theta\Delta x,\ \overset{\circ}{y}+\theta\Delta y),$$

где θ — некоторое число из интервала $0 < \theta < 1$. Это равенство называется *формулой Тейлора* для функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Отметим, что в случае функции m переменных в этой формуле надо заменить координаты «центральной» точки $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, на $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, координаты «смещенной» точки $(\overset{\circ}{x}+\Delta x, \overset{\circ}{y}+\Delta y)$ на $(\overset{\circ}{x}_1+\Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2+\Delta x_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m+\Delta x_m)$, а также выражение $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)$ на $\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ и координаты точки $(\overset{\circ}{x}+\theta\Delta x, \overset{\circ}{y}+\theta\Delta y)$ в остаточном члене на $(\overset{\circ}{x}_1+\theta\Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2+\theta\Delta x_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m+\theta\Delta x_m)$.

Что называют локальным экстремумом функции нескольких переменных и какое условие для него необходимо?

Говорят, что функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеет в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *локальный минимум* (соответственно *локальный максимум*), если значение $f(M_0)$ в этой точке является наименьшим (соответственно наибольшим) среди всех значений $f(M)$ функции из достаточного малой δ-окрестности точки M_0. Точнее говоря, существует такое число $\delta > 0$, что разность

$$\Delta u = f(\overset{\circ}{x}_1+\Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2+\Delta x_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m+\Delta x_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$$

является неотрицательной (соответственно неположительной) для всех приращений, удовлетворяющих условию

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2 \le \delta^2.$$

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеет в какой-либо точке локальный минимум или локальный максимум, то говорят, что функция имеет в этой точке *локальный экстремум.*

Теорема (необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции). *Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ и имеет в этой точке локальный экстремум.*

Тогда все частные производные первого порядка этой функции обращаются в точке M_0 в нуль, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)=0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)=0.$$

Данное условие может быть записано и в другой форме: *первый дифференциал функции в этой точке*

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)dx_m$$

равен нулю тождественно относительно дифференциалов независимых переменных dx_1, dx_2, ..., dx_m.

Отметим, что данное необходимое условие выполняется лишь при условии, что функция дифференцируема в точке своего локального экстремума. Так, например, функция $u = |x| + |y|$ имеет в точке (0, 0) локальный минимум[1], однако не дифференцируема в этой точке, так как не имеет в точке (0, 0) ни одной частной производной первого порядка.

Кроме того, указанное необходимое условие не является достаточным для существования локального экстремума в соответствующей точке. Так, например, функция $u = x^2 - y^2$ дифференцируема во всех точках, имеет частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$, равные нулю в точке (0, 0), однако не имеет в этой точке локального экстремума[2].

Таким образом, в точках M_0, в которых все частные производные первого порядка равны нулю[3], требуется проводить дополнительное исследование.

Какие условия обеспечивают локальный экстремум в стационарной точке функции нескольких переменных?

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ один раз дифференцируема в достаточно малой δ-окрестности точки $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ и дважды

[1] Она равна нулю в этой точке и неотрицательна при всех значениях своих аргументов x и y.

[2] Она равна нулю в этой точке, при этом $u(0, y) = -y^2 < 0$ при всех $y \neq 0$ и $u(x, 0) = x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$.

[3] Такие точки принято называть *стационарными точками* функции, или *точками* ее *возможного экстремума*.

дифференцируема в самой точке M_0, причем эта точка M_0 является стационарной точкой рассматриваемой функции, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)=0, \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)=0, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)=0.$$

Тогда:

– функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *имеет в точке* M_0 *локальный минимум*, если *второй дифференциал* d^2f *в этой точке является положительно определенной квадратичной формой* от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$;

– функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *имеет в точке* M_0 *локальный максимум*, если *второй дифференциал* d^2f *в этой точке является отрицательно определенной квадратичной формой*;

– функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *не имеет в точке* M_0 *локальный экстремум*, если *второй дифференциал* d^2f *в этой точке является знакопеременной квадратичной формой*[1].

Для исследования второго дифференциала

$$d^2 f(M_0)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0)dx_i dx_k$$

как квадратичной формы от переменных dx_1, dx_2, ..., dx_m можно использовать *критерий Сильвестра*. В матрице

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

с элементами $a_{ik}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_h}(M_0)$ считаются так называемые главные миноры, т. е. определители вида

$$A_1=a_{11}, A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, A_m=|A|,$$

и применяется следующее утверждение.

---

[1] Квадратичная форма $\Phi=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}t_i t_k$ называется *положительно* (соответственно *отрицательно*) *определенной*, если она принимает строго положительные (соответственно строго отрицательные) значения при всех $t_1, t_2, \ldots, t_m$, одновременно не равных нулю. Квадратичная форма Φ называется *знакопеременной*, если среди ее значений имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Теорема (критерий Сильвестра). *Для того чтобы рассматриваемая квадратичная форма являлась положительно (соответственно отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все числа*

$$A_1, \frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \ldots, \quad \frac{A_m}{A_{m-1}}$$

были положительными (соответственно отрицательными).

С учетом этого утверждения для функции двух переменных $u = f(x, y)$ имеет место следующее утверждение, уточняющее приведенные выше достаточные условия локального экстремума в стационарной точке $M_0(\mathring{x}, \mathring{y})$.

Пусть $a_{11} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)$, $a_{12} = a_{21} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0)$, $a_{22} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)$.

Тогда:

– функция $u = f(x, y)$ *имеет в точке* M_0 *локальный экстремум при условии* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, *причем это будет локальный минимум при* $a_{11} > 0$ *и локальный максимум при* $a_{11} < 0$;

– функция $u = f(x, y)$ *не имеет в точке* M_0 *локального экстремума, если* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

Следует отметить, что рассмотренные здесь достаточные условия не позволяют исчерпывающе исследовать стационарные точки любой функции нескольких переменных. Например, для функции $u = f(x, y)$ двух переменных случай $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ является сомнительным (в этом случае, как показывают конкретные примеры, возможно как наличие, так и отсутствие локального экстремума в точке M_0).

Как найти максимальное и минимальное значение функции нескольких переменных?

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D и дифференцируема во всех внутренних точках этой области. Для нахождения максимального и минимального значений функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в области D следует:

– найти значения этой функции во всех точках возможного локального экстремума, оказавшихся внутри области D;

– сравнить эти значения со значениями функции на границе области D.

Что называют условным экстремумом функции?

В случае когда экстремум функции нескольких переменных ищется при условии, что ее аргументы удовлетворяют некоторым дополнительным соотношениям, говорят о поиске *условного экстремума* функции.

Как найти условный экстремум функции?

Для отыскания условного экстремума можно использовать два подхода. В целях упрощения записи рассмотрим эти подходы на примере нахождения экстремума функции пяти переменных

$$u = f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$$

при наличии двух условий связи

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0. \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $u = f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$ при наличии этих условий связи имеет *условный максимум* (соответственно *условный минимум*) в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3, \overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_m)$, координаты которой удовлетворяют этим условиям связи, если найдется такая окрестность точки M_0, в пределах которой значение рассматриваемой функции в точке M_0 является наибольшим (соответственно наименьшим) среди ее значений во всех точках указанной окрестности, координаты которых удовлетворяют условиям связи.

1. Первый подход при отыскании условного экстремума удобен тогда, когда система из двух приведенных выше условий связи разрешима (по крайней мере, локально, т. е. в пределах некоторой окрестности рассматриваемой точки) относительно y_1 и y_2. В этом случае найдутся функции $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ и $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3)$, обращающие условия связи в верные тождества, а задача нахождения условного экстремума тем самым сведется к задаче об обычном (безусловном) экстремуме функции трех переменных

$$u = \Phi(x_1, x_2, x_3) = f[x_1, x_2, x_3, \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \varphi_2(x_1, x_2, x_3)].$$

2. Второй подход позволяет избежать нарушения симметрии относительно переменных x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, когда одни переменные (x_1, x_2, x_3) остаются независимыми, а другие (y_1, y_2) выражаются через них[1]. Этот подход был предложен Лагранжем и называется *методом неопределенных множителей Лагранжа.*

Составим так называемую *функцию Лагранжа*

$$\psi = f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + \lambda_2 F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2),$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные и пока неопределенные числа. Из уравнений

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial y_2} = 0$$

находятся точки возможного безусловного экстремума функции Лагранжа ψ (выражающаяся через постоянные λ_1 и λ_2). Для определения λ_1 и λ_2 используются условия связи $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

Пусть теперь точка M_0 — найденная точка возможного экстремума. Для выяснения того, является ли эта точка точкой экстремума функции $u = f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$ при наличии связей $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, достаточно исследовать знакоопределеность второго дифференциала $d^2\psi$ функции Лагранжа в точке M_0 при выполнении дополнительных условий в этой точке

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}dx_2 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}dx_3 + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}dy_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}dx_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}dx_3 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}dy_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}dy_2 = 0 \end{cases}$$

на дифференциалы переменных dx_1, dx_2, dx_3, dy_1, dy_2. Если второй дифференциал $d^2\psi(M_0)$ окажется при выполнении этих условий положительно (соответственно отрицательно) определенной квадратичной формой, то точка M_0 является точкой условного минимума (соответственно условного максимума).

[1] Этот недостаток первого подхода становится особенно существенным в тех конкретных задачах, когда не удается найти явное решение условий связи относительно y_1 и y_2 в элементарных функциях.

Глава 16. Двойные и тройные интегралы

Как определяется двойной интеграл от функции двух переменных?

Обычно двойной интеграл от функции двух переменных определяется поэтапно: сначала вводится двойной интеграл для прямоугольника, а затем строится интеграл для произвольной области.

1. Пусть функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $R = [a \leq \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]$.

Каждому разбиению сегмента $a \leq x \leq b$ на n частичных сегментов $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и каждому разбиению сегмента $c \leq y \leq d$ на p частичных сегментов $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$ естественным образом соответствует разбиение прямоугольника R на $n \cdot p$ частичных прямоугольников:

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leq x \leq x_k] \times [y_{l-1} \leq y \leq y_l] \; (k = 1, 2, \ldots, n;\; l = 1, 2, \ldots, p).$$

На каждом частичном прямоугольнике R_{kl} возьмем произвольную точку (ξ_k, η_l). Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$ и обозначим через $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \cdot \Delta y_l$ площадь прямоугольника R_{kl}. Составим для данного разбиения следующую сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \Delta R_{kl},$$

которую будем называть *интегральной суммой для функции $f(x, y)$ на прямоугольнике R*.

Диагональ $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$ частичного прямоугольника R_{kl} будем называть его *диаметром*, а наибольший из этих диаметров $\hat{d}$ по всем прямоугольникам разбиения — *диаметром данного разбиения*.

Число I называется *пределом интегральных сумм σ при стремлении к нулю диаметра разбиения*, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется отвечающее ему число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при единственном условии $\hat{d} < \delta$ (независимо от выбора точек $(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$) справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой на прямоугольнике* R, если для этой функции существует на прямоугольнике R конечный предел I ее интегральных сумм σ при стремлении к нулю диаметра разбиения $\hat{d}$. При этом указанный предел I называется *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по прямоугольнику* R и обозначается одним из символов

$$I = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R f(M)\,d\sigma.$$

Отметим, что так же, как и для однократного определения интеграла, *ограниченность функции* $f(x, y)$ *на прямоугольнике* R *является необходимым условием ее интегрируемости на этом прямоугольнике.*

2. Пусть теперь функция $f(x, y)$ задана и ограничена в некоторой ограниченной замкнутой и квадрируемой области D.

Обозначим через R любой прямоугольник (со сторонами, параллельными координатным осям), содержащий область D. В этом прямоугольнике определим следующую функцию:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{в точках области } D, \\ 0 & \text{в остальных точках } R. \end{cases}$$

Функцию $f(x, y)$ назовем *интегрируемой в области* D, если функция $F(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике R. При этом число $I = \iint_R F(x, y)\,dx\,dy$ назовем *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ по *области* D и обозначим одним из символов

$$I = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(M)\,d\sigma.$$

Отметим также, что двойной интеграл для произвольной области D можно вводить разбиением области D на конечное число квадрируемых областей $D_1, D_2, \ldots, D_r$, определяя его как предел интегральных сумм $\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(P_i)\cdot\Delta D_i$ при диаметре разбиения, стремящемся к нулю[1]. Можно показать, что такой подход полностью эквивалентен приведенному выше.

---

[1] Здесь P_i — произвольная точка области D_i, ΔD_i — площадь D_i; диаметром области D_i называют точную верхнюю грань расстояний между любыми двумя точками этой области, а диаметром разбиения — наибольший из диаметров всех частичных областей.

Для каких функций двух переменных существует двойной интеграл?

В случае функции $f(x, y)$, заданной и ограниченной в прямоугольнике $R = [a \le x \le b] \times [c \le y \le d]$, справедливо утверждение, полностью аналогичное утверждению для однократного определенного интеграла.

Теорема. *Для того чтобы для функции $f(x, y)$ существовал двойной интеграл по прямоугольнику R, необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существовало отвечающее ему число $\delta(\varepsilon) > 0$, обеспечивающее справедливость неравенства $S - s < \varepsilon$ для верхней суммы S и нижней суммы s любого разбиения прямоугольника R с диаметром $\hat{d} < \delta(\varepsilon)$.*

Здесь верхняя и нижняя суммы определяются соответственно равенствами

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta R_{kl}, \quad s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta R_{kl},$$

где M_{kl} и m_{kl} — соответственно точная верхняя и точная нижняя грани функции $f(x, y)$ на частичном прямоугольнике R_{kl}.

Из этого критерия непосредственно следует, что *любая непрерывная в прямоугольнике R функция $f(x, y)$ интегрируема на этом прямоугольнике.*

Можно несколько расширить этот класс интегрируемых в прямоугольнике функций.

Назовем *элементарной фигурой* множество точек, представляющих собой сумму конечного числа лежащих на плоскости Oxy и не имеющих общих внутренних точек прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ *обладает I-свойством* в ограниченной замкнутой области D, если: 1) она ограничена в области D; 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует элементарная фигура, содержащая все точки и линии разрыва функции $f(x, y)$ и имеющая площадь, меньшую ε.

Можно доказать, что *если функция $f(x, y)$ обладает I-свойством в прямоугольнике R, то она интегрируема на этом прямоугольнике.*

Что же касается двойного интеграла по произвольной области D, то справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ либо непрерывна в ограниченной замкнутой и квадрируемой области D, либо обладает I-свойством в этой области, то она интегрируема в области D.*

Какими основными свойствами обладает двойной интеграл?

1. Двойной интеграл $\iint\limits_D 1dxdy$ равен площади области D.

2. *Свойство линейности*. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, то функция $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ $(\forall\alpha, \beta \in \boldsymbol{R})$ также интегрируема в области D, причем

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy = \alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

3. *Свойство аддитивности*. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и если область D при помощи кривой Γ площади нуль[1] разбивается на две не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2, то функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из областей D_1 и D_2, причем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4. Если каждая их функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируема в области D, то и произведение этих функций $[f(x, y))\cdot g(x, y)]$ является интегрируемой в области D функцией.

5. Если обе функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D и всюду в D выполнено неравенство $f(x, y) \le g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

6. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, то и функция $|f(x, y)|$ интегрируема в области D, причем

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

7. *Формула среднего значения*. Если обе функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, функция $g(x, y)$, кроме того, или неотрицательна, или неположительна в области D, то найдется число μ, лежащее

[1] Кривую Γ на плоскости Oxy называют *кривой площади нуль*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует элементарная фигура, содержащая Γ и имеющая площадь, меньшую ε.

на сегменте между числами $m = \inf\limits_{(x,\,y)\in D} f(x, y)$ и $M = \sup\limits_{(x,\,y)\in D} f(x, y)$, такое, что справедливо равенство:

$$\iint\limits_D f(x, y)g(x, y)dxdy = \mu \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$$

В частности, если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, а область D является связной, то в этой области найдется точка (ξ, η), такая, что

$$\iint\limits_D f(x, y)g(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)\cdot \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$$

Как свести двойной интеграл к повторному однократному?

Сведение двойного интеграла к повторному однократному является одним из эффективных способов его вычисления. Суть такого сведения заключена в следующих двух утверждениях.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x, y)$ *интегрируема в прямоугольнике* $R = [a \le x \le b] \times [c \le y \le d]$ *и, кроме того, для каждого* $x \in [a, b]$ *существует однократный интеграл* $I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$. *Тогда существует повторный интеграл* $\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)dy\right]dx$ *и справедливо равенство*:

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)dy\right]dx.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие два условия*: 1) *область* D *ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси* Oy, *пересекает ее границу не более чем в двух точках, ординаты которых суть* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$, где $y_1(x) \le y_2(x)$; 2) *функция* $f(x, y)$ *интегрируема в области* D, *и для любого* $x \in [x_1, x_2]$, *где* x_1 *и* x_2 *— наименьшая и наибольшая абсциссы точек области* D, *существует однократный интеграл*

$$I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} I(x)dx$ *и справедливо равенство*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

Отметим, что в этих двух теоремах переменные x и y можно поменять ролями.

Как выполнить замену переменных в двойном интеграле?

Пусть в двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ необходимо перейти от переменных x, y к новым переменным ξ, η при помощи преобразований

$$\begin{cases} x = \Psi_1(\xi,\eta), \\ y = \Psi_2(\xi,\eta). \end{cases}$$

Предположим, что преобразования взаимно однозначно отображают область D на область D' в пространстве переменных ξ, η, определяются функциями Ψ_1 и Ψ_2, которые имеют в области D' непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля определитель

$$J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

называемый *определителем Якоби*, или *якобианом преобразования*.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. *При выполнении всех вышеперечисленных условий имеет место следующая формула замены переменных*:

$$I = \iint\limits_{D'} f[\Psi_1(\xi,\eta), \Psi_2(\xi,\eta)]\cdot|J(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta.$$

В важном частном случае, когда новыми переменными являются полярные координаты точек (x, y): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, якобиан равен r и формула замены переменных принимает вид

$$I = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr d\varphi.$$

Как строится теория тройных интегралов?

Теория тройных интегралов строится в полной аналогии с теорией двойных интегралов.

Тройной интеграл $\iiint\limits_R f(x, y, z) dxdydz$ по прямоугольному параллелепипеду R с ребрами, параллельными координатным осям, определяется как предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения. Интегрируемость функции $f(x, y, z)$ в произвольной ограниченной замкнутой и кубируемой области D проще всего определить как интегрируемость по содержащему D параллелепипеду R функции $F(x, y, z)$, совпадающей с $f(x, y, z)$ в области D и равной нулю вне D.

Для сведения тройного интеграла $\iiint\limits_R f(x, y, z) dxdydz$ к однократному и двойному интегралам предположим, что область D ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает ее границу не более чем в двух точках, абсциссы которых суть $x_1(y, z)$ и $x_2(y, z)$, где $x_1(y, z) \le x_2(y, z)$. Пусть функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области D и для любых y, z из области D_1, являющейся проекцией области D на плоскость Oyz, существует однократный интеграл

$$I(y, z) = \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) dx.$$

Тогда существует двойной интеграл $\iint\limits_{D_1} I(y, z) dy dz$ и он равен рассматриваемому тройному интегралу.

В тройных интегралах также можно производить замену переменных. Здесь справедлива аналогичная формула замены переменных, только в качестве якобиана перехода от переменных x, y, z к переменным ξ, η, ζ выступает следующий определитель третьего порядка:

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}.$$

В частности, если новыми переменными являются сферические координаты r, φ, θ: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, то якобиан преобразования имеет вид

$$J(r, \varphi, \theta) = r^2\sin\theta.$$

Глава 17. Ряды

Что называют числовым рядом и как определяется его сумма?

Числовым рядом, или просто *рядом*, называют формально составленную бесконечную сумму всех элементов какой-либо числовой последовательности

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k .$$

При этом отдельные слагаемые u_k называются *членами* этого ряда, а сумму первых n слагаемых $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ — его n-й *частичной суммой*.

Сумма числового ряда вводится посредством операции предельного перехода. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм. При этом указанный предел S и называют *суммой* рассматриваемого ряда.

Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда не имеет конечного предела, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называют *расходящимся*.

В чем состоит критерий Коши сходимости числового ряда и каковы его следствия?

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого достаточно малого числа* $\varepsilon > 0$ *нашелся номер* $N(\varepsilon)$, *для которого неравенство* $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$ *выполнено для всех номеров* $n \geq N(\varepsilon)$ *и всех натуральных* p.

Основным следствием этого критерия является следующее *необходимое условие сходимости* числового ряда.

Следствие 1. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, то его* k*-й член стремится к нулю при* $k \to 0$:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0.$$

Отметим, что данное условие является лишь необходимым, но не достаточным условием сходимости каждого числового ряда. Так, последовательность членов гармонического ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ является бесконечно малой, хотя этот ряд расходится.

Следствие 2. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, то последовательность* $\{rn\}$ n*-х остатков этого ряда, т. е. чисел*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k,$$

является бесконечно малой.

В чем состоит специфика изучения числовых рядов с неотрицательными членами?

Основным характеристическим свойством ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, все члены p_k которого неотрицательны, является тот факт, что последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм является неубывающей. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для сходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм являлась ограниченной.*

Это, в частности, позволяет получить ряд признаков, на основании которых заключение о сходимости или расходимости рассматриваемого ряда можно сделать посредством сравнения его с другим рядом, сходимость или расходимость которого уже известна.

Каковы основные признаки сравнения числовых рядов с неотрицательными членами?

Пусть имеется два ряда с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ и выполнено одно из следующих трех условий:

1) для всех номеров k справедливо неравенство $p_k \le p_k{}'$;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L$;

3) для всех номеров k справедливо неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le \frac{p'_{k+1}}{p'_k}$.

Тогда:

– сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$;

– расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

В чем состоят признаки Даламбера и Коши сходимости/расходимости числового ряда?

Пусть имеется ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ со строго положительными членами.

Теорема 1 (признак Даламбера).

I. *Если начиная с некоторого номера k справедливо неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1$ (соответственно $\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1$),*

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (соответственно расходится).

II. (Признак в предельной форме). *Если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.*

Теорема 2 (признак Коши).

I. *Если начиная с некоторого номера k справедливо неравенство*

$$\sqrt[k]{p_k} \le q < 1 \; (\textit{соответственно } \sqrt[k]{p_k} \ge 1),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится* (*соответственно расходится*).

II. (Признак в предельной форме). *Если существует предел* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится при* $L < 1$ *и расходится при* $L > 1$.

К этим признакам необходимо сделать следующие два замечания. Во-первых, неравенства $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1$ и $\sqrt[k]{p_k} \le q < 1$ нельзя заменить неравенствами $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ и $\sqrt[k]{p_k} < 1$, так как в этом случае уже нельзя сделать какого-нибудь определенного вывода о сходимости или расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot$ Во-вторых, при $L = 1$ признаки в предельной форме «не действуют». Сказанное иллюстрируют два ряда: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ и $\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1$, первый из которых расходится, а второй — сходится.

Что понимается под абсолютной и условной сходимостью числового ряда?

Для произвольного числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ *сходится, то сходится и сам ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Тем самым ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$, составленный из модулей членов исходного ряда. Соответственно если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится, то исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называют *условно сходящимся*.

Классическим примером условно сходящего ряда является ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\ldots.$$

Ряд, составленный из модулей членов, — это гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, который расходится. Сам же ряд сходится как *знакочередующийся ряд*[1], удовлетворяющий следующему утверждению.

Теорема 2 (признак Лейбница). *Если в знакочередующемся ряде* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k$ *числа* $\{p_k\}$ *образуют невозрастающую бесконечно малую последовательность, то этот ряд сходится.*

Что такое степенной ряд и что называют его радиусом сходимости?

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k,$$

в котором $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — постоянные вещественные числа, называемые коэффициентами степенного ряда, а x — вещественная переменная.

Степенной ряд всегда сходится (причем даже абсолютно) при $x = 0$. Для выяснения того, при каких значениях $x \neq 0$ этот ряд сходится, изучается числовая последовательность $\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\right\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема Коши–Адамара.

I. *Если последовательность* $\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\right\}$ *является неограниченной, то степенный ряд* $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ *сходится только при* $x = 0$.

II. *Если последовательность* $\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\right\}$ *является ограниченной и ее верхний предел* $a_0=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{}$ *строго положителен, то степенной ряд* $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ *сходится абсолютно при всех* $x\in\left(-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\right)$ *и расходится при всех* x: $|x|>\frac{1}{L}$.

---

[1] То есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$, в котором любые соседние члены u_k и u_{k+1} суть числа разного знака.

III. *Если последовательность* $\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\right\}$ *ограничена и ее верхний предел L равен нулю, то степенной ряд* $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ *сходится абсолютно для всех значений x.*

Число[1]

$$R=\frac{1}{L}=\frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$$

называют *радиусом сходимости* степенного ряда $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$.

Отметим, что при $R > 0$ на концах промежутка сходимости $(-R, R)$ рассматриваемый степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Так, каждый из рядов $1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k$, $1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$, $1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$ имеет радиус сходимости $R = 1$, при этом первый из них расходится и при $x = 1$, и при $x = -1$, второй из них сходится только при $x = -1$, а третий сходится на обоих концах $x = \pm 1$.

Какими свойствами обладает сумма степенного ряда на промежутке сходимости?

Пусть степенной ряд $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ сходится не только при $x = 0$ и имеет радиус сходимости R. Обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда для каждого $x\in(-R, R)$.

Теорема 1.*Сумма $S(x)$ степенного ряда непрерывна всюду внутри промежутка сходимости $(-R, R)$.*

Теорема 2. *Ряд, полученный формальным почленным дифференцированием степенного ряда* $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$, *т. е. ряд* $a_1+\sum\limits_{k=2}^{\infty}ka_kx^{k-1}$, *имеет тот же радиус сходимости R и для всех $x\in(-R, R)$ абсолютно сходится к производной $S'(x)$ суммы исходного степенного ряда, которая существует для всех x из промежутка сходимости.*

Как следствие, из этих теорем вытекает, что сумма $S(x)$ степенного ряда имеет внутри промежутка сходимости $(-R, R)$ непрерывные производные сколь угодно высокого порядка, которые, в свою очередь, являются суммами тех степенных рядов, которые получаются при соответствующем почленном дифференцировании ряда $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$.

Как разложить функцию в степенной ряд?

Говорят, что функция $f(x)$ *может быть разложена в степенной ряд* на интервале $(-R, R)$ (соответственно на множестве X), если существует степенной ряд $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, сходящийся к $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ (соответственно на множестве X).

Как следует из свойств суммы степенного ряда, если функция $f(x)$ разложима в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, то эта функция $f(x)$ имеет на этом интервале непрерывные производные сколь угодно высокого порядка. Кроме того, коэффициенты соответствующего степенного ряда определяются однозначно равенствами

$$a_0 = f(0), \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \text{ при } k = 1, 2, \ldots .$$

Степенной ряд $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, коэффициенты которого определяются указанными равенствами, называют *рядом Тейлора* функции $f(x)$.

Привлекая теорему о разложении функции по формуле Тейлора, получим следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, R)$ (соответственно на множестве X), необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела на рассматриваемом множестве непрерывные производные любого порядка и чтобы остаточный член $R_{n+1}(x)$ в разложении $f(x)$ по формуле Маклорена стремился к нулю при $n \to \infty$ на интервале $(-R, R)$ (соответственно на множестве X).*

Основными считаются следующие разложения в степенные ряды:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \; \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

сходящиеся (причем даже абсолютно) для всех значений x, и разложение $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, сходящееся при $x \in (-1, 1]$.

СОДЕРЖАНИЕ