Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина
Институт радиоэлектроники
и информационных
технологий — РТФ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов инженерных направлений
и специальностей УрФУ

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2016

УДК 51(075.8)
ББК 22я73
В93

Авторы:
В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова, М. М. Михалева, Ю. В. Шапарь, И. А. Шестакова

Рецензенты:
кафедра прикладной математики Уральского государственного экономического университета (завкафедрой, канд. физ.-мат. наук, доцент Ю. Б. Мельников);
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. И. Н. Белоусов (Институт математики и механики УрО РАН)
Научный редактор — доц., канд. физ.-мат. наук Б. М. Веретенников

Высшая математика : учебное пособие / В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова,
В93 М. М. Михалева, Ю. В. Шапарь, И. А. Шестакова.— Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — Ч. I. — 296 с.

ISBN 978-5-7996-1779-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-7996-1778-3

Учебное пособие включает в себя основные разделы высшей математики: введение в математический анализ, теория функций одной переменной, теория функций нескольких переменных, векторная алгебра, аналитическая геометрия. После каждого раздела предлагаются упражнения для самостоятельного решения. Предназначено для студентов инженерных направлений и специальностей УрФУ.

Библиогр.: 10 назв. Табл. 5. Рис. 92.

УДК 51(075.8)
ББК 22я73

Учебное издание

Белоусова Вероника Игоревна, **Ермакова** Галина Михайловна,
Михалева Марина Михайловна, **Шапарь** Юлия Викторовна,
Шестакова Ирина Александровна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор Н. П. Кубыщенко
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 25.05.2016. Формат 60×84/16. Бумага писчая. Печать цифровая. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 10. Усл. печ. л. 17,2. Тираж 200 экз. Заказ 127.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5. Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41. E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4. Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13. Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

ISBN 978-5-7996-1779-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-7996-1778-3

© Уральский федеральный университет, 2016

Оглавление

Список обозначений

$(a;b)=\{x\in R: a<x<b\}$ — интервал;

$(a;b]=\{x\in R: a<x\le b\}$ — полуинтервал;

$[a;b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$ — сегмент (отрезок);

$[a;b)=\{x\in R: a\le x<b\}$ — полусегмент;

Здесь a,b — действительные числа, $a<b;$ множества — числовые промежутки.

$\forall$ — для всех, для любого;

$\exists$ — существует, найдется;

$\exists!$ — существует (найдется) единственный;

знак $\Leftrightarrow$ заменяет выражение «тогда и только тогда, когда»;

знак $\Rightarrow$ заменяет выражение «следует», «следовательно»;

Глава 1.
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1. Множества. Операции над множествами

1.1. Элементы теории множеств. Основные определения

Множество является одним из неопределяемых понятий математики. Под *множеством* понимают совокупность некоторых объектов, объединенных общим признаком, свойством. Например, множество натуральных чисел, множество действительных чисел, множество функций, непрерывных на отрезке, множество многочленов с действительными коэффициентами степени, не превышающей n. Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита A, B, C, ...Элементы множества обозначают строчными буквами a, b, c, ...

Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается как $a \in A$, а «элемент a не принадлежит множеству A» символически записывается как $a \notin A$.

Определение. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Определение. Множество B называется *подмножеством* множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A. Обозначение: $B \subseteq A$.

Определение. Множества A и B называются *равными*, если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$. Обозначение: $A = B$.

Определение. Подмножество B множества A называется *собственным*, если существует элемент множества A, не принадлежащий множеству B. Обозначение: $B \subset A$.

Утверждение. Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества, т. е. $\varnothing \subset B$, а любое множество — несобственное подмножество самого себя, т. е. $B \subseteq B$.

Если в задаче рассматриваются подмножества одного и того же множества, то это множество называется *универсальным* и обозначается через U.

Например, числовые промежутки — подмножества множества R, в этом смысле R — универсальное множество.

Множество можно задать либо перечислением всех его элементов, либо указанием характеристического свойства элементов множества.

Например, множество $A = \{a; b; c; d\}$ — задано перечислением его четырех элементов. Множество $X = \{x \in N : x < 5\}$ состоит из натуральных чисел таких, что элементы множества меньше 5, т. е. $X = \{1; 2; 3; 4\}$.

1.2. Операции над множествами

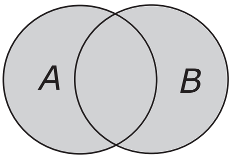


Рис. 1.1

1. *Объединение* (*сумма*) множеств A и B (обозначается $A \cup B$) есть множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A или множеству B (хотя бы одному из объединяемых множеств), т. е. $A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$. Соответствующая диаграмма приведена на рис. 1.1.

Пример 1. Если $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8\}$, то $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

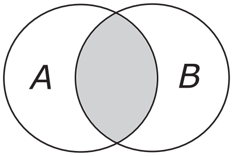


Рис. 1.2

Запись $x \notin A \cup B$ означает, что $x \notin A$ и $x \notin B$ (одновременно).

2. *Пересечение* (*произведение*) множеств A и B (обозначается $A \cap B$) есть множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A и множеству B одновременно, т. е. $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$. Соответствующая диаграмма приведена на рис. 1.2.

Пример 2. Если $A = (1;3)$ и $B = [0;2]$, то $A \cap B = (1;2]$.

Запись $x \notin A \cap B$ означает, что $x \notin A$ или $x \notin B$ (хотя бы одному из двух множеств).

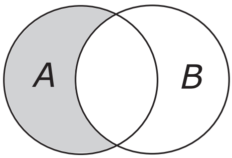


Рис. 1.3

3. *Разность* множеств $A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B$, т. е. это множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B. Соответствующая диаграмма приведена на рис. 1.3.

Пример 3.

Если $A = [0;3]$ и $B = \mathbb{N}$, то $A \setminus B = [0;1) \cup (1;2) \cup (2;3)$.

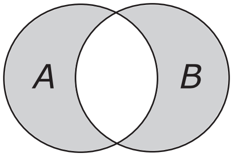


Рис. 1.4

4. Иногда рассматривается *симметрическая разность* двух множеств: $A \Delta B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Соответствующая диаграмма приведена на рис. 1.4.

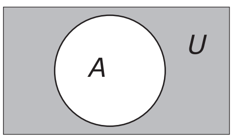


Рис. 1.5

5. Если U — универсальное множество и $A \subset U$, то дополнение множества A (до универсального множества) есть разность $U \setminus A = \overline{A}$. Геометрически множество $\overline{A}$ соответствует всем тем точкам из U, которые не принадлежат A: $\overline{A} = \{x : x \in U$ и $x \notin A\}$. Соответствующая диаграмма приведена на рис. 1.5.

Свойства операций над множествами:

1. $A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
4. $A \cup A = A; \ A \cap A = A$;
5. $A \cup \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing$;
6. Законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

Приведем примеры числовых множеств:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{n}{m}, n \in Z, m \in N \right\}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{I}$ — множество иррациональных чисел (чисел, не являющихся рациональными);

$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ — множество действительных чисел.

Пример 4.

На плоскости Oxy построить множества A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, где $A = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$, $B = \{(x, y) : 1 < |x| < 2\}$.

Решение.

На рис. 1.6 представлено множество A. На рис. 1.7 — множество B.

На рис. 1.8 показан результат объединения множеств A и B — $A \cup B$. На рис. 1.9 представлен результат пересечений множеств A и B — $A \cap B$.

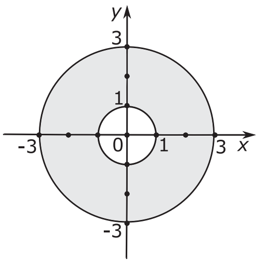


Рис. 1.6

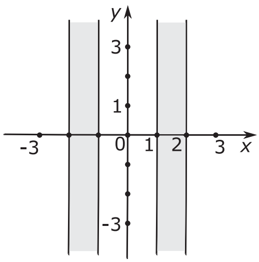


Рис. 1.7

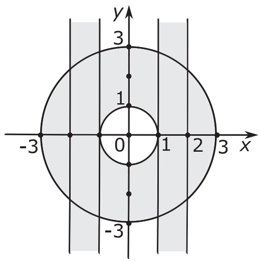


Рис. 1.8

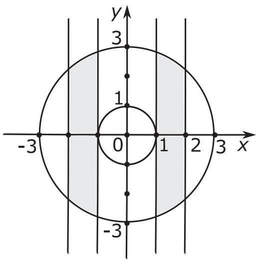


Рис. 1.9

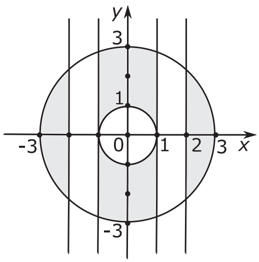


Рис. 1.10

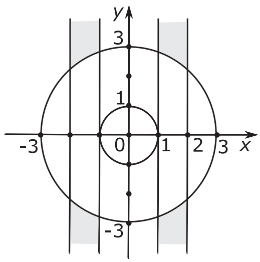


Рис. 1.11

На рис. 1.10 и 1.11 представлены результаты разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$ соответственно.

На рис. 1.12 представлен результат симметрической разности множеств A и B — $A \Delta B$.

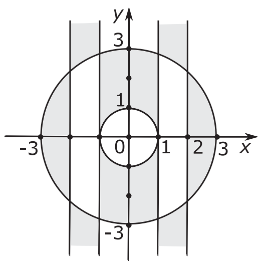


Рис. 1.12

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Для каких множеств пустое множество является собственным (несобственным) подмножеством?

2. Для множеств A , B , C найти множества $(A \cup B) \cap C = D$, $(A \cap C) \cap B = K$, представить множества на числовой оси Ox .

а) $A=[0,2)\cup\{3;4\}$, $B=(1;4)$, $C=\mathbb{N}$;

б) $A=[-2;0)$, $B=(-3;-1)\cup\{1;2;3\}$, $C=\mathbb{Z}$;

в) $A=[1,3)\cup\{4\}$, $B=(-1;4)\cup\{1;2;3\}$, $C=\mathbb{N}$;

г) $A=[-2;3)\cup(5;6]$, $B=\{n\}_{n=1}^{10}$, $C=\mathbb{Z}$.

3. На плоскости Oxy построить множества A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$, где

а) $A=\{(x,y):x^2+4y^2\le 4\}$, $B=\{(x,y):x^2+y>1\}$;

б) $A=\{(x,y):|x|+|y|\le 2\}$, $B=\{(x,y):y\ge|x-1|\}$;

в) $A=\{(x,y):|x-y|\le 1\}$, $B=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$;

г) $A=\{(x,y):|2x+3|\le 4\}$, $B=\{(x,y):1\le|y|\le 2\}$.

2. Функции. Элементарные функции

Определение. *Функцией* f, действующей из множества X во множество Y, называется правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y: $y=f(x)$.

Множество X называется *областью определения* функции f, множество $f(A)=\{y\in Y:\exists x\in X\ y=f(x)\}$ — *областью значений* функции f.

Введем ряд обозначений. Если задана функция f, которая определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, то

- $f:X\to Y$ или $X\xrightarrow{f}Y$;

- область определения функции f (множество X) обозначается $D(f)$;
- область значений функции f (множество Y) обозначается $R(f)(E(f))$.

2.1. Способы задания функции

Наиболее часто встречаются следующие три способа задания функций: табличный, графический и аналитический.

При *табличном способе* задания функции составляется таблица, в которой указывается ряд значений аргумента и соответствующих значений функции.

При *графическом способе* задания дается график функции, при этом ее значения, соответствующие тем или иным значениям аргумента, непосредственно находятся из этого графика.

При *аналитическом способе* задания функция определяется с помощью аналитического выражения, т. е. с помощью формулы, указывающей, какие действия надо совершить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Часто функция задается только с помощью аналитического выражения (формулы), без каких-либо дополнительных условий. В таких случаях под областью определения функции понимают совокупность всех тех значений аргумента, для которых это выражение имеет смысл и приводит к действительным значениям функции.

2.2. Некоторые свойства функции

Пусть дана функция $y = f(x)$. К основным свойствам функции относятся монотонность, периодичность, четность и ограниченность.

1. Монотонность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Возрастающая или убывающая функция называется *строго монотонной*.

2. Периодичность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической с периодом* $T \neq 0$, если $f(x+T) = f(x), \forall x \in X$.

Наименьший положительный период, если он существует, называется *основным периодом*.

Функция, не являющаяся периодической, называется апериодической.

3. Чётность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если справедливо равенство $f(-x) = -f(x), \forall x \in X$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если справедливо равенство $f(-x) = f(x), \forall x \in X$.

Если не выполняется ни одно из этих равенств, то функция называется *функцией общего вида*.

4. Ограниченность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* в области определения X, если существует такое положительное число M, что выполняется неравенство $f(x) \le M, \forall x \in X$.

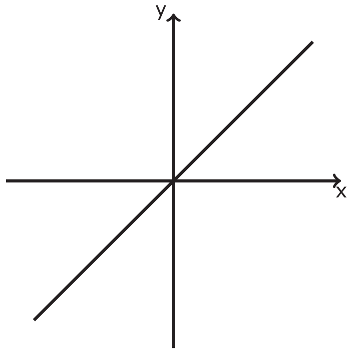
Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число M, что для всех x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \ge M$.

Функция *ограничена*, если она ограничена и сверху, и снизу.

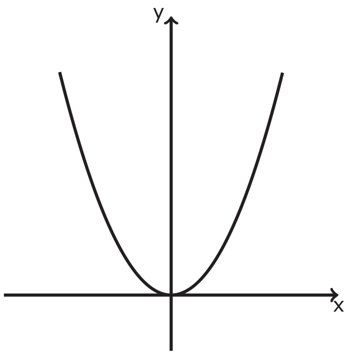
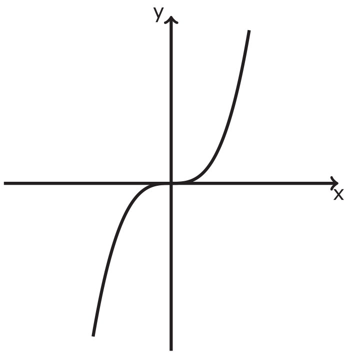
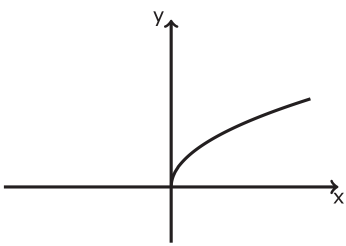
2.3. Элементарные функции

В табл. 1.1 приведены основные элементарные функции и их графики

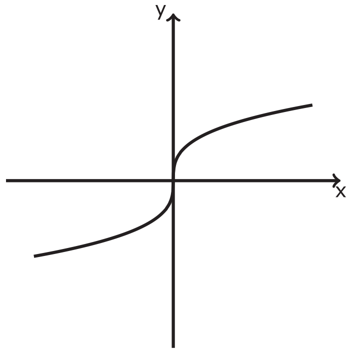
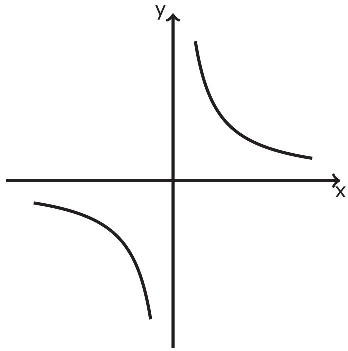
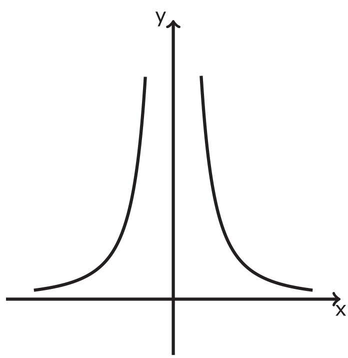
Таблица 1.1

Функция	Формула	График
Степенная	$y = x$	

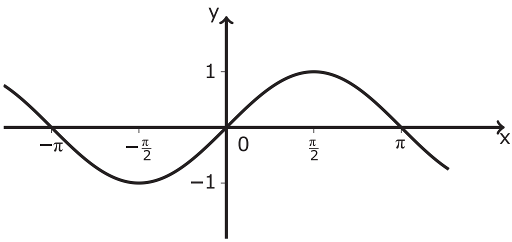
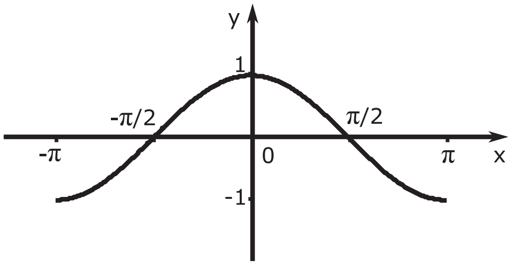
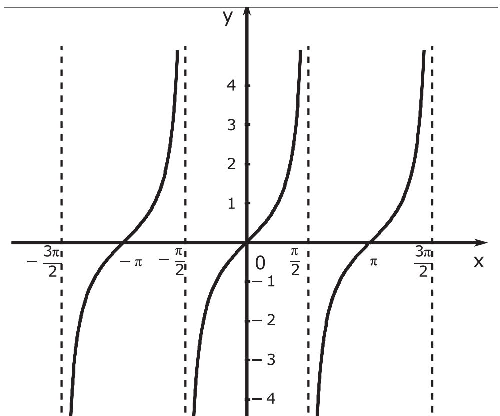
Продолжение табл. 1.1

Функция	Формула	График
Степенная	$y = x^n$, n — четное натуральное число	
	$y = x^n$, n — нечетное натуральное число, $n > 1$	
	$y = \sqrt[n]{x}$, n — четное натуральное число	

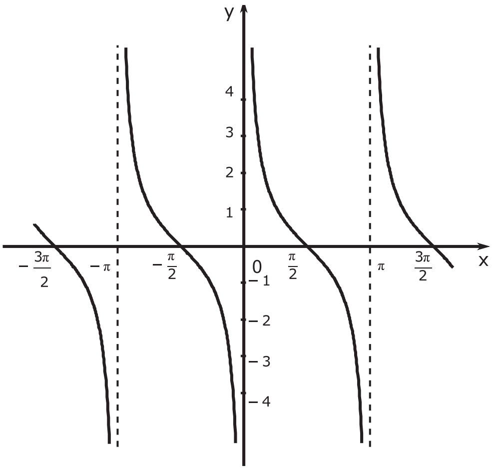
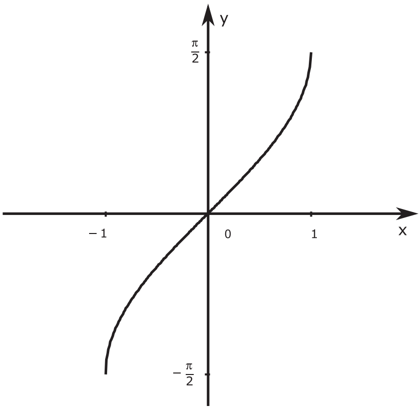
Продолжение табл. 1.1

Функция	Формула	График
	$y=\sqrt[n]{x}$, n — нечетное натуральное число, $n>1$	
Степенная	$y=\dfrac{1}{x^n}$, n — нечетное натуральное число	
	$y=\dfrac{1}{x^n}$, n — четное натуральное число	

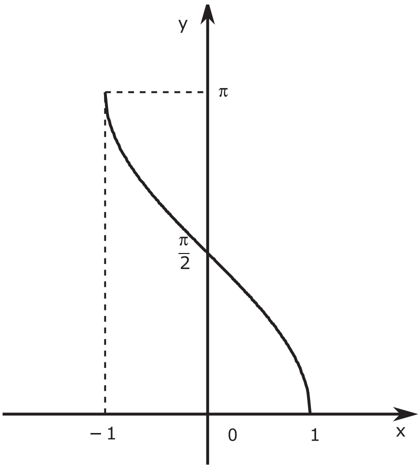
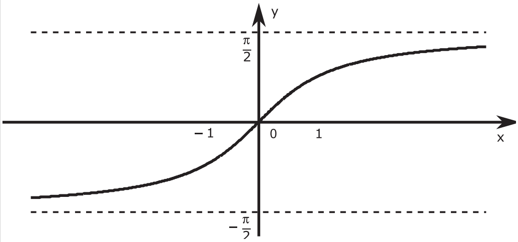
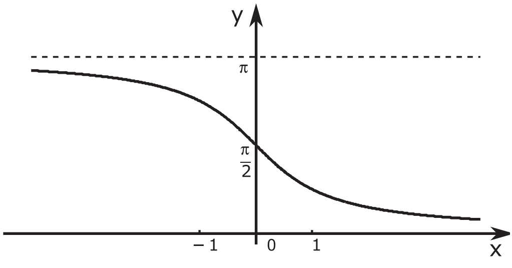
Продолжение табл. 1.1

Функция	Формула	График
	$y = \sin x$	
Тригонометрические	$y = \cos x$	
	$y = \operatorname{tg} x$	

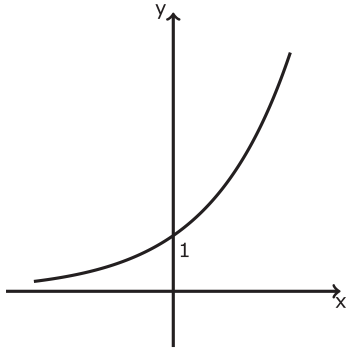
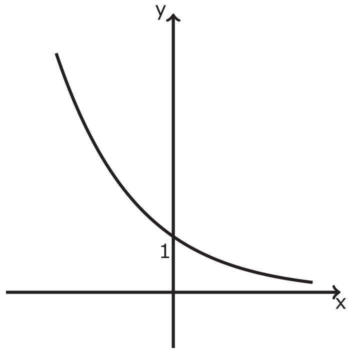
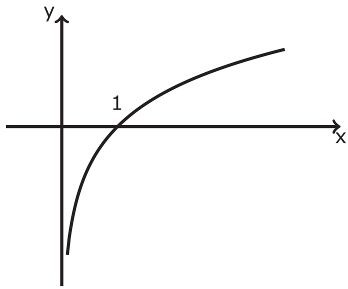
Продолжение табл. 1.1

Функция	Формула	График
Тригонометрические	$y = \operatorname{ctg} x$	
Обратные тригонометрические	$y = \arcsin x$	

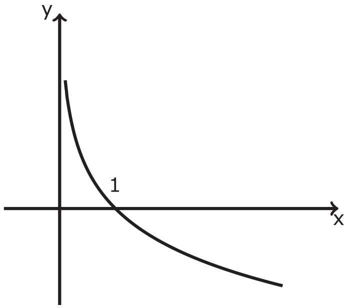
Продолжение табл. 1.1

Функция	Формула	График
Обратные тригонометрические	$y = \arccos x$	
	$y = \mathrm{arctg}\, x$	
	$y = \mathrm{arcctg}\, x$	

Продолжение табл. 1.1

Функция	Формула	График
Показательная	$y = a^x$, $a > 1$	
	$y = a^x$, $0 < a < 1$	
Логарифмическая	$y = \log_a x$, $a > 1$	

Окончание табл. 1.1

Функция	Формула	График
Логарифмическая	$y=\log_a x$, $0<a<1$	

2.4. Построение графиков функций с помощью их свойств

При построении графика функции необходимо использовать свойства функции, избегая построения по точкам.

Пример 1. Построить график функции

$$x=-3-2\sqrt{1-y}.$$

Решение. Здесь y — аргумент, функция $x=\varphi(y)$, где $\varphi(y)=-3-2\sqrt{1-y}$. Область определения функции $D(\varphi)$ задается неравенством $1-y\geq 0$ или $y\leq 1$, т. е. $y\in(-\infty;1]$. Множество значений функции $X=\{x\}=(-\infty;-3]$. То есть функция $\varphi(y)$ отображает $(-\infty;1]$ на $(-\infty;-3]$. Функция общего вида (не является четной, не является нечетной);

Для построения графика проводим следующие преобразования: $(x+3)^2=4(1-y)$ или $(x+3)^2=-4(y-1)$. Получаем уравнение параболы — носителя графика функции. Вершина параболы в точке $(-3;1)$, ось симметрии есть $x=-3$, ветви направлены вниз, точки пересечения с осями координат: $(-5;0)$, $(-1;0)$, $\left(0;-\frac{5}{4}\right)$. Выполняем построение графика с учетом области допустимых значений $\{x\}=(-\infty;-3]$, т. е. только левую ветвь параболы (рис. 1.13).

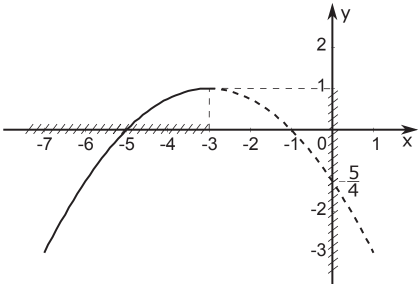


Рис. 1.13

Пример 2. Построить график функции

$$y=2\sin(1-2x)+1.$$

Решение. Функция определена на $(-\infty;+\infty)$ и является периодической.

Рассмотрим два способа построения графика.

Способ 1

Для построения графика функции необходимо последовательно построить шесть кривых:

1) $y=\sin x$;

2) $y=\sin 2x$;

3) $y=\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

4) $y=2\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

5) $y=-2\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

6) $y=1-2\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, (см. рис. 1.14).

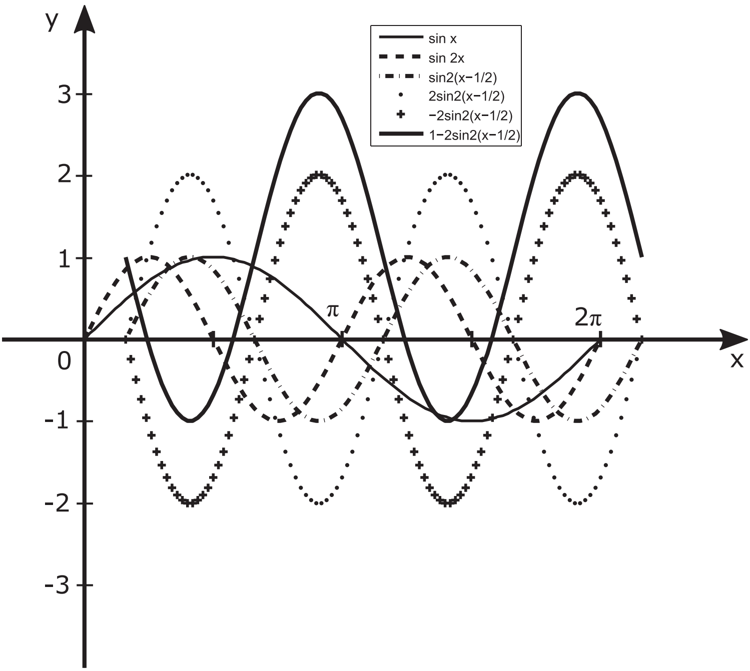


Рис. 1.14

Способ 2

Иногда построение графика тригонометрических функций вида $y = A\sin(Bx + C) + D$ или $y = A\cos(Bx + C) + D$ проводится по так называемому *правилу «пяти точек»*:

1. Преобразуем $\sin(Bx + C) = \sin B\left(x - \left(-\dfrac{C}{B}\right)\right)$ и выделяем значение сдвига кривой $x = -\dfrac{C}{B}$; на оси x строим точку $x_1 = -\dfrac{C}{B}$.

2. Вычисляем период функции $\frac{2\pi}{B}$ (в примере $\frac{2\pi}{2}=\pi$) и откладываем отрезок длиной $\frac{2\pi}{B}$ вправо от точки $x_1=-\frac{C}{B}$ до точки $x_5=-\frac{C}{B}+\frac{2\pi}{B}$ (в примере $x_5=\frac{1}{2}+\pi$).

3. Отрезок $[x_1;x_5]$ делим на четыре равные по длине части точками x_2,x_3,x_4 . В каждой точке $x=x_k$, $k\in\{1,2,3,4,5\}$, вычисляем значение функции $y_k=A\sin\left(Bx_k+C\right)+D$. Если счет проведен верно, то для графика функции $y=A\sin\left(Bx+C\right)+D$ будем иметь $y\left(x_1\right)=y\left(x_3\right)=y\left(x_5\right)=D$; $y\left(x_2\right)=A+D$; $y\left(x_4\right)=-A+D$.

4. Соединяем плавной линией точки (x_1; D), (x_2; $A + D$), (x_3; D), (x_4; $D - A$), (x_5; D). Получим схематичный график функции $y=A\sin\left(Bx+C\right)+D$ на промежутке периодичности. Построение указанных пяти точек поможет проконтролировать правильность построения графика заданной функции (см. рис. 1.14).

Пример 3. Построить график
$y=\sqrt{x^2-4x+4}-2|x|$.

Решение. По свойствам квадратного корня $y=|x-2|-2|x|$.

Абсолютная величина $|x|$ действительного числа $|x|$ определяется по правилу: $|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\ge 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$

Очевидно следующее соотношение $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\ge 0,\\ -f(x), & \text{если } f(x)<0\end{cases}$ для всякой функции $f(x)$ на ее области определения. Тогда имеем:

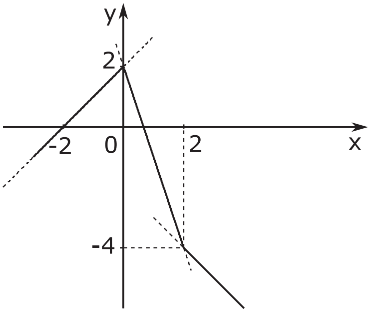


Рис. 1.15

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{если } x-2 \ge 0, \\ -(x-2), & \text{если } x-2<0, \end{cases}$$

и для исходной функции получим аналитическое выражение:

$$y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \le 0, \\ -3x+2, & \text{если } 0 < x \le 2, \\ -x-2, & \text{если } 2 < x. \end{cases}$$

Графиком функции $y = \sqrt{x^2-4x+4} - 2|x|$ является ломаная (рис. 1.15), составленная из отрезков соответствующих прямых.

Пример 4. Построить график функции

$$y = \frac{x}{1-x}.$$

Решение. Функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ есть равносторонняя гипербола вида $y - y_0 = \dfrac{k}{x-x_0}$, получающаяся из графика функции $y^* = \dfrac{k}{x^*}$, где $y^* = y - y_0$, $x^* = x - x_0$. Поэтому кривую $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ строим следующим образом:

1. Строим вертикальную асимптоту

$$x = -\frac{d}{c}.$$

2. Строим горизонтальную асимптоту $y = y_0$,

$$\text{где } y_0 = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}.$$

3. Затем находим несколько точек на гиперболе, например, точку $\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$, и смотрим, в каких квадрантах относительно асимптот расположены ветви гиперболы. Строим горизонтальную асимптоту $y=y_0$, где $y_0=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}$.

4. Затем находим несколько точек на гиперболе, например, точку $\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$, и определяем, в каких квадрантах относительно асимптот расположены ветви гиперболы.

5. Схематично строим гиперболу, используя ее симметрию.

Выполним построение для функции $y=\dfrac{x}{1-x}$ по указанным четырем пунктам. В нашем случае асимптоты имеют уравнения $x=1$, $y=-1$, точка $(0;0)$ лежит на гиперболе. По симметрии устанавливаем, что точка $(2;-2)$ тоже лежит на гиперболе (рис. 1.16). Строим схематично ветви гиперболы.

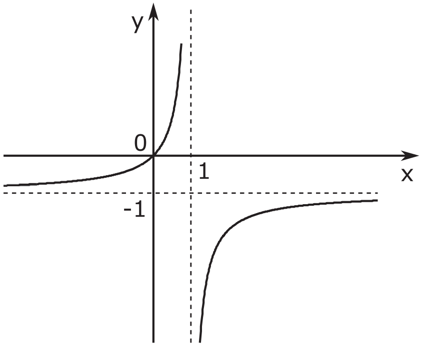


Рис. 1.16

Пример 5. Построить график кусочно заданной функции:

$$y=\begin{cases} x-1, \text{ если } -3\le x\le 0,\\ x^2-1, \text{ если } 0<x\le 2,\\ \dfrac{x}{1-x}, \text{ если } 2<x<\infty. \end{cases}$$

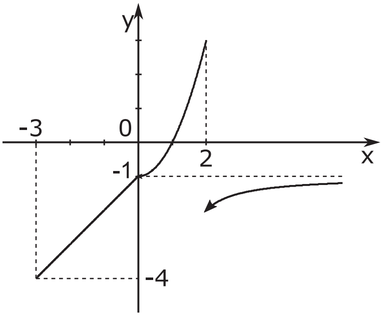


Рис. 1.17

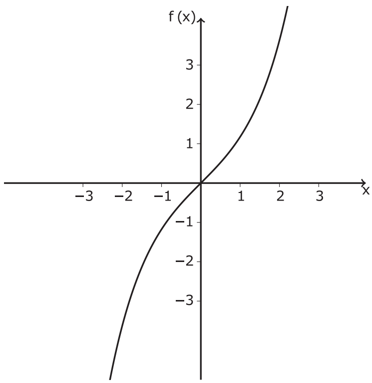
Решение. *Кусочно-заданная функция* — это функция, заданная на каждом из интервалов своей области определения отдельной формулой.

Сначала строим прямую $y = x - 1$ по двум точкам, например, $(-3, -4)$ и $(0, -1)$. Выделяем отрезок этой прямой для промежутка $-3 \le x \le 0$. Затем строим параболу $y = x^2 - 1$ и выделяем ее часть, соответствующую промежутку $0 < x \le 2$. Третья часть графика была построена выше; выделяем часть, соответствующую промежутку $2 < x < \infty$ (рис. 1.17).

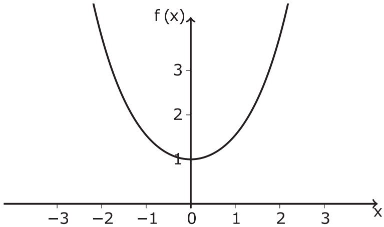
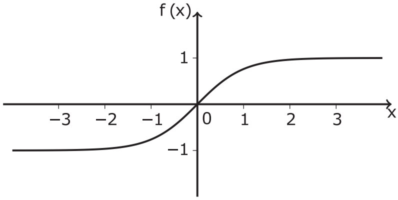
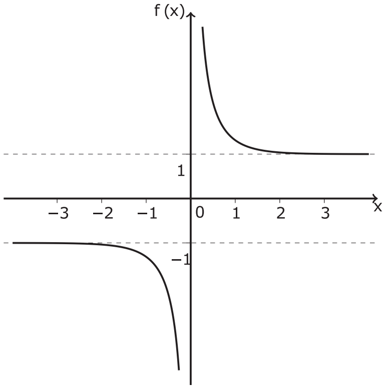
2.5. Гиперболические функции

Гиперболические функции и их графики приведены в таблице.

Таблица 1.2

Функция	Формула	График
Гиперболический синус	$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	 Рис. 1.18

Окончание табл. 1.2

Функция	Формула	График
Гиперболический косинус	$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	 Рис. 1.19
Гиперболический тангенс	$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$	 Рис. 1.20
Гиперболический котангенс	$\operatorname{cth} x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$	 Рис. 1.21

Областью определения функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ является вся числовая ось; функция $y = \operatorname{cth} x$ не определена в точке $x = 0$.

Справедливы следующие тождества:

$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y$,

$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y \pm \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sh}y$,

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,

$\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$,

$\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}x$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Выполнить построение графиков функций:

а) $y = |x-1| + |x+1|$; б) $y = \left|\left|\left|x\right| - 1\right| - 2\right| - 3\right|$.

2. Выполнить построение графиков функций:

а) $y = x^2 - 3x + 2$; б) $y = |x^2 - 3x + 2|$;

в) $y = x^2 - 3|x| + 2$; г) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$;

д) $|y| = x^2 - 3|x| + 2$; е) $|y| = x^2 - 3x + 2$;

ж) $|y| = |x^2 - 3|x| + 2|$; з) $|y| = |x^2 - 3x + 2|$.

3. Построить графики функций и указать их свойства:

а) $y = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа;

б) $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа.

4. Построить графики и указать свойства следующих функций:

а) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0; \\ 0, x = 0; \\ -1, x < 0. \end{cases}$

б) $y = \theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0; \\ 0, x < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда.

3. Числовые последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие по определенному правилу число $x \in X$, то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Примеры последовательностей:

$$\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\};$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}.$$

Определение. *Суммой* числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется числовая последовательность $\{z_n\}$, такая, что $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n = x_n + y_n$.

Определение. *Разностью* числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется числовая последовательность $\{z_n\}$, такая, что $\forall n \in \mathbb{N} z_n = x_n - y_n$.

Определение. *Произведением* числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется числовая последовательность $\{z_n\}$, такая, что $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n = x_n \cdot y_n$.

Определение. *Частным* числовой последовательности $\{x_n\}$ и числовой последовательности $\{y_n\}$, все элементы которой отличны от нуля, называется числовая последовательность $\forall n \in \mathbb{N}\quad z_n = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Если в последовательности $\{y_n\}$ на позиции $k \neq 1$ всё же имеется нулевой элемент, то результат деления на такую последовательность может быть определён как последовательность $\{z_n\} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{k-1}$.

Грани числовых множеств

Пусть X — числовое множество, $X \subset \mathbb{R}$.

(X — ограничено сверху) $\Leftrightarrow$ $\left(\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq M\right)$;

(X — ограничено снизу) $\Leftrightarrow$ $\left(\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ m \leq x\right)$;

(X — ограниченное) $\Leftrightarrow$ $\left(\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ m \leq x \leq M\right)$, т. е. $X \subset [m; M]$. Чаще отрезок $[m, M]$ берется симметричным относительно $x = 0$, т. е.

(X — ограниченное) $\Leftrightarrow$ $\left(\exists K \in \mathbb{R},\ K > 0 : \forall x \in X \ |x| \leq K\right)$.

Используя отрицание высказывания, имеем

(X – неограниченное) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall K > 0 : \exists x_k \in X : |x_k| > K\right)$.

Например,

$X = \left\{1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \ldots; \dfrac{1}{n}; \ldots\right\}$ — ограниченное множество, т. к. $X \subset [0;1]$; множество $A = \left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ — неограниченное, так как для $\forall K > 0$ можно указать $n_k = \left[\sqrt{k}\right] + 1$ такое, что $\left|n_k^2\right| = n_k^2 = k + 1 + 2\sqrt{k} > k$.

Если множество X ограничено сверху, то говорят, что множество имеет верхнюю границу, т. е. $\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq b$.

Наименьшая из верхних границ множества X называется точной верхней границей множества X или его верхней гранью и обозначается $\sup X$, т. е.

$$(\sup X = b) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in X, x \le b; \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : b - \varepsilon < x_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Множество $X = (0;1]$ имеет множество верхних границ $\{b\} = [1;\infty)$; $b = 1$ — наибольший элемент множества X и одновременно наименьшая верхняя граница множества, т. е. $\sup(0;1] = 1 \in X$.

Пример 2. Множество $X = \{0\} \cup (1,2)$ имеет множество всех верхних границ $\{b\} = [2;+\infty)$; $\sup X = 2 \notin X$.

Аналогично вводится понятие нижней грани для ограниченного снизу множества X как наибольшей из нижних границ множества, т. е.

$$(\inf X = a) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in X, a \le x; \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < a - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Показать по определению:
$\inf X = 1$ и $\sup X = 5$ для $X = \{1;2\} \cup (3;5)$.

Решение.

$$(\inf X = 1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in X\ x \ge 1; \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon = 1 \in X : x_\varepsilon = 1 < 1 + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

$$(\sup X = 5) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in X\ x \le 5; \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon = \begin{cases} 5 - \dfrac{\varepsilon}{2} \text{ при } 0 < \varepsilon < 2 \\ 4 \text{ при } \varepsilon \ge 2 \end{cases} : x_\varepsilon \in X \text{ и } x_\varepsilon > 5 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Показать по определению $\inf(0;1]=0$.

2. Найти $\sup X$ и $\inf X$, если

$$X=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\ldots\right\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

3. Найти $\sup X$ и $\inf X$, если множество X состоит из решений уравнения $\sin X = 1/2$.

4. Предел последовательности. Предел функции

4.1. Основные определения и теоремы

Пусть дано множество $X\subset\mathbb{R}$, $x_0\in X$.

Определение. ε*-окрестностью конечной точки* x_0 называется множество $O_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbb{R}:|x-x_0|<\varepsilon\}$, где $\varepsilon>0$.

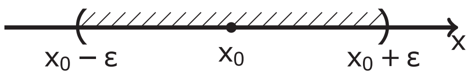


Рис. 1.22

Определение. *Выколотой окрестностью конечной точки* x_0 называется множество $\check{O}_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbb{R}:0<|x-x_0|<\varepsilon\}$.

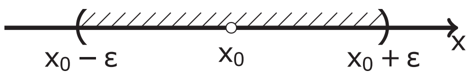


Рис. 1.23

Определение. ε*-окрестностью бесконечности* называется множество $O_\varepsilon(\infty)=\{x\in\mathbb{R}:|x|>\varepsilon\}$.

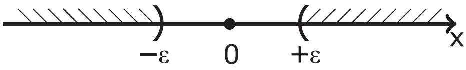


Рис. 1.24

$O_{\varepsilon_1}(x_0)\cap O_{\varepsilon_2}(x_0)=O_\varepsilon(x_0)$, где $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$;

$O_{\varepsilon_1}(\infty)\cap O_{\varepsilon_2}(\infty)=O_\varepsilon(\infty)$, где $\varepsilon=\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Определение. Точка x_0 называется *предельной* точкой множества X, если в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка из множества X (отличная от x_0), т. е. ($\forall\varepsilon>0\,\exists x_\varepsilon\in X\cap\overset{\vee}{O}_\varepsilon(x_0)$).

Определение предела функции (по Коши)

Пусть $X\subset\mathbb{R}$, функция $y=f(x)$ определена на X, x_0 — предельная точка множества X, A — конечное число или ∞.

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (в точке x_0), если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in X:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon,$$

т. е. A есть предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$ тогда и только тогда, когда для всякого положительного числа ε найдется число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для каждого значения x из выколотой δ-окрестности точки x_0 соответствующее значение функции $f(x)$ принадлежит ε-окрестности A.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A.$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$ (в бесконечности), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X\colon \ |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A.$

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X\colon \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty.$

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X\colon \ |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty.$

Число A называют *пределом слева* функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X\colon \ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x) = A.$

Число A называют пределом справа функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X\colon \ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x) = A.$

Определение конечного предела последовательности

$$(A = \lim_{n \to \infty} x_n) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\colon \forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon).$$

Число A называют *пределом последовательности* при $n \to \infty$, если для всякого положительного числа ε можно указать номер n_0 такой, что все члены последовательности x_n с номерами, большими $n_0(\varepsilon)$, лежат в $O_\varepsilon(A)$, вне $O_\varepsilon(A)$ расположено лишь конечное множество членов последовательности.

Последовательность называется сходящаяся, если она имеет конечный предел, и расходящаяся в противоположном случае.

Определение бесконечно большой последовательности

($\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0(\varepsilon) \ |x_n| > \varepsilon)$

Определение предела функции (по Гейне)

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \setminus \{x_0\}: \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Введем понятие *подпоследовательности*.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная числовая последовательность; $\varphi(k) = n_k$ – функция, определенная $\forall k \in \mathbb{N}$ со значениями $n_k \in \mathbb{N}$, строго возрастает, т. е.

$$\varphi(1) = n_1 < \varphi(2) = n_2 < \varphi(3) = n_3 < \ldots < \varphi(k) = n_k < \ldots.$$

Тогда множество $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ элементов исходной последовательности, выделенных с помощью закономерности номеров $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, образует *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ исходной последовательности.

Справедливы следующие утверждения:

1. Всякая последовательность имеет бесконечное множество подпоследовательностей.

2. Если последовательность сходится к A, то любая ее подпоследовательность сходится к A.

3. Если последовательность бесконечно большая, то любая ее подпоследовательность также бесконечно большая.

4. **Достаточное условие сходимости.** Если подпоследовательности $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся к одному и тому же значению A, то и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к A.

5. **Достаточное условие расходимости последовательности.** Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится, если существуют две ее подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам, либо существует ее подпоследовательность, которая расходится.

Пример 1.

Записать первые пять членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, указать свойства последовательности (монотонность, ограниченность, сходимость), если общий член последовательности имеет вид:

$$x_n = \frac{2n+1}{2n+3}.$$

Решение.

Задавая последовательно $n=1,\ n=2,\ n=3,\ n=4,\ n=5$, получим для нее первые пять членов последовательности:

$$x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{5}{7}, x_3 = \frac{7}{9}, x_4 = \frac{9}{11}, x_5 = \frac{11}{13}.$$

Исследуем на монотонность. Рассмотрим разность:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2(n+1)+1}{2(n+1)+3}-\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{(2n+3)(2n+3)-(2n+1)(2n+5)}{(2n+3)(2n+5)}=$$

$$=\frac{4}{(2n+3)(2n+5)}>0.$$

Т. к. $\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_{n+1}-x_n>0$ т. е. $x_{n+1}>x_n$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность.

Исследуем на ограниченность:

$$0<\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{2n+3-3+1}{2n+3}=1-\frac{2}{2n+3}<1,$$

т. е. $\forall n\in\mathbb{N}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограничена, причем $0<x_n<1$.

Исследуем на сходимость. Покажем по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ и оценим разность.

1) Возьмем произвольное $\varepsilon>0$;

2) $\left|\frac{2n+1}{2n+3}-1\right|=\frac{2}{2n+3}<\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$

Полагаем $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Таким образом,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\ \forall n\in\mathbb{N}: n>n_0\Rightarrow|x_n-1|<\varepsilon.$$

Пример 2.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана в явной форме:

$$x_n=\frac{n}{2n+1}.$$

Получить ее рекуррентное задание $x_{n+1}=f(x_n)$.

Решение. Вычислим x_{n+1} через x_n. Из равенства $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ выразим $n = \dfrac{x_n}{1-2x_n}$ и подставим его в выражение для

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1},$$

получим $x_{n+1} = \dfrac{1-x_n}{3-4x_n}$.

Итак, исходная последовательность может быть задана рекуррентно соотношением:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_{n+1} = \frac{1-x_n}{3-4x_n}.$$

Проверить корректность полученного соотношения можно непосредственно вычислением числовых значений членов последовательности, т. е. при

$$n = 2,\ x_2 = \frac{2}{2\cdot 2+1} = \frac{2}{5}\ \text{ и }\ x_2 = \frac{1-\frac{1}{3}}{3-4\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}\ \text{ и т. д.,}$$

либо сравнить значения пределов последовательности, заданной в явном виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ и при рекуррентном задании: перейдем к пределу в равенстве $x_{n+1} = \dfrac{1-x_n}{3-4x_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, получим $a = \dfrac{1-a}{3-4a}$, или $(2a-1)^2 = 0$, или $a = \dfrac{1}{2}$.

Замечание. При вычислении значения предела последовательности, заданной рекуррентным соотношением вида $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, использовали следующее правило: если

$\exists a$ — конечное: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(a)$, то число a есть корень уравнения $a = f(a)$ (предполагается, что $f(x)$ — функция, непрерывная в точке $x = a$).

Пример 3. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n + 1}$, получить явное задание.

Решение. Вычислим несколько членов последовательности:

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1 + 1} = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{x_2}{x_2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}; x_4 = \frac{x_3}{x_3 + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4} \text{ и т. д.}$$

Предположим, что $x_n = 1/n$ и проверяем подстановкой $x_{n+1} = 1/(n+1)$ в исходное соотношение:

$$\left(x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\right).$$

Получено верное равенство для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$:

1) рассматриваем произвольное $\varepsilon \in (0;\infty)$;

2) ищем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\forall x \in \overset{\vee}{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \overset{\vee}{O}_\varepsilon(A)$;

3) вычисляем, при каких значениях x выполняется соотношение $f(x) \in O_{\varepsilon}(A)$;

4) записываем вывод.

Пример 4. Доказать по определению, что: $\lim\limits_{x \to 1}(2x+7)=9$.

Решение.

1) возьмем произвольное $\varepsilon > 0$;

2) найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall x,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ т. е. } \forall x, |x-1| < \delta \Rightarrow |2x+7-9| < \varepsilon;$$

3) вычислим, при каких значениях x верно требуемое неравенство:

$$|2x+7-9| = |2x-2| = 2 \cdot |x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta = \varepsilon/2$. Получили

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} : |x-1| < \delta \Rightarrow |2x+7-9| < \varepsilon,$$

т. е., по определению,

$$\lim_{x \to 1}(2x+7) = 9.$$

Пример 5. Доказать по определению:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \infty.$$

Решение.

1) возьмем произвольное $\varepsilon > 0$;

2) требуется найти $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x,\ |x-1| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{x-1}\right| < \varepsilon;$$

3) вычислим, предварительно оценивая

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| = \left|\frac{x-1+1}{x-1}\right| = \left|1+\frac{1}{x-1}\right| \geq -1+\left|\frac{1}{x-1}\right| = \frac{1}{|x-1|}-1$$

по свойствам абсолютной величины $\forall a, \forall b \left||a|-|b|\right| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$.

Причем значение x считаем близким к $x_0=1$: $\frac{1}{|x-1|}>1$ $(0<\delta(\varepsilon)<1)$. Положим $\delta(\varepsilon)= 1/_{\varepsilon+1}$.

Потребуем, чтобы $\frac{1}{|x-1|}>\varepsilon$ и решим это неравенство относительно $|x-1|$, получим $|x-1|<\frac{1}{1+\varepsilon}=\delta(\varepsilon)$;

4) получили

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon}\ \forall x: |x-1|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{x}{x-1}\right|>\varepsilon,$$

т. е., по определению,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty.$$

Пример 6. Доказать по определению:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)=0.$$

Решение.

1) возьмем произвольное $\varepsilon>0$;

2) требуется найти $n_0=n_0(\varepsilon)$ так, чтобы для всякого $n>n_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\left|\sqrt{n^2+3}-n\right|<\varepsilon$;

3) можно решать неравенство непосредственно $0<\sqrt{n^2+3}-n<\varepsilon$ или $\sqrt{n^2+3}<n+\varepsilon \Leftrightarrow n^2+3<n^2+2\varepsilon n+\varepsilon^2 \Leftrightarrow n >$

$> \dfrac{3-\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ и взять $n_0(\varepsilon)=\dfrac{3-\varepsilon^2}{2\varepsilon}, \varepsilon>0$;

можно решать неравенство $\sqrt{n^2+3}-n$ с предварительной оценкой данного выражения:

$$\sqrt{n^2+3}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+3}+n}=\frac{n^2+3-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}\le\frac{3}{n};$$

потребуем $\dfrac{3}{n}<\varepsilon$ и выберем $n_0(\varepsilon)=\dfrac{3}{\varepsilon}$;

4) итак,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_0(\varepsilon)=\frac{3}{\varepsilon}>0\,\forall n:\left|\sqrt{n^2+3}-n\right|\le\frac{3}{n}<\frac{3}{3/\varepsilon}=\varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)=0$.

Заметим, что оба решения правильные и для вывода можно использовать любое из найденных значений $n_0(\varepsilon)$.

4.2. Вычисление пределов

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big/ g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Big/ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Используются также следующие пределы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел).

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ или } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k} -$$

(второй замечательный предел).

При решении примеров полезно иметь в виду следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a;\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}.$$

Решение. Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\left(\dfrac{3}{x}\right)\uparrow 0-\left(\dfrac{5}{x^2}\right)\uparrow 0}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\downarrow 0+\left(\dfrac{1}{x}\right)\downarrow 0+3}=\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{3x^2+2x-5}.$$

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x\to 1$ обращаются в ноль. Значит, имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Так как $x=1$ — корень многочленов (x^3+x^2-5x+3) и $\left(3x^2+2x-5\right)$, то эти многочлены делятся нацело на $(x-1)$. Поделив эти многочлены на $(x-1)$, можно разложить их на множители: $x^3+x^2-5x+3=(x-1)\left(x^2+2x-3\right)$, $3x^2+2x-5=(x-1)(3x+5)$.

Значит,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{3x^2+2x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x-3\right)}{(x-1)(3x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+2x-3\right)}{(3x+5)}=0.$$

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}.$$

Решение.

Умножим числитель и знаменатель на $\left(\sqrt{x+6}+2\right)$, разложив перед этим числитель на множители:

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

Получим

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(\sqrt{x+6}-2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)\left(\left(\sqrt{x+6}\right)\uparrow 2+2\right)}{x+6-4}=$$

$$=4\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=4\lim_{x\to-2}x-1=4\cdot(-3)=-12.$$

Пример 4. Вычислить предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}3x}{\operatorname{arctg}5x}.$$

Решение. Воспользуемся следствием из первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}3x}{\operatorname{arctg}5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\operatorname{arctg}3x}{3x}\cdot3x}{\frac{\operatorname{arctg}5x}{5x}\cdot5x}=\frac{3}{5}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\operatorname{arctg}3x}{3x}}{\frac{\operatorname{arctg}5x}{5x}}=\frac{3}{5}.$$

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}.$$

Решение. Делением числителя на знаменатель выделим целую часть

$$\frac{2x+3}{2x-1}=1+\frac{4}{2x-1}.$$

Таким образом, при $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель к бесконечности; получили неопределенность вида 1^{∞}. Преобразуя функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{4x(2x-1)}{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{2x-1}\right]^{\frac{4x}{2x-1}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot 4}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(2-\frac{1}{x}\downarrow 0\right)}=\frac{4}{2}=2,$$

$$\text{то}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}=\left(e^{4}\right)^{2}=e^{8}.$$

4.3. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x\to x_0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что α является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с β (обозначается $\alpha=o(\beta)$).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то говорят, что β является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α (обозначается $\beta=o(\alpha)$).

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=m$, где m — число, отличное от нуля, то говорят, что α и β — бесконечно малые одного и того же порядка. В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые α и β называются эквивалентными (обозначается $\alpha\sim\beta$).

4. Если α^k и β бесконечно малые одного и того же порядка, причем $k>0$, то говорят, что бесконечно малая β имеет порядок k по сравнению с α.

Некоторые свойства бесконечно малых

1. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями, т. е. если $\gamma=\alpha\beta$, то $\gamma=o(\alpha)$ и $\gamma=o(\beta)$.

2. Бесконечно малые α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\alpha-\beta=\gamma$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α и β т. е. если $\gamma=o(\alpha)$, $\gamma=o(\beta)$, то $\alpha\sim\beta$.

3. Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой бесконечно малой эквивалентной ей функцией, т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=m$, $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=m$.

При $x \to 0$ можно воспользоваться следующими эквивалентностями:

$$\sin x \sim x,\ \operatorname{tg} x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \operatorname{arctg} x \sim x,\ \ln(1+x) \sim x.$$

Пример. Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}.$$

Решение. Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечными малыми:

$$\ln(1+3x\sin x) \sim 3x\sin x,\ \operatorname{tg} x^2 \sim x^2.$$

Тогда:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3x\sin x}{x^2} = 3\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 3.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ записать первые пять членов, изучить и обосновать свойства последовательности (монотонность, ограниченность, сходимость):

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n (n+3)}{2n+1}$;

б) $x_n = \dfrac{n+1}{3n+1}$;

в) $x_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$.

2. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана в явной форме. Получить ее рекуррентное задание $x_{n+1} = f(x_n)$.

а) $x_n = \dfrac{1}{n+1}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$.

3. Для последовательности, заданной рекуррентно, $x_1 = a,\ x_{n+1} = f(x_n)$, получить явное задание этой же последовательности.

а) $x_1 = -1,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{3x_n + 1}$;

б) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{3x_n + 2}$;

в) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + 2\sqrt{x_n} + x}$.

4. Показать по определению:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\right) = \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3\right) = 8$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2}{6n^2 + n + 1}\right) = \dfrac{5}{6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x) = 1$.

5. Для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ выделить подпоследовательности $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, по их поведению установить сходимость или расходимость исходной последовательности.

а) $x_n = \sin(\pi n)$;

б) $x_n = \dfrac{2n + (-1)^2}{n}$;

в) $x_n = \dfrac{e^{-n}}{n+2}$.

6. Вычислить:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{25n^3 - 7} + 2\sqrt{n^2 + 9n^3}}{\sqrt{n^2 + 7n + n^3}}$;

б) $\lim\limits_{x} x \cdot \operatorname{ctg} 2x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+7}{5x-13}\right)^{4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-4}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^3 + 8x - 9}{x^2 - 10x + 9 - 2}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(\sqrt{x^4 + x^2\sqrt{x^4+1}} - \sqrt{2x^4}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - \arcsin 4x}{\sin 5x - 6\operatorname{arctg} 7x}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8\sin\left(2n!+\sqrt{n^4-7}\right)-3n^2+4}{\sqrt{16n^4+9n^3+8}}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln\left(1+x^2\right)}$; о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)}{\ln\left(1+3x-4x^2+x^3\right)}$;

п) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$; р) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}\right)}{\ln(x)}$.

5. Непрерывность функции

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

1) $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0;
2) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) значение предела совпадает со значением функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

5.1. Точки разрыва функции

Пусть $f(x)$, $x\in[a;b], x_0\in(a,b)$. Тогда если точка x_0 не является точкой непрерывности функции $f(x)$, то она — *точка разрыва* функции. При $x_0=a$ или $x_0=b$ также возможен *разрыв* слева или справа функции (рис. 1.22), если $f(x)$, рассматривается на $[a;b]$.

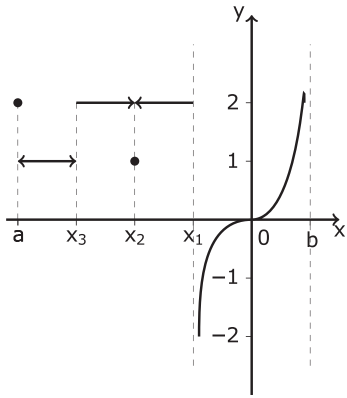


Рис. 1.25

Классификация точек разрыва:

1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$; $x = x_0$ — точка *устранимого* разрыва; на рисунке это точки $x = a$, $x = x_2$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$; $x = x_0$ — точка разрыва *первого рода*; $\left|f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)\right|$ — скачок функции в точке x_0; на рисунке это точка $x = x_3$, $f(x_1 - 0) = 1$, $f(x_1 + 0) = 2$;

3) $x = x_0$ — точка разрыва *второго рода* в остальных случаях; на рисунке это точки $x = x_1$ и $x = b$.

Свойства функции, непрерывной в точке:

1. Непрерывная в точке функция *локально ограничена*.

2. Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

4. Утверждение о сохранении знака. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $O(x_0)$, в каждой точке которой $f(x)$ сохраняет знак, при $x \neq x_0$.

5. Непрерывность сложной функции.

Пусть $u = u(x)$, $y = f(u)$, где $x \in X$, $u \in U$, $y \in Y$, X, Y, U — числовые множества. Тогда $y(x) = f(u(x))$, $x \in X$ называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций*, реализующей следующие отображения: $X \xrightarrow{u(x)} U \xrightarrow{f(u)} Y$.

Если $u(x)$ — непрерывна в точке x_0, $x_0 \in X$ и $f(u)$ — непрерывна в точке $u_0 = f_0(x_0) \in U$, то сложная функция $y(x) = f(u(x))$, $x \in X$ непрерывна в точке x_0.

5.2. Непрерывность функции на множестве

Функция $f(x)$ *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, обозначается $C_{[a,b]}$. Соответственно запись $f(x) \in C_{[a,b]}$ означает, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Теорема Вейерштрасса 1

Всякая функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем, т. е. $\forall f(x)$, $x \in [a,b]$; $\left(f(x) \in C_{[a,b]}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\exists K > 0 : \forall x \in [a,b] \; |f(x)| \le K\right)$.

Теорема Вейерштрасса 2

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке, достигаются в некоторых точках этого отрезка, т. е.

$$\left(f(x) \in C_{[a,b]}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(\exists p \in [a,b] : f(p) = \underset{[a,b]}{\text{наиб}} f(x)) \wedge (\exists q \in [a,b] : f(q) = \underset{[a,b]}{\text{наим}} f(x)) \right]$$

Лемма о нуле непрерывной функции

Если 1) $f(x) \in C_{[a,b]}$; 2) $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists \xi (a;b) : f(\xi) = 0$.

Теорема Коши (о промежуточном значении)

Если 1) $f(x) \in C_{[a,b]}$; 2) $f(a) = A_1 \ne B_1 = f(b)$, то $\forall K \in [A_1; B_1]$ $\exists \mu \in [a;b] : f(\mu) = K$.

Рассмотрим решение некоторых задач.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Решение.

Для $x<0$ функция $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=-1$. Если $x>0$, то функция $f(x)=1$ также непрерывна. Рассмотрим точку $x=0$. Вычислим пределы слева и справа при $x\to 0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1)=1$.

Односторонние пределы конечны, но не равны между собой, следовательно, $x=0$ — точка разрыва 1 рода (скачок функции). В остальных точках функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<-1,\\ x^2-2, & x>-1,\\ 0, & x=-1.\end{cases}$$

Решение.

При $x<-1$ и $x>-1$ функция $f(x)$ совпадает с непрерывными элементарными функциями, следовательно, непрерывна. Исследуем непрерывность функции в точке $x=-1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x)=-1$.

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1}\left(x^2-2\right)=-1.$$

Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны и равны между собой, то есть существует

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$, но $f(-1) = 0 \neq \lim\limits_{x\to -1} f(x)$, и, следовательно, $x = -1$ есть точка устранимого разрыва. В остальных точках функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|}.$$

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x|}$ не определена в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. В точках $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$ функция $f(x)$ является суперпозицией элементарных функций, непрерывных на своей области определения, то есть $f(x)$ непрерывна во всех точках, кроме точек $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln|x|} = 0$. Предел функции при $x \to 0$ существует, но функция $f(x)$ в точке $x = 0$ не определена, поэтому $x = 0$ есть точка устранимого разрыва 1-го рода. Разрыв можно устранить, если $f(x)$ доопределить, положив $f(0) = 0$; тогда функция $f(x)$ будет являться непрерывной в точке $x = 0$.

Исследуем функцию в точках $x = \pm 1$. Так как $\lim\limits_{x\to \pm 1} \ln|x| = 0$, то $\lim\limits_{x\to \pm 1} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm 1} \dfrac{1}{\ln|x|} = \infty$. Пределы функции при $x \to \pm 1$ равны бесконечности, следовательно, $x = \pm 1$ — точки разрыва второго рода.

Пример 4. Показать, что уравнение $x\cdot 2^x=1$ имеет, по меньшей мере, один положительный корень, не превосходящий 1.

Решение. Функция $f(x)=x\cdot 2^x-1$ непрерывна как элементарная функция. На концах отрезка $[0;1]$ эта функция принимает значения разных знаков: $f(0)=-1$, $f(1)=2-1=1$. Поэтому, по свойству функции, непрерывной на отрезке, найдется точка $x_0\in[0;1]$, в которой $f(x_0)=0$, что и требовалось доказать.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Исследовать функцию на непрерывность, указать тип точек разрыва:

а) $f(x)=\begin{cases} 2^x, \text{ если } 0<|x|<1, \\ x+2, \text{ если } |x|\geq 1 \text{ и } x=0; \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$;

в) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

2. Доопределить функцию $f(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в области задания, найти неизвестные параметры α, k, A.

а) $f(x)=\begin{cases} 2, \text{ если } -3\leq x\leq -1, \\ ax^2, \text{ если } -1<x\leq 2, \\ A, \text{ если } 2<x\leq 3. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} kx, \text{ если } -3 \le x < -2, \\ A, \text{ если } -2 \le x \le 0, \\ A\cos x, \text{ если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{A-x}, \text{ если } x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, \text{ если } |x| \le 2, \\ kx-1, \text{ если } 2 < x \le 4. \end{cases}$

Глава 2.
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Производная и дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y=f(x)$ получит приращение $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, которое характеризует изменение функции $f(x)$ на отрезке $[x;\ x+\Delta x]$. Средняя скорость изменения функции на этом отрезке равна $\dfrac{f(x)}{\Delta x}$, а скорость изменения функции $f(x)$ в точке x есть $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Этот предел, если он существует, называется *производной* $f'(x)$ *функции* $f(x)$ в точке x. Итак, по определению,

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Для функции $y=f(x)$ приняты и другие обозначения производной: $y'(x)$, y'_x, $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$.

1.1. Дифференцируемость функции в точке

$\forall f(x)$, $x \in (a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, ($f(x)$ — дифференцируема в точке x_0) $\Leftrightarrow \left(\exists A - \text{const} : \Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \text{o}(\Delta x)\right)$, т. е. приращение функции в точке x_0 представимо в виде суммы линейной функции от Δx (главная часть приращения функции) и некоторой функции, бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ большего порядка по сравнению с Δx.

Теорема (о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции в точке)

$\forall f(x)$, $x \in (a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, ($f(x)$ — дифференцируема в точке x_0) $\Leftrightarrow \left(\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\right)$.

Замечание. Выражение $f'(x_0) \cdot \Delta x$ называется *дифференциалом (первого порядка) функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ или $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x.$

Для дифференцируемой в точке x_0 функции справедливо приближенное равенство $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ или $f(x_0 + \Delta x) \approx$ $\approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Погрешность приближения указанных равенств равна $\text{o}(\Delta x)$.

Эти равенства могут использоваться для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке x, расположенной «достаточно близко» к точке x_0.

Геометрическая иллюстрация приближенного равенства: для x, «близких» к x_0, график функции $y = f(x)$ может быть приближенно заменен отрезком касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, тем самым решается задача *локальной линеаризации функции*.

Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности)

$\forall f(x)$, $x \in (a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, ($f(x)$ — дифференцируема в точке x_0) $\Rightarrow$($f(x)-$ непрерывна в x_0).

Процесс вычисления производной функции называется дифференцированием функции.

Пример 1. Показать по определению дифференцируемость функции $f(x) = x^2 - 3x$ в произвольной точке x_0.

Решение. Пусть Δx — произвольное приращение аргумента в точке x_0. Тогда приращение функции в точке x_0:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$

$$= \left[(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x)\right] - \left[x_0^2 - 3x_0\right] =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x_0 - 3\Delta x - x_0^2 + 3x_0 =$$

$$= \underbrace{(2x_0 - 3)\Delta x}_{A-\text{const}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)},$$

т. е. $f(x) = x^2 - 3x$ является дифференцируемой в точке x_0.

Пример 2. Вычислить приближенно $(1{,}1)^{10}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = (1 + x)^{10}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}1$.

Тогда $(1+0{,}1)^{10} \approx (1)^{10} + 10(1)^{9} \cdot 0{,}1 = 2$.

Итак, $x=1$ с погрешностью $y'(1)=3$.

Пример 3. Исследуем функцию $f(x)=\begin{cases} x+1, \ x \le 0, \\ e^{x}, x>0 \end{cases}$ на дифференцируемость.

Решение. Найдем производную в точке $x=0$, используя определение производной:

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \left(e^{x}\right)' \big|_{x=0} = 1; \ \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = (x+1)' \big|_{x=0} = 1.$$

Следовательно, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 1$ и функция $f(x)$ дифференцируема при $x = 0$. В точках $x \ne 0$ функция $f(x)$ дифференцируема, так как совпадает с дифференцируемыми элементарными функциями. Из дифференцируемости функции следует ее непрерывность на всей числовой оси.

1.2. Приложения производной к задачам геометрии и механики

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то $f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$, где $y'(x_0)=3x_0^2+6x_0$ — угол между касательной к кривой в точке (x_0, y_0) и положительным направлением оси Ox.

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y_0 = y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = -3$$

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания. Уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Углом между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = x^2$ в точке их пересечения $\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases}$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}\right|.$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $s = s(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени: $v = s'(t_0)$.

1.3. Правила дифференцирования

Пусть C — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда:

$$C' = 0;$$

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(Cu)' = Cu';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ если } v \neq 0;$$

$$\left(u^v\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Производная сложной функции

Пусть $u(x)^{v(x)}$ и $y = x^x$, тогда $y = f\left(u(x)\right)$ — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Если функция $u = u(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y = x^x$ в соответствующей точке $u = u(x)$, то сложная функция $y = f\left(u(x)\right)$ имеет производную y'_x, которая находится по формуле $y'_x = y'_u u'_x$.

1.4. Обратная функция. Производная обратной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, $x \in X$, где X — область определения, а $Y = \{f(x), x \in X\} = E(f)$ — множество значений функции.

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется обратимой на X, если $\forall y \in E(f) = Y\ \exists! x \in X : f(x) = y$, т. е. на множестве $Y = E(f)$ определена функция $x = \varphi(y)$, $x \in X$, $y \in Y$, такая, что выполнены тождества: $f\left(\varphi(y)\right) \equiv y$ на Y и $\varphi\left(f(x)\right) \equiv x$ на X.

При этом функцию $x=\varphi(y)$, $y\in Y$ называют *обратной* функцией для $y=f(x)$, $x\in X$.

Заметим, что графики функций $y=f(x)$, $x\in X$ и $x=\varphi(y)$, $y\in Y$ на плоскости OXY совпадают.

При нахождении обратной функции для $y=f(x)$, $x\in X$, $y\in Y$, следует решить (если возможно) уравнение $y=f(x)$ относительно x, $x=\varphi(y)$, $x\in X$, $y\in Y$ а затем переобозначить переменные. Функции $y=f(x)$, $x\in X$, $y\in Y$ и $y=\varphi(x)$, $y\in X$, $x\in Y$ называются *взаимно-обратными*, их графики симметричны относительно прямой $y=x$.

Пример. Для функции $f(x)=2x+1$, $D(x)=E(f)=\mathbb{R}$ найти обратную функцию; рассмотреть графики прямой и обратной функций.

Решение.

Обозначим $y=2x+1$, $x,y\in\mathbb{R}$; из этого уравнения находим $x=\dfrac{y-1}{2}$; замечаем, что для всякого y существует единственное значение x, т.е. $x=\dfrac{y-1}{2}\equiv\varphi(y)$ — обратная функция. Графики функций $y=2x+1$ и $=\dfrac{y-1}{2}$ совпадают — это прямая $2x-y+1=0$. Имеем тождества $y=2\left(\dfrac{y-1}{2}\right)+1$ и $x=\dfrac{(2x+1)-1}{2}$ на $\mathbb{R}$. Для обратной функции $x=\varphi(y)$ проводим переобозначение переменных: y заменяем на x, x заменяем на y, полу-

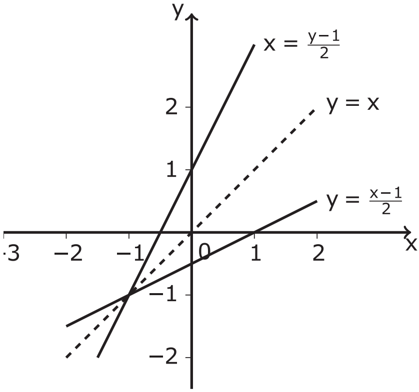


Рис. 2.1

чаем $y=\varphi(x)$ — функцию, у которой независимая переменная изображается на оси Ox, а значение функции — на оси Oy. В нашем примере переобозначение переменных приводит к функции $y=\dfrac{x-1}{2}$, её график симметричен графику исходной функции относительно прямой $y=x$ (рис. 2.1).

Достаточное условие существования обратной функции:

Если

1) $f(x)$ — непрерывна на промежутке X;

2) $f(x)$ — строго возрастает (или строго убывает) на промежутке X, то на соответствующем промежутке значений функции $Y=\{f(x),\ x\in X\}$ существует однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, $x\in X$, $y\in Y$, также непрерывная на Y и строго монотонная на Y (с сохранением характера монотонности).

Замечаем, что в условиях утверждения свойства «прямой» (исходной) функции переносятся на обратную функцию.

Дифференцируемость обратной функции

Если функция $y=f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \text{ или } x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

1.5. Техника дифференцирования

Производные элементарных функций

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

3. $\left(e^x\right)' = e^x$

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

5. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

6. $\left(\sin x^{'}\right) = \cos x$

7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

8. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

14. $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$

15. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$

16. $(\mathrm{th}\,x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

17. $(\mathrm{cth}\,x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

При решении следующих задач необходимо использовать таблицу производных и правила дифференцирования.

Пример 1. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y = x^2 e^x$; б) $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$; в) $y = 5\cos x + x^2 + \ln x.$

Решение.

а) Воспользуемся формулой для нахождения производной произведения дифференцируемых функций

$$y' = \left(x^2 e^x\right)' = \left(x^2\right)' e^x + \left(e^x\right)' x^2 = 2xe^x + x^2 e^x .$$

б) Воспользуемся формулой $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, из которой следует, что

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' = \frac{x\cdot(\arcsin x)' - \arcsin x\cdot(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

в) Воспользуемся формулой для нахождения производной суммы дифференцируемых функций:

$$y' = \left(5\cos x + x^2 + \ln x\right)' = 5(\cos x)' + (x^2)' + (\ln x)' = -5\sin x + 2x + \frac{1}{x}.$$

Пример 2. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x=1$?

Решение. Находим производную $y'=\frac{10}{3}x^4-\frac{1}{3}x^2$; при $x = 1$ имеем $y'(1) = 3$, то есть $\mathrm{tg}\alpha=3$, откуда $\alpha=\mathrm{arctg}3\approx 71^\circ 34'$.

Пример 3. Составить уравнения нормали к графику функции $y=x^3+3x^2-5$, параллельной прямой $2x-6y+1=0$.

Решение. Записав уравнение прямой $2x-6y+1=0$ в виде

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6},$$

легко находим угловой коэффициент этой прямой

$$k=\frac{1}{3}.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y-y(x_0)=\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0),$$

причем искомая нормаль параллельна данной прямой, поэтому их угловые коэффициенты совпадают, т. е.

$$k=-\frac{1}{y'(x_0)}=\frac{1}{3} \text{ и } y'(x_0)=-3.$$

С другой стороны, $y'(x_0)=3x_0^2+6x_0$. Таким образом, получили уравнение для нахождения точки (x_0, y_0):

$$3x_0^2+6x_0=-3,\ 3(x_0+1)^2=0,\ x_0=-1,$$

$$y_0 = y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = -3.$$

Итак, уравнение нормали имеет вид:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}.$$

Пример 4. Найти угол между параболами: $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

Решение. Решив систему $\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases}$, найдем точки пересечения парабол $A(2;4)$ и $B(-2;4)$. Продифференцируем обе функции: $y' = -2x$, $y' = 2x$. Найдем угловые коэффициенты касательных к параболам в точке A (т. е. значения производных при $x = 2$): $k_1 = -4$, $k_2 = 4$. Угол φ_1 между параболами равен углу между их касательными в точке A:

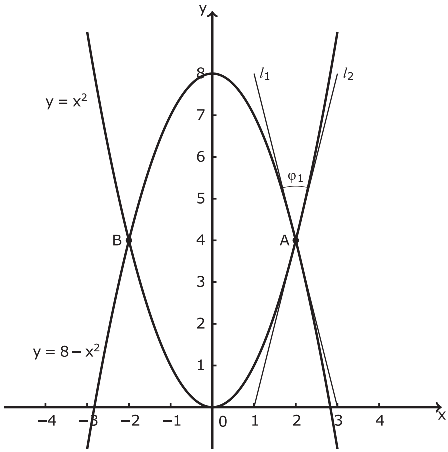


Рис. 2.2

$$\text{tg}\varphi_1 = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{4+4}{1-16}\right| = \left|-\frac{8}{15}\right|,$$

$$\varphi_1 = \text{arctg}\left(\frac{8}{15}\right).$$

Аналогично, найдем угол φ_2 между касательными в точке B:

$$\varphi_2 = \text{arctg}\left(\frac{8}{15}\right).$$

1.6. Логарифмическое дифференцирование

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ удобно равенство $y = f(x)$ сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать. Такой прием называют *логарифмическим дифференцированием*. Его полезно применять для дифференцирования произведения многих сомножителей, частного, числитель и знаменатель которого содержат несколько множителей, а также для дифференцирования степенно-показательных функций $u(x)^{v(x)}$.

Пример 1. Найти производную $y = x^x$.

Решение.

Решим задачу тремя способами.

Способ 1. Воспользуемся (готовой) формулой для нахождения производной *степенно-показательной функции*: $\left(u^v\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$. В нашем примере $u(x) = x$, $v(x) = x$, $(x)' = 1$. Получаем

$$\left(x^x\right)' = x \cdot x^{x-1} \cdot x' + x^x \cdot \ln x \cdot x' = x^x + x^x \cdot \ln x = x^x\left(1 + \ln x\right).$$

Способ 2. Используем для нахождения производной функции $y = x^x$ логарифмическое дифференцирование, поскольку и основание, и показатель степени зависят от x. Логарифмируя, получим $\ln y = \ln x^x$ или, по свойству логарифмов, $\ln y = x \cdot \ln x$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x:

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'; \ \frac{1}{y} \cdot y' = x' \ln x + x(\ln x)';$$

выражаем теперь искомую производную:

$$y' = y\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) \text{ или } y' = x^x(\ln x + 1).$$

Способ 3. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции, учитывая свойства показательной и логарифмических функций: $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$.

$$y'_x = \left(e^{x \cdot \ln x}\right)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(x \cdot \ln x\right)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + 1\right) = x^x (\ln x + 1).$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \sqrt{x \cdot \sin x \sqrt[4]{1 - e^x}}.$$

Решение. Находить y' как производную произведения слишком громоздко. Удобнее применить логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln \sqrt{x \cdot \sin x \sqrt[4]{1 - e^x}} =$$

$$= \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{\sin x} + \ln \sqrt[4]{1 - e^x} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln \sin x + \frac{1}{4} \ln\left(1 - e^x\right).$$

Продифференцируем последнее равенство по x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^x\right)} \cdot \left(-e^x\right).$$

Выразим y':

$$y' = \sqrt{x \cdot \sin x \sqrt[4]{1 - e^x}} \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^x\right)} \cdot \left(-e^x\right)\right) = \sqrt{x \cdot \sin x \sqrt[4]{1 - e^x}} \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2 \sin x} - \frac{e^x}{4\left(1 - e^x\right)}\right).$$

Итак,

$$y' = \sqrt{x \cdot \sin x \sqrt[4]{1-e^x}} \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{e^x}{4\left(1-e^x\right)} \right).$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти угол между кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Сделать рисунок. Написать уравнения касательных к графикам функций в точке их пересечения.

а) $y = x^2,\ x + y = 2,\ x_0 > 0;$

б) $y = \sin x,\ y = \dfrac{2}{\pi} x, 0 < x_0 < \pi;$

в) $y = x^2, y^2 = x, x_0 > 0;$

г) $y = \sqrt{3+x},\ y = \sqrt{3-x}$.

2. Найти производную функции по определению:

а) $y = \dfrac{1}{x^2};$ б) $y = \sqrt[3]{x^2};$ в) $y = 5\left(\mathrm{tg} x - x\right);$

г) $y = \dfrac{1}{e^x + 1};$ д) $y = 2^{x^2};$ е) $y = 5\sin x + 3\cos x$.

3. Вычислить приближенно:

а) $\mathrm{arctg}\, 1{,}05$; б) $\mathrm{tg}\, 46^\circ$; в) $\ln \mathrm{tg}\, 47^\circ\, 15'$; г) $\sqrt[4]{15{,}8}$.

4. Найти дифференциал функции

а) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7};$ б) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6};$

в) $y = 2\ln \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right);$ г) $y = \mathrm{arctg}\, e^{2x}$.

5. Вычислить производную заданной функции

а) $y = x\sqrt{x}\left(3\ln x - 2\right)$;

б) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1} + 1\right)$;

в) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\cdot\ln\left(x + \sqrt{x^2+k}\right)$;

г) $y = \ln\frac{\sqrt{4\mathrm{tg}x+1} - 2\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\sqrt{4\mathrm{tg}x+1} + 2\sqrt{\mathrm{tg}x}}$;

д) $y = 1 - e^{\sin^2 3x} \cdot\cos^2 3x$;

е) $y = \arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

ж) $y = \frac{x}{\sqrt{1-mx^2}}$;

з) $y = 3x\cdot\sin^3 x + 3\cos x - \cos^3 x$;

и) $y = e^x - \sin e^x\cdot\cos^3 e^x - \sin^3 e^x\cdot\cos e^x$;

к) $y = \mathrm{arctg}\left(x+1\right) + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$;

л) $y = x^{\arcsin x}$;

м) $y = \ln\ln x(\ln\ln\ln x - 1)$;

н) $y = x^{\ln x}$;

о) $y = \frac{x^2\sqrt{x+!}}{\left(x-1\right)^3\sqrt[5]{5x-1}}$;

п) $y = \left|3x-5\right|$.

6. Решить задачу линеаризации функции $f(x)$ в окрестности $O(x_0)$. Сделать рисунок.

а) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = x^3 + x$, $x_0 = 1$.

7. Найти приближенное значение объема шара радиуса 2,01 м.

8. Найти приближенное значение x из уравнения

$$13 \cdot \sin x - 15 \cdot \cos x = 0.$$

2. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически

Правило 1. Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $y = y(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ — дифференцируемые функции, причем $x'(t) \neq 0$ и функция $x(t)$ имеет обратную. Тогда функция $y = y(x)$ — дифференцируема, а ее производная находится по формуле: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 1. Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Решение. Используя формулу, получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{3\cos^2 t \cdot (-\sin t)} = -\operatorname{tg} t.$$

Пусть значения переменных x и y связаны уравнением $F(x, y) = 0$. Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a,b), такая, что уравнение $F(x,y)=0$ при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество, то говорят, что уравнение $F(x,y)=0$ задает функцию $y=f(x)$ неявно или что функция $y=f(x)$ есть *неявная функция*.

Правило 2. Для нахождения производной y'_x неявной функции нужно продифференцировать по x обе части равенства $F(x,y)=0$, учитывая, что y есть функция от x. Затем из полученного равенства выразить y'_x.

Пример 2. Вычислить y'_x.

$$y^5+xy-x^2=0.$$

Решение. Продифференцируем обе части по x.

Получим $5y^4y'+y+xy'-2x=0$.

Выразим y':

$$y'\left(5y^4+x\right)=2x-y,\ y'=\frac{2x-y}{5y^4+x}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

Найти производные неявно заданных и параметрически заданных функций:

1. $x=a\cdot\cos t$, $y=a\cdot\sin t$;
2. $x=e^{-t}\cdot\cos t$, $y=e^{t}\cdot\sin t$;
3. $x=a\cdot\text{ch}t$, $y=b\cdot\text{sh}t$;
4. $x^3+y^3-3xy=0$;

5. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$;
6. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$;
7. $\sin\left(y - x^2\right) - \ln\left(y - x^2\right) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$;
8. $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

3. Производные и дифференциалы высших порядков

3.1. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция. Производная $y' = f'(x)$ также является функцией от x. Ее производная $\left(y'(x)\right)'$, если она существует, называется производной второго порядка и обозначается $y''(x)$, $\left(f''(x), \dfrac{d^2 f}{dx^2}\right)$. Аналогично $\left(y''(x)\right)' = y'''(x)$, $\left(y'''(x)\right)' = y^{\mathrm{IV}}(x) = y^{(4)}(x)$. Производной n-го порядка функции называется производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

Пример 1. Найти формулу для производной n-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение.

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right);$$

$$y''' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right);$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

Для производных n-го порядка удобно использовать обобщение формулы $(uv)' = u'v + uv'$. Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные n-го порядка.

Справедлива следующая *формула Лейбница:*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

Пример 2. Найти производную $y^{(100)}$ для функции $y = x\cdot\sin x$.

Решение. В данном примере удобно применить формулу Лейбница, где $u = \sin x$, $v = x$.

$$(x\cdot\sin x)^{(100)} = (\sin x)^{(100)}\cdot x + \frac{100}{1}(\sin x)^{(99)}\,x' +$$
$$+\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}(\sin x)^{98}\,x'' + \ldots$$

Воспользуемся предыдущим примером:

$$(\sin x)^{(100)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}100\right) = \sin(x + 50\pi) = \sin x,$$

$$(\sin x)^{(99)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}99\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

Кроме того, $x' = 1$, $x'' = 0$, $x''' = 0$.

Поэтому $(x\cdot\sin x)^{(100)} = x\cdot\sin x - 100\cdot\cos x$.

Если функции $x(t)$, $y(t)$ дважды дифференцируемы, то для функции $y = y(x)$, заданной параметрическими уравнениями существует производная второго порядка y''_{xx}, причем $y'_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$

. Аналогично определяются последующие производные:

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} \quad \text{и т. д.}$$

Производную второго порядка можно вычислить также по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Пример 3. Найти y''_{xx} для функции $y = y(x)$, заданной параметрическими уравнениями: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Решение. Используем полученные формулы:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{3\cos^2 t \cdot (-\sin t)} = -\operatorname{tg} t;$$

$$y'_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{3\cos^2 t(-\sin t)} = \frac{1}{3\cos^4 t \sin t}.$$

3.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = y(x)$ дифференцируемая функция независимого аргумента x. Тогда дифференциал функции $dy(x) = y'(x)dx$, причем $dx = \Delta x$ не зависит от x. Дифференциал $dy(x)$ при фиксированном dx является функцией от x. Поэтому можно рассмотреть дифференциал от этой функции $d\left(dy(x)\right)$, который называется дифференциалом второго порядка функции $y(x)$ и обозначается $d^2y(x)$. Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d\left(d^2y\right), \ldots, d^{(n)}y = d\left(d^{(n-1)}y\right)$.

При вычислении дифференциалов высших порядков воспользуемся следующими формулами:

$$d^2y = y''(x)(dx)^2, \ldots, d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n.$$

При вычислении дифференциалов высших порядков для сложной функций $y = f(x)$, где $x = x(t)$ — зависимая переменная, обращаем внимание на то, что

$$dy = y'_x dt = \left(y'_x \cdot x'_t\right)dt = y'_x \cdot \left(x'_t dt\right) = y'_x dx,$$

т. е. форма дифференциала первого порядка $dy(x) = y'(x)dx$ имеет один и тот же вид, и когда x — независимая переменная, и когда x — зависимая переменная сложной функции $y = f(x)$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти производные второго порядка:

а) $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$;

б) $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin x$;

в) $y = -\frac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$;

г) $y = x \cdot \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) - \sqrt{a^2 + x^2}$.

2. Найти производные второго порядка параметрически заданных функций:

а) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$;

б) $x = \arccos\sqrt{t},\ y = \sqrt{t - t^2}$.

3. Найти $y^{(n)}$:

а) $y = 2^x + 2^{-x}$; б) $y = \cos x$; в) $y = \ln x$; г) $y = e^{kx}$;

д) $x = \ln t,\ y = \dfrac{1}{t}$; е) $x = at + b,\ \ y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

4. Показать, что функция $y = e^x + 2e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

5. Показать, что функция $y = x^3$ удовлетворяет уравнению $y^{(5)} + y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$.

6. Найти $dy,\ d^2y,\ d^3y$, если $y = x(\ln x - 1)$.

4. Формула Тейлора

Функция $f(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку x_0, может быть представлена в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена r_n:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n$$

— *формула Тейлора*.

Остаточный член формулы Тейлора может быть записан *в форме Пеано*: $r_n = o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$, где $o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\left(x-x_0\right)^n$.

Если в окрестности точки $x = x_0$ существует $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный член можно записать в форме Лагранжа:

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}, \xi = x_0 + \theta\left(x-x_0\right), 0<\theta<1,$$

(т. е. ξ лежит между точками x_0 и x).

Если $x_0 = 0$, то получим *формулу Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + r_n,$$

где $r_n = \dfrac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1.$

Приведем разложение некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n, r_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$0<\theta<1.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m},$$

$$r_{2m} = (-1)^m \cos(\theta x)\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},\ 0<\theta<1,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m+1},$$

$$r_{2m+1} = (-1)^{m+1} \cos(\theta x) \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}, 0 < \theta < 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{3!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{(n)!} x^n + r_n,$$

$$r_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}, 0 < \theta < 1.$$

Пример 1. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до $0,0001$.

Решение. По формуле Маклорена имеем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_{n,}\ r_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Полагая $x = \frac{1}{2}$, получим:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + r_n,$$

где $r_n = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Так как, $0 < \theta < 1$, $0 < e < 3$, то $r_n = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}$, но $e^{\frac{1}{2}} < 2$, поэтому $r_n < \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.

Требуется определить n так, чтобы выполнялось неравенство $r_n < 0{,}0001$:

$$n=3 \Rightarrow r_3 < \frac{1}{8\cdot 24},\ r_3 < \frac{1}{192};$$

$$n=4 \Rightarrow r_3 < \frac{1}{16\cdot 120}, \qquad r_3 < \frac{1}{1920};$$

$$n=5 \Rightarrow r_5 < \frac{1}{32\cdot 720},\ r_3 < 0{,}0001.$$

Для определения $\sqrt{e}$ с точностью до $0{,}0001$ получаем приближенное равенство

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \frac{1}{2^4\cdot 4!} + \frac{1}{2^5\cdot 5!} \approx 1{,}6487.$$

Пример 2. Представить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $(x-1)$.

Решение.

Вычислим значения функции $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ и ее производных до пятого порядка включительно при $x_0=1$:

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}, \quad f(1)=1;$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}, \quad f'(1)=\frac{1}{3};$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot x^{-\frac{5}{3}},\ f'(1)=-\frac{2}{9};$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}\cdot x^{-\frac{8}{3}}, \quad f'''(1)=\frac{10}{27};$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{80}{81} \cdot x^{-\frac{11}{3}}, \quad f^{IV}(1) = -\frac{80}{81};$$

$$f^{V}(x) = \frac{880}{243} \cdot x^{-\frac{14}{3}}, \qquad f^{V}(1) = \frac{880}{243}.$$

Следовательно, по формуле Тейлора получим

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 -$$

$$-\frac{80}{81 \cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243 \cdot 5!}(x-1)^5 + r_5,$$

где $r_5 = \frac{f^{IV}(\xi)}{6!}(x-1)^6 = -\frac{12320}{729 \cdot 6!}\xi^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6,\ 1 < \xi < x.$

Пример 3. Представить функцию $f(x) = a^x\ (a > 0)$ в виде многочлена третьей степени относительно x.

Решение.

$$f(x) = a^x, \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = a^x \ln a, \quad f'(0) = \ln a;$$

$$f''(x) = a^x \ln^2 a, \quad f''(0) = \ln^2 a;$$

$$f'''(x) = a^x \ln^3 a, \quad f'''(x) = \ln^3 a;$$

$$f^{IV}(x) = a^x \ln^4 a, \quad f^{IV}(x) = \ln^4 a \cdot a^{\theta x}.$$

По формуле Маклорена получаем

$$a^x = 1 + x \cdot \ln a + \frac{x^2 \cdot \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 a}{3!} + r_3,$$

где $r_3 = \frac{x^4 \cdot \ln^4 a}{4!} \cdot a^{\theta x}.$

Пример 4. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}.$$

Решение. Так как знаменатель равен x^3, то достаточно найти разложение числителя до $\mathrm{o}\left(x^3\right)$. Поэтому для первого слагаемого воспользуемся разложением

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Положим $n=1$, $\alpha=\frac{1}{3}$, заменим x на $\left(-x^2\right)$ и учтем, что $x\cdot\mathrm{o}\left(x^2\right)=\mathrm{o}\left(x^3\right)$. Тогда

$$\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2} = \left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right),$$

$$\frac{\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{o}\left(x^3\right)}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}=\frac{1}{2},\quad\left(\text{т. к.}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{o}\left(x^3\right)}{x^3}=0\right).$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Вычислить с точностью до 10^{-3}:

а) $\cos 41^\circ$; б) $\sqrt[3]{121}$; в) $\sqrt[3]{e}$; г) $\sqrt[7]{129}$; д) $\sin 36^\circ$.

2. Представить в виде многочлена третьей степени относительно $(x-x_0)$, где $x \neq 0$, функцию $\frac{1}{x}$.

3. Разложить функцию $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ по степеням $(x-2)$.

4. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin x-x\cdot(x+1)}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2},(a>0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

5. Правило Лопиталя

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\varphi'(x)\neq 0$. Если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0 \text{ или} \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty,$$

т. е. частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке $x=x_0$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

если предел в правой части этого равенства существует.

Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ также есть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т. д.

Пример 1. Найти

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}.$$

Решение. Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x \to 1$, а потому имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Воспользуемся правилом Лопиталя, то есть рассмотрим предел отношения производных функций:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \to 1} \frac{2x + \dfrac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Пример 2. Найти

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x},$$

если n — целое положительное число.

Решение. При $x \to +\infty$ имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Применим правило Лопиталя n раз:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot (n-1) x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1}{e^x} = 0.$$

При $x \to -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{e^x} \to \infty$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^2\ln x\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[0\cdot\infty\right]$. Преобразуем выражение и получим неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}x^2=0.$$

Пример 4. Найти

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\infty-\infty\right]$. Приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{e^x\left(2+x\right)}\right)=\frac{1}{2}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x\right)^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0, обозначим данную функцию через y, т. е. $y=\left(\sin x\right)^x$ и прологарифмируем ее:

$$\ln y = x \cdot \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя (имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} x \cdot \ln \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 0.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

Найти пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \left(e^x + e^{-x}\right)\cos x)}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^x - e^a\right)}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^n}, (n > 0)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1 + 2\ln \sin x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} \pi x)$; к) $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$;

л) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$; м) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$;

н) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$; о) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

п) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; р) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

6. Исследование функций. Построение графиков

Определение. *Асимптотой* графика функции $y=f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по графику функции.

Асимптота может быть *вертикальной*, *горизонтальной* и *наклонной*.

График функции имеет *вертикальную асимптоту* $x=a$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ ($-\infty$).

Пример 1. График функции $y=\dfrac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x=2$. Действительно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty \text{ и } \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty.$$

График функции имеет *горизонтальную асимптоту* $y=b$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из пределов

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ или } \lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ равен } b.$$

Пример 2. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет горизонтальные асимптоты $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Теорема (о необходимом и достаточном условиях существования наклонной асимптоты кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$): Пусть функция $f(x)$ определена на $(a;+\infty)$. Прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота для $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда

1) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ — конечное число;

2) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right] = b$ — конечное число.

Теорема (о достаточном условии строгой монотонности функции на промежутке): $\forall f(x), x \in (a;b)$,

$$\left(\forall x \in (a;b)\, f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(f(x) \uparrow \text{на}\, (a;b) \right);$$

аналогично для строгого убывания функции

$$\left(\forall x \in (a;b)\, f'(x) < 0 \right) \Rightarrow \left(f(x) \downarrow \text{на}\, (a;b) \right).$$

Теорема (необходимое условие существования точки локального экстремума функции): если функция $f(x)$ непрерывна в $O(x_0)$ и имеет экстремум в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$ или не существует $f'(x_0)$.

Теорема (достаточное условие существования точки локального экстремума функции): если

1) $f(x)$ — непрерывна на $(a;b)$ и дифференцируема в $O(x_0)$; $O(x_0) \subset (a;b)$, кроме, возможно, точки x_0;

2) $f'(x_0)=0$ или не существует $f'(x_0)$;

3) $f'(x)$, $x\in O(x_0)$ меняет знак в точке x_0 при переходе слева направо через x_0, то $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0.

Теорема (о достаточном условии существования точки локального экстремума функции): пусть функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема на $(a;b)$; для всякого $x\in(a;b)$ $f''(x)$ — непрерывная функция. Тогда если

1) $f'(x_0)=0$;

2) $f''(x_0)\neq 0$, то при $f''(x_0)>0$ точка $x=x_0$ является точкой локального минимума функции $f(x)$; при $f''(x_0)<0$ $x=x_0$ — точка локального максимума функции $f(x)$.

Теорема (о достаточном условии выпуклости функции на промежутке): для всякой дважды дифференцируемой на $(a;b)$ функции справедливы утверждения: $(f''(x)>0$ на $(a;b))$ $\Rightarrow(f(x)$ вогнута на $(a;b))$, а также $(f''(x)>0$ на $(a;b))$ $\Rightarrow(f(x)$ выпукла на $(a;b))$.

Пример 1. Построить график функции с минимальным использованием математического аппарата:

$$f(x)=\frac{4x^5+12x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}.$$

Решение. Минимальное использование математического аппарата предполагает построение функции, не используя производные:

1) функция определена при $x\neq-2$; $x\neq\pm1$.

2) $f(x) \to \infty$ при $x \to -2$; $x \to \pm 1$. Значит прямые $x = -2$; $x = \pm 1$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

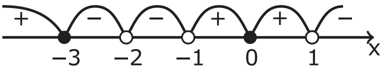


Рис. 2.3

3) нули функции: $x = 0$, $x = -3$, знаки функции найдем методом интервалов (рис. 2.3),

4) исследуем поведение функции при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^5 + 12x^4}{(x+2)^2 (1 - x^2)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5 + 12x^4}{(x+2)^2 (1 - x^2)} = -\infty;$$

5) для построения графика функции следует отметить на оси *Ox* нули функции $x = 0$, $x = -3$, построить вертикальные асимптоты $x = -2$; $x = \pm 1$; учитывая знаки и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, построить график (рис. 2.4).

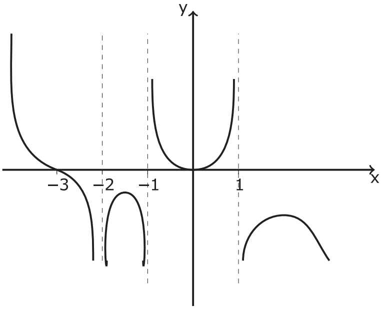


Рис. 2.4

При построении графика функции можно использовать следующую схему:

1) найти область определения функции;

2) проверить функцию на четность и нечетность;

3) проверить функцию на периодичность;

4) найти точки пересечения с осями координат;

5) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва, если они существуют, и установить характер разрыва; найти асимптоты графика функции;

6) исследовать функцию на монотонность и экстремум;

7) исследовать график функции на выпуклость, вогнутость; найти точки перегиба;

Пример 2. Исследовать функцию и построить её график:

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

Решение.

1) область определения функции $D(x) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) функция общего вида (не является четной или нечетной):

$$y(-x) = \frac{-x^3 + 4}{x^2} \neq \pm y(x);$$

3) функция не является периодической;

4) найдем асимптоты

а) точка разрыва $x = 0$, причем

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty,$$

следовательно, $x = 0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика;

б) найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = x$.

5) найдем экстремумы функции и интервалы возрастания

и убывания:

$$y' = \left(x + \frac{4}{x^2} \right)' = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3};$$

$y' = 0$ при $x = 2$; при $x = 0$ y' не существует.

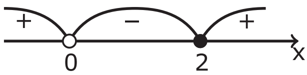


Рис. 2.5

Точки $x = 0$ и $x = 2$ разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty; 0), (0; 2), (2; +\infty)$. Определим знак производной методом интервалов и в зависимости от него возрастание или убывание функции (рис. 2.5).

Результаты исследования представим в виде таблицы.

Таблица 2.1

x	$(-\infty, 0)$	0	(0; 2)	2	$(2; +\infty)$
y'	+	∞	–	0	+
y	↗	∞	↘	$3_{\min}$	↗

6) найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки его перегиба. Так как $y'' = \dfrac{24}{x^4} > 0$, то график всюду вогнут. Точек перегиба график функции не имеет;

7) найдем точки пересечения графика с осью Ox:

$$\frac{x^3 + 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{4}.$$

Используя полученные данные, строим график функции (рис. 2.6).

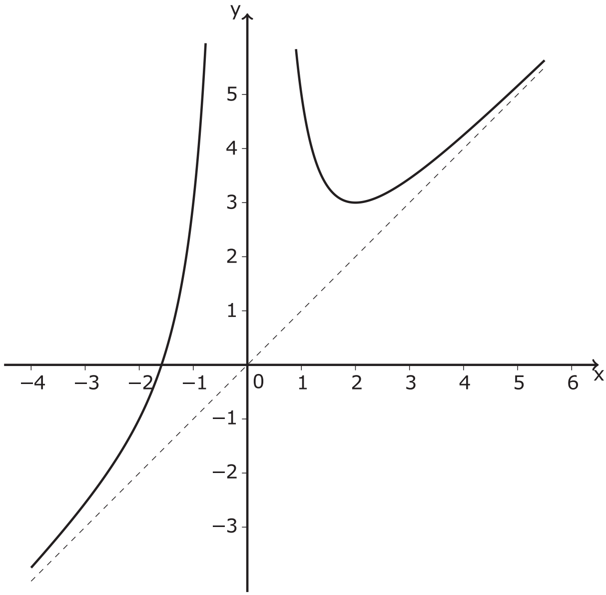


Рис. 2.6

Упражнения для самостоятельной подготовки

Исследовать функцию и построить её график:

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$; в) $y=e^{2x-x^2}$;

г) $y=3\sqrt[3]{x}-x$; д) $y=\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$; е) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

ж) $y=\sin^2 x$; з) $y=16x\cdot(x-1)^3$; и) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

Глава 3.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Основные понятия

При решении различных прикладных задач зачастую приходится встречаться с *функциями нескольких переменных*.

Приведем ряд примеров:

1) объем V кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой h, определяемый формулой $V = \pi R^2 h$ — функция двух переменных;

2) дальность L полета снаряда, выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, ствол которого наклонен к горизонту под углом α, которая равна $L = \left(v_0^2 \sin 2\alpha\right) / g$ — функция двух переменных;

3) сила тока I, зависящая, согласно закону Ома, от двух величин: напряжения U в цепи электрического тока и сопротивления R цепи по формуле $I = U / R$ — функция двух переменных;

4) определение цвета в RGB-виде, зависящее от интенсивности красной r, зеленой g и синей b составляющих цвета — функция трех переменных;

5) свойства материального тела (плотность, температура, напряжение и т. п.) в общем случае меняются от точки к точке с течением времени, таким образом, зависят от четырех пере-

менных величин — декартовых координат точки x, y, z и времени t, и являются функциями четырех переменных.

Определение. Если каждой совокупности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значений n независимых друг от друга переменных из некоторого множества D точек n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие одно значение величины $y \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана *функция нескольких переменных* (функция n переменных) $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на области $D \subset \mathbb{R}^n$.

В случае функции двух переменных $y = f(x_1, x_2)$ можно записывать $z = f(x, y)$. Геометрически паре (x, y) на координатной плоскости Oxy соответствует точка M с координатами (x, y); области определения D — часть плоскости Oxy. Геометрическое место точек вида $P\big(x, y, z = f(x, y)\big)$ называется графиком функции двух переменных и представляет, вообще говоря, некоторую поверхность.

Для обозначения функции трех переменных $y = f(x_1, x_2, x_3)$ можно использовать запись $u = f(x, y, z)$; здесь тройке (x, y, z) в пространстве $\mathbb{R}^3$ соответствует точка M с координатами (x, y, z).

Пример 1. Найти и построить область определения и график функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение.

Область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ — множество точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству $4 - x^2 - y^2 \geq 0$. Запишем неравенство в виде

$x^2 + y^2 \le 4$. Оно задает на плоскости Oxy круг (включая границу) радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 3.1, *а*).

Графиком функции является множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z \ge 0, \end{cases}$$

т. е. «верхняя» полусфера радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 3.1, *б*).

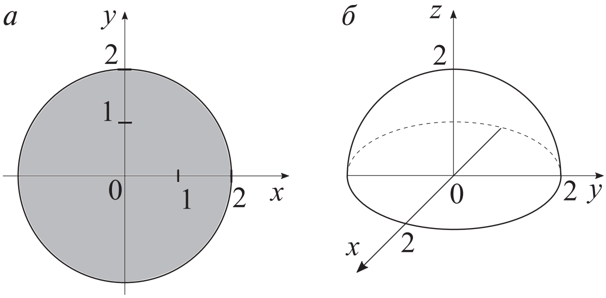


Рис. 3.1

Для характеристики множества $D \subset \mathbb{R}^n$ введем ряд терминов и обозначений.

Произвольную точку множества D будем обозначать $\bar{x}$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

Определение. ε-*окрестностью* точки $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется множество всех точек $\bar{x}$, удаленных от $\bar{x}^0$ менее чем на ε, т. е. множество $O_\varepsilon(\bar{x}^0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\bar{x}, \bar{x}^0) < \varepsilon\}$, где

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}^0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2}.$$

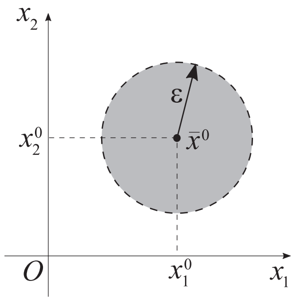


Рис. 3.2

В случае $\mathbb{R}^2$ ε-окрестность точки $\bar{x}^0$ — множество всех точек, лежащих внутри круга (без границы) радиуса ε с центром в точке $\bar{x}^0$ (рис. 3.2).

Если $\bar{x}^0 \in \mathbb{R}^3$, то $O_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right)$ — множество всех точек, лежащих внутри шара (без границы) радиуса ε с центром в точке $\bar{x}^0$.

В общем случае, если $\bar{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, то $O_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right)$ — множество всех точек, лежащих внутри n-мерного шара (без границы) радиуса ε с центром в точке $\bar{x}^0$.

Определение. *Выколотой ε-окрестностью* точки $\bar{x}^0$ называется множество $\check{O}_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right) = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \neq \bar{x}^0 \wedge \rho\left(\bar{x}, \bar{x}^0\right) < \varepsilon\right\}$.

Введем понятие *ε-окрестности* бесконечности:

$$O_\varepsilon(\infty) = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \rho\left(\bar{x}, \bar{0}\right) > \varepsilon\right\},$$

где ε — сколь угодно большое положительное число.

Определение. Точка $\bar{x}^0$ называется *внутренней* точкой множества D, если она входит в D вместе с некоторой своей окрестностью, т. е. $\exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right) \subseteq D$.

Определение. Точка $\bar{x}^0$ называется *граничной* точкой множества D, если в любой ее окрестности существует точка, принадлежащая множеству D, и точка, не принадлежащая множеству D, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{x} \in O_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right)\ \exists \bar{x}^* \in O_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right) : \bar{x} \in D \wedge \bar{x}^* \notin D$.

Множество всех граничных точек множества D образует *границу* множества D и обозначается $\Gamma(D)$ или Γ_D.

Определение. Точка $\bar{x}^0$ называется *изолированной* точкой множества D, если можно указать окрестность этой точки, не содержащую других точек множества D, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right) \cap D == \left\{\bar{x}^0\right\}.$$

Определение. Точка $\bar{x}^0$ называется *предельной* точкой множества D, если в любой ее окрестности существует хотя бы одна точка (отличная от точки $\bar{x}^0$), принадлежащая множеству D, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in O_\varepsilon\left(\bar{x}^0\right) : \bar{x} \in D \setminus \left\{\bar{x}^0\right\}$, другими словами, в любой окрестности предельной точки содержится бесконечно много точек множества D.

Определение. Множество D называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Определение. Множество D называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Множество D называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором замкнутом шаре $O_R\left[\bar{x}^*\right]$, т. е. $\exists \bar{x}^* \ \exists R > 0 : D \subseteq O_R\left[\bar{x}^*\right]$.

Определение. Множество D называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной ломаной, состоящей только из точек множества D. На рис. 3.3 *а*, *б*, *в* приведены примеры связных множеств на плоскости.

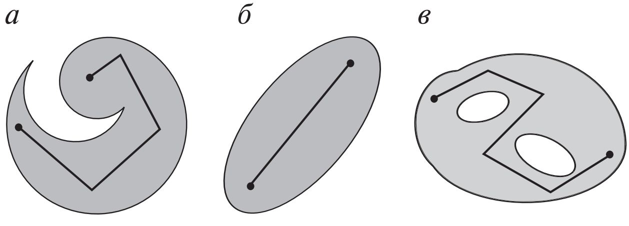


Рис. 3.3

Определение. Связное открытое множество D называется *областью*; область D вместе со своей границей Γ_D: $D \cup \Gamma_D$ — *замкнутой областью*.

Пример 2. Найти и построить множество $D(f)$ точек области определения функции $z = f(x, y)$. Указать его свойства.

а) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$;

б) $f(x, y) = \ln(x + y)$;

в) $f(x, y) = \sqrt{x^3 \cos y} - \sqrt{y \sin^3 x}$.

Решение.

а) Множество $D(f)$ определяется неравенством $xy \neq 0$, т. е. $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ — множество точек координатной плоскости Oxy за исключением прямых $x = 0$ и $y = 0$. Геометрически это множество представлено на рис. 3.4, *а*.

Свойства множества $D(f)$:

— открытое, т. к. все его точки внутренние;
— незамкнутое, т. к. не содержит свои предельные точки, лежащие на прямых $x = 0$ и $y = 0$;
— неограниченное, т. к. для круга сколь угодно большого радиуса R с центром в начале координат можно указать точку множества, например точку $(2R, 2R)$, лежащую вне этого круга;
— несвязное, т. к. не всякие две его точки можно соединить непрерывной ломаной, состоящей из точек множества $D(f)$, например, точки $A(1,1)$ и $B(-1,-1)$.

б) Множество $D(f)$ определяется неравенством $x + y > 0$, т. е. $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$ — множество точек координатной плоскости Oxy, лежащих выше прямой $y=-x$. Геометрически это множество представлено на рис. 3.4, *б*.

Свойства множества $D(f)$:

— открытое, т. к. все его точки внутренние;

— незамкнутое, т. к. не содержит свои предельные точки, лежащие на прямой $y=-x$;

— неограниченное, т. к. для круга сколь угодно большого радиуса R с центром в начале координат можно указать точку множества, например точку $(0,2R)$, лежащую вне этого круга;

— связное, т. к. любые две его точки можно соединить непрерывной ломаной, состоящей из точек множества $D(f)$.

в) Множество $D(f)$ определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x^3\cos y\ge 0,\\ y\sin^3 x\ge 0.\end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство системы:

$$x^3\cos y\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0,\\ y\in\mathbb{R},\end{cases}\\ \begin{cases} x>0,\\ \cos y\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases} x<0,\\ \cos y\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0,\\ y\in\mathbb{R},\end{cases}\\ \begin{cases} x>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\le y\le\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\end{cases}\\ \begin{cases} x<0,\\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\le y\le\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,\end{cases}\end{array}\right. \qquad (1)$$

где $k\in\mathbb{Z}$.

Преобразуем второе неравенство системы:

$$y\sin^3 x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ x\in\mathbb{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} y>0, \\ \sin x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y<0, \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ x\in\mathbb{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} y>0, \\ 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} y<0, \\ \pi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi + 2\pi k, \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

где $k\in\mathbb{Z}$.

Найдем пересечение множеств точек, координаты которых удовлетворяют совокупностям (1) и (2) — множество $D(f)$. Геометрически это множество представлено на рис. 3.4, *в*.

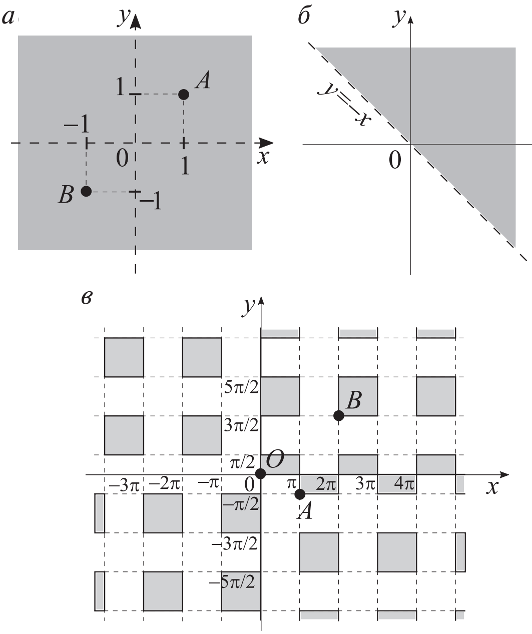


Рис. 3.4

Свойства множества $D(f)$:

— не является открытым, т. к. не все его точки внутренние, например, точка $O(0,0)$ принадлежит множеству, но не является внутренней, в данном случае она граничная;

— замкнутое, т. к. содержит все свои предельные точки (в данном примере множество предельных точек совпадает с объединением множества внутренних точек и множества граничных точек);

— неограниченное, т. к. для круга сколь угодно большого радиуса R можно указать точку множества, лежащую вне этого круга;

— не связное, т. к. не всякие две его точки можно соединить непрерывной ломаной, состоящей из точек множества $D(f)$, например, точки $A(\pi,-\pi/2)$ и $B(2\pi,3\pi/2)$.

Замечание. Понятия «открытое множество» и «замкнутое множество» не являются взаимоисключающими. Например, множество всех точек координатной плоскости Oxy является открытым и замкнутым, а множество точек, лежащих в первом квадранте координатной плоскости Oxy, включая граничные точки (т. е. $x \ge 0$ и $y \ge 0$), — не является ни открытым, ни замкнутым.

Упражнения для самостоятельной подготовки

Найти и построить множество $D(f)$ точек области определения функции $z = f(x,y)$. Указать его свойства.

а) $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$;

б) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$;

в) $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}$ $(R>r)$;

г) $f(x,y)=\arccos\dfrac{y}{x}$.

2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $\bar{x}^0$ — предельная точка множества D точек области определения D функции нескольких переменных $y=f(\bar{x})$, где $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(\bar{x})$ при $\bar{x}\to\bar{x}^0$ или в точке $\bar{x}^0$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall\bar{x}\in D:\bar{x}\in\check{O}_\delta(\bar{x}^0)\Rightarrow\left|f(\bar{x})-A\right|<\varepsilon.$$

Пишется: $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}^0}f(\bar{x})=A.$

В случае бесконечно большой при $\bar{x}\to\bar{x}^0$ функции имеем:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall\bar{x}\in D:\bar{x}\in\check{O}_\delta(\bar{x}^0)\Rightarrow\left|f(\bar{x})\right|>\varepsilon.$$

Пишется: $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}^0}f(\bar{x})=\infty.$

Здесь $\bar{x}\to\bar{x}^0$ означает, что координаты $\bar{x}$ стремятся к координатам $\bar{x}^0$ *одновременно и независимо* друг от друга (говорят о пределе *по совокупности* переменных), т. е. рассматриваются всевозможные (по различными направлениям) пути стремления точки $\bar{x}$ к точке $\bar{x}^0$.

Если же рассматривать поочередное стремление $x_k \to x_k^0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) при фиксированных значениях всех остальных координат, то получим так называемые *повторные* пределы. Повторные пределы, вообще говоря, могут оказаться различными либо не существовать.

Существование предела по совокупности переменных не связано с существованием повторных пределов, т. е. если существует предел по совокупности переменных, повторные пределы (один или несколько) могут и не существовать или быть различными; и наоборот, если повторные пределы существуют (и равны), предел по совокупности переменных может не существовать.

Пример 1. Найти, если существуют, предел функции $f(x, y)$. при $(x, y) \to (0, 0)$ по совокупности переменных и повторные пределы:

а) $f(x, y) = x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}$; в) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

б) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; г) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

Решение.

а) Воспользуемся определением предела функции нескольких переменных (в предположении, что $A = 0$) и оценим модуль функции (при любых $x \neq 0$ и $y \neq 0$):

$$|f(x, y)| = \left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| =$$

$$= |x| \left| \sin \frac{1}{y} \right| + |y| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\rho,$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние между точками (x, y) и $(0, 0)$.

Потребуем, чтобы 2ρ было меньше любого сколь угодно малого положительного ε, и решим это неравенство относительно ρ:

$$\left|f(x,y)\right| < 2\rho < \varepsilon \Rightarrow \rho < \frac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, получаем

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{2}\ \forall(x,y)\in D : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x,y)\right| < \varepsilon.$$

Показали по определению, что

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

Рассмотрим вопрос существования повторных пределов

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ и } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

Зафиксируем $x \neq 0$. Рассмотрим предел при $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right),$$

$$\nexists\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y} \Rightarrow \nexists\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y} \Rightarrow \nexists\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right).$$

Аналогично при фиксированном $y \neq 0$ получаем:

$$\nexists\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \Rightarrow \nexists\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x} \Rightarrow \nexists\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right).$$

Таким образом, повторные пределы в точке (0,0) не существуют, но существует предел по совокупности переменных.

б) Покажем, что не существует предела по совокупности переменных в точке $(0,0)$.

Рассмотрим величину предела при приближении к точке (0,0) по прямой $y = 2x$ и по прямой $y = 3x$:

$$\lim_{\substack{y=2x,\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=2x,\\ x\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5},$$

$$\lim_{\substack{y=3x,\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=3x,\\ x\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2}{10x^2} = -\frac{4}{5}.$$

Так как указанные пределы различны, то предел по совокупности переменных не существует.

Найдем повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Повторные пределы существуют, но различны; предел по совокупности переменных не существует.

в) Покажем, что не существует предела по совокупности переменных в точке $(0,0)$.

Рассмотрим величину предела при приближении к точке (0,0) по прямой $y = x$ и по параболе $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{y=x,\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=x,\\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\substack{y=x^2,\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=x^2,\\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + x^2} = 0.$$

Так как указанные пределы различны, то предел по совокупности переменных не существует.

Найдем повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0.$$

Повторные пределы существуют и равны между собой; предел по совокупности переменных не существует.

г) Перейдем к полярной системе координат: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$

Получим

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{\rho\to 0,\\ \forall\varphi}}\frac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}=$$
$$=\lim_{\substack{\rho\to 0,\\ \forall\varphi}}\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi=0.$$

Найдем повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0.$$

В этом случае совпали все три значения, и повторные пределы, и предел по совокупности переменных.

Пусть $\bar{x}^0$ — предельная точка множества D. Введем понятие непрерывности в точке и на множестве функции нескольких переменных.

Определение 1. Функция нескольких переменных $f(\bar{x})$ *непрерывна в точке* $\bar{x}^0\in D$, если она определена в некоторой окрестности точки $\bar{x}^0$, существует конечный предел функции в точке, совпадающий со значением функции в точке, т. е.

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}^0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}^0).$$

Определение 2. Функция нескольких переменных $f(\bar{x})$ *непрерывна в точке* $\bar{x}^0 \in D$, если бесконечно малым приращениям независимых переменных соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е.

$$\lim_{\Delta\bar{x}\to 0} \Delta f(\bar{x}^0) = 0, \text{ где } \Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{x}^0, \Delta f(\bar{x}^0) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}^0).$$

Следует различать непрерывность по совокупности переменных и непрерывность по каждой из координат. Если функция $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}^0$ непрерывна по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то она непрерывна и по каждой переменной x_k. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 2. Исследовать функцию $z = f(x, y)$ на непрерывность в точке (0,0):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{при } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{при } x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Решение.

Функция $z = f(x, y)$ определена на всей числовой плоскости, в том числе и в точке (0,0). Рассмотрим вопрос о существовании предела функции в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \begin{bmatrix} \text{замена:} \\ x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi; \\ x\to 0 \text{ и } y\to 0 \Rightarrow \rho\to 0, \forall\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0,\\ \forall\varphi}} \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \lim_{\substack{\rho\to 0,\\ \forall\varphi}} \cos\varphi \sin\varphi.$$

Так как величина предела зависит от угла φ, т. е. зависит от направления, то предел функции в точке не существует, следовательно, функция $z = f(x, y)$ терпит разрыв в точке $(0,0)$.

Заметим, что при этом функция непрерывна и по координате x, и по координате y в отдельности:

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ \forall y\neq 0}} f(x, y) = f(0, y) = 0 = f(0,0),$$

$$\lim_{\substack{y\to 0,\\ \forall x\neq 0}} f(x, y) = f(x, 0) = 0 = f(0,0).$$

Для функции, непрерывной в точке, справедливы следующие утверждения:

— если $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{x}^0$, то в этой точке непрерывны и следующие функции:

а) $f(\bar{x}) + g(\bar{x})$; б) $f(\bar{x}) - g(\bar{x})$; в) $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})$;

г) $\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$, если $g(\bar{x}) \neq 0$ в некоторой $O_\delta\left(\bar{x}^0\right)$;

— если функция $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}^0$, а функция $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$ непрерывна в точке $\bar{t}^{\,0}$, где $\bar{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, и $\bar{\varphi}\left(\bar{t}^{\,0}\right) = \bar{x}^0$, то сложная функция $f\left(\bar{\varphi}(\bar{t})\right)$ непрерывна в точке $\bar{t}^{\,0}$.

Определение. Функция $f(\bar{x})$ *непрерывна на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Определение. Точка $\bar{x}^0 \in D$ называется *точкой разрыва* функции $f(\bar{x})$, если функция не является непрерывной в ней.

Точки разрыва могут быть как изолированными, так и заполнять собой линии, поверхности и т. п.

Пример 3. Указать множество точек разрыва следующих функций двух и трех переменных:

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; в) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{xy-z}$;

б) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$; г) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

Решение.

а) прямые $y=x$ и $y=-x$ — линии разрыва;

б) окружность $x^2+y^2=1$ — линия разрыва;

в) гиперболический параболоид $z=xy$ — поверхность разрыва;

г) конус $z^2=x^2+y^2$ — поверхность разрыва.

Справедливы следующие утверждения:

— функция, непрерывная на ограниченном, связном, замкнутом множестве, ограничена на нем;

— функция, непрерывная на ограниченном, связном, замкнутом множестве, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти, если существуют, предел функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(0,0)$ по совокупности переменных и повторные пределы:

а) $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$; в) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

б) $f(x,y)=\dfrac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; г) $f(x,y)=\dfrac{3x}{x+y^3}$.

2. Изучить поведение функции $f(x,y)$ в окрестности точек (0,0), (1,2), (–2,2), если

$$f(x,y)=\frac{2x^3+3xy}{x+y}.$$

3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

3.1. Частные производные первого порядка и полный дифференциал функции нескольких переменных

Для упрощения изложения рассмотрим случай функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в открытой области D, $(x_0,y_0)\in D$. Зафиксируем значение переменной $y=y_0$. Придадим значению x_0 приращение Δx. Получим новое значение переменной $x=x_0+\Delta x$. Функция $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) получит *частное приращение по* x:

$$\Delta_x z=\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

Аналогично, частное приращение по y равно:

$$\Delta_y z=\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Если одновременно обеим независимым переменным x и y придадим приращения Δx и Δy соответственно, то функция $z=f(x,y)$ получит *полное приращение*:

$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Вообще говоря, $\Delta z\neq\Delta_x z+\Delta_y z$.

Пример 1. Дана функция $z = x \cdot y$. Найти ее полное и частные приращения в точке (x_0, y_0).

Решение.

Найдем частные приращения функции $z = x \cdot y$:

$$\Delta_x z = (x_0 + \Delta x) \cdot y_0 - x_0 \cdot y_0 = \Delta x \cdot y_0,$$

$$\Delta_y z = x_0 \cdot (y_0 + \Delta y) - x_0 \cdot y_0 = x_0 \cdot \Delta y.$$

Полное приращение функции $z = x \cdot y$ равно:

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 \cdot y_0 = x_0 \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y_0 + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Заметим, что $\Delta_x z + \Delta_y z = \Delta x \cdot y_0 + x_0 \cdot \Delta y \neq \Delta z.$

Определение. *Частной производной первого порядка* функции $z = f(x, y)$ *по* x в точке (x_0, y_0) называется предел отношения частного приращения функции по x в точке (x_0, y_0) к приращению переменной x при стремлении последнего к нулю:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Для частной производной можно использовать следующие обозначения:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)},\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x};$$

$$z'_x,\ f'_x(x_0, y_0);\ D_x z,\ D_x f(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется *частная производная первого порядка* функции $z = f(x, y)$ *по* y в точке (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

В случае функции n переменных $y = f(\bar{x})$ частные производные первого порядка в точке $\bar{x}^0$ определяются по формулам:

$$\frac{\partial f(\bar{x}^0)}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(\bar{x}^0)}{\Delta x_k}, k = 1, 2, \ldots, n,$$

где частное приращение функции по k-й переменной равно

$$\Delta_k f(\bar{x}^0) = f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) -$$

$$-f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Таким образом, при дифференцировании функции нескольких переменных по k-й переменной все остальные переменные полагаются постоянными (константами). При этом относительно k-й переменной справедливы правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций одной переменной.

Пример 2. Найти частные производные первого порядка от следующих функций:

а) $f(x, y) = x^y$; б) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$.

Решение.

а) Частную производную по x найдем как производную степенной функции от x (при $y = \text{const}$):

$$f'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}.$$

Частную производную по y найдем как производную показательной функции от y (при $x = \text{const}$):

$$f'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x.$$

б) Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции одной переменной:

$$f'_x = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$f'_y = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Пример 3. Найти частные производные первого порядка функции $u = f(x,y,z)$ в точке $M_0(1,1,-1)$, если

$$f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение.

Для нахождения частной производной по x (при $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$) воспользуемся правилом дифференцирования дроби:

$$f'_x = \frac{(x)'_x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right) - x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)'_x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = \frac{y^2+z^2-x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}.$$

Для нахождения частной производной по y запишем функцию в виде

$$f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} = x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$$

и воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции (при $x = \text{const}$ и $z = \text{const}$):

$$f'_y = \left(x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}\right)'_y = x\cdot\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}\right)'_y =$$

$$= -x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}\cdot 2y = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}.$$

Частную производную по z (при $x=\mathrm{const}$ и $y=\mathrm{const}$) найдем аналогично:

$$f'_z = \left(x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}\right)'_z = x\cdot\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}\right)'_z =$$

$$= -x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}\cdot 2z = \frac{-2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}.$$

Вычислим значения частных производных в точке M_0:

$$f'_x\Big|_{M_0} = \left.\frac{y^2+z^2-x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{9};$$

$$f'_y\Big|_{M_0} = \left.\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right|_{M_0} = -\frac{2}{9};$$

$$f'_z\Big|_{M_0} = \left.\frac{-2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right|_{M_0} = \frac{2}{9}.$$

Механическая интерпретация частных производных первого порядка: аналогично производной функции одной переменной, частные производные первого порядка функции нескольких переменных выражают *скорость изменения* функции по направлению соответствующих координатных осей.

Рассмотрим *геометрическую интерпретацию* частных производных первого порядка на примере функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, а график функции представляет некоторую поверхность $P : z = f(x, y)$, как показано на рис. 3.5.

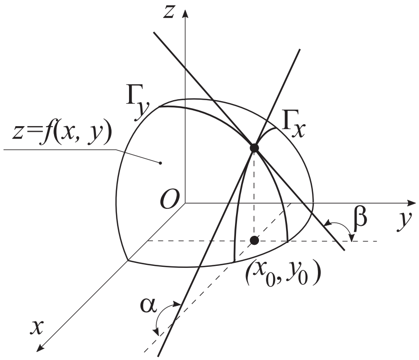


Рис. 3.5

Зафиксируем переменную $y = y_0$, получим кривую Γ_x (как результат пересечения поверхности P и плоскости $y = y_0$):

$$\Gamma_x : \begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Частная производная по x в точке (x_0, y_0) равна тангенсу угла наклона α (угловому коэффициенту) касательной прямой, проведенной к кривой Γ_x в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогично, зафиксировав переменную $x = x_0$, получим кривую Γ_y. Частная производная по y в точке (x_0, y_0) равна тангенсу угла наклона β (угловому коэффициенту) касательной прямой, проведенной к кривой Γ_y в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta.$$

Можно показать, что уравнение *касательной плоскости* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а уравнение *нормали* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0 –

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Замечание. Если уравнение поверхности задано в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0,$$

а уравнение нормали к поверхности –

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Пример 4. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1, -1, 2)$. Сделать схематичный чертеж.

Решение.

По условию $z = 4 - x^2 - y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 2$. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Вычислим их значение в точке (x_0, y_0):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = -2x\big|_{(1,-1)} = -2,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -2y\big|_{(1,-1)} = 2.$$

Подставим найденные значения в уравнение касательной плоскости, получим

$$z - 2 = -2(x-1) + 2(y+2) \text{ или } 2x - 2y + z = 8.$$

Подставим значения производных в уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Схематичный чертеж приведен на рис. 3.6.

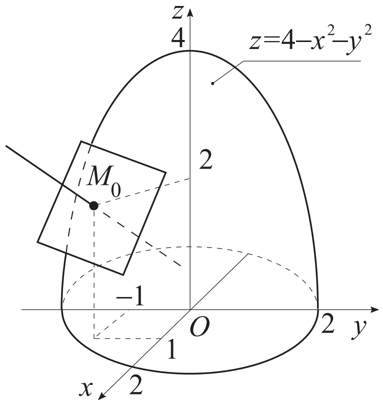


Рис. 3.6

Определение. Функция нескольких переменных $f(\overline{x})$ называется *дифференцируемой в точке* $\overline{x}^0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta f\left(\overline{x}^0\right) = \overline{a} \cdot \Delta\overline{x} + o\left(\left|\Delta\overline{x}\right|\right),$$

где $\bar{a}=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $\Delta\bar{x}=\{\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n\}$, $\Delta x_k=x_k-x_k^0$,

$$\Delta f\left(\bar{x}^0\right)=f\left(\bar{x}^0+\Delta x\right)-f\left(\bar{x}^0\right),\ \lim_{|\Delta\bar{x}|\to 0}\frac{o\left(|\Delta\bar{x}|\right)}{|\Delta\bar{x}|}=0,$$

$$|\Delta\bar{x}|=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta x_k\right)^2\right)^{1/2}.$$

Определение. Функция $f\left(\bar{x}\right)$ называется *дифференцируемой на множестве* D, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Пример 5. Показать, что функция $z=x^2y$ дифференцируема в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$.

Решение.

Радиус-вектор точки M_0 равен $\bar{r}_0=\{x_0,y_0\}$. Дадим ему приращение $\Delta\bar{r}=\{\Delta x,\Delta y\}$. Получим точку M, радиус-вектор которой равен $\bar{r}=\bar{r}_0+\Delta\bar{r}$ или $\{x,y\}=\{x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y\}$. Тогда полное приращение функции $\Delta z\left(M_0\right)=z\left(M\right)-z\left(M_0\right)$ равно

$$\Delta z\left(M_0\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^2\left(y_0+\Delta y\right)-x_0^2y_0=$$

$$=2x_0y_0\Delta x+x_0^2\Delta y+2x_0\Delta x\Delta y+y_0\Delta x^2+\Delta x^2\Delta y.$$

Обозначим $\bar{a}=\left\{2x_0y_0,\ x_0^2\right\}$. Покажем, что $2x_0\Delta x\Delta y+y_0\Delta x^2+$ $+\Delta x^2\Delta y=o\left(|\Delta\bar{r}|\right)$ при $\Delta\bar{r}\to 0$. Действительно,

$$\lim_{|\Delta\bar{r}|\to 0}\frac{o\left(|\Delta\bar{r}|\right)}{|\Delta\bar{r}|}=\lim_{|\Delta\bar{r}|\to 0}\frac{2x_0\Delta x\Delta y+y_0\Delta x^2+\Delta x^2\Delta y}{|\Delta\bar{r}|}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{замена:}\\ \Delta x=\rho\cos\varphi,\ \Delta y=\rho\sin\varphi;\\ \left|\Delta\overline{r}\right|\to 0\Rightarrow\rho\to 0,\forall\varphi\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\varphi}}\frac{2x_0\rho^2\cos\varphi\,\sin\varphi+y_0\rho^2\cos^2\varphi+\rho^3\cos^2\varphi\,\sin\varphi}{\rho}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\varphi}}\left(2x_0\rho\cos\varphi\,\sin\varphi+y_0\rho\cos^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi\,\sin\varphi\right)=0.$$

Получаем, что $\Delta z\left(M_0\right)=\overline{a}\cdot\Delta\overline{r}+o\left(\left|\Delta\overline{r}\right|\right)$, т. е. функция дифференцируема в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$ по определению.

Сформулируем теоремы о связи дифференцируемости с непрерывностью, существованием частных производных и условия дифференцируемости в точке.

Теорема. Если функция $f\left(\overline{x}\right)$ дифференцируема в точке $\overline{x}^0$, то она непрерывна в этой точке.

Теорема. Если функция $f\left(\overline{x}\right)$ дифференцируема в точке $\overline{x}^0$, то в этой точке существуют частные производные первого порядка функции $f\left(\overline{x}\right)$ по каждой переменной.

Теорема (достаточные условия дифференцируемости в точке). Если в некоторой окрестности $O\left(\overline{x}^0\right)$ точки $\overline{x}^0$ существуют частные производные первого порядка функции $f\left(\overline{x}\right)$ по всем ее аргументам, непрерывные в самой точке $\overline{x}^0$, то функция $f\left(\overline{x}\right)$ дифференцируема в точке $\overline{x}^0$.

Следствие. Полное приращение дифференцируемой в точке функции можно представить в виде

$$\Delta f\left(\overline{x}^0\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\overline{x}^0\right)}{\partial x_k}\cdot\Delta x_k+o\left(\left|\Delta\overline{x}\right|\right).$$

Определение. *Полным дифференциалом* функции нескольких переменных называется главная линейная часть полного приращения этой функции:

$$df\left(\overline{x}^0\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\overline{x}^0\right)}{\partial x_k}\cdot\Delta x_k.$$

Под дифференциалами независимых переменных dx_k понимаются произвольные приращения Δx_k, поэтому полный дифференциал можно записать в виде:

$$df\left(\overline{x}^0\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\overline{x}^0\right)}{\partial x_k}\cdot dx_k.$$

Пример 6. Найти полный дифференциал функции $z=yx^y$.

Решение.

Полный дифференциал функции двух переменных равен

$$dz=z_x'dx+z_y'dy.$$

Найдем частные производные заданной функции:

$$z_x'=\left(yx^y\right)_x'=y^2x^{y-1},\quad z_y'=\left(yx^y\right)_y'=x^y+yx^y\ln x.$$

Запишем полный дифференциал:

$$dz=y^2x^{y-1}dx+x^y\left(1+y\ln x\right)dy.$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных применяется в приближенных вычислениях: при вычислении приближенного значения функции и при оценке погрешностей.

Рассмотрим на примере функции двух переменных.

Полное приращение функции $z=f\left(x,y\right)$ в точке $\left(x_0,y_0\right)$ равно $\Delta z=f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)$. С другой стороны, полное приращение приближенно равно

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Тогда формула для вычисления приближенного значения функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ имеет вид:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Пример 7. Вычислить приближенно $(1,02)^3 \cdot (0,98)^2$.

Решение.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = x^3 \cdot y^2$. Искомое число можно считать значением этой функции в точке (x, y) при $x = x_0 + \Delta x = 1,02,\ y = y_0 + \Delta y = 0,98$. Пусть $x_0 = 1,\ y_0 = 1$. Тогда $\Delta x = 0,02,\ \Delta y = -0,02,\ z(x_0, y_0) = 1$.

Найдем частные производные функции в точке $(1,1)$:

$$z'_x\Big|_{(x_0,\, y_0)} = \left(x^3 \cdot y^2\right)'_x\Big|_{(1,\,1)} = 3x^2y^2\Big|_{(1,\,1)} = 3,$$

$$z'_y\Big|_{(x_0,\, y_0)} = \left(x^3 \cdot y^2\right)'_y\Big|_{(1,\,1)} = 2x^3y\Big|_{(1,\,1)} = 2.$$

Подставим численные значения в формулу для вычисления приближенного значения функции, получим:

$$(1,02)^3 \cdot (0,98)^2 \approx 1 + 3 \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,02) = 1,02.$$

Рассмотрим использование полного дифференциала для оценки погрешности вычислений на примере функции двух переменных.

Пусть Δ_x и Δ_y — абсолютные погрешности аргументов x и y:

$$|\Delta x| \le \Delta_x,\ |\Delta y| \le \Delta_y.$$

Оценим полное приращение функции $z = f(x,y)$:

$$|\Delta z| \approx |dz| = |z'_x \Delta x + z'_y \Delta y| \le |z'_x||\Delta x| + |z'_y||\Delta y|.$$

Тогда за предельную *абсолютную погрешность* Δ_z функции $z = f(x,y)$ можно принять $\Delta_z = |z'_x|\Delta_x + |z'_y|\Delta_y$.

Пример 8. При измерении на местности треугольника ABC получены следующие данные: сторона $a = 200$ м ± 2 м, сторона $b = 300$ м ± 5 м, угол между ними $C = 60° \pm 1°$. С какой абсолютной погрешностью может быть вычислена третья сторона c?

Решение.

Для вычисления длины u стороны c воспользуемся теоремой косинусов, получим

$$u(a,b,C) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

Найдем частные производные функции трех переменных в точке $M_0(200,300,60)$:

$$u'_a\Big|_{M_0} = \frac{a - b\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}}\Bigg|_{M_0} \approx 0{,}189,$$

$$u'_b\Big|_{M_0} = \frac{b - a\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}}\Bigg|_{M_0} \approx 0{,}756,$$

$$u'_C\Big|_{M_0} = \frac{ab\sin C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}}\Bigg|_{M_0} \approx 196{,}396.$$

Абсолютные погрешности аргументов равны

$$\Delta_a = 2\text{ м},\ \Delta_b = 5\text{ м},\ \Delta_C = 1° \approx 0{,}017\text{ рад}.$$

Тогда абсолютная погрешность, с которой может быть вычислена третья сторона, равна

$$\Delta_u = |u'_a|\Delta_a + |u'_b|\Delta_b + |u'_C|\Delta_C \approx 7{,}586 \text{ м}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти частные производные первого порядка функций:

а) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$; г) $u = \ln\left(1 + \dfrac{y}{xz}\right)$;

б) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; д) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$;

в) $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$; е) $u = (xz)^{\frac{x}{y}}$.

2. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) $z = -\sqrt{12 - x^2 - 4y^2}$, $M_0(2,1,-2)$;

б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$, $M_0(4,3,4)$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$, $M_0\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 3\right)$.

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; в) $z = x \cdot \sin(x+y)$;

б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; г) $u = x^{y^z}$.

4. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$; б) $\sin 32° \cdot \cos 59°$; в) $\dfrac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{(1{,}05)^3}}}$.

При переводе градусов в радианы брать три значащие цифры, последний знак округлить.

3.2. Дифференцирование сложных функций

Рассмотрим два случая дифференцирования сложной функции на примере функции двух переменных.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и каждая из переменных (так называемых *промежуточных переменных*) в свою очередь является дифференцируемой функцией независимой переменной t: $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, то производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

В частности, если $z = f(x, y)$ и $y = \psi(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и каждая из переменных в свою очередь является дифференцируемой функцией двух независимых переменных u и v: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то частные производные сложной функции $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ по независимым переменным u и v могут быть вычислены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Во всех рассмотренных случаях справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Формулы производных сложной функции могут быть распространены и на другие виды сложных функций нескольких переменных по общему правилу: производная сложной функции по независимой переменной равна сумме произведений частных производных внешней функции по каждой из промежуточных переменных на производные этих промежуточных переменных по указанной независимой переменной.

Пример 1. Вычислить все производные первого порядка по независимым аргументам от следующих сложных функций:

а) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, где $x = uv, y = \dfrac{v}{u}$;

б) $z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$, где $x = \mathrm{tg}^2 t, y = \mathrm{ctg}^2 t$;

в) $u = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = 3x + 1$;

г) $u = t^2 x + \dfrac{t}{y^2}$, где $y = \cos\left(2t + x^2\right)$.

Решение.

а) Имеем две промежуточные переменные x и y, каждая из которых в свою очередь является функцией двух независимых переменных u и v. Таким образом, требуется найти частные производные функции z по u и по v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Найдем все составляющие:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \ln\left(x^2 + y^2\right)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln\left(x^2 + y^2\right)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial (uv)}{\partial u} = v,\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial (uv)}{\partial v} = u,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial\left(\frac{v}{u}\right)}{\partial u} = -\frac{v}{u^2},\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial\left(\frac{v}{u}\right)}{\partial v} = \frac{1}{u}.$$

Получим искомые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot v + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{v}{u^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot u + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{u}, \text{ где } x = uv, y = \frac{v}{u}.$$

После подстановки и упрощения получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2\left(u^4 - 1\right)}{u\left(u^2 + 1\right)},\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2}{v}.$$

б) Здесь две промежуточные переменные x и y, каждая из которых в свою очередь является функцией одной независимой переменной t. Таким образом, требуется найти полную производную сложной функции z по t:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Найдем все составляющие:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{2x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}\right)}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{2y},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\mathrm{tg}^2 t\right)}{dt} = 2\mathrm{tg}t\cdot\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\left(\mathrm{ctg}^2 t\right)}{dt} = 2\mathrm{ctg}t\cdot\frac{-1}{\sin^2 t} = -\frac{2\cos t}{\sin^3 t}.$$

Получим искомую полную производную:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2x}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^3 t} + \frac{-1}{2y}\cdot\frac{-2\cos t}{\sin^3 t},\quad \textit{где}\; x = \mathrm{tg}^2 t, y = \mathrm{ctg}^2 t.$$

После подстановки и упрощения получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4}{\sin 2x}.$$

в) В данном случае функция u зависит от двух переменных x и y, причем переменная y в свою очередь является функцией одной независимой переменной x. Таким образом, требуется найти полную производную сложной функции u по x:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Найдем все составляющие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(\dfrac{x^2 - y}{x^2 + y}\right)}{\partial x} = \frac{2x\left(x^2 + y\right) - 2x\left(x^2 - y\right)}{\left(x^2 + y\right)^2} = \frac{4xy}{\left(x^2 + y\right)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\left(\dfrac{x^2 - y}{x^2 + y}\right)}{\partial y} = \frac{-\left(x^2 + y\right) - \left(x^2 - y\right)}{\left(x^2 + y\right)^2} = \frac{-2x^2}{\left(x^2 + y\right)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(3x + 1\right)}{dx} = 3.$$

Получим искомую полную производную:

$$\frac{du}{dx} = \frac{4xy - 6x^2}{\left(x^2 + y\right)^2}, \text{где } y = 3x + 1.$$

После подстановки и упрощения получим:

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x\left(3x + 2\right)}{\left(x^2 + 3x + 1\right)^2}.$$

г) Здесь функция u зависит от трех переменных x, y и t, причем переменная y в свою очередь является функцией двух независимых переменных x и t. Таким образом, требуется найти частные производные функции u по x и по t:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Найдем все составляющие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(t^2 x + \dfrac{t}{y^2}\right)}{\partial x} = t^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\left(t^2x+\dfrac{t}{y^2}\right)}{\partial y}=-\frac{2t}{y^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\left(t^2x+\dfrac{t}{y^2}\right)}{\partial t}=2tx+\frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial\left(\cos\left(2t+x^2\right)\right)}{\partial x}=-\sin\left(2t+x^2\right)\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial\left(\cos\left(2t+x^2\right)\right)}{\partial t}=-\sin\left(2t+x^2\right)\cdot 2.$$

Получим искомые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=t^2+\frac{4tx}{y^3}\cdot\sin\left(2t+x^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2tx+\frac{1}{y^2}+\frac{4t}{y^3}\cdot\sin\left(2t+x^2\right),\ \text{где } y=\cos\left(2t+x^2\right).$$

После подстановки получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=t^2+\frac{4tx}{\cos^3\left(2t+x^2\right)}\cdot\sin\left(2t+x^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2tx+\frac{1}{\cos^2\left(2t+x^2\right)}+\frac{4t}{\cos^3\left(2t+x^2\right)}\cdot\sin\left(2t+x^2\right).$$

Пример 2. Показать, что функция $z=y\cdot f\left(x^2-y^2\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

Решение.

Обозначим $u(x,y) = x^2 - y^2$. Тогда $z = y \cdot f\left(u(x,y)\right)$ — сложная функция. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f'_u \cdot u'_x = y \cdot f'_u \cdot 2x = 2xyf'_u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f + y \cdot f'_u \cdot u'_y = f - y \cdot f'_u \cdot 2y = f - 2y^2 f'_u.$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot 2xyf'_u + \frac{1}{y} \cdot \left(f - 2y^2 f'_u\right) =$$

$$= 2yf'_u + \frac{f}{y} - 2yf'_u = \frac{f}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти все производные первого порядка по независимым аргументам от следующих сложных функций:

а) $u = \ln \sin \dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $x = 3t^2, y = \sqrt{t^2 + 1}$;

б) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, где $x = u \cdot \cos v, y = u \cdot \sin v$;

в) $u = e^{\sqrt{y}} \cdot \cos\left(x^3 + z^2\right)$, где $z = \sqrt{x + y}$;

г) $u = y^2 + \sqrt{xz} + \dfrac{1}{\cos^2 z}$, где $x = t - v, y = \dfrac{t}{v}, z = tv$;

д) $z = \operatorname{arcctg} \dfrac{y}{x}$, где $y = \ln \dfrac{t}{x}, x = t^2 + 1$;

е) $z = \operatorname{tg}^2 \ln \dfrac{x}{1 + y}$, где $x = \dfrac{\sqrt{y}}{y - 1}, y = 2 + t^3$.

2. Показать, что функция

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3.3. Дифференцирование неявно заданных функций

Сформулируем *условия существования* однозначной непрерывной *неявной функции* одной переменной*, имеющей непрерывную производную*.

Теорема. Пусть 1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в окрестности $O(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ и $F(x_0, y_0) = 0$; 2) частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ существуют и непрерывны в указанной окрестности $O(M_0)$; 3) производная $F'_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля. Тогда существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как однозначную непрерывную функцию от x: $y = f(x)$ — так называемую *неявно заданную* (*неявную*) функцию одной переменной — такую, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $f(x_0) = y_0$; кроме того, функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

На практике для вычисления производной y'_x от неявной функции одной переменной удобнее продифференцировать тождество $F\left(x, f(x)\right) \equiv 0$ по x:

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'_x = 0$$

и выразить искомую производную y'_x (при $F'_y \neq 0$):

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Пример 1. Показать, что уравнение $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$ в окрестности точки $(1,2)$ задает неявно функцию $y = f(x)$ и найти производную первого порядка от этой функции.

Решение.

Проверим, выполнены ли условия существования неявно заданной функции:

1) функция $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 1$ непрерывна на плоскости Oxy, в точке $(1,2)$ функция $F(x,y)$ равна $F(1,2) = 0$;

2) частные производные от функции: $F'_x(x,y) = 2x - 2y$ и $F'_y(x,y) = 2y - 2x$ также непрерывны на плоскости Oxy;

3) $F'_y(1,2) = 2 \neq 0.$

Условия выполнены, следовательно, рассматриваемое уравнение в окрестности точки $(1,2)$ задает неявно функцию $y = f(x)$ и ее производная равна

$$y'_x = -\frac{2x - 2y}{2y - 2x} = -\frac{x - y}{y - x}.$$

Пример 2. Вычислить производную y'_x от неявной функции, заданной уравнением

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Решение.

Продифференцируем уравнение по x, считая y функцией от x, получим

$$\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'_x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'_x\cdot x-y}{x^2}.$$

Упростим и выразим y'_x, получим

$$y'_x=\frac{x+y}{x-y}.$$

Аналогичные утверждения могут быть сформулированы и для неявных функций от нескольких переменных, в частности, *условия существования неявной функции двух переменных* (и соответствующих частных производных первого порядка).

Теорема. Пусть 1) функция $F(x,y,z)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности $O_\delta(M_0)$ точки $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ и обращается в этой точке в нуль: $F(x_0,y_0,z_0)=0$; 2) частные производные $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ и $F'_z(x,y,z)$ существуют и непрерывны в $O_\delta(M_0)$; 3) производная $F'_z(x_0,y_0z_0)$ отлична от нуля.

Тогда уравнение $F(x,y,z)=0$ в некоторой окрестности точки $P_0=(x_0,y_0)$ определяет z как однозначную непрерывную функцию от x и y: $z=f(x,y)$ такую, что $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ в окрестности точки P_0 и $f(x_0,y_0)=z_0$; кроме того, функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}.$$

На практике для вычисления частных производных от неявной функции удобнее продифференцировать тождество $F\left(x,y,f(x,y)\right)\equiv 0$ отдельно по x и по y:

$$F_x'(x,y,z)+F_z'(x,y,z)\cdot z_x'=0,$$

$$F_y'(x,y,z)+F_z'(x,y,z)\cdot z_y'=0,$$

и выразить искомые частные производные z_x' и z_y' (при $F_z'\neq 0$):

$$z_x'=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)},\ z_y'=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}.$$

Пример 3. Найти частные производные z_x' и z_y' от неявной функции, заданной уравнением $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0.$ Вычислить производные z_x' и z_y' в точке $M_0(1,1,0)$.

Решение.

Считая z функцией переменных x и y, продифференцируем уравнение по x и по y:

$$\left(x^2-2y^2+3z^2-yz+y\right)_x'=0\Rightarrow 2x+6z\cdot z_x'-y\cdot z_x'=0,$$

$$\left(x^2-2y^2+3z^2-yz+y\right)_y'=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4y+6z\cdot z_y'-z-y\cdot z_y'+1=0.$$

Выразим частные производные z_x' и z_y' из полученных уравнений:

$$z_x'=\frac{-2x}{6z-y},\ z_y'=\frac{4y+z-1}{6z-y}.$$

Вычислим значение производных z'_x и z'_y в точке $M_0(1,1,0)$:

$$z'_x\Big|_{M_0} = \left.\frac{-2x}{6z-y}\right|_{M_0} = 2,\ z'_y\Big|_{M_0} = \left.\frac{4y+z-1}{6z-y}\right|_{M_0} = -3.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Вычислить производную y'_x от следующих неявных функций, заданных уравнениями:

а) $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$;

б) $\arcsin\dfrac{x}{y} - \ln(xy) + 5 = 0$;

в) $\sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}} = 0$.

2. Найти частные производные z'_x и z'_y от неявных функции, заданных следующими уравнениями:

а) $x \cdot \cos y + y \cdot \cos z + z \cdot \cos x = 1$;

б) $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$;

в) $y^2 + \ln(xy) - \arccos\dfrac{y}{z} = 0$.

3.4. Производная по направлению. Градиент

Введем понятие *производной по направлению* на примере функции трех переменных.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в области D; точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$; вектор $\bar{l}$ задает направление оси l, проходящей через точку M_0. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}$ сонаправленный с вектором $\bar{l}$, длина которого равна M_0M (см. рис. 3.7).

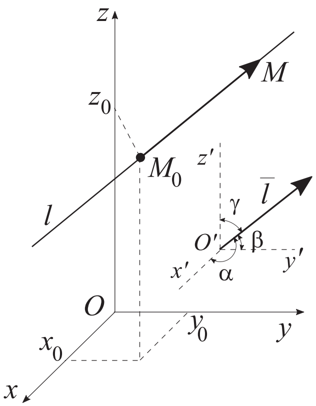


Рис. 3.7

Определение. *Производной функции* $f(M)$ *по направлению* l в точке M_0 называется предел

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}.$$

Эта производная характеризует скорость изменения функции $f(M)$ в точке M_0 по направлению l.

Предположим, что функция $f(x, y, z)$ имеет в области D непрерывные частные производные. Пусть ось l образует с осями координат углы α, β, γ; направляющие косинусы вектора $\overline{l}$ равны $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Полагаем $t = M_0M$, тогда координаты точки M можно рассматривать как функции t:

$$x = x_0 + t \cdot \cos\alpha, \ y = y_0 + t \cdot \cos\beta, \ z = z_0 + t \cdot \cos\gamma,$$

а функцию $f(M) = f(x, y, z)$ — как сложную функцию $\varphi(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ переменной t, причем точке M_0 соответствует значение t, равное нулю.

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0),$$

где $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$

Окончательно получаем формулу для вычисления производной от функции $f(x, y, z)$ по направлению l:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos\gamma.$$

Пример 1. Найти производную функции

$$u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

в точке $M_0(1,2,1)$ в направлении вектора $\overline{l} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$.

Решение.

Найдем частные производные функции u и вычислим их значение в точке $M_0(1,2,1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial\left(\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{3},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial\left(\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_{M_0} = \frac{2}{3},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial\left(\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим длину вектора $\overline{l}$:

$$\left|\overline{l}\right| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6.$$

Определим направляющие косинусы вектора $\overline{l}$:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\overline{l}\right|} = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\overline{l}\right|} = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{l_z}{\left|\overline{l}\right|} = \frac{2}{3}.$$

Воспользуемся формулой для вычисления производной по направлению, получим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

С понятием производной по направлению тесно связано понятие «градиент функции».

Определение. *Градиентом* функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным данной функции:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Говорят, что в области D определено *векторное поле градиента*.

Для обозначения градиента может также использоваться *оператор набла*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

Тогда $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

Рассмотрим единичный вектор $\bar{l}_0$, сонаправленный с $\bar{l}$:

$$\bar{l}_0 = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} u$ и $\bar{l}_0$:

$$\operatorname{grad} u \cdot \bar{l}_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \bar{l}_0 = \text{пр}_l \operatorname{grad} u.$$

Проекция ненулевого вектора $\operatorname{grad} u$ на направление вектора $\bar{l}_0$ принимает наибольшее значение, если $\operatorname{grad} u$ сонаправлен с $\bar{l}$. Следовательно, градиент функции направлен в сторону наибольшей скорости возрастания функции в данной точке, а значение этой скорости равно длине вектора градиента:

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Пример 2. Найти направление и величину наибольшей скорости возрастания функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M_0(2,-2,1)$.

Решение.

Найдем частные производные функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ и вычислим их значение в точке $M_0(2,-2,1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.2x\right|_{M_0} = 4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.2y\right|_{M_0} = -4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.2z\right|_{M_0} = 2.$$

Градиент функции в точке M_0 равен:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = 4\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Найдем длину градиента:

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6.$$

Получим, что наибольшая скорость возрастания функции будет в направлении вектора $4\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$ и ее величина равна 6.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти производную функции

$$u = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x^2yz$$

в точке $M_0(1,2,1)$ в направлении, образующем равные углы с осями координат.

2. Найти производную функции $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ в точке $M(1,2)$ в направлении от этой точки к точке $N(4,6)$.

3. Найти направление и величину наибольшей скорости возрастания функции $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$ в точке $M(1,-1,1)$.

4. Найти угол между градиентами функции $z = x^3y + y^2x$ в точках $A(1,1)$ и $B(-1,1)$.

4. Производные и дифференциалы высших порядков

4.1. Производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частные производные первого порядка по x и по y. Предположим, что эти производные, в свою очередь являясь функциями от x и y, имеют в точке (x_0, y_0) частные производные по x и по y. Последние для исходной функции будут *частными производными второго порядка*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Также для частных производных второго порядка функции двух переменных могут использоваться следующие обозначения:

$$z''_{x^2},\ z''_{xy},\ z''_{yx},\ z''_{y^2};$$

$$f''_{x^2}\left(x_0,y_0\right),\ f''_{xy}\left(x_0,y_0\right),\ f''_{yx}\left(x_0,y_0\right),\ f''_{y^2}\left(x_0,y_0\right).$$

В случае функции n переменных $y=f\left(\bar{x}\right)$ частные производные второго порядка в точке $\bar{x}^0$ находятся по правилу:

$$\frac{\partial^2 f\left(\bar{x}^0\right)}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f\left(\bar{x}^0\right)}{\partial x_i}\right).$$

Аналогично вводятся понятия *частных производных третьего, четвертого и т. д. порядков*.

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной*. Например, смешанные производные второго порядка функции двух переменных:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Пример 1. Найти все частные производные второго порядка следующих функций:

а) $f\left(x,y\right)=x^y$; б) $f\left(x,y\right)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Решение.

а) Частные производные первого порядка равны:

$$f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y \ln x.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$f'_{x^2} = \left(f'_x\right)'_x = \left(yx^{y-1}\right)'_x = y\left(y-1\right)x^{y-2},$$

$$f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \left(yx^{y-1}\right)'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x = \left(x^y \ln x\right)'_x = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},$$

$$f''_{y^2} = \left(f'_y\right)'_y = \left(x^y \ln x\right)'_y = x^y \ln^2 x.$$

б) Частные производные первого порядка были найдены ранее:

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2},\ f'_y = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$f''_{x^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = y\left(\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right)'_x = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{yx} = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{-\left(x^2+y^2\right)+2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{y^2} = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)'_y = -x\left(\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right)'_y = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Пример 2. Найти все частные производные второго порядка неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением

$$e^z - x^2 y + z + 3 = 0,$$

и вычислить их значение в точке $M_0(2,1,0)$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка, продифференцировав уравнение по x и по y, полагая z функцией переменных x и y:

$$\left(e^z - x^2 y + z + 3\right)'_x = 0 \Rightarrow e^z z'_x - 2xy + z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{2xy}{1+e^z},$$

$$\left(e^z - x^2 y + z + 3\right)_y = 0 \Rightarrow e^z z'_y - x^2 + z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{x^2}{1+e^z}.$$

Вычислим значение производных в точке $M_0(2,1,0)$:

$$z'_x\Big|_{M_0} = \frac{2xy}{1+e^z}\bigg|_{M_0} = 2,\ z'_y\Big|_{M_0} = \frac{x^2}{1+e^z}\bigg|_{M_0} = 2.$$

Для поиска частных производных второго порядка воспользуемся тем же правилом: продифференцируем по x и по y полученные на предыдущем шаге уравнения, полагая z, z'_x и z'_y функциями переменных x и y:

$$\left(e^z z'_x - 2xy + z'_x\right)'_x = 0 \Rightarrow e^z\left(z'_x\right)^2 + e^z z''_{x^2} - 2y + z''_{x^2} = 0,$$

$$\left(e^z z'_x - 2xy + z'_x\right)'_y = 0 \Rightarrow e^z z'_x z'_y + e^z z''_{xy} - 2x + z''_{xy} = 0,$$

$$\left(e^z z'_y - x^2 + z'_y\right)'_x = 0 \Rightarrow e^z z'_y z'_x + e^z z''_{yx} - 2x + z''_{yx} = 0,$$

$$\left(e^z z'_y - x^2 + z'_y\right)'_y = 0 \Rightarrow e^z\left(z'_y\right)^2 + e^z z''_{y^2} + z''_{y^2} = 0,$$

и выразим z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{y^2}:

$$z''_{x^2} = \frac{2y - e^z\left(z'_x\right)^2}{e^z + 1},\ z''_{xy} = \frac{2x - e^z z'_x z'_y}{e^z + 1},$$

$$z''_{yx} = \frac{2x - e^z z'_y z'_x}{e^z + 1},\ z''_{y^2} = -\frac{e^z\left(z'_y\right)^2}{e^z + 1}.$$

Вычислим значение производных в точке $M_0\left(2,1,0\right)$:

$$z''_{x^2}\Big|_{M_0} = \frac{2y - e^z\left(z'_x\right)^2}{e^z + 1}\Bigg|_{M_0} = -1,$$

$$z''_{xy}\Big|_{M_0} = z''_{yx}\Big|_{M_0} = \frac{2x - e^z z'_x z'_y}{e^z + 1}\Bigg|_{M_0} = 0,$$

$$z''_{y^2}\Big|_{M_0} = -\frac{e^z\left(z'_y\right)^2}{e^z + 1}\Bigg|_{M_0} = 2.$$

Аналогично можно найти частные производные третьего, четвертого и т. д. порядков.

Заметим, что в данных примерах смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} совпадают, однако, существуют примеры, где это не так. Сформулируем теорему о смешанных производных функции двух переменных, определяющую условия, при которых они совпадают, и общую теорему о смешанных производных функции n переменных.

Теорема. Пусть 1) функция $f\left(x,y\right)$ определена в некоторой окрестности точки $\left(x_0,y_0\right)$; 2) в этой окрестности существуют частные производные первого порядка f'_x, f'_y и смешанные производные второго порядка f''_{xy}, f''_{yx}; 3) смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда в этой точке $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Теорема. Пусть функция $f(\bar{x})$ определена в открытой области D и имеет в этой области всевозможные частные производные до $(k-1)$-го порядка включительно и смешанные производные n-го порядка, причем все эти производные непрерывны в D. Тогда значение любой смешанной производной k-го порядка не зависит от порядка последовательного дифференцирования.

Пример 3. Для функции $z = e^{xy}$ найти смешанные производные третьего порядка z'''_{xy^2}, z'''_{yxy} и z'''_{y^2x}.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = ye^{xy},\ z'_x = xe^{xy}.$$

Затем найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(ye^{xy}\right)'_y = e^{xy} + xye^{xy},$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(xe^{xy}\right)'_x = e^{xy} + xye^{xy},$$

$$z''_{y^2} = \left(z'_y\right)'_y = \left(xe^{xy}\right)'_y = x^2e^{xy}.$$

И, наконец, найдем частные производные третьего порядка:

$$z'''_{xy^2} = \left(z''_{xy}\right)'_y = \left(e^{xy} + xye^{xy}\right)'_y = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy},$$

$$z'''_{yxy} = \left(z''_{yx}\right)'_y = \left(e^{xy} + xye^{xy}\right)'_y = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy},$$

$$z'''_{y^2x} = \left(z''_{y^2}\right)'_x = \left(x^2e^{xy}\right)'_x = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}.$$

Они совпадают:

$$z'''_{xy^2} = z'''_{yxy} = z'''_{y^2x}.$$

Производные высших порядков от сложной функции находятся аналогично.

Пример 4. Найти частную производную второго порядка по x дважды от функции $z = f(u,v)$, где $u = ye^x, v = xe^y$.

Решение.

В силу того, что по определению производная второго порядка равна производной от производной первого порядка, найдем частную производную по x от сложной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(ye^x\right)}{\partial x} = ye^x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\left(xe^y\right)}{\partial x} = e^y,$$

получим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot ye^x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot e^y.$$

Таким образом, данная частная производная является функцией четырех переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi(u, v, x, y), \text{ где } u = ye^x, v = xe^y.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

где

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot ye^x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot e^y\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot ye^x+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot e^y,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot ye^x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot e^y\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot ye^x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot e^y,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot ye^x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot e^y\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot ye^x.$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot y^2e^{2x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot ye^{x+y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot e^{2y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot ye^x.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти все частные производные второго порядка от следующих функций:

а) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $u=\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$;

в) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; г) $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$.

2. Показать, что функция

$$u=\ln\frac{1}{r},\ \text{где}\ r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3. Показать, что $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$, если

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти y', y'', y''' при $x = 0, y = 1$, если

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

5. Найти частные производные второго порядка от неявной функции, заданной уравнением $z^3 - 3xyz = a^3$.

4.2. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалы высших порядков, как и производные высших порядков, определяются индуктивно.

Пусть в области D определена и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка функция нескольких переменных $y = f(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда полный дифференциал (дифференциал первого порядка) определяется формулой

$$df(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot dx_k$$

и, в свою очередь, является функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$; при этом приращения переменных $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ полагаются произвольными, но фиксированными.

Предположим, что существуют непрерывные частные производные первого порядка от функции $df(\bar{x})$. Тогда можно вычислить дифференциал от этой функции.

Определение. *Дифференциалом второго порядка* функции нескольких переменных $y = f(\bar{x})$ называется полный дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции:

$$d^2 f(\bar{x}) = d\left(df(\bar{x})\right).$$

В частности, дифференциал второго порядка функции двух переменных равен:

$$d^2 f(x,y) = d\left(df(x,y)\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\cdot dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

или, в операторной форме,

$$d^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot f(x,y).$$

Дифференциал второго порядка функции трех переменных символически можно записать так:

$$d^2 f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 \cdot f(x,y,z).$$

В случае функции n переменных дифференциал второго порядка записывается следующим образом:

$$d^2 f(\bar{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}dx_k\right)^2 \cdot f(\bar{x}).$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка, четвертого порядка и т. д.

В общем случае *дифференциал n-го порядка* есть полный дифференциал от дифференциала $(k-1)$-го порядка:

$$d^k f(\bar{x}) = d\left(d^{k-1} f(\bar{x})\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k\right)^k \cdot f(\bar{x}).$$

Пример 1. Найти дифференциалы второго порядка от следующих функций:

а) $z = \ln\left(x + y^2\right)$;

б) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz$;

в) $z = f(u, v)$, где $u = ye^x, v = xe^y$.

Решение.

а) Найдем частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\left(\ln\left(x + y^2\right)\right)}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(\ln\left(x + y^2\right)\right)}{\partial x} = \frac{2y}{x + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x + y^2}\right) = \frac{-1}{\left(x + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x + y^2}\right) = \frac{-2y}{\left(x + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x + y^2}\right) = \frac{2\left(x - y^2\right)}{\left(x + y^2\right)^2}.$$

Воспользуемся формулой дифференциала второго порядка функции двух переменных:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Получим

$$d^2z = \frac{-1}{\left(x+y^2\right)^2}dx^2 + 2\frac{-2y}{\left(x+y^2\right)^2}dxdy + \frac{2\left(x-y^2\right)}{\left(x+y^2\right)^2}dy^2$$

или

$$d^2z = \frac{-dx^2 - 4ydxdy + 2\left(x-y^2\right)dy^2}{\left(x+y^2\right)^2}.$$

б) Найдем частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz\right)}{\partial x} = 2x-2y+4z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz\right)}{\partial y} = 4y-2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial\left(x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz\right)}{\partial z} = 6z+4x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial(2x-2y+4z)}{\partial x} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial(4y-2x)}{\partial y} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial(6z+4x)}{\partial z} = 6,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2x-2y+4z)}{\partial y} = -2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial(2x-2y+4z)}{\partial z} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} = \frac{\partial(4y-2x)}{\partial z} = 0.$$

Воспользуемся формулой дифференциала второго порядка функции трех переменных:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 \cdot u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$$

Получим

$$d^2u = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy + 8dxdz.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти дифференциалы второго порядка от следующих функций:

а) $z = e^{-xy}$; б) $z = \sqrt{2xy + y^2}$;

в) $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$; г) $u = \dfrac{x^3y^2}{z}$;

д) $z = \varphi(t)$, где $t = x^2 + y^2$;

е) $z = u^v$, где $u = \dfrac{x}{y}, v = xy$.

2. Найти d^2z и d^3z в точке $M_0(1,2)$, если

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$$

4.3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Теорема. Пусть функция $f(\overline{x})$, где $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеет в окрестности точки $\overline{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ непрерывные частные производные всех порядков до $(m+1)$-го включительно. Тогда в рассматриваемой окрестности справедлива *формула Тейлора*:

$$f(\overline{x}) = f\left(\overline{x}^0\right) + df\left(\overline{x}^0\right) + \frac{1}{2!}d^2 f\left(\overline{x}^0\right) + \frac{1}{3!}d^3 f\left(\overline{x}^0\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{m!}d^m f\left(\overline{x}^0\right) + r_m(\overline{x}),$$

где $r_m\left(\overline{x}, \overline{x}^0\right)$ — остаточный член формулы Тейлора.

Существуют различные формы записи остаточного члена формулы Тейлора. Например,

$$1)\, r_m(\overline{x}) = o\left(\rho\left(\overline{x}, \overline{x}^0\right)^m\right);$$

$$2)\, r_m(\overline{x}) = \frac{1}{(m+1)!}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k\right)^{m+1} \cdot f\left(\overline{\xi}\right),$$

где $\overline{\xi} = \overline{x}^0 + \theta\left(\overline{x} - \overline{x}^0\right)$, $0 < \theta < 1$, $dx_k = x_k - x_k^0$.

Частный случай формулы Тейлора при $\overline{x}^0 = \overline{0}$ называется *формулой Маклорена*.

Для функции двух переменных $f(x,y)$ формула Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ при $m=2$ имеет вид:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\Delta y+\frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}\Delta x^2+\right.$$

$$\left.+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}\Delta x\Delta y+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}\Delta y^2\right)+r_2(x,y),$$

где $\Delta x=(x-x_0)$, $\Delta y=(y-y_0)$, $r_2(x,y)=o(\rho^2)$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Пример 1. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1,1)$ до членов 2-го порядка включительно функцию

$$f(x,y)=y^x.$$

Решение.

Вычислим значение функции в точке $M_0(1,1)$ и приращения независимых переменных:

$$f(x_0,y_0)=\left.y^x\right|_{M_0}=1,\ \Delta x=x-1,\ \Delta y=y-1.$$

Найдем частные производные первого и второго порядка и вычислим их значение в точке $M_0(1,1)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.y^x\ln y\right|_{M_0}=0,\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.xy^{x-1}\right|_{M_0}=1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}=\left.y^x\ln^2 y\right|_{M_0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}=\left.\left(xy^{x-1}\ln y+y^{x-1}\right)\right|_{M_0}=1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = x(x-1)y^{x-2}\Big|_{M_0} = 0.$$

Подставим найденные значения в формулу Тейлора для функции двух переменных:

$$y^x = 1 + 0\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1) + \frac{1}{2!}\Big(0\cdot(x-1)^2 +$$

$$+2\cdot 1\cdot(x-1)(y-1) + 0\cdot(y-1)^2\Big) + o\Big((x-1)^2 + (y-1)^2\Big).$$

Окончательно получим

$$y^x = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + o\Big((x-1)^2 + (y-1)^2\Big).$$

Формула Тейлора применяется в приближенных вычислениях: при вычислении приближенного значения функции с заданной точностью, при этом погрешность устанавливается с помощью оценки остаточного члена; для линеаризации функции; для приближенного представления неявно заданной функции. Рассмотрим типовые задачи на примере функции двух переменных.

Пример 2. Используя формулу Тейлора до членов 2-го порядка, вычислить приближенно $(0{,}95)^{2{,}01}$ и оценить погрешность вычисления.

Решение.

Применим формулу Тейлора к функции двух переменных $f(x,y) = y^x$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $f(x_0, y_0) = 1^2 = 1$; $(0{,}95)^{2{,}01} = f(0{,}95; 2{,}01)$, т. е. $x = 2{,}01$, $y = 0{,}95$; $\Delta x = (x - x_0) = 0{,}01$, $\Delta y = (y - y_0) = -0{,}05$.

Частные производные первого и второго порядка были найдены в примере 1, вычислим их значение в точке $M_0(2{,}1)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 2,\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = 1,\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2.$$

Запишем формулу Тейлора:

$$y^x = 1 + 2\Delta y + \Delta x \Delta y + \Delta y^2 + o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right).$$

Приближенное значение функции в точке $(0{,}95; 2{,}01)$ равно: $(0{,}95)^{2{,}01} \approx 1 + 2(-0{,}05) + 0{,}01(-0{,}05) + (-0{,}05)^2 = 0{,}902$ с погрешностью не хуже чем $\Delta x^2 + \Delta y^2 = 0{,}0026 < 10^{-2}$, т. е. $(0{,}95)^{2{,}01} \approx 0{,}90$.

Пример 3. Линеаризовать функцию $z = e^{x+y}$ в окрестности точки $M_0(1,-1)$.

Решение.

Для того, чтобы линеаризовать функцию, разложим ее по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1,-1)$ до членов 1-го порядка. Предварительно найдем значения функции и ее частных производных первого порядка в точке $M_0(1,-1)$:

$$f(1,-1) = e^0 = 1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.e^{x+y}\right|_{M_0} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.e^{x+y}\right|_{M_0} = 1.$$

По формуле Тейлора

$$e^{x+y} = 1 + (x-1) + (y+1) + r_1(x,y),$$

где $r_1(x,y) = o(\rho)$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$, т. е. с погрешностью, не превышающей ρ, в окрестности точки $M_0(1,-1)$ справедлива приближенная формула:

$$e^{x+y} \approx x + y + 1.$$

Пример 4. Неявная функция $z(x,y)$ задана уравнением

$$z^3 - 2xz + y = 0$$

и принимает значение $z=1$ при $x=1$ и $y=1$. Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням разностей $(x-1)$ и $(y-1)$.

Решение.

Разложим функцию двух переменных по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1,1)$ до членов 2-го порядка включительно. Для этого найдем от неявно заданной функции частные производные первого порядка:

$$\left(z^3 - 2xz + y\right)'_x = 0 \Rightarrow 3z^2 z'_x - 2z - 2xz'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{-2z}{2x-3z^2},$$

$$\left(z^3 - 2xz + y\right)'_y = 0 \Rightarrow 3z^2 z'_y - 2xz'_y + 1 = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{1}{2x-3z^2}$$

и второго порядка:

$$\left(3z^2 z'_x - 2z - 2xz'_x\right)'_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z\left(z'_x\right)^2 + 3z^2 z''_{x^2} - 4z'_x - 2z''_{x^2}x = 0 \Rightarrow z''_{x^2} = \frac{6z\left(z'_x\right)^2 - 4z'_x}{2x-3z^2},$$

$$\left(3z^2 z'_x - 2z - 2xz'\right)'_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6zz'_y z'_x + 3z^2 z''_{xy} - 2z'_y - 2xz''_{xy} = 0 \Rightarrow z''_{xy} = \frac{6zz'_y z'_x - 2z'_y}{2x-3z^2},$$

$$\left(3z^2 z'_y - 2xz'_y + 1\right)'_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z\left(z'_y\right)^2 + 3z^2 z''_{y^2} - 2xz''_{y^2} = 0 \Rightarrow z''_{y^2} = \frac{6z\left(z'_y\right)^2}{2x-3z^2}.$$

Вычислим их значение в точке $M_0(1,1)$:

$$z'_y\Big|_{M_0} = \frac{-2z}{2x-3z^2} = 2,\; z'_y\Big|_{M_0} = \left.\frac{1}{2x-3z^2}\right|_{M_0} = -1,$$

$$z''_{x^2}\Big|_{M_0} = \left.\frac{6z\left(z'_x\right)^2 - 4z'_x}{2x-3z^2}\right|_{M_0} = -16,$$

$$z''_{xy}\Big|_{M_0} = \left.\frac{6zz'_y z'_x - 2z'_y}{2x-3z^2}\right|_{M_0} = 10,$$

$$z''_{y^2}\Big|_{M_0} = \left.\frac{6z\left(z'_y\right)^2}{2x-3z^2}\right|_{M_0} = -6.$$

Учтем, что $\Delta x = (x-1)$, $\Delta y = (y-1)$. Подставив в формулу Тейлора, получим:

$$z = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 +$$

$$+10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + r_2(x,y),$$

где $r_2(x,y) = o\left(\rho^2\right)$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Функцию $f(x,y) = 2x^2 - 3xy - 4y^3 + 5x + y - 9$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(-2,1)$.

2. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y) = e^{-x}\sin y$.

3. Используя формулу Тейлора до членов 2-го порядка, вычислить приближенно $\sqrt{1,03}\cdot\sqrt[3]{0,98}$ и оценить погрешность вычисления.

4. Неявная функция $z(x,y)$ задана уравнением

$$2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$$

и принимает значение $z=1$ при $x=2$ и $y=0.$ Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням разностей $(x-2)$ и y.

5. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$ в окрестности точки $M_0(1,1,1)$.

5. Экстремум функции нескольких переменных

5.1. Локальный экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $y=f(\bar{x})$, где $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определена в области D и $\bar{x}^0=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$ — внутренняя точка этой области.

Определение. Функция $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}^0$ имеет *максимум* (*минимум*), если существует окрестность $O_\delta\left(\bar{x}^0\right)$ точки $\bar{x}^0$, для всех точек $\bar{x}$ которой ($\bar{x}\neq\bar{x}^0$) выполняется неравенство

$$f(\bar{x})\underset{(>)}{<}f\left(\bar{x}^0\right),$$

т. е. приращение функции $\Delta f\left(\bar{x}^0\right)$ сохраняет знак, причем, если $\Delta f\left(\bar{x}^0\right)<0$, то имеет место максимум ($\max$); если $\Delta f\left(\bar{x}^0\right)>0$, то минимум ($\min$).

Для обозначения максимума и минимума употребляется общий термин — *экстремум* (extr). Понятие экстремума носит *локальный* характер.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если функция $f(\bar{x})$ достигает в точке $\bar{x}^0$ экстремума, то в этой точке ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют:

$$\frac{\partial f\left(\bar{x}^0\right)}{\partial x_k}=0 \quad \text{или} \quad \nexists \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Если функция $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке экстремума $\bar{x}^0$, то справедливо равенство:

$$df\left(\bar{x}^0\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f\left(\bar{x}^0\right)}{\partial x_k}\cdot dx_k=0.$$

Заметим, что указанные условия являются *необходимыми*, но *не достаточными*, т. е. если все частные производные первого порядка в точке $\bar{x}^0$ равны нулю или не существуют (точка в этом случае называется *стационарной*, *критической* или *подозрительной на экстремум*), то точка может быть точкой экстремума, а может и не быть таковой. Например, точка $(0,0)$ функции $z=xy$ является стационарной, но не является точкой экстремума. Действительно, $z'_x(0,0)=0$ и $z'_y(0,0)=0$, но приращение функции в точке $(0,0)$, равное $\Delta z(0,0)=xy-0=xy$, при сколь угодно малых (но отличных от нуля) x и y может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Можно показать, что знак приращения функции $\Delta f\left(\bar{x}^0\right)$ существенно зависит от знака выражения

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{\bar{x}^0}\cdot\Delta x_i\Delta x_j,$$

представляющего собой однородный многочлен второй степени или *квадратичную форму* переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Определение. Квадратичная форма

$$A(\bar{x}) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \;\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$$

от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если она принимает положительные (отрицательные) значения при всех значениях аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю.

Критерий Сильвестра. Пусть матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ квадратичной формы $A(\bar{x})$ имеет главные миноры:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны, т. е. $\Delta_k > 0 \left(\forall k = 1, 2, \ldots, n\right)$.

Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда знаки всех главных миноров её матрицы чередуются, причем минор первого порядка отрицателен, т. е. $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$.

Сформулируем теперь достаточные условия существования экстремума функции нескольких переменных.

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть функция $f(\bar{x})$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности стационарной точки $\bar{x}^0$. Если дифференциал второго порядка

$$d^2 f\left(\bar{x}^0\right) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\bar{x}^0} \cdot \Delta x_i \Delta x_j$$

является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной формой относительно приращений независимых переменных, то в точке $\bar{x}^0$ функция $f\left(\bar{x}\right)$ имеет (локальный) минимум (максимум).

Рассмотрим частный случай — достаточные условия экстремума функции двух независимых переменных в стационарной точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Дифференциал второго порядка от функции $f\left(x, y\right)$ равен

$$d^2 f\left(x, y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Введем обозначения:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A,\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B,\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C.$$

Главные миноры матрицы квадратичной формы равны:

$$\Delta_1 = A,\ \Delta_2 = \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда достаточные условия экстремума таковы: в стационарной точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ функция $f\left(x, y\right)$

1) имеет минимум, если $\Delta > 0,\ \ A > 0$;

2) имеет максимум, если $\Delta > 0,\ \ A < 0$;

3) не имеет экстремума, если $\Delta < 0$;

4) требует дальнейшего исследования, если $\Delta = 0$.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение.
Воспользуемся необходимыми условиями экстремума:

$$z'_x\Big|_{M_0} = 0,\ z'_y\Big|_{M_0} = 0.$$

Для этого найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_x = 3x^2 - 3y,$$

$$z'_y = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_y = 3y^2 - 3x.$$

Приравняем их к нулю, получим систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем две стационарные точки:

$$M_1(0,0) \text{ и } M_2(1,1).$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{x^2} = \left(3x^2 - 3y\right)'_x = 6x,$$

$$z''_{xy} = \left(3x^2 - 3y\right)'_y = -3,$$

$$z''_{y^2} = \left(3y^2 - 3x\right)'_y = 6y.$$

Исследуем характер точки $M_1(0,0)$:

$$A = z''_{x^2}\Big|_{M_1} = 0,\ B = z''_{xy}\Big|_{M_1} = -3,\ C = z''_{y^2}\Big|_{M_1} = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0.$$

Следовательно, в точке $M_1(0,0)$ экстремума нет.

Исследуем характер точки $M_2(1,1)$:

$$A = z''_{x^2}\Big|_{M_2} = 6,\ B = z''_{xy}\Big|_{M_2} = -3,\ C = z''_{y^2}\Big|_{M_2} = 6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0 \text{ и } A = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке $M_2(1,1)$ функция имеет минимум:

$$z_{min} = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)\Big|_{M_2} = -1.$$

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение.

Функция определена на всей числовой плоскости Oxy. Воспользуемся необходимыми условиями экстремума:

$$z'_x\Big|_{M_0} = 0,\ z'_y\Big|_{M_0} = 0.$$

Для этого найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$z'_y = \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Приравняем их к нулю, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \end{cases}$$

Система не имеет решений. Частные производные z'_x и z'_y не существуют в точке $M_0\left(0,0\right)$ — это стационарная точка. Так как функция не дифференцируема в этой точке, то использовать достаточные условия невозможно. Исследуем характер точки $M_0\left(0,0\right)$ по определению, для этого найдем приращение функции в этой точке:

$$\Delta z\left(0,0\right)=z\left(x,y\right)-z\left(0,0\right)=-\sqrt{x^2+y^2}<0 \quad \forall\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right).$$

Следовательно, в точке $M_0\left(0,0\right)$ функция, по определению, имеет максимум:

$$z_{\max}=\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{M_0}=1.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

б) $z=\left(x-1\right)^2+2y^2$;

в) $z=\left(x-1\right)^2-2y^2$;

г) $u=\dfrac{1}{2}xy+\left(47-x-y\right)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\right)$;

д) $z=2x^3-x^2+xy^2-4x+z^2-2z$.

2. Исследовать на экстремум неявную функцию $z\left(x,y\right)$, заданную уравнением:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0.$$

5.2. Абсолютный экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $y = f(\bar{x})$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области D и, за исключением, быть может, отдельных точек, имеет в этой области конечные частные производные, тогда она достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений.

Задача *абсолютного экстремума* (absextr) — задача отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции в ограниченной замкнутой области D — решается по следующему алгоритму:

1) найти все внутренние стационарные точки;

2) найти все стационарные точки на границе Γ_D области D;

3) найти точки «стыка» границы Γ_D;

4) вычислить во всех указанных точках значение функции;

5) выбрать наибольшее (absmax) и наименьшее (absmin) значение.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0,\ y = 0, 2x + 3y - 12 = 0.$

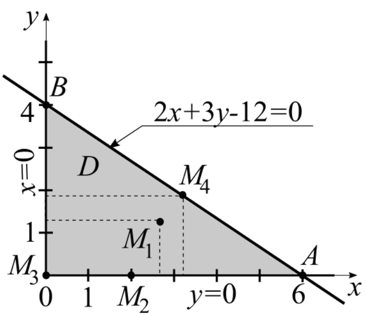


Рис. 3.8

Решение.

Построим область D — на рис. 3.8 это треугольник OAB.

Найдем все внутренние стационарные точки. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает координаты первой стационарной точки:

$$M_1\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)\in D.$$

Найдем все стационарные точки на границе Γ_D области D. Граница Γ_D составлена из отрезков трех прямых. Исследуем поведение функции на каждом участке.

Отрезок $OA: y=0, x\in[0,6]$. Значение функции на отрезке:

$$z\big|_{y=0}=\left(x^2-xy+y^2-4x\right)\big|_{y=0}=x^2-4x.$$

Исследуем на экстремум:

$$\left(x^2-4x\right)'=2x-4=0\Rightarrow x=2.$$

Получим вторую стационарную точку:

$$M_2(2,0)\in\Gamma_D.$$

Отрезок $OB: x=0, y\in[0,4]$. Значение функции на отрезке:

$$z\big|_{x=0}=\left(x^2-xy+y^2-4x\right)\big|_{x=0}=y^2.$$

Исследуем на экстремум:

$$\left(y^2\right)'=2y=0\Rightarrow y=0.$$

Получим третью стационарную точку (она совпадает с точкой $O(0,0)$):

$$M_3(0,0)\in\Gamma_D.$$

Отрезок AB: $y=4-\dfrac{2}{3}x,\ x\in[0,6]$.

Значение функции на отрезке:

$$z\big|_{y=4-\frac{2}{3}x}=\left(x^2-xy+y^2-4x\right)\big|_{y=4-\frac{2}{3}x}=\frac{19}{9}x^2-\frac{40}{3}x-16.$$

Исследуем на экстремум:

$$\left(\frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 16\right)' = \frac{38}{9}x - 40 = 0 \Rightarrow x = \frac{60}{19},\ y = \frac{36}{19}.$$

Получим четвертую стационарную точку

$$M_4\left(\frac{60}{19}, \frac{36}{19}\right) \in \Gamma_D.$$

Точки «стыка» границы Γ_D: $A(6,0)$, $B(0,4)$ и $O(0,0)$.

Вычислим значения функции во всех найденных точках:

$$z\big|_{M_1} = -5\frac{1}{3},\ z\big|_{M_2} = -4,\ z\big|_{M_3} = 0,$$

$$z\big|_{M_4} = -5\frac{1}{5},\ z\big|_{A} = 12,\ z\big|_{B} = 16.$$

Выберем наибольшее и наименьшее значения:

$$\operatorname{abs}\max_D z = 16,\ \operatorname{abs}\min_D z = -5\frac{1}{3}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:

а) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$;

б) $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$;

в) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ в области, заданной неравенствами $0 \le x \le \frac{3\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{3\pi}{2}$.

2. Из всех вписанных в круг треугольников найти треугольник с наибольшей площадью.

5.3. Условный экстремум функции нескольких переменных

Определение. *Условным экстремумом* функции $y = f(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны уравнениями $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, s$ — *уравнениями связи*.

Задачи на отыскание условного экстремума возникают во многих вопросах геометрии, механики, оптимизации и др.

В простейшем случае условный экстремум функции двух переменных $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ геометрически является аппликатой наивысшей или наинизшей (по сравнению с близлежащими точками) точки кривой, полученной при пересечении поверхностей $z = f(x, y)$ и $\varphi(x, y) = 0$.

Задача отыскания условного экстремума может быть решена *методом неопределенных множителей Лагранжа*. Для этого составляют так называемую функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где λ_j — неопределенные постоянные множители, и исследуют ее на экстремум.

Необходимые условия условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \end{cases}$$

Достаточные условия условного экстремума: функция $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}^0$ имеет условный максимум, если дифференциал второго порядка функции Лагранжа в этой точке является отрицательно определенной квадратичной формой от дифференциалов $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, т. е. $d^2F(\bar{x}^0) < 0$, и условный минимум, если дифференциал второго порядка функции Лагранжа в этой точке является положительно определенной квадратичной формой, т. е. $d^2F\left(\bar{x}^0\right)>0$.

Заметим, что дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ связаны соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx_i=0,\ j=1,2,\ldots,s,\ \text{где} \sum_{i=1}^{n}dx_i^{\ 2}\neq 0.$$

Пример 1. Найти экстремум функции

$$z=6-4x-3y \ \text{ при условии } x^2+y^2=1.$$

Решение.

Составим функцию Лагранжа:

$$F\left(x,y\right)=6-4x-3y+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-1\right).$$

Необходимые условия условного экстремума:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda\cdot x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda\cdot y=0,\\ \qquad x^2+y^2=1.\end{cases}$$

Система имеет два решения:

$$\lambda_1=\frac{5}{2},\ x_1=\frac{4}{5},\ y_1=\frac{3}{5};$$

$$\lambda_2=-\frac{5}{2},\ x_2=-\frac{4}{5},\ y_1=-\frac{3}{5}.$$

Найдем дифференциал второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda \Rightarrow d^2 F=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right).$$

Знак дифференциала зависит только от знака множителя λ. Поэтому в точке $\left(x_1, y_1\right)$: $d^2 F>0$ и функция имеет условный минимум, а в точке $\left(x_2, y_2\right)$: $d^2 F<0$ и функция имеет условный максимум:

$$z_{\min}=z\left(x_1, y_1\right)=6-4 \cdot \frac{4}{5}-3 \cdot \frac{3}{5}=1,$$

$$z_{\max}=z\left(x_2, y_2\right)=6-4 \cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-3 \cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=11.$$

Пример 2. Найти экстремум функции

$$z=xy \text{ при условии } x+y=1.$$

Решение.

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x, y)=xy+\lambda \cdot(x+y-1).$$

Необходимые условия условного экстремума:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda=0, \\ x+y=1.\end{cases}$$

Система имеет единственное решение:

$$\lambda_1=-\frac{1}{2},\ x_1=\frac{1}{2},\ y_1=\frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=1,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0 \Rightarrow d^2F=2dxdy.$$

Чтобы определить, является ли дифференциал знакоопределенной формой от dx и dy, продифференцируем уравнение связи $x+y=1$. Получим $dx+dy=0$, отсюда $dx=-dy$ и дифференциал второго порядка функции Лагранжа принимает вид:

$$d^2F=-2dy^2<0 \text{ при } dx^2+dy^2\neq 0.$$

Тогда функция в точке (x_1, y_1) имеет условный максимум:

$$z_{\max}=z(x_1,y_1)=\frac{1}{4}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

Найти условные экстремумы функций:

а) $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$;

б) $z=x^2+y^2$ при $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$;

в) $z=\cos^2 x+\cos^2 y$ при $y-x=\dfrac{\pi}{4}$;

г) $u=xyz$ при $x+y+z=5$ и $xy+yz+zx=8$.

Глава 4. АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Векторная алгебра

1.1. Определители второго и третьего порядка

Определитель второго порядка — это число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определитель третьего порядка — это число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое представлено схематично на рисунке:

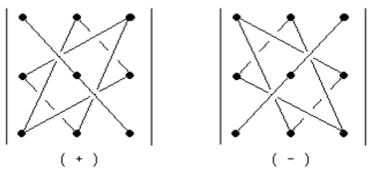


Рис. 4.1

На рис. 4.1 слева дано правило вычисления положительных членов определителя, справа — правило вычисления его отрицательных членов.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычисляем по определению:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 -$$

$$-1\cdot6\cdot8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Свойства определителей второго и третьего порядков:

1) величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(это свойство указывает на равноправие строк и столбцов);

2) при перестановке двух каких-либо столбцов (строк) определитель изменит знак;

3) определитель, имеющий два одинаковых столбца (строки), равен нулю;

4) если все элементы какого-либо столбца (сроки) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha\cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

5) если все элементы какого-либо столбца (строки) определителя — нули, то определитель равен нулю;

6) определитель, содержащий два пропорциональных столбца (строки), равен нулю;

7) если все элементы j-го столбца (строки) определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $i = 1, 2, 3$, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы (строки), кроме j-го, такие же, как и в заданном определителе, а j-й столбец в одном из слагаемых состоит из элементов b_{ij}, в другом — из c_{ij}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12}+c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22}+c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32}+c_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

8) если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha\cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha\cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha\cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получаемый из данного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Например, для определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ минором элемента a_{11} является определитель $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а минором элемента a_{23} — определитель $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя третьего порядка равно минору этого элемента, умноженному на $(-1)^{i+j}$. Обозначается алгебраическое дополнение элемента a_{ij} символом A_{ij}. По определению, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \; M_{ij}$.

Например, A_{11} элемента a_{11} равняется минору M_{11}, взятому со своим знаком, т.е. $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а алгебраическое дополнение элемента a_{23} равно минору M_{23}, взятому с противоположным знаком, т.е. $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Теорема разложения. Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (строки) на их алгебраические дополнения.

Формула разложения определителя по элементам j-го столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}, \; j = 1, 2, 3.$$

Формула разложения определителя по элементам i-й строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}, \; i = 1, 2, 3.$$

Теорема аннулирования. Сумма произведений элементов одного столбца (строки) определителя на алгебраические дополнения элементов другого столбца (строки) равна нулю.

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, используя теорему разложения.

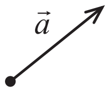
Решение. Раскладываем определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = 0 .$$

1.2. Векторы. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов



Вектор — совокупность направленных отрезков, имеющих общее направление и одинаковую длину. Направление вектора принято обозначать стрелкой. Вектор обозначается $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$ (A — начало, B – конец вектора). Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (a_x; a_y; a_z)$.

Расстояние между началом и концом вектора $\vec{a}$ называется его *длиной*. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$ или $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Если начало и конец вектора совпадают, то вектор называется нулевым и обозначается $\vec{0}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны одной прямой, то они называются *коллинеарными* ($\vec{a} \parallel \vec{b}$).

При этом векторы могут быть направлены в одну сторону (*сонаправлены* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или в разные стороны (*противоположно направлены* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковые длины, коллинеарны и сонаправлены.

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости.

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l (направленная прямая).

Проекцией точки M *на ось* l называется основание перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на ось l: $\text{пр}_l\, M = M_1$.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ произвольный ненулевой вектор.

$$A_1 = \text{пр}_l\, A,\ B_1 = \text{пр}_l\, B.$$

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$, и отрицательное число $\left(-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|\right)$, если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$.

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l выражается через его модуль и угол φ наклона к оси l формулой: $\text{пр}_l\, \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$.

Для скалярного произведения наряду с обозначением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ используется также обозначение $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

В ортонормированном базисе:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$

где $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$.

Произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называют скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$: $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Свойства скалярного произведения:

1) скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=0\right)\Leftrightarrow\left(\vec{a}\perp\vec{b}\right),\ \text{где}\ \vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0;$$

2) скалярное произведение векторов коммутативно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$$

3) скалярное произведение векторов связано с проекцией вектора на ось: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$;

4) свойство линейности: $\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.

Применения скалярного произведения:

1) вычисление длины вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$;

2) отыскание угла между векторами: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$;

3) вычисление направляющих косинусов вектора:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|};\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$$

4) вычисление проекции вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}};$$

6) вычисление работы A силы $\vec{F}$, точка приложения которой, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M_0 в положение M: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_0M}$.

Пример 1. В равнобедренной трапеции $OACB$ (рис. 4.2) угол $\angle AOB = 60^{\circ}$, $|OB| = |BC| = |CA| = 2$, M и N — середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{MN}$ через единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

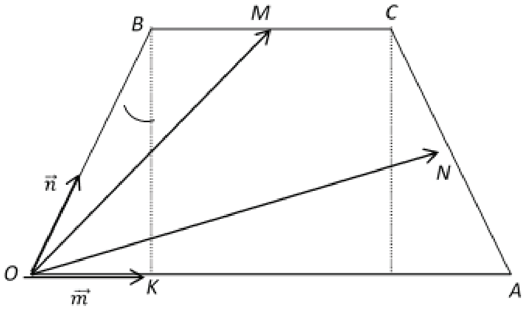


Рис. 4.2

Решение. Из ΔOBK вектор $\overrightarrow{OB} = 2\vec{n};$ $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OK} = \vec{m};$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK} = 2\vec{n} + \vec{m};$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = 4\vec{m} + 2\vec{n} + 2\vec{m} = 2\vec{n} - 2\vec{m}\ ;$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = 4\vec{m} + \frac{1}{2}\left(2\vec{n} - 2\vec{m}\right) = 3\vec{m} + \vec{n};$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(3\vec{m} + \vec{n}\right) - \left(2\vec{n} + \vec{m}\right) = 2\vec{m} - \vec{n}.$$

Пример 2. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (-6;0;1)$ и $\vec{b} = (2;-2;-1)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{c}| = \sqrt{41}$, найти его координаты.

Решение. Пусть $\vec{c} = (x, y, z)$. Из условия перпендикулярности имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \Rightarrow -6x+z=0;\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0 \Rightarrow 2x-2y-z=0.$$

Учитывая, что $|\vec{c}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{41}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -6x+z=0, \\ 2x-2y-z=0, \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{41}. \end{cases}$$

Система имеет два решения:

$$x_1=1,\ y_1=-2,\ z_1=6 \text{ и } x_2=-1,\ y_2=2,\ z_2=-6.$$

По условию вектор $\vec{c}$ образует с осью Oy тупой угол, т. е. вторая координата искомого вектора отрицательна.

Таким образом, $\vec{c}=(1,-2,6)$.

Пример 3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ был перпендикулярен к вектору $\vec{a}-\vec{b}$?

Решение. Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$. Используя свойство линейности, получим:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0,$$

откуда $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$, следовательно $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, т. е. векторы должны иметь одинаковую длину.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. AD, BE, CF — медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

2. Проверить, что четыре точки $A(3;-1;2), B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3), D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции.

3. Даны точки $A(3;-4;-2)$ и $B(2;5;-2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, а с осью Oz — тупой угол γ.

4. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$, вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

5. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1;2;1), B(3;-1;7), C(7;4;-2)$. Является ли треугольник равнобедренным? равносторонним?

6. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$.

7. Даны точки $A(1;-2;0), B(0;1;-4), C(-1;0;1)$. На оси Ox найти точку D так, что $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$.

8. Найти $np_{\vec{n}}\vec{c}$, если $\vec{c}=3\vec{m}+2\vec{n}$, $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=4$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

9. Вычислить работу силы $\vec{F}=(-3;2;5)$ при перемещении из положения $M_0(2;-3;5)$ в положение $M(3;-2;-1)$.

10. Даны силы $\overrightarrow{F_1}=(3;-4;2)$, $\overrightarrow{F_2}=(2;3;-5)$ и $\overrightarrow{F_3}=(-3;-2;4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_0(5;3;-7)$ в положение $M(4;-1;-4)$.

1.3. Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки.

В противном случае тройка называется левой.

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Для векторного произведения наряду с обозначением $\vec{a} \times \vec{b}$ используется также обозначение $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

В ортонормированном базисе:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right),\ \vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right).$$

Свойства векторного произведения:

1) векторное произведение векторов антикоммутативно

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

2) свойство линейности:

$$\left(\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}\right) \times \vec{c} = \alpha \cdot \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) + \beta \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right);$$

3) векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны: $\left(\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{a} \parallel \vec{b}\right)$.

Применения векторного произведения:

1) вычисление площади параллелограмма и площади треугольника, построенных на векторах $\vec{a},\vec{b}$:

$$S_{\text{пар-ма}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,\ S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

2) отыскание вектора $\vec{c}$, перпендикулярного заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

3) вычисление момента $\overrightarrow{m_0}$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке M, относительно точки O:

$$\overrightarrow{m_0}=\vec{r}\times\vec{F}\text{, где } \vec{r}=\overrightarrow{OM};$$

4) вычисление линейной скорости $\vec{v}$ точки M, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси:

$$\vec{v}=\vec{r}\times\vec{\omega}\text{, где } \vec{r}=\overrightarrow{OM}.$$

Пример 1. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(-6;0;1)$ и $\vec{b}=(2;-2;-1)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{c}|=\sqrt{41}$, найти его координаты.

Решение. Так как $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$, то $\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. Вычисляем векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через координаты:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 0 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}.$$

Тогда $\vec{c} = \lambda\left(2\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}\right)$. Найдем λ из условия $|\vec{c}| = \sqrt{41}$.

$$|\vec{c}| = |\lambda| \cdot \left|2\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}\right| = |\lambda|\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 12^2} =$$

$$= 2|\lambda|\sqrt{41} \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{2}.$$

По условию вектор $\vec{c}$ образует с осью Oy тупой угол, следовательно, $\vec{c}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ сонаправлены и коэффициент λ положительный $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$.

Таким образом, $\vec{c} = \frac{1}{2}\left(2\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}\right) = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1, \left|\vec{b}\right| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c}$ и $\vec{d}$, равна $S_{\vec{c},\vec{d}} = |\vec{c} \times \vec{d}|$. Используя свойство линейности и свойство антикоммутативности, выразим $\vec{c} \times \vec{d}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} \times \vec{d} = \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} - \vec{b}\right) = 3\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + 6\vec{b} \times \vec{a} -$$

$$-2\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} \times \vec{a} + 6\vec{b} \times \vec{a} + \vec{0} = 7\vec{b} \times \vec{a}.$$

Тогда

$$S_{\vec{c},\vec{d}} = \left|7\vec{b} \times \vec{a}\right| = 7\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = 7\left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 7.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;2)$ и $\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты векторов $\vec{a}\times\vec{b}$, $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$, $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$.

2. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2), B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины B на основание AC.

3. Вектор $\vec{x}$, ортогональный векторам $\vec{a}=(4;-2;-3)$ и $\vec{b}=(0;1;3)$, образует с Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=26$, найти его координаты.

4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны?

5. Сила $\vec{F}=(2;2;9)$ приложена к точке $M(4;2;-3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $N(2;4;0)$.

1.4. Смешанное произведение векторов

Пусть вектор $\vec{a}$ *векторно* умножается на вектор $\vec{b}$, затем получившийся вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ *скалярно* умножается на вектор $\vec{c}$. В результате получается число, которое называется *смешанным произведением* векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

В ортонормированном базисе:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

где $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, $\vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$.

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны;

2) если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — некомпланарны и V — объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу, то

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}=\begin{cases} +V, \text{ если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{правая тройка}, \\ -V, \text{ если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{левая тройка}; \end{cases}$$

3) смешанное произведение не меняется при круговой перестановке множителей и меняет знак при перестановке соседних множителей: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

4) смешанное произведение не меняется при перестановке местами знаков векторного и скалярного произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right);$$

5) свойство однородности: $\lambda\left(\vec{a}\right)\vec{b}\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$;

6) свойство дистрибутивности:

$$\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}\right)\vec{b}\vec{c}=\left(\overrightarrow{a_1}\vec{b}\vec{c}\right)+\left(\overrightarrow{a_2}\vec{b}\vec{c}\right).$$

Замечание. Однородность и дистрибутивность выполняются не только относительно первого множителя произведения.

Применения смешанного произведения:

1) проверка компланарности трех векторов:

($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны) $\Leftrightarrow$ $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0\right)$;

2) проверка принадлежности четырех точек A, B, C, D одной плоскости π: (A, B, C, $D\in\pi$) $\Leftrightarrow$ $\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=0\right)$;

3) вычисление объемов тетраэдра и параллелепипеда, построенных на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $V_{\text{пар-да}}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|, V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Пример 1. Вычислить длину высоты тетраэдра с вершинами $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(7;5;-3)$, опущенной из вершины D на грань ABC .

Решение. $V_{\text{тетр}}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h_D$. Выразим объем и площадь основания тетраэдра через смешанное и векторное произведения:

$V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Подставляя в первоначальную формулу, получим: $h_D=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}$.

Найдем координаты векторов, образующих тетраэдр:

$$\overrightarrow{AB}=(4-2;1-3;-2-1)=(2;-2;-3);$$

$$\overrightarrow{AC}=(6-2;3-3;7-1)=(4;0;6);$$

$$\overrightarrow{AD}=(7-2;5-3;-3-1)=(5;2;-4).$$

Вычисляем векторное и смешанное произведения:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-12-0)-\vec{j}\,(12+12)+\vec{k}\,(0+8)=(-12;-24;8).$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=-12\cdot5-24\cdot2+8\cdot(-4)=-140.$$

Тогда

$$h_D=\frac{|-140|}{\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}}=\frac{140}{4\sqrt{9+36+4}}=\frac{140}{4\cdot7}=5$$

Пример 2. Объем тетраэдра $V=5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1),B(3;0;1),C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

Решение. Так как точка D лежит на оси Oy, то $D(0;y;0)$.

Вычислим объем тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(0;-2;4),\overrightarrow{AD}=(-2;y-1;1).$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&-2&4\\-2&y-1&1\end{vmatrix}=1(-2-4(y-1))-2(-4+4)=-4y+2$$

(определитель вычислен разложением по первому столбцу).

Так как $V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$, получаем уравнение:

$$5=\frac{1}{6}|-4y+2|\ \text{ или }\ |-4y+2|=30.$$

Раскрывая модуль, находим два решения: $y_1=8, y_2=-7$.

Тогда искомыми точками будут $D_1(0;8;0), D_2(0;-7;0)$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=4, \left|\vec{b}\right|=2, |\vec{c}|=3$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Показать, что точки $A(3;0;8), B(2;1;-1), C(4;-3;5), D(1;2;-10)$ лежат в одной плоскости.

3. Показать, что точки $A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$ являются вершинами тетраэдра. Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

4. Объем тетраэдра $V=2$, три его вершины находятся в точках $A(0;1;1), B(4;-3;3), C(2;1;-1)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz.

2. Аналитическая геометрия

2.1. Уравнение плоскости

Пусть на плоскости задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{n}=(A;B;C)$, перпендикулярный плоскости.

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости.

Произвольная точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны (рис. 4.3), а значит, их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$, или, в координатной форме, $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

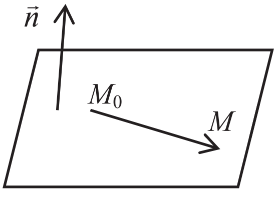


Рис. 4.3

Раскроем скобки в уравнении плоскости:

$$Ax + By + Cz + \left(-Ax_0 - By_0 - Cz_0\right) = 0\,.$$

Обозначив выражение в скобках через D, получим *общее уравнение плоскости*: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Это уравнение есть уравнение первой степени относительно x, y, z. Справедливо и обратное: всякое уравнение первой степени определяет плоскость.

Если коэффициенты уравнения плоскости удовлетворяют условию $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$, то уравнение можно привести к виду:

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Обозначим $a = -D/A, b = -D/B, c = -D/C$ и получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Эта плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz отрезки, равные a, b и c соответственно.

Пусть два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны плоскости, тогда их векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$ дает нормальный вектор плоскости. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *направляющими векторами* плоскости.

Если известны координаты трех точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, принадлежащих плоскости, то уравнение этой плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно двум плоскостям $2x-z+1=0, y=0$.

Решение. По данным уравнениям для каждой плоскости определяем нормальный вектор: $\overrightarrow{n_1}=(2;0;-1)$, $\overrightarrow{n_2}=(0;1;0)$. Так как искомая плоскость перпендикулярна к данным плоскостям, то она будет параллельна векторам $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, причем эти векторы не коллинеарны (в случае коллинеарности координаты векторов должны быть пропорциональны). Значит, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ — направляющие векторы искомой плоскости.

Находим ее вектор нормали

$$n=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{k}.$$

Составляем уравнение плоскости
$1\cdot(x-2)+0(y+1)+2(z-1)=0$ или $x+2z-4=0$.

2.2. Уравнения прямой в пространстве

Пусть известна точка $M_0(x_0, y_0 z_0)$, лежащая на прямой l и вектор $\vec{s}=(m;n;p)$, параллельный прямой (он называется *направляющим вектором* прямой). Точка $M(x,y,z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны, а значит, их координаты пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Полученные уравнения называются *каноническими уравнениями прямой* в пространстве.

Обозначив коэффициент пропорциональности через t, получим *параметрические уравнения* прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Прямую в пространстве можно представить как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Тогда координаты всех точек прямой удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

В этом случае получаем *общие уравнения прямой*.

По общим уравнениям прямой можно найти ее направляющий вектор

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, если заданы общие уравнения этой прямой:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Решение. Чтобы перейти от общих уравнений прямой к каноническим и параметрическим, нужно знать координаты $\vec{s}$ и M_0.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}\,.$$

Для определения координат любой фиксированной точки M_0 на прямой найдем любое частное решение системы $\begin{cases} 2x-3y+z=4, \\ x+2y+2z=0. \end{cases}$ Так как $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, то система $\begin{cases} 2x-3y=4-z, \\ x+2y=-2z \end{cases}$

имеет решения $\begin{cases} y=-\dfrac{3z+4}{7}, \\ x=\dfrac{-8z+8}{7}. \end{cases}$

Пусть, например, $z=-6$, тогда $x=8$, $y=2$.

Канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x-8}{-8}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+6}{7} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{8}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+6}{-7}.$$

Полагая $\dfrac{x-8}{8}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+6}{-7}=t$, получаем параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=8-8t, \\ y=2-3t, \\ z=-6+7t. \end{cases}$$

2.3. Метрические задачи аналитической геометрии в пространстве

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

соответственно в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Возможны следующие случаи взаимного расположения двух плоскостей:

1) плоскости π_1 и π_2 совпадают:

$$(\pi_1 = \pi_2) \Leftrightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{D_2} \right);$$

2) плоскости π_1 и π_2 параллельны, но не совпадают:

$$(\pi_1 \parallel \pi_2) \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D}{D_2} \right);$$

3) плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда не выполняются предыдущие условия, т. е. коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны A_2, B_2, C_2 соответственно.

Угол между плоскостями

Один из двугранных углов φ между двумя плоскостями равен углу между нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ этих плоскостей $\left(\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$. Тогда $\cos\varphi = \left| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}} \right) \right| = \frac{\left| \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} \right|}{\left| \overrightarrow{n_1} \right| \cdot \left| \overrightarrow{n_2} \right|}$.

Отсюда вытекает условие перпендикулярности двух плоскостей: $(\pi_1 \perp \pi_2) \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0) \Leftrightarrow (A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0)$.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть заданы уравнения двух прямых:

$$l_1 : x = x_1 + m_1 t,\ y = y_1 + n_1 t, z = z_1 + p_1 t,$$

$$l_2 : x = x_2 + m_2 t, y = y_2 + n_2 t, z = z_2 + p_2 t.$$

Возможны следующие случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве:

1) l_1 и l_2 совпадают:

$$(l_1 = l_2) \Leftrightarrow \left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ и } \frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1} \right);$$

2) l_1 и l_2 параллельны, но не совпадают:

$$\left(l_1 \| l_2\right) \Leftrightarrow \left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ и } \overrightarrow{s_1} \nparallel \overrightarrow{M_1 M_2}\right),$$

где $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$;

3) l_1 и l_2 пересекаются в одной точке:

$$\left(l_1 \cap l_2 = \{M\}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0; \overrightarrow{s_1} \nparallel \overrightarrow{s_2}\right),$$

где $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1), \overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$.

4) l_1 и l_2 являются скрещивающимися тогда и только тогда, когда

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Угол между прямыми

За угол φ между двумя прямыми l_1 и l_2 примем наименьший угол между направляющими векторами этих прямых $\left(\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Тогда величину этого угла можно выразить по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Из этой формулы вытекает необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть заданы уравнение плоскости

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

и параметрические уравнения прямой

$$l: x = x + mt,\ y = y + nt,\ z = z + pt.$$

Возможны следующие случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

1) прямая принадлежит плоскости:

$$(l \subset \pi) \Leftrightarrow \left(Am + Bn + Cp = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\right);$$

2) прямая параллельна плоскости:

$$(l \parallel \pi) \Leftrightarrow \left(Am + Bn + Cp = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0\right);$$

3) прямая пересекает плоскость:

$$\left(l \cap \pi = \{M\}\right) \Leftrightarrow \left(Am + Bn + Cp \neq 0\right).$$

Угол между прямой и плоскостью

Обозначим буквой φ величину угла, образованного прямой l с ортогональной проекцией этой прямой на плоскость π. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Будем считать, что $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Так как вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ перпендикулярен к плоскости π, то направляющий вектор $\vec{s} = (m; n; p)$ прямой l образует с вектором $\vec{n}$ угол $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ или $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$ (рис. 4.4). Поэтому

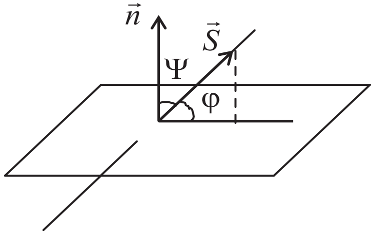


Рис. 4.4

$$\sin\varphi = |\cos\varphi| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость π: $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости. Расстояние от точки M_0 до плоскости π:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямая l:

$$x = x_1 + mt,\ y = y + n_1 t,\ z = z_1 + pt,$$

$\vec{s} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой l.

Расстояние точки $M_0\,(M_0 \notin l)$ до прямой l: $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1 M_0} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$.

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

$$l_1 : x = x_1 + m_1 t,\ y = y_1 + n_1 t,\ z = z_1 + p_1 t,$$

$$l_2 : x = x_2 + m_2 t,\ y = y_2 + n_2 t,\ z = z_2 + p_2 t.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2:

$$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}\right|},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1), \overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и составляющей угол $60°$ с плоскостью $x = y$.

Решение. Для составления уравнения плоскости необходимо знать координаты какой-либо точки плоскости и нормальный вектор плоскости. Так как искомая плоскость π проходит через ось Ox, то $O \in \pi$.

Обозначим нормальный вектор $\vec{n} = (A; B; C)$. Составим уравнения, связывающие координаты этого вектора:

$$\vec{n} \cdot \vec{i} = 0 \text{, т. к. } \vec{n} \perp Ox;$$

$$\frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_1}\right|} = \cos 60°,$$

где $\overrightarrow{n_1}$ — нормальный вектор плоскости $x = y$, значит, $\overrightarrow{n_1} = (1; -1; 0)$ (косинус угла между плоскостями берем по модулю, так как угол между нормальными векторами равен либо $60°$, либо $120°$).

Получаем систему: $\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0, \\ \dfrac{|A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $A = 0$,

$\sqrt{2}|B| = \sqrt{B^2 + C^2} \Rightarrow B^2 = C^2 \Rightarrow B = \pm C.$

Таким образом, найдены два нормальных вектора π: $\vec{n} = (0; \pm C; C)$ (плоскость определяется неоднозначно). Составляем уравнения искомых плоскостей ($D = 0$, т. к. π проходит через начало координат): $0x \pm Cy + Cz = 0$ или $\pm y + z = 0$.

Пример 4. Найти точку Q, симметричную точке $P(3; -4; -6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6; 1; -5), M_2(7; -2; -1), M_3(10; -7; 1)$.

Решение. Составляем уравнение плоскости π по трем точкам

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-1 & z+5 \\ 7+6 & -2-1 & -1+5 \\ 10+6 & -7-1 & 1+5 \end{vmatrix} = 0.$$

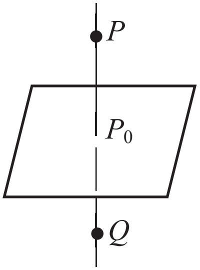


Рис. 4.5

Вычисляя определитель, получим $14x-14y-56z-182=0$ или $x-y-4z-13=0$.

Найдем проекцию P_0 точки P на плоскость (рис. 4.5).

$\{P_0\}=\pi\cap(PQ)$. Прямая $PQ\perp\pi$, поэтому $\vec{s}_{PQ}=\vec{n}_\pi=(1;-1;-4)$.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=3+t, \\ y=-4-t, \\ z=-6-4t. \end{cases}$$

$$P_0:\ \begin{cases} x=3+t, \\ y=-4-t, \\ z=-6-4t, \\ x-y-4z-13=0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $P_0(2;-3;-2)$ при $t=-1$.

Так как Q симметрична точке P, то P_0 — середина отрезка PQ. Используем формулы для нахождения координат середины отрезка $x_{P_0}=\dfrac{x_P+x_Q}{2}, y_{P_0}=\dfrac{y_P+y_Q}{2}, z_{P_0}=\dfrac{z_P+z_Q}{2}$ и находим координаты точки Q $(2x_{P_0}-x_P; 2y_{P_0}-y_P; 2z_{P_0}-z_P)$. Таким образом, $Q(1;-2;2)$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(-1;2;-7)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;5;3)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(0;-2;6)$, параллельно прямой $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$ и параллельно вектору $\overline{AB}$, где $A(2;-2;0)$ и $B(2;-3;-5)$.

3. Найти проекцию точки $P(-1;7;2)$ на плоскость, проходящую через прямые $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-6}{-1}$ и $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

4. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;-1;1)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(1;-3;4)$ и $M_2(2;-7;9)$.

5. Найти расстояние между прямыми $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+7}{1}$ и $\begin{cases} x-2y+3z-1=0, \\ x-y-z+2=0. \end{cases}$

6. Найти расстояние между плоскостями $3x-2y+5z-14=0$ и $6x-4y+10z+30=0$.

7. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(3;4;-5)$ и пересекает прямые $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{2}$, $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-3}$.

8. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми: $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$ и $x=6t+9,\ y=-2t,\ z=-t+2$.

9. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями $2x-14y+6z=1$ и $3x+5y-5z+3=0$, в котором лежит начало координат.

10. Найти уравнение проекции прямой $4x-16=6y+6=3z$ на плоскость $x-3y-z+8=0$.

2.4. Уравнения прямой на плоскости

Рассмотрим прямую на плоскости.

Уравнение прямой на плоскости *с угловым коэффициентом* имеет вид: $(y-y_0)=k(x-x_0)$ или $y=kx+b$, где $M_0(x_0,y_0)$ — точка на прямой, $k=\mathrm{tg}\alpha$, α — угол между прямой и положительным направлением оси Ox, $b=y_0-kx_0$.

Общее уравнение прямой l: $Ax+By+C=0$, где $\vec{n}=(A;B)$ — нормальный вектор прямой ($\vec{n}\perp l$). Любое уравнение первого порядка на плоскости определяет прямую и, наоборот, любая прямая на плоскости определяется уравнением первого порядка.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Обозначим $x_2-x_1=m,\ y_2-y_1=n$ и получим каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$, где $\vec{s}=(m;n)$ — направляющий вектор прямой.

Угловые соотношения между двумя прямыми

Угол φ между двумя прямыми можно определить по той же формуле, что и угол между прямыми в пространстве, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}},$$

где $\overrightarrow{s_1} = (m_1; n_1)$, $\overrightarrow{s_2} = (m_2; n_2)$ — направляющие векторы прямых.

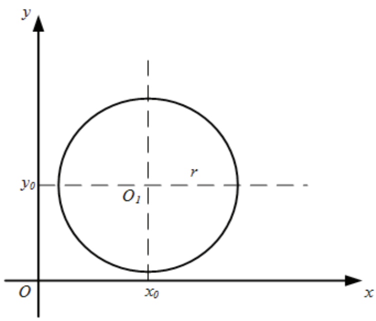
Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, т. е. l_1: $y_1 = k_1 x + b_1$, l_2: $y_2 = k_2 x + b_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

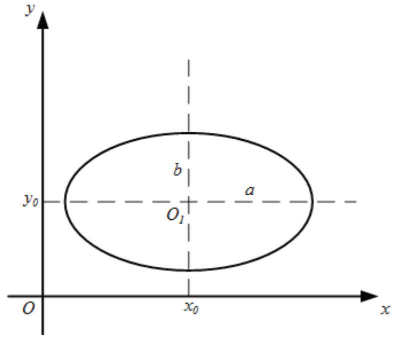
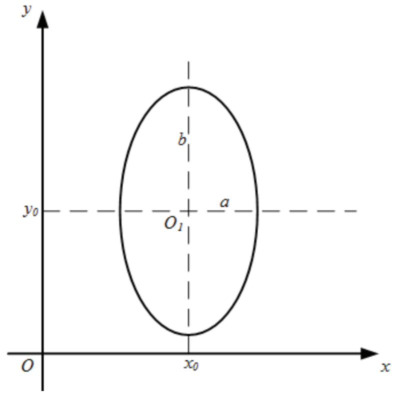
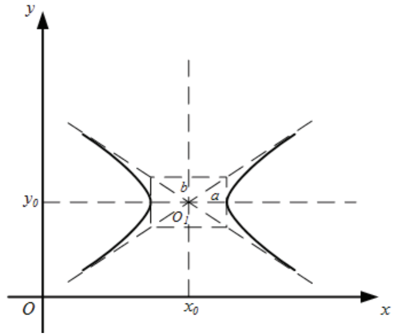
Из этой формулы получается условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$; и условие перпендикулярности двух прямых:

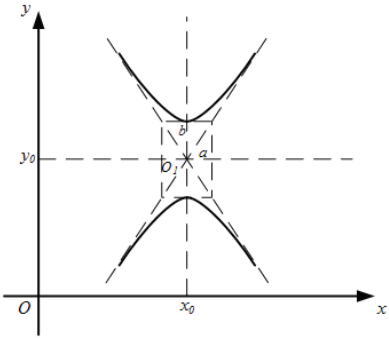
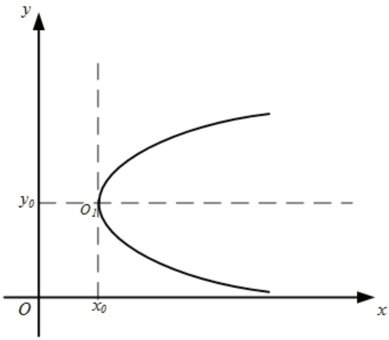
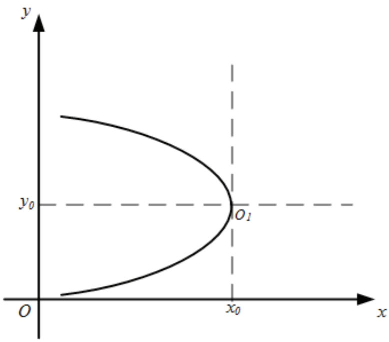
$$k_1 k_2 + 1 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}(k_1 \neq 0).$$

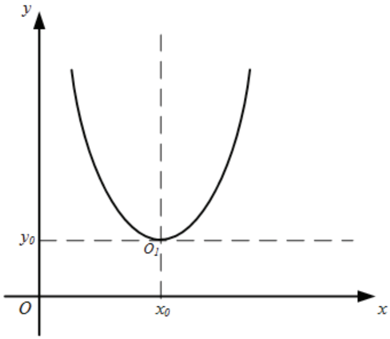
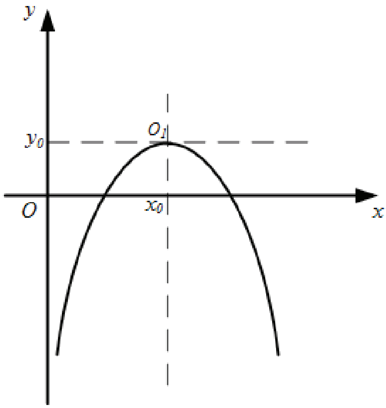
2.5. Кривые второго порядка

Кривые второго порядка — это линии на плоскости, которым соответствуют уравнения второго порядка.

Тип линии	Каноническое уравнение	Изображение
Окружность	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	

<table>
<tr><th>Тип линии</th><th>Каноническое уравнение</th><th>Изображение</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Эллипс</td><td>$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$ $$a>b$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$ $$a<b$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Гипер-бола</td><td>$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$</td><td>
</td></tr>
</table>

Тип линии	Каноническое уравнение	Изображение
Гипербола	$-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	
Парабола	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, $p>0$	
	$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$, $p>0$	

<table>
<tr><th>Тип линии</th><th>Каноническое уравнение</th><th>Изображение</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Парабола</td><td>$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$,
$p>0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$,
$p>0$</td><td>
</td></tr>
</table>

Теорема. Уравнение $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$ определяет: либо окружность (при $A=C$), либо эллипс (при $AC>0$), либо гиперболу (при $AC<0$), либо параболу ($AC=0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) — в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы — в пару пересекающихся прямых, для параболы — в пару параллельных прямых.

Рассмотрим определения этих линий.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром, на данное расстояние, называемое радиусом. В каноническом уравнении окружности: $(x_0; y_0)$ — центр; r — радиус.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная (ее обозначают $2a$), большая, чем расстояние между фокусами (его обозначают $2c$, $a>c$).

В каноническом уравнении эллипса: $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > b)$. Точка $(x_0; y_0)$ — центр эллипса; a, b — полуоси эллипса, фокусы $F_1(x_0 - c; y_0)$ и $F_2(x_0 + c; y_0)$ расположены на большей оси $2a$.

В случае, когда $b>a$, $a^2 = b^2 - c^2$, фокусы $F_1(x_0; y_0 - c)$ и $F_2(x_0; y\ \ + c)$ расположены на большей оси $2b$.

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная (ее обозначают $2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами (его обозначают $2c$, $a<c$).

В каноническом уравнении гиперболы: $b^2 = c^2 - a^2$. Точка $(x_0; y_0)$ — центр гиперболы; a — действительная полуось, b — мнимая полуось гиперболы, фокусы $F_1(x_0 - c; y_0)$ и $F_2(x_0 + c; y_0)$ расположены на действительной оси (горизонтальная ось). Точки $(x_0 \pm a; y_0)$ — вершины гиперболы.

В случае, когда фокусы $F_1(x_0 - c; y_0)$ и $F_2(x_0 + c; y_0)$ расположены на вертикальной оси, $2a$ — мнимая ось, $2b$ — действительная ось гиперболы; при этом $a^2 = c^2 - b^2$, вершины гиперболы: $(x_0; y_0 \pm b)$.

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом F, и от данной прямой, называемой директрисой d (расстояние между фокусом и директрисой обозначают p).

В каноническом уравнении параболы точка $(x_0;y_0)$ – вершина. Для канонических уравнений вида $(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)$ ось симметрии параболы $y=y_0$, $F\left(x_0\pm\frac{p}{2};y_0\right)$, уравнения директрис d: $x=x_0\mp\frac{p}{2}$.

Для канонических уравнений вида $(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y)$ ось симметрии параболы $x=x_0$, $F\left(x_0;y_0\pm\frac{p}{2}\right)$, уравнения директрис d: $y=y_0\mp\frac{p}{2}$.

Пример 1. Установить, какие линии определяются данными уравнениями. Изобразить линии на чертеже:

а) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

б) $x=-5+\sqrt{-y^2-6y+40}$.

Решение.

а) Выделим полные квадраты относительно каждой переменной, а свободные члены перенесем в правую часть:

$$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0;$$

$$16\left(x^2-4x\right)-9\left(y^2+2y\right)=-199;$$

$$16(x-2)^2-64-9(y+1)^2+9=-199;$$

$$16(x-2)^2-9(y+1)^2=-144;$$

$$\frac{16(x-2)^2}{144}-\frac{9(y+1)^2}{144}=-1;$$

$$-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1.$$

Получаем каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(2;-1)$, мнимой полуосью $a=3$, действительной полуосью $b=4$ (рис. 4.6). Для построения гиперболы строим основной прямоугольник с центром $C(2;-1)$ и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными соответственно осям координат Ox и Oy, проводим прямые, содержащие диагонали прямоугольника (асимптоты гиперболы). Отмечаем вершины гиперболы $(x_0;y_0\pm b)=\left[\begin{array}{l}(2;3)\\(2;-5)\end{array}\right.$

и проводим две ее ветви, приближающиеся к асимптотам.

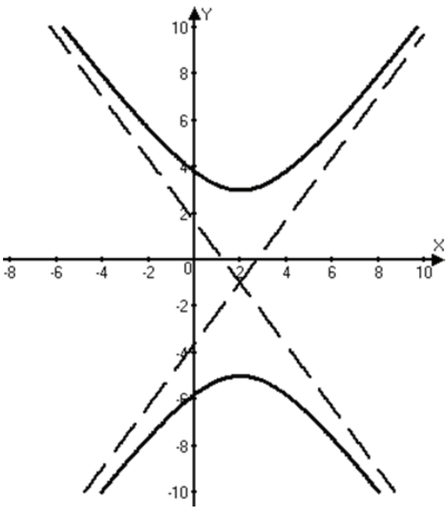


Рис. 4.6

б) $x=-5+\sqrt{-y^2-6y+40}$.

При решении данной задачи необходимо учесть неотрицательность выражения $x+5$, то есть $x+5\geq 0$; возведем обе части исходного уравнения в квадрат и выделим полные квадраты:

$$(x+5)^2=-y^2-6y+40;$$

$$(x+5)^2+y^2+6y-40=0;$$

$$(x+5)^2+y^2+6y-40=0;$$

$$(x+5)^2+(y+3)^2-9-40=0;$$

$$\begin{cases}(x+5)^2+(y+3)^2=49,\\ x\geq -5.\end{cases}$$

Уравнение $(x+5)^2+(y+3)^2=49$ является каноническим уравнением окружности с центром в точке $C(-5;-3)$ и радиусом $r=7$. С учетом условия $x\geq -5$ получаем правую часть этой окружности (рис. 4.7).

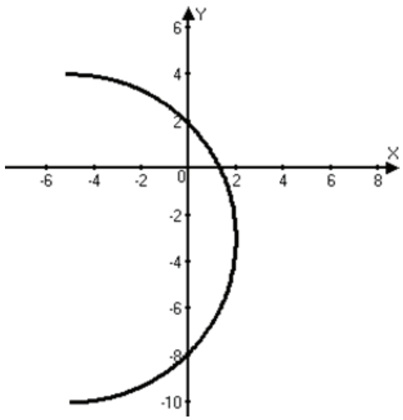


Рис. 4.7

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Точка $A(-4;5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

2. Луч света направлен по прямой $x-2y+5=0$. Дойдя до прямой $3x-2y+7=0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

3. Составить уравнение гиперболы с фокусами $F_1(2;5)$ и $F_2(2;3)$ и с равными полуосями. Выполнить построение.

4. Привести уравнения кривых к каноническому виду и построить соответствующие линии:

а) $2x^2+3y^2-4x+18y+17=0;$

б) $4x^2-y^2+8x-8y-13=0;$

в) $x=-2-0{,}5\sqrt{y^2-2y+5};$

г) $y=-5+\sqrt{1-y}.$

2.6. Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка описываются уравнениями второго порядка относительно переменных x, y, z.

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, состоящая из параллельных прямых (образующих), пересекающих некоторую линию (направляющую) (рис. 4.8).

Пусть направляющая (γ) лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $F(x;y)=0$.

Уравнение цилиндрической поверхности (σ) с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей, расположенной в плоскости Oxy, имеет вид: $F(x;y)=0$.

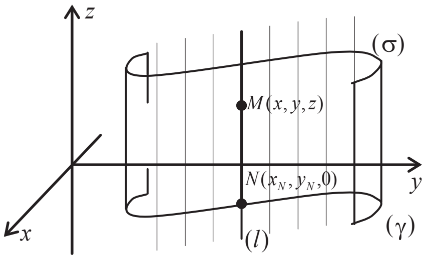


Рис. 4.8

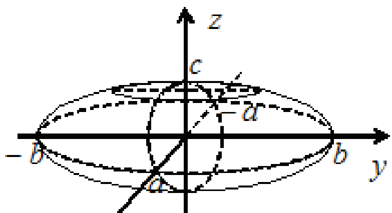
Аналогично определяются цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси Ox или Oy .

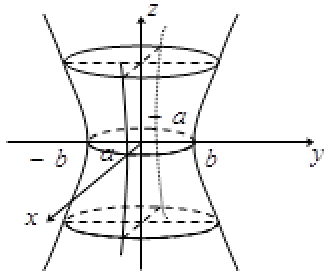
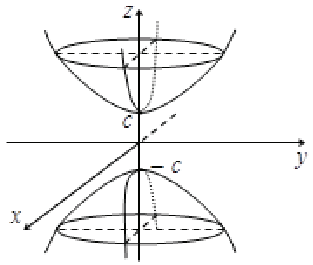
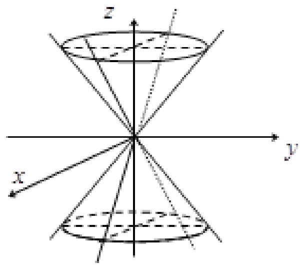
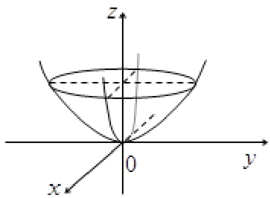
Общее уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид:

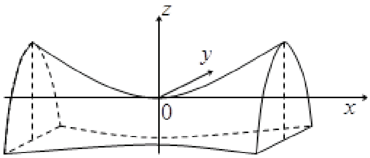
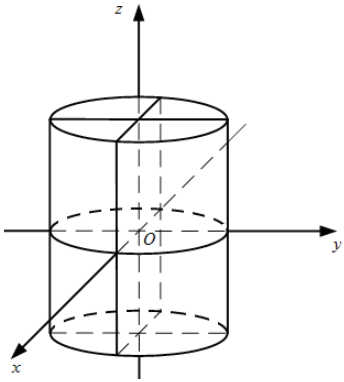
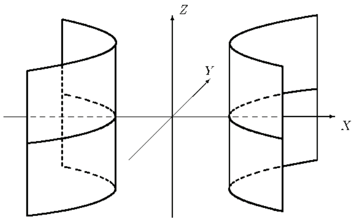
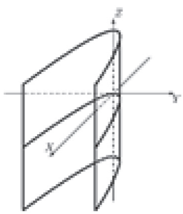
$$a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2+a_{33}\,z^2+2a_{12}\,x\,y+2a_{13}\,x\,z+2a_{23}\,y\,z+a_1\,x+a_2\,y+a_3\,z+a=0,$$

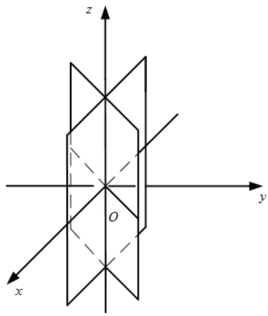
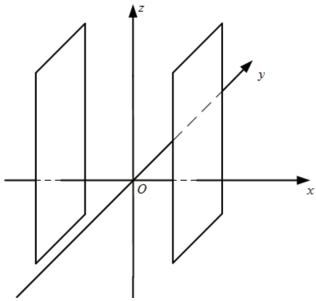
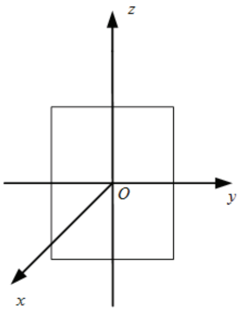
где $a_{11}^2\;+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\neq 0.$

Теорема. Общее уравнение поверхности 2-го порядка с помощью симметрии относительно плоскости, поворота оси и параллельного переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к одному из следующих канонических уравнений:

Тип поверхности	Каноническое уравнение	Изображение
эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	Ø

Тип поверхности	Каноническое уравнение	Изображение
однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
мнимый конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	точка (0; 0; 0)
эллиптический параболоид	$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ $(p,q>0)$	

Тип поверхности	Каноническое уравнение	Изображение
гиперболический параболоид	$z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}$	
эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	
мнимый эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	$\varnothing$
гиперболический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	
параболический цилиндр	$y^2=2px(p>0)$	

Тип поверхности	Каноническое уравнение	Изображение
пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
пара мнимых пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	ось Oz $(x=y=0)$
пара параллельных плоскостей	$x^2-a^2=0$	
пара мнимых параллельных плоскостей	$x^2+a^2=0$	$\varnothing$
пара совпадающих плоскостей	$x^2=0$	

Упражнения для самостоятельной подготовки

Привести уравнения к каноническому виду и построить соответствующие поверхности:

1) $2x^2+y^2-4z^2-4x+4y+16z-14=0$;

2) $x^2+y^2-2x+4y+2z+5=0$;

3) $4x^2-25y^2-8x-100y+4=0$;

4) $x=3-\sqrt{y^2+z^2-2y+1}$;

5) $z=-\sqrt{4y^2-24y+20}$.

3. Алгебраические структуры

3.1. Понятие алгебраической структуры

Определение. Пусть дано некоторое множество $X\neq\varnothing$.

Отображение $\omega: X^n\to X$, где $n\in\mathbb{N}$, называется n-арной алгебраической операцией на X.

При $n=2$ операция называется бинарной, при $n=1$ — унарной, а при $n=0$ — нульарной (означает фиксирование некоторого элемента в X).

Алгебраическую операцию на множестве X обозначают специальным символом: $*$, $\cdot$, $+$, $-$ и т. п.

Примеры алгебраических операций.

1. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Какие действия можно выполнять с натуральными числами? Складывать, вычитать, умножать, делить и т. д. Операции сложения, умножения — бинарные алгебраические операции. Операции вычитания, деления не являются алгебраическими операциями, т. к. результат операции может и не принадлежать множеству $\mathbb{N}$.

2. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ алгебраическими (бинарными) операциями являются операции сложения, вычитания, умножения. Операция деления не является алгебраической операцией.

3. Все арифметические операции на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ являются алгебраическими операциями.

4. На множестве геометрических векторов V операции — сложение, вычитание, векторное умножение являются бинарными алгебраическими операциями; умножение вектора на число — унарной алгебраической операцией.

Операция $*$ на множестве X называется *коммутативной*, если $\forall a,b \in X \quad a*b = b*a$.

Операция $*$ называется *ассоциативной на множестве* X, если $\forall a,b,c \in X$ выполняется равенство $(a*b)*c = a*(b*c)$.

Например, операция сложения на множестве геометрических векторов V является и ассоциативной, и коммутативной; операция вычитания на этом же множестве — неассоциативная и некоммутативная операция.

Определение. *Алгебраическая структура* — система, состоящая из множества элементов X и операций $f_1, f_2, \ldots f_n$, определенных на X. Употребляют обозначение: $(X; f_1, f_2, \ldots f_n)$.

Группоид — алгебраическая структура, определяемая одной бинарной операцией.

Группоид называется коммутативным, если бинарная операция коммутативна.

Полугруппа — группоид, операция которого ассоциативна, т. е. $\forall a,b,c \in X \quad (a*b)*c = a*(b*c)$.

Элемент e группоида $(X;\cdot)$ называется нейтральным (единичным или единицей), если $\forall a \in X \; a\cdot e = e \cdot a = a$.

Элемент θ группоида $(X;\cdot)$ называется *нулевым* (нулем), если $\forall a \in X \quad a\cdot\theta = \theta\cdot a = \theta$.

Полугруппа $(X;\ \cdot)$ с единицей e называется *группой*, если $\forall a \in X\ \exists b \in X : a \cdot b = b \cdot a = e$, при этом b называется *обратным элементом* для элемента a.

Коммутативная группа называется абелевой. В абелевой группе операцию обычно называют сложением, нейтральный элемент — нулем и обратный элемент — противоположным элементом.

Примеры групп.

1. $(N;+)$, $(N;\ \cdot)$ — коммутативные полугруппы.
2. $(Z;+),(R;+)$ — абелевы группы.
3. $(Z;\ \cdot)$ — коммутативная полугруппа с единицей, но не группа.

Кольцо — алгебраическая структура K с двумя бинарными операциями, одна из которых называется сложением $(+)$, другая — умножением $(\cdot)$, при этом должны выполняться следующие условия:

1. $\forall a,b \in K \qquad (a+b)=(b+a)$
2. $\forall a,b,c \in K \qquad a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\exists \theta \in K\ \forall a \in K \qquad a+\theta=\theta+a=a$
4. $\forall a \in K\ \exists(-a) \in K \qquad a+(-a)=(-a)+a=\theta$
5. $\forall a,b,c \in K \qquad a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$
6. $\forall a,b,c \in K \qquad (b+c) \cdot a=b \cdot a+c \cdot a$

Заметим, что $(K;+)$ — абелева группа; $(K;\cdot)$ — полугруппа.

Примеры колец.

1. $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ – числовые кольца.
2. $P[x]$ — кольцо многочленов от неизвестного x с действительными коэффициентами.

3. Множество функций, определенных на $\mathbb{R}$, с операциями сложения и умножения.

Кольцо называется коммутативным, если операция умножения коммутативна.

Коммутативное кольцо P, в котором есть единица и любой ненулевой элемент имеет обратный, называется полем.

Перечислим аксиомы поля:

1. $\forall a, b \in P \qquad a + b = b + a$
2. $\forall a, b, c \in P \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \theta \in P : a + \theta = a$
4. $\forall a \in P \ \exists (-a) \in P : \ a + (-a) = \theta$.
5. $\forall a, b \in P \qquad a \cdot b = b \cdot a$
6. $\forall a, b, c \in P \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7. $\forall a \in P \qquad e \cdot a = a$
8. $\forall a, b, c \in P \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
9. $\forall a, b, c \in P \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Бесконечные поля называются числовыми, а их элементы — числами.

Примеры числовых полей.

1. $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел;
2. $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел.

3.2. Комплексные числа

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел, т. е. если $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, то $z = (x, y)$ — комплексное число. Множество всех комплексных чисел $\mathbb{C}$ — это $\mathbb{R}^2$ (определяет комплексную плоскость). Действительная часть комплексного числа z обозначается $x = \operatorname{Re} z$, мнимая часть числа z обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

Комплексное число $z = (x, y)$ имеет три формы записи.

$z = x + yj$ — *алгебраическая* форма, где $j = (0,1)$ – мнимая единица, $j^2 = -1$.

$z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, $(z \neq 0)$ — *тригонометрическая* форма, где $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль числа $z = (x, y)$, $\varphi = \arg z$ — аргумент числа $z = (x, y)$, $\varphi \in [-\pi; \pi)$ или $\varphi \in [0; 2\pi)$.

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x),\ x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x),\ x < 0, y > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}(y/x),\ \ x < 0, y < 0, \\ \pi/2,\ x = 0, y > 0, \\ -\pi/2,\ x = 0, y < 0, \end{cases} \quad \text{если } \varphi \in (-\pi; \pi];$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x),\ x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), x < 0 \\ \pi/2,\ x = 0, y > 0, \\ 3\pi/2,\ x = 0, y < 0, \end{cases} \quad \text{если } \varphi \in [0; 2\pi).$$

$z = \rho e^{j\varphi}$ — показательная форма, где $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ (формула Эйлера).

Комплексные числа $z = x + yj$, $\bar{z} = x - yj$ называются *комплексно сопряженными*, при этом $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Возведение комплексного числа в натуральную степень:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi) \text{ (формула Муавра).}$$

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пример 1. Вычислить $\sqrt[5]{\dfrac{-7+j}{-4-3j}}$ и изобразить полученные корни на комплексной плоскости.

Решение. При использовании формулы необходима тригонометрическая форма числа $z=\dfrac{7-j}{-4-3j}$. Для упрощения проведем деление в алгебраической форме, а затем перейдем к тригонометрической форме:

$$z=\frac{7-j}{-4-3j}=\frac{(7-j)(-4+3j)}{(-4-3j)(-4+3j)}=\frac{-28+21j+4j-3j^2}{(-4)^2+(-3)^2}=$$

$$=\frac{-25+25j}{25}=-1+j;$$

$$\rho=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2};$$

$$\varphi: z\in\text{II четв.}\,(\text{т. к. } x<0, y>0)\Rightarrow\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{-1}=\frac{3\pi}{4}.$$

Значит, $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+j\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Извлекаем корень

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{5}+j\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{5}\right)=$$

$$=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi+8\pi k}{20}+j\sin\frac{3\pi+8\pi k}{20}\right)$$

и получаем 5 различных значений при $k=0,1,2,3,4$. Их аргументы $\dfrac{3\pi}{20}, \dfrac{11\pi}{20}, \dfrac{19\pi}{20}, \dfrac{27\pi}{20}, \dfrac{35\pi}{20}$ находятся в промежутке $[0;2\pi)$ (для того, чтобы получить значения аргумента из промежутка $(-\pi;\pi]$, нужно взять $k=0,\pm1,\pm2$). Модули этих чисел равны $\sqrt[10]{2}$, т. е. эти комплексные числа расположены на окружности радиуса $\sqrt[10]{2}$ и делят ее на 5 равных частей (являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность)

Строим найденные точки (комплексные числа):

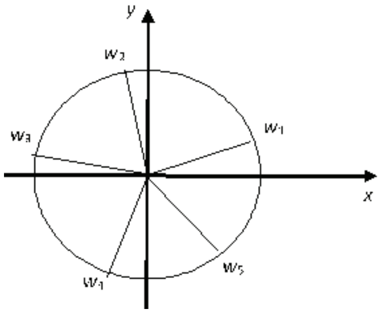


Рис. 4.9

Пример 2. Построить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению: $|z-2j|+|z+2j|=6.$

Решение. На комплексной плоскости $|z-z_0|$ есть расстояние между точками z и z_0, поэтому искомое множество состоит из точек комплексной плоскости, сумма расстояний от которых до точек $z_1=2j$ и $z_2=-2j$ есть величина постоянная, равная $2b=6$. По определению — это эллипс с фокусами в точках $z_1=2j,\ z_2=-2j$, для которого $2c=|z_1-z_2|=4,\ b=3, a=\sqrt{b^2-c^2}=\sqrt{5}$, центр находится в начале координат (посередине между фокусами).

Запишем уравнение эллипса в декартовой системе координат: $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Строим кривую:

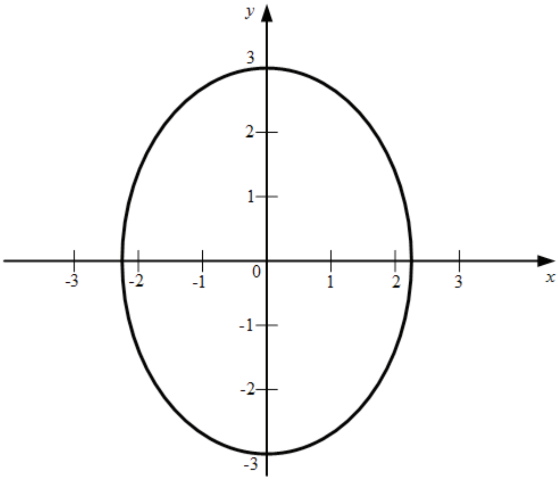


Рис. 4.10

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Вычислить, ответ записать во всех известных формах:

а) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}j}{1-\sqrt{3}j}\right)^{12}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z-j}+\dfrac{z-j}{2}+j(z-j)^3$, если $z=1+2j$.

2. Решить системы, используя формулы Крамера:

а) $\begin{cases}(2-j)x+(2+3j)y=3j,\\(4-3j)x-(1+5j)y=12;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(3+2j)x+(1+j)y=5+j,\\(2+3j)x+y=6+2j.\end{cases}$

3. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{-1-\sqrt{3}j}{1+j}}$; б) $\sqrt{-3+4j}$.

4. Решить квадратные уравнения:

а) $jz^2+(1-8j)z-7+17j=0$;

б) $z^2-(4-2j)z+2-4j=0$.

5. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

а) $\operatorname{Re} z^2+2\operatorname{Im} z\le 2$;

б) $|z-3|-|z+1|=2$;

в) $z=-3+j+2e^{j\varphi},\varphi\in[0;\pi/2)$.

3.3. Кольцо многочленов

Пусть задано произвольное числовое поле P. Рассмотрим множество многочленов, т. е. функций вида

$$p_n=a_0+a_1z+{}_{\dots}+a_nz^n=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k,$$

зависящих от аргумента z, принимающих значения из поля P и имеющих коэффициенты $a_0,a_1,\ \dots,\ a_n\in P.$ Будем считать многочлен $p_n(z)$ многочленом степени n, если $a_n\ne 0$. Единственным многочленом, не имеющим определенной степени, является многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю. Мы будем называть его *нулевым* многочленом и обозначать символом θ.

Равенство многочленов

Пусть $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \;\; q_n(z)=\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$, тогда

$$\left(p_n(z)=q_n(z)\right)\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}\left(\forall k\in\{0,\ldots,n\}\, a_k=b_k\right).$$

Если рассматривать многочлены как функции, то можно сформулировать эквивалентное определение:

$$\left(p_n(z)=q_n(z)\right)\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}(\forall z_0\in P\;\; p(z_0)=q(z_0)).$$

Сумма многочленов

Пусть $p_m(z)=\sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \;\; q_n(z)=\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ и предположим для определенности, что $n\geq m$.

Тогда

$$\left(p_m(z)+q_n(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}(\forall k\in\{0,\ldots m\}\, c_k=a_k+b_k\,,\;\forall k>m\;\; c_k=b_k).$$

Произведение многочленов

Пусть $p_m(z)=\sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \;\; q_n(z)=\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$.

Тогда

$$\left(p_m(z)\cdot q_n(z)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k\right)\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}\left(\forall k\in\{0,\ldots,n+m\}\;\, c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j\right).$$

Частным случаем произведения многочленов является произведение $\alpha p(z)$ многочлена $p(z)$ на число α, т. к. ненулевое число можно рассматривать как многочлен нулевой степени.

Заметим, что множество многочленов с введенными выше операциями представляет собой коммутативное кольцо $K[z]$.

Теорема. Для любых многочленов $p_n(z)$ и $q_m(z)$, $n > m$, можно найти единственные многочлены $g(z)$ и $r(z)$, такие, что $p_n(z) = q_m(z) \cdot g(z) + r(z)$, причем степень $r(z)$ меньше степени $q_m(z)$ или же $r(z) = 0$; $r(z)$ называется остатком от деления $p_n(z)$ на $q_m(z)$.

Определение. Если каждый из двух многочленов $p(z)$ и $q(z)$ делится без остатка на многочлен $d(z)$, то $d(z)$ называется *общим делителем многочленов* $p(z)$ и $q(z)$.

Определение. *Наибольшим общим делителем многочленов* $p(z)$ и $q(z)$ называется такой их общий делитель $s(z)$, который делится на все другие общие делители многочленов $p(z)$ и $q(z)$.

Теорема о наибольшем общем делителе

Если $s(z) = НОД\big(p(z), q(z)\big)$, то существуют $a(z)$ и $b(z)$, такие, что $s(z) = a(z)p(z) + b(z)q(z)$.

Теорема Безу. При делении многочлена $p(z)$ степени $(n \geq 1)$ на разность $z - a$ получается остаток, равный $p(a)$.

Корнем многочлена (ненулевой степени) называется такое значение z, при котором многочлен обращается в ноль.

Следствие из теоремы Безу:

($p(z)$ делится на $z - a$) $\Leftrightarrow$ (a – корень $p(z)$), т. е. имеет место равенство $p(z) = (z - a)q(z)$.

Теорема Гаусса

Всякое алгебраическое уравнение степени $n > 0$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Теорема о разложении многочлена над полем $\mathbb{C}$

Всякий многочлен степени $n>0$ над полем $\mathbb{C}$ может быть разложен на линейные множители. Это разложение единственное с точностью до перестановки сомножителей местами.

Каноническое разложение многочлена $p(z)$ *на множители над полем* $\mathbb{C}$: $p(z)=a_n(z-z_1)^{K_1}(z-z_2)^{K_2}\ldots(z-z_r)^{K_r}$, где $z_i \neq z_j$ при $i\neq j$ и $K_1+K_2+\ldots+K_r=n$.

Если $K_i=1$ в каноническом разложении $p(z)$, то корень z_i называется *простым*; если же $K_i>1$, то корень z_i называется *кратным*. Число K_i называется кратностью корня z_i.

Таким образом, любой многочлен степени $n>0$ над полем $\mathbb{C}$ имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

Разложение многочлена над полем $\mathbb{R}$

Лемма. Если многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень z_0, то $\overline{z_0}$ является также корнем $p(x)$.

Теорема о разложении многочлена над полем $\mathbb{R}$

Многочлен с вещественными коэффициентами степени $n\geq 2$ может быть разложен на вещественные множители первой и второй степени соответствующей кратности. Это разложение единственное с точностью до перестановки множителей местами.

Каноническое разложение многочлена $p(x)$ *на множители над полем* $\mathbb{R}$:

$$p(x)=a_n(x-a_1)^{K_1}\ldots(x-a_r)^{K_r}(x^2+p_1x+q_{1)}{}^{L_1}\ldots(x^2+p_sx+q_{s)}{}^{L_s},$$

$$K_1+\ldots+K_r+2L_1+\ldots+2L_s=n.$$

Пример 1. Разложить многочлены на множители над полем $\mathbb{R}$; над полем $\mathbb{C}$

а) $x^3-6x^2+11x-6$;

б) x^4+4.

Решение.

а) Корни многочлена $x^3-6x^2+11x-6$ $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Тогда по теоремам о разложении многочлена над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$, имеем $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$.

б) Для того чтобы разложить заданный многочлен на множители, добавим и вычтем $4x^2$ и воспользуемся формулой разности квадратов, получим $x^4+4=\left(x^4+4x^2+4\right)-4x^2=$ $=\left(x^2+2\right)^2-4x^2=\left(x^2+2+2x\right)\left(x^2+2-2x\right)$.

Получили разложение многочлена над полем $\mathbb{R}$. Найдем корни многочленов x^2+2+2x и x^2+2-2x, и, воспользовавшись теоремой о разложении многочлена над полем $\mathbb{C}$, получим $x^4+4=(x-1-j)(x-1+j)(x+1+j)(x+1-j)$.

Можно сразу найти корни заданного многочлена

$$x_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+j\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

Получим $x_1=1+j,\ x_2=1-j,\ x_3=-1+j,\ x_4=-1-j.$

Тогда разложение многочлена над полем $\mathbb{C}$ имеет вид:

$$x^4+4=(x-1-j)(x-1+j)(x+1+j)(x+1-j).$$

Перемножив первые, вторые скобки и третьи, четвертые скобки, получим разложение многочлена над полем $\mathbb{R}$.

Пример 2. Построить многочлен наименьшей степени с комплексными и вещественными коэффициентами, имеющие простые корни $2;\ 3;\ 1+j$, 1 — корень кратности два.

Решение. По теореме о разложении многочлена над полем $\mathbb{C}$, имеем $f(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-j)$.

Раскрывая скобки, получим

$$f(x)=x^5-(8+j)x^4+(24+7j)x^3-(34+17j)x^2+(23+17j)x-6-6j.$$

По лемме о комплексно-сопряженных корнях многочлена с вещественными коэффициентами и по теореме о разложении многочлена над полем $\mathbb{R}$ получим

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)(x-1+i)=$$

$$=x^6-9x^5+33x^4-65x^3+74x^2-46x+12.$$

Пример 3. Разделить многочлен $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на многочлен $x-1$ и найти $f(1)$.

Решение. Разделим многочлен $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на многочлен $x-1$ с остатком:

$$x^4-2x^3+4x^2-6x+8=x^3(x-1)-x^2(x-1)+$$

$$+3x(x-1)-3(x-1)+5=(x-1)\left(x^3-x^2+3x-3\right)+5,$$

т. е. остаток от деления равен 5 и $f(1)=5.$ Данный пример иллюстрирует теорему Безу.

Пример 4. Определить кратность корня $x_0=2$ многочлена $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

Решение. Разделим многочлен $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+$ $+4x-8$ на $x-2$.

Получим $f(x)=(x-2)\left(x^4-3x^3+x^2+4\right)$.

Рассмотрим многочлен $g(x)=x^4-3x^3+x^2+4$. Заметим, что $g(2)=0$, т.е. $x_0=2$ — корень многочлена $g(x)$. Разделим многочлен $g(x)$ на $x-2$. Получим $g(x)=(x-2)\left(x^3-x^2-x-2\right)$, тогда $f(x)=(x-2)^2\left(x^3-x^2-x-2\right)$.

Рассмотрим многочлен $q(x)=x^3-x^2-x-2$, $x_0=2$ — корень многочлена $q(x)$.

Тогда $q(x)=(x-2)\left(x^2+x+1\right)$ и $f(x)=(x-2)^3\left(x^2+x+1\right)$.

Рассмотрим многочлен $t(x)=x^2+x+1$. Заметим, что $x_0=2$ не является корнем многочлена $t(x)$.

Получили $f(x)=(x-2)^3\left(x^2+x+1\right)$.

Значит, $x_0=2$ является корнем кратности 3 многочлена $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

Данную задачу можно решить иначе. Разложим многочлен $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=2$:

$$f(2)=0$$

$$f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4,\ f'(2)=0.$$

$$f''(x)=20x^3-60x^2+42x-4,\ f''(2)=0.$$

$$f'''(x)=60x^2-120x+42,\ f'''(2)=42.$$

$$f^{IV}(x)=120x-120,\ f^{IV}(2)=120.$$

$$f^{V}(x)=120.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{42(x-2)^3}{3!}+\frac{120(x-2)^4}{4!}+\frac{120(x-2)^5}{5!}=7(x-2)^3+$$
$$+6(x-2)^4+(x-2)^5=(x-2)^3\left(7+6(x-2)+(x-2)^2\right).$$

Таким образом, кратность корня $x=x_0$ многочлена $f(x)$ равна порядку первой отличной от нуля производной многочлена $f(x)$ при $x=x_0$.

Пример 5. При каких значениях параметров a и b многочлен $f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$ делится на многочлен $(x-1)^2$?

Решение. Требуется определить, при каких значениях параметров a и b $x=1$ является корнем кратности 2 многочлена $f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1.$ Найдем значение заданного многочлена и его первой производной при $x=1$:

$$f(1)=a+b+1,\ f'(x)=a(n+1)x^n+bnx^{n-1}, f'(1)=a(n+1)+bn.$$

При $a=n$ и $b=-n-1$ $f(1)=0$ и $f'(1)=0$, т. е. $x=1$ является корнем кратности 2 многочлена $f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Разложить многочлены на множители над полем $\mathbb{R}$; над полем $\mathbb{C}$:

а) x^4+1; б) x^6+27.

2. Построить многочлен наименьшей степени с комплексными и вещественными коэффициентами, имеющие простые корни 1, $-1-j$ и j — корень кратности два.

3. Разделить многочлен $f(x)=3x^5+x^4-19x^2-13x-10$ на многочлен $x-2$ и найти $f(2)$.

4. Разделить многочлен $f(x)=x^4+2jx^3-(1+j)x^2-3x+7+j$ на многочлен $x+j$ и найти $f(j)$.

5. Определить кратность корня $x_0=-2$ многочлена $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$.

6. Определить кратность корня $x_0=3$ многочлена $f(x)=x^5-6x^4+2x^3+36x^2-27x-54$.

7. При каком значении параметра a многочлен x^5-ax^2-ax+1 имеет -1 корнем не ниже второй кратности?

8. При каких значениях параметров a и b многочлен $f(x)=x^5+ax^3+b$ имеет корень второй кратности отличный от нуля?

3.4. Алгебра матриц

Рассмотрим прямоугольную таблицу $m\times n$ чисел из поля P:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}, \end{matrix}$$

состоящую из m строк и n столбцов.

Эту таблицу назовем *матрицей* размера $m\times n$. Для такой матрицы обычно употребляются следующие обозначения: таблица заключается в круглые скобки ( ) или квадратные [ ].

Краткая запись матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Числа a_{ij}, из которых составлена матрица, называются ее *элементами*; первый индекс i указывает номер строки, второй индекс j — номер столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}.

Например,

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ — вещественная матрица размера 2×3.

$B=\begin{pmatrix} j & 1 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ — комплексная матрица размера 2×2.

Для матриц одинакового размера вводится понятие *равенства*.

Пусть $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

$$(A=B)\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}\left(\forall i\in\{1,\ldots,m\},\ \forall j\in\{1,\ldots,m\}\ a_{ij}=b_{ij}\right)$$

Частные виды матриц

1. $A_{1\times n}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ — *вектор-строка*; n — длина строки.

2. $A_{n\times 1}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ — *вектор-столбец*; n — высота столбца.

3. Матрица, у которой $m=n$, называется *квадратной*. В квадратной матрице элементы $a_{11},\ a_{22},\ldots,a_{nn}$ составляют главную диагональ, а элементы $a_{1n},a_{2n-1},\ldots,a_{n1}$ — побочную диагональ.

След квадратной матрицы $-trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие над или под главной диагональю, равны нулю, называется *треугольной*.

5. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

6. Диагональная матрица, у которой все элементы $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$, называется единичной и обозначается буквой E.

7. Матрица любых размеров, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается буквой Θ.

Операции над матрицами

1. Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$

$$(A + B = C) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \left(\forall i \in \{1,\ldots,m\},\ \forall j \in \{1,\ldots,m\}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\right).$$

Свойства операции сложения:

а) $A + B = B + A$

б) $(A + B) + C = A + (B + C)$

в) $A + \Theta = A$

г) $A + (-A) = \Theta$

По сложению множество всех матриц размера $m \times n$ над числовым полем P является абелевой группой.

2. Умножение матрицы на число

Пусть $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$; $\alpha\in P$.

$$\left(\alpha\cdot A=B\right)\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}\left(\forall i\in\{1,\ldots,m\},\ \forall j\in\{1,\ldots,m\}\ b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}\right).$$

Свойства операции умножения на число:

а) $1\cdot A=A$

б) $\forall\alpha,\beta\in P\ \ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

в) $\forall\alpha\in P\ \ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

г) $\forall\alpha,\beta\in P\,(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

3. Умножение матриц

Пусть $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{p\times n}$. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, такая, что:

$$\forall i\in\{1,\ldots,m\},\ \forall j\in\{1,\ldots,m\}\ \ c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{ip}b_{pj}=\sum_{s=1}^{p}a_{is}b_{sj.}$$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Из определения следует, что элементы матрицы $C=A\cdot B$, стоящие в i-й строке и j-м столбце, равны сумме попарных произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

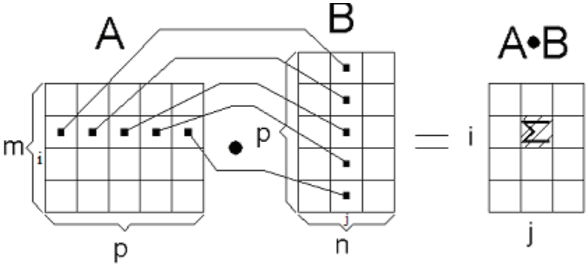


Рис. 4.11

Умножение матриц вводится только для согласованных матриц:

Рис. 4.12

Свойства операции умножения:

а) $AB \neq BA$

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или коммутативными).

б) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

в) $\forall \alpha \in P \;\; \alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$

г) $E \cdot A = A \cdot E = A$

д) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + B \cdot C$

Определение. Две ненулевые матрицы являются *делителями нуля*, если их произведение равно нулевой матрице.

Множество всех квадратичных матриц n-го порядка $(n \geq 2)$ над числовым полем P относительно операций сложения и умножения образует некоммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля.

Определение. *Целой положительной степенью* A^k $(k > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A.

Матрица A^k имеет тот же порядок, что и A, $A^0 = E$.

Многочленом степени k (k — целое неотрицательное число) от матрицы A называется выражение вида:

$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k$, где $a_0, a_1, \ldots, a_k \in P$.

Транспонированием матрицы называется замена строк этой матрицы ее столбцами с сохранением их номеров.

Матрица, полученная таким образом из матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, называется *транспонированной* по отношению к матрице A и обозначается A^T.

Для матрицы-строки транспонированной будет матрица-столбец и наоборот.

Матрица A называется *симметричной*, если $A^T = A$.

Свойства операции транспонирования:

1. $\left(A^T\right)^T = A.$

2. $(\alpha\cdot A)^T = \alpha\cdot A^T.$

3. $(A+B)^T = A^T + B^T.$

4. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T.$

Пусть A — квадратная матрица порядка n. Матрица B называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$.

Матрица, обратная к матрице A, обозначается через A^{-1}.

Если матрица A имеет обратную, то A называется *обратимой*.

Свойства операции обращения:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$

2. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}, \alpha\neq 0.$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

4. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$

Теорема обращения. Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Элементарные преобразования матриц:

1. Перестановка любых двух строк матриц.
2. Умножение одной из строк матрицы на число $\lambda \neq 0$.
3. Прибавление к элементам одной из строк матрицы соответствующих элементов любой другой строки матрицы, умноженных на одно и то же произвольное число.

Нахождение обратной матрицы

а) Метод присоединенной матрицы: для невырожденной матрицы A имеет место формула обращения $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{П}$, где $A^{П}$ есть транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A. Матрица $A^{П}$ называется *присоединенной* к матрице A.

б) Метод Гаусса: для невырожденной матрицы A n-го порядка построим матрицу $(A|E)$ размера $n \times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу E соответствующего порядка. Далее, применяя элементарные преобразования над строками матрицы $(A|E)$, приводим ее к виду $(E|B)$. Тогда $B = A^{-1}$.

Решение матричных уравнений

а) Пусть $AX = B$ и $XA = B$ — матричные уравнения, где A — обратимая матрица, X — неизвестная матрица. Тогда решением первого уравнения является матрица $X = A^{-1}B$, второго — матрица $X = BA^{-1}$.

б) Метод Гаусса. Для решения матричного уравнения $AX = B$ составим расширенную матрицу $(A|B)$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к виду $(E|X)$. Тогда X — матрица, которая является решением данного матричного уравнения; т. е. $(A|B) \sim (E|X)$.

Для решения уравнения $XA = B$ можно использовать схему $\left(A^T | X^T\right) \sim \left(E | X^T\right)$, где $X -$ искомая матрица.

Пример 1. Вычислить линейную комбинацию $3A+2B$ матриц A и B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрицы A и B одинакового размера 2×3, поэтому линейная комбинация их есть матрица того же размера

$$3A+2B = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить AB и BA, где

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, В $= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2\right) = \left(31\right),$$

$$BA=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 0 & 6 & 9 & 3\\4 & 0 & 2 & 3 & 1\\4 & 0 & 2 & 3 & 1\\20 & 0 & 10 & 15 & 5\\8 & 0 & 4 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислить AB и BA, $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -6\\6 & -4\end{pmatrix}$.

Решение. Матрицы A и B согласованные, поэтому существуют произведения AB и BA.

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -6\\6 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 9+(-3)\cdot 6 & 2\cdot(-6)+(-3)(-4)\\4\cdot 9+(-6)\cdot 6 & 4\cdot(-6)+(-6)(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что A и B – делители нуля.

$$BA=\begin{pmatrix}9 & -6\\6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 9\\-4 & 6\end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить AB и BA, где $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\4 & 1 & 3\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Матрицы A и B несогласованные, поэтому не существует произведение AB.

Матрицы B и A согласованные, поэтому существует произведение BA:

$$BA=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&5\\4&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5&13\\6&1&7\end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти все матрицы 2-го порядка над полем R, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Решение.

Пусть $B=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_3&x_2+x_4\\x_3&x_4\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_1+x_2\\x_3&x_3+x_4\end{pmatrix}.$$

$$AB=BA\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=x_1\\x_2+x_4=x_1+x_2\\x_4=x_3+x_4.\end{cases}$$

Решая систему 3 линейных уравнений с 4 неизвестными, имеем

$$x_1=x_4-\alpha,\alpha\in R,$$

$$x_2=\beta,\ \beta\in R,$$

$$x_3=0.$$

Таким образом, матрицы 2-го порядка, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, имеют вид: $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}$, где α,β — любые вещественные числа.

Пример 6. Найти все матрицы 2-го порядка над полем R, квадрат которых равен нулевой матрице.

Решение.

Пусть $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $A^2=\theta$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1{}^2+x_2x_3 & x_1x_2+x_2x_4 \\ x_1x_3+x_3x_4 & x_2x_3+x_4{}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $A^2=\theta$ получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1{}^2+x_2x_3=0, \\ x_2\left(x_1+x_4\right)=0, \\ x_3(x_1+x_4)=0, \\ x_2x_3+x_4{}^2=0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $x_1=\alpha, x_2=\beta, x_3=\gamma, x_4=-\alpha$, т. е. $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, где α,β,γ — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие соотношению $\alpha^2+\beta\gamma=0$.

Пример 7. Найти значение многочлена $f\left(x\right)=3x^2-2x+5$ от матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $f\left(A\right)=3A^2-2A+5E$.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$f(A)=3\begin{pmatrix}6 & -9 & 7\\ -3 & 7 & 4\\ -1 & 4 & 8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}18 & -27 & 21\\ -9 & 21 & 12\\ -3 & 12 & 24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4 & -6\\ -4 & 8 & -2\\ -6 & 10 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 34 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{pmatrix}.$$

Пример 8. При каких a и b для матрицы $A=\begin{pmatrix}a & 2b & a\\ 2b & 0 & -a\\ a & a & 0\end{pmatrix}$ над полем R существует обратная матрица?

Решение. По теореме обращения матрица A обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Вычислим определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix}a & 2b & a\\ 2b & 0 & -a\\ a & a & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 2b & a\\ a+2b & 2b & 0\\ a & a & 0\end{vmatrix}=$$

$$=a\begin{vmatrix}a+2b & 2b\\ a & a\end{vmatrix}=a^2\left(a+2b-2b\right)=a^3\neq 0 \;\Rightarrow a\neq 0.$$

Пример 9. Найти, если возможно, матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$

Т. к. $|A| \neq 0,$ то A обратима.

Первый способ обращения матрицы A.

Построим присоединенную к A матрицу $A^{П} = \left(A_{ij}\right)^{T}_{3\times 3}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

$$A^{П} = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}.$$

По формуле обращения

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{П} = \frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Второй способ обращения матрицы A.

Построим A^{-1} методом Гаусса с помощью элементарных преобразований:

$$(A|E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\6&3&4&0&1&0\\5&-2&-3&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&-12&-17&-3&1&0\\0&-29&-41&-5&0&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&12&17&3&-1&0\\0&0&1&27&-29&24\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&0&-188&203&-168\\0&1&0&-38&41&-34\\0&0&1&27&-29&24\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&-38&41&-34\\0&0&1&27&-29&24\end{array}\right),\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}.$$

Пример 10. Решить уравнение $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}$.

Решение. Это уравнение вида $AX=B$, его решением является матрица $X=A^{-1}B$.

Найдем обратную к матрице $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$:

$$\det A=-2,\ \ A_{11}=4,\ A_{12}=-3,\ \ A_{21}=-2,\ A_{22}=4,$$

тогда

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\text{ и }X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}.$$

Замечание. Матрица, обратная к матрице $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ имеет вид $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

Пример 11. Решить уравнение
$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

Решение. Это уравнение вида $A \cdot X \cdot B = C$; его решением является матрица $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -22 \\ -43 & -50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 12. Решить уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Это уравнение вида $XA = B$, поэтому используем схему $\left(A^T | X^T\right) \sim \left(E | X^T\right)$, где $X -$ искомая матрица.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -5 & -8 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & 11 & -10 & -8 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & -19 & -57 & -114 & -171 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 0 & -3 & -6 & -9\\ 0 & 3 & 0 & 6 & 15 & 24\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 8\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9\end{array}\right).$$

Тогда $X=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$

3.5. Определители *n*-го порядка

Пусть дано n натуральных чисел $1,2,3,\ldots,n$. *Перестановкой* из n натуральных чисел называется расположение этих чисел в определенном порядке.

$(1,2,3,\ldots,n)$ — естественная перестановка,

$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — произвольная перестановка.

Лемма. Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n!$.

Говорят, что два числа в перестановке образуют инверсию, если большее число стоит перед меньшим.

Например, в перестановке $(1,4,3,5,2)$ инверсии образуют следующие пары: $(4,3),(4,2),(3,2),(5,2)$ (число инверсий в данной перестановке равно 4).

Число инверсий в перестановке $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ будем обозначать через J. Итак, $J(1,4,3,5,2)=4$.

$$J(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=J_1+J_2+\ldots+J_{n-1},$$

где $J_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ — число чисел, стоящих перед числом i в перестановке, полученной из данной вычеркиванием чисел, меньших числа i (если таковы имеются).

$$J(1,4,3,5,2) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0 + 3 + 1 + 0 = 4.$$

Перестановка называется *четной*, если суммарное количество инверсий в перестановке — четное число и *нечетной*, если — нечетное число.

Пусть дана матрица $A_{nn} = \left(a_{ij}\right)_{nn}$ над числовым полем P.

Определителем порядка n называется число, полученное из элементов данной матрицы по следующему правилу:

а) это алгебраическая сумма $n!$ слагаемых;

б) каждое слагаемое определителя представляет собой произведение n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца;

в) каждому члену определителя приписывается знак «+», если эта перестановка нечетная, при условии, что первые индексы элементов произведения расположены в естественном порядке.

Обозначение определителя порядка n:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Итак, по определению:

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}.$$

Замечание. Это определение распространяется и на определители второго и третьего порядков.

Все свойства определителей второго и третьего порядков переносятся на определители порядка $n > 3$.

Можно добавить к ним еще следующие свойства определителей:

a) $|AB|=|A||B|$;

b) $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}\ \left(|A|\neq 0\right)$;

c) $\left|A^{T}\right|=|A|$.

Основные способы вычисления определителей порядка n:

1) по определению (например, вычисление определителей второго и третьего порядков);

2) по формуле разложения;

3) $\det A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}$ (формула разложения определителя по элементам -го столбца);

4) $\det A=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}$ (формула разложения определителя по элементам *i*-й строки);

5) приведение определителя к треугольному виду, используя свойства:

$$\det A=\det A'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n}\\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn}\end{vmatrix}.$$

Тогда $\det A=a'_{11}\cdot a'_{22}\cdot\ldots\cdot a'_{nn}$.

Пример. Вычислить определитель порядка n

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2\end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавив к элементам первого столбца определителя соответствующие элементы второго, третьего и т. д. n-го столбца (от этого величина определителя не изменится), получим определитель вида: $\Delta = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n+1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n+1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$

Далее, к элементам второй, третьей и т. д. n-й строк прибавим соответствующие элементы первой строки, предварительно умноженные на (-1). Получим определитель треугольного вида.

$$\Delta = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n+1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (n+1)\cdot\underbrace{1\cdot 1\dots 1}_{n-1} = n+1.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \operatorname{ctg}\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \operatorname{ctg}\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Вычислить линейную комбинацию $(1+j)A+(1-j)B$ матриц A и B, если $A=\begin{pmatrix}1 & j\\ 1 & -j\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}j & 1\\ -j & 1\end{pmatrix}$.

2. Вычислить $AB-BA$:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 6\\ 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

3. Найти все матрицы перестановочные с данной:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

4. Найти все матрицы 2-го порядка, квадрат которых равен единичной матрице.

5. Найти значение многочлена $f(x)=3x^2-4$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

6. Найти значение многочлена $f(x)=x^2-3x+1$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

7. Методом присоединенной матрицы найти матрицу обратную к данной $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

8. Методом Гаусса найти матрицу обратную к данной $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Решить матричные уравнения:

а) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Строение линейного пространства

4.1. Определение линейного пространства

Пусть L — непустое множество элементов, P — числовое поле. L называется *линейным пространством над полем* P, если на L определены две операции: бинарная — сложение, т. е. указан закон (правило), по которому любой упорядоченной паре $x, y \in L$ ставится в соответствие единственный элемент из L, называемый суммой и обозначаемый $x + y$, и унарная операция — умножение элемента из L на число из P, т. е. указан закон (правило), по которому каждому элементу x из L и любому числу α из P поставлен в соответствие единственный элемент из L, называемый произведением элемента на число и обозначаемый $\alpha \cdot x$, которые постулируются следующими аксиомами:

I. По сложению L — абелева группа:

1. $\forall x, y \in L \quad x + y = y + x$;
2. $\forall x, y, z \in L \quad (x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $\exists! \theta \in L: \ \forall x \in L \quad x + \theta = x$;
4. $\forall x \in L \exists! (-x) \in L : x + (-x) = \theta.$

II. По умножению элемента на число:

5. $\forall x \in L, \ \forall \alpha, \beta \in P \qquad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6. $\forall x \in L \qquad 1 \cdot x = x$ для единицы 1 поля P.

III. Указанные операции связаны законами дистрибутивности:

7. $\forall x \in L, \ \forall \alpha, \beta \in P \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. $\forall x, y \in L, \ \forall \alpha \in P \qquad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

Примеры линейных пространств

1. Множество V_3 всех геометрических векторов (направленных отрезков) в трехмерном пространстве с общим началом в некоторой точке пространства с операциями сложения векторов и умножения вектора на число, есть линейное пространство над полем R.

2. Множество $P^{m \times n}$ всех матриц размера $m \times n$ над P с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число из P образует линейное пространство над P.

3. Множество $\{f(x)\}\ x \in X$ всех действительнозначных функций вещественного аргумента, определенных на числовом множестве X с операциями сложения функций и умножения их на вещественные числа есть линейное пространство над R.

Непустое подмножество M из L называется *линейным подпространством* в L, если оно замкнуто относительно операций в L, т. е. $\forall x, y \in M \quad x + y \in M$

$$\forall x \in M, \forall \alpha \in P \quad \alpha \cdot x \in M .$$

Пример 1. Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

а) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy ?

б) все векторы плоскости, концы которых лежат на данной прямой?

в) все векторы плоскости, концы которых лежат в первой четверти системы координат?

Решение.

а) Данная совокупность векторов не является линейным подпространством, т. к. вектор, являющийся суммой векторов, может и не лежать на одной из осей координат Ox и Oy .

б) Данная совокупность векторов будет являться линейным подпространством только в том случае, если прямая проходит через начало координат.

в) Данная совокупность векторов не является линейным подпространством, т. к., например, конец вектора, являющегося суммой векторов, может и не лежать в первой четверти системы координат.

Пример 2. Перечислить все линейные подпространства трехмерного векторного пространства.

Решение. Все пространство; векторы, лежащие в любой плоскости, проходящей через начало координат; векторы плоскости, лежащие на любой прямой, проходящей через начало координат, и само начало координат, т. е. нулевой вектор.

Упражнение для самостоятельной подготовки

Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

а) все векторы n-мерного векторного пространства, координаты которых — целые числа?

б) все векторы плоскости, начала и концы которых лежат на данной прямой?

в) все векторы трехмерного пространства, концы которых не лежат на данной прямой?

4.2. Линейная зависимость

Пусть L — линейное пространство над полем P.

$A=\{a_1,\ldots a_n\}$ — система элементов из L; $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — некоторый набор чисел из P.

Линейной комбинацией элементов $a_1,\ldots,a_n$ системы A с коэффициентами α_1, …, α_n называется элемент вида $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n$.

Если $b=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$, то говорят, что элемент b *линейно выражается* через элементы a_1, …, a_n системы A, обозначение $b\dashv A$.

Множество всех линейных комбинаций из элементов конечной системы $A=\{a_1,\ldots a_n\}$ называется *линейной оболочкой* системы A и обозначается через $\langle A\rangle$ или $\langle a_1, ..., a_n\rangle$.

Лемма. Линейная оболочка, натянутая на конечное множество элементов a_1, …, a_n из A, является линейным подпространством в L.

(Система A *эквивалентна* системе B $(A\sim B)$) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$($A\dashv B$ и $B\dashv A$)

Свойства эквивалентных систем:

1. $A \sim A$
2. $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$
3. $(A \sim B$ и $B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$

Определение линейно зависимой системы элементов

Пусть L — линейное пространство над полем P,

$$A = \{a_1, \ldots a_n\} \subset L\ .$$

Набор чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется нетривиальным, если хотя бы одно число в нем не равно нулю.

(A – линейно зависимая система элементов) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ ($\exists$ нетривиальный набор чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset P : \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \theta$) .

В противном случае система A называется *линейно независимой*.

Критерий линейной зависимости. Система $A = \{a_1, \ldots a_n\} \subset L$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один элемент из A линейно выражается через все остальные ее элементы, т. е.

(A — линейно зависима) $\Leftrightarrow \left(\exists j \in \{1, \ldots, n\} : a_j \dashv A \setminus \{a_j\}\right)$.

Пример 1. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметического пространства R^3 линейно зависимыми:

а) $x_1 = (1, -1, 2)$, $x_2 = (2, 2, -2)$, $x_3 = (4, 0, 2)$;

б) $x_1 = (2, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 2)$, $x_3 = (0, 1, -1)$.

Решение.

а) Составим линейную комбинацию элементов заданной системы и приравняем ее к нулю. Тогда из равенства $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \theta$ или $\alpha_1 (1, -1, 2) + \alpha_2 (2, 2, -1) + \alpha_3 (4, 0, 2) = (0, 0, 0)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$ — общее решение системы.

Таким образом, существует нетривиальный набор $\{\alpha_i\}$, удовлетворяющих определению линейно зависимой системы. Значит, данная система линейно зависима.

б) Из равенства $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \theta$ или $\alpha_1(2, 0, 1) + \alpha_2(1, -1, 2) + \alpha_3(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$ получаем систему

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем единственное решение системы $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Значит, данная система линейно независима (по определению).

Пример 2. Найти все значения λ, при которых вектор $b=(7,-2,\lambda)$ линейно выражается через векторы $a_1=(2,3,5)$, $a_2=(3,7,8)$, $a_3=(1,-6,1)$.

Решение. Пусть $b=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3$, тогда $(7,-2,\lambda)=\alpha_1(2,3,5)+\alpha_2(3,7,8)+\alpha_3(1,-6,1)$ или

$$\begin{cases} 2\alpha_1+3\alpha_2+a_3=7, \\ 3a_1+7\alpha_2-6\alpha_3=-2, \\ 5\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3=\lambda. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -15 & -25 \\ 0 & 1 & 3 & -35+2\lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -30+2\lambda \end{array}\right)$$

Система совместна тогда и только тогда, когда $(-30++2\lambda)=0$. Отсюда $\lambda=15$.

Пример 3. Доказать, что система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является линейно независимой.

Решение. Составим линейную комбинацию данных матриц с некоторыми коэффициентами $\alpha_1,\ \alpha_2,\alpha_3 \in R$, т. е.

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы эта линейная комбинация равнялась нулевой матрице $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Данное равенство возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0$, что означает линейную независимость заданной системы матриц.

Пример 4. Пусть L — вещественное линейное пространство многочленов степени не выше второй. Установить, какая из следующих систем элементов данного пространства является линейно независимой:

а) $1, x, x^2$; б) $1, x, x^2, 4x^2+5$.

Решение.

а) Система $\{1, x, x^2\}$ линейно независима, так как линейная комбинация $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2$ тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

б) Система $\{1,\ x,\ x^2,\ 4x^2+5\}$ линейно зависима, так как многочлен $4x^2+5$ является линейной комбинацией остальных элементов этой системы, т. е. имеет место равенство $4x^2+5 = 4\cdot x^2 + 0\cdot x + 5\cdot 1$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Доказать, что система, содержащая нулевой элемент, линейно зависима.

2. Доказать, что система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

3. Доказать, что если система $B \subseteq A$ и B линейно зависима, то и A линейно зависима.

4. Выяснить, являются ли следующие системы арифметических векторов линейно зависимыми:

а) $x_1 = (1,2,3),\ \ x_2 = (2,5,7),\ \ x_3 = (3,7,10)$;

б) $x_1 = (2,-4,3),\ \ x_2 = (1,-2,-2),\ \ x_3 = (3,-6,5)$;

в) $x_1=(-2,-3,-4,1)$, $x_2=(1,-2,-4,1)$, $x_3=(5,1,1,0)$,

$x_4=(-4,-5,-2,1)$.

г) $x_1=(1,j,j-2,5+2j)$, $x_2=(1-j,1+j,2,0)$, $x_3=(1,1,1,1)$.

5. Будет ли система многочленов $f_1=1+t^2$, $f_2=1+t^4$, $f_3=t^2+t^3$, $f_1=1+t+t^2+t^3+t^4$ линейно зависимой?

6. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы:

а) $x_1=(4,4,3)$, $x_2=(7,2,1)$, $x_3=(4,1,6)$, $b=(5,9,\lambda)$;

б) $x_1=(3,2,5)$, $x_2=(2,4,7)$, $x_3=(5,6,\lambda)$, $b=(1,3,5)$;

в) $x_1=(3,2,6)$, $x_2=(7,3,9)$, $x_3=(5,1,3)$, $b=(\lambda,2,5)$.

4.3. Конечномерное линейное пространство

Пусть система элементов $A\subseteq L$.

Подсистема A' системы A называется *максимальной линейно независимой системой* (МЛНС) или базой в A, если

1) A' линейно независима

2) $\forall a\in A\setminus A'$ система $A'\cup\{a\}$ линейно зависима.

Рангом системы элементов называется *количество* элементов ее МЛНС. Обозначается ранг системы A символом $rang(A)$ или более кратко r_A.

Ранг системы не зависит от выбора МЛНС.

Ранги эквивалентных систем элементов из L равны.

Ранг линейной оболочки $<A>$ множества элементов A из L равен рангу множества A.

Пусть $A\subseteq L$, где L — произвольное линейное пространство над числовым полем R.

Система элементов A называется *системой образующих (порождающих)* пространства L, если $\langle A\rangle = L$.

Линейное пространство, имеющее конечную систему образующих, называется *конечномерным*.

МЛНС пространства L — это МЛНС системы порождающих L.

Все МЛНС линейного пространства состоят из одного и того же числа элементов и это число называется *размерностью* линейного пространства L (обозначается через $\dim L$).

Если $\dim L = n$, то пространство L называется n-мерным и обозначается L_n.

Упорядоченная МЛНС пространства L называется *базисом* L.

Итак, если система элементов $\{e_1 \ldots, e_n\}$ — базис L_n, то

1. $\{e_1 \ldots, e_n\}$ линейно независима;

2. $\forall x \in L_n \; x \dashv \{e_1 \ldots, e_n\}$, т. е. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Система $\{e_1 \ldots, e_n\}$, где $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $e_i = \Bigl(\underbrace{0, \ldots 0,}_{i-1} 1, 0, .., 0\Bigr)$, образует базис арифметического (координатного) линейного пространства P^n.

Базис $(e_1 \ldots, e_n)$ называют *естественным базисом*.

Свойства конечномерных линейных пространств

Теорема о базисе. Любую линейно независимую систему конечномерного линейного пространства можно дополнить до его базиса.

Следствие 1. В n-мерном пространстве любая система из $(n+1)$ элемента линейно зависима.

Следствие 2. В n-мерном пространстве любую линейно независимую систему из n элементов можно принять за базис этого пространства.

Теорема об единственности разложения элемента по базису. Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в L_n, то любой элемент из L_n единственным образом линейно выражается через элементы этого базиса.

Теорема об арифметике координат. Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в L_n; $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, то при сложении элементов x и y, их соответствующие координаты складываются, а при умножении элемента на число, его каждая координата умножается на это число.

Изоморфизм линейных пространств

Пусть L и L' — линейные пространства над одним и тем же числовым полем *P*.

Отображение $\varphi : L \to L'$ называется изоморфизмом, если

1. $\varphi : L \overset{\text{на}}{\leftrightarrow} L'$ — отображение взаимно однозначное L на L';
2. $\forall x, y \in L \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

$\forall x \in L,\ \forall \lambda \in P \quad \varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)$.

В этом случае пространства L и L' называются *изоморфными* пространствами и с точки зрения свойств линейных операций *не различимы*.

Теорема. Любое *n*-мерное линейное пространство над числовым полем P изоморфно арифметическому пространству P^n.

Сумма и пересечение подпространств

Рассмотрим произвольное линейное пространство L. Это пространство порождает множество всех своих подпространств $\{L\}$.

На множестве $\{L\}$ можно определить две алгебраические операции: сумма и пересечение подпространств.

Суммой $L_1 + L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество всех векторов вида $x = a + b$, где $a \in L_1$, $b \in L_2$, т. е. $L_1 + L_2 = \{x \in L : x = a + b,\ a \in L_1,\ b \in L_2\}$.

Пересечением $L_1 \cap L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество всех векторов, одновременно принадлежащих как L_1, так и L_2.

Заметим, что и сумма и пересечение подпространств всегда являются непустыми множествами, так как им заведомо принадлежит нулевой вектор пространства L.

Теорема. Для произвольных двух конечномерных подпространств L_1 и L_2 имеет место равенство

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Сумма $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется *прямой суммой* и обозначается $L_1 \oplus L_2$, если $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Теорема.
$(L_1 \oplus L_2) \Leftrightarrow (\forall x \in L_1 \oplus L_2\ \exists! a \in L_1, \exists! b \in L_2 : \quad x = a + b)$.

Теорема. Для того чтобы линейное пространство L_n было прямой суммой своих подпространств, необходимо и достаточно, чтобы объединение базисов этих подпространств составляло базис всего пространства.

Преобразование координат

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в L_n, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис L_n. Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ назовем старым, а базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — новым.

Тогда

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)T,$$

где T — матрица перехода от старого базиса к новому.

Пусть $x=(e_1,\ldots,e_n)X$, $x=(e_1',\ldots,e_n')X'$. Тогда формула преобразования координат при переходе от старого базиса к новому базису:

$$X'=T^{-1}X.$$

4.4. Ранг матрицы

Пусть $A=(a_{ij})_{m\times n}$ — произвольная матрица;

$\forall i\in\{1,\ldots,m\}\, x_i=(a_{i1},\, a_{i2},\, \ldots,\, a_{in})$ — i-я вектор-строка;

$\forall j\in\{1,...,n\}\;\; y_j=(a_{1j},a_{2j},\, \ldots a_{mj})^T$ — j-й вектор-столбец.

Строчным рангом матрицы A назовем ранг системы ее векторов-строк $\{x_1,x_2,\, \ldots x_m\}$ и обозначим через $r_c(A)$.

Столбцовым рангом матрицы A назовем ранг системы ее векторов-столбцов (колонок) $\{y_1,y_2,\, \ldots y_n\}$ и обозначим через $r_k(A)$.

Теорема об инвариантности рангов матрицы. При любых элементарных преобразованиях матрицы оба ее ранга (строчный и столбцовый) не меняются.

Теорема о ранге матрицы. Для любой матрицы ее строчный и столбцовый ранги совпадают. Их общее значение называют *рангом матрицы* и обозначают $r(A)$.

Следствие. Если A — квадратная матрица n-го порядка, то $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда $|A|\neq 0$.

Базисный минор матрицы

Пусть A — матрица ранга r. Тогда матрица имеет r линейно независимых (базисных) строк и r линейно независимых (базисных) столбцов.

Минор, составленный из элементов на пересечении этих строк и столбцов, называется *базисным*.

Теорема о базисном миноре. Любой базисный минор матрицы отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

Следствие. Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ее столбцы (строки) линейно зависимы.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ r(A)=2.$$

Пример 2. При каких значениях параметра λ ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ будет наименьшим?

Решение. В матрице A переставим строки и столбцы так, чтобы параметр λ оказался в нижнем правом углу матрицы, т. е. на месте элемента a_{44}.

Полученную матрицу с помощью элементарных преобразований приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & \lambda \\ 3 & 7 & 17 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 17 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & \lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 13 & -1 \\ 0 & 5 & 13 & -1 \\ 0 & 15 & 39 & 4\lambda - 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda = 0$, то матрица ступенчатого вида будет состоять из двух ненулевых строк и $r(A) = 2$; если $\lambda \neq 0$, то из трех ненулевых строк и $r(A) = 3$.

Пример 3. Выяснить, является ли система векторов $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,0,2,0)$, $a_3 = (1,1,-1,-1)$, $a_4 = (4, -2, -2, -8)$ из пространства $\mathbb{R}^4$ линейно зависимой.

Решение. Составим матрицу A, определенную векторами системы, и найдем ее ранг $r(A)$ — максимальное число ее линейно независимых строк (столбцов). Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк (столбцов). Поэтому матрицу A путем конечного числа элементарных преобразований приведем к ступенчатому виду и подсчитаем ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, состоящей из четырех элементов, равен 3 (меньше числа элементов!), что означает, что эта система линейно зависима.

Пример 4. Выяснить, является ли система многочленов $\left\{3,\ x-3,\ (x-3)^2+3\right\}$ линейного пространства многочленов степени не выше двух линейно зависимой.

Решение. Разложим многочлены $f_1(x)=3$, $f_2(x)=x-3$ и $f_3(x)=(x-3)^2+3$ по степеням $x^0=1,\ x^1,\ x^2$, т. е.

$$f_1(x)=3=1\cdot x^0+0\cdot x^1+0\cdot x^2,$$

$$f_2(x)=x-3=-3\cdot x^0+1\cdot x^1+0\cdot x^2,$$

$$f_3(x)=(x-3)^2+3=x^2-6x+12=12\cdot x^0-6\cdot x^1+1\cdot x^2.$$

Каждому многочлену системы поставим в соответствие арифметический вектор:

$$f_1(x)\leftrightarrow a_1=(3,0,0),\ f_2(x)\leftrightarrow a_2=(-3,1,0),\ f_3(x)\leftrightarrow a_3=$$
$$=(12,-6,1).$$

Найдем ранг системы $\{a_1, a_{2,} a_3\}$:

$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица треугольного вида и ее ранг равен 3.

Следовательно, ранг системы многочленов $\left\{f_1(x),\ f_2(x), f_3(x)\right\}$ равен 3. Эта система линейно независима.

Пример 5. Найти какую-нибудь базу системы векторов $a_1=(1,2,3,-4)$, $a_2=(2,3,-4,1)$, $a_3=(2,-5,8,-3)$, $a_4=(5,26,-9,-12)$, $a_5=(3,-4,1,2)$ и векторы, не входящие в базу, линейно выразить через векторы базы.

Решение. Составим матрицу A, определенную векторами системы, и найдем ее ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -9 & 16 & -10 \\ 0 & -10 & 2 & -24 & -8 \\ 0 & 9 & 5 & 8 & 14 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & 92 & -184 & 92 \\ 0 & 0 & -76 & 152 & -76 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг данной системы равен 3. Это означает, что база этой системы состоит из трех векторов. Так как векторы a_1, $a_{2,}$ a_3 линейно независимы, то их можно принять за базу данной системы. Векторы a_4, a_5, не входящие в указанную базу, линейно выразим через ее векторы: $a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$, $a_5 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$. Найдем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, продолжив преобразования матрицы системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Получили $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -2, \beta_1 = -1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1;$

$a_4 = 5a_1 + 2a_2 - 2a_3$, $a_5 = -a_1 + a_2 + a_3$.

Пример 6. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — фиксированный базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Проверить, что векторы $b_1 = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $b_2 = e_1 - e_2$, $b_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$, образуют базис в $\mathbb{R}^3$, и найти координаты вектора $y = -e_1 + 7e_2 + 5e_3$ в этом базисе.

Решение. Для исследования линейной зависимости системы векторов $\{b_1, b_2, b_3\}$ найдем ранг системы координатных столбцов этих векторов относительно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Для этого составим матрицу A из координат векторов b_1, b_2, b_3 и найдем ее ранг. Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ отличен от нуля $(|A| = -1)$, следовательно, система $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно независима и в $\mathbb{R}^3$ ее можно принять за базис.

Найдем координаты вектора y в базисе $\{b_1, b_2, b_3\}$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

из этого равенства получаем систему числовых равенств

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 7, \\ 3\alpha_1 + \alpha_3 = 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = 2. \end{cases}$$

Получили: $y = b_1 - b_2 + 2b_3$.

Задачу можно решить иначе.

Матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{b_1, b_2, b_3\}$ имеет вид $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обращая матрицу и используя формулы преобразования координат, имеем:

$$Y' = T^{-1}\cdot Y = -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$y = b_1 - b_2 + 2b_3.$$

Пример 7. Какова размерность линейного пространства симметричных матриц второго порядка над полем $\mathbb{R}$? Найти один из его базисов и координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ в выбранном базисе.

Решение. Докажем, что система матриц $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образует базис данного пространства.

Для этого покажем, что

1) система $\{E_1, E_2, E_3\}$ линейно независима;

2) любая матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ линейно выражается через матрицы системы $\{E_1, E_2, E_3\}$.

Линейная независимость системы $\{E_1, E_2, E_3\}$ нами уже была доказана (см. пример 3 в теме «Линейная зависимость»).

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ — произвольная матрица второго порядка, тогда $A = aE_1 + bE_2 + cE_3$.

Следовательно, система $\{E_1,\ E_2, E_3\}$ является базисом в пространстве симметричных матриц второго порядка и размерность этого пространства равна 3.

Если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, то в указанном базисе имеем $A=E_1+2E_2+3E_3$.

Пример 8. Вектор $x=(1,1,3)$ задан своими координатами в базисе $e_1=(9,7,6)$, $e_2=(1,1,2)$, $e_3=(1,1,1)$. Найти его координаты в базисе $e_1'=(2,-3,1)$, $e_2'=(4,-5,2)$, $e_3'=(5,-7,3)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение. Пусть X — координатный столбец вектора x в базисе $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$, X' — координатный столбец вектора x в базисе $\{e_1', e_2',\ e_3'\}$. Тогда X' найдем из формулы $X'=T^{-1}X$, а матрицу T^{-1} — из матричного уравнения $(e_1,\ e_2,\ e_3)=(e_1', e_2',\ e_3')T^{-1}$

или $\begin{pmatrix}9 & 1 & 1\\ 7 & 1 & 1\\ 6 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -3 & -5 & -7\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}T^{-1}$.

Последнее уравнение решим методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 4 & 5 & 9 & 1 & 1\\ -3 & -5 & -7 & 7 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 6 & 2 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 4 & 5 & 9 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 41 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 4 & 0 & -6 & -14 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 38 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 4 & 0 & -6 & -14 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 19 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & -82 & -18 & -12\\ 0 & 1 & 0 & 19 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -41 & -9 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 19 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1\end{array}\right)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -41 & -9 & -6 \\ 19 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X' = \begin{pmatrix} -41 & -9 & -6 \\ 19 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ т. е.}$$

$$x = -68 \cdot e_1' + 26 \cdot e_2' + 9 \cdot e_3'.$$

Сделаем проверку:
с одной стороны, $x = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 = (13, 11, 11)$, с другой стороны, $x = -68 \cdot e_1' + 26 \cdot e_2' + 9 \cdot e_3' = (13, 11, 11)$, т. е. вектор x в том базисе, в котором заданы координаты векторов e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3', имеет координаты $(13, 11, 11)$.

Пример 9. Найти матрицу перехода от базиса $e_1 = (2, 2, 3)$, $e_2 = (1, -1, 0)$, $e_3 = (-1, 2, 1)$ к базису $e_1' = (1, 2, -3)$, $e_2' = (0, 1, 2)$, $e_3' = (0, 0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение. Исходя из формулы $(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3)T$, в матричном виде имеем уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} T.$$

Решаем матричное уравнение методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 9 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 9 & -10 \end{array}\right),\ T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 13 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. Найти базисы сумм и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов $a_1=(1,2,1,-2)$, $a_2=(2,3,1,0)$, $a_3=(1,2,2,-3)$ и $b_1=(1,1,1,1)$, $b_2=(1,0,1,-1)$, $b_3=(1,3,0,-4)$.

Решение. Пусть $L_1=\langle a_1,a_2,\ a_3\rangle$, $L_2=\langle b_1,\ b_2,b_3\rangle$. Найдем базис подпространства L_1+L_2. Для этого выясним, какие из векторов a_1,a_2,a_3, b_1,b_2,b_3 линейно независимы:

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3+\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\alpha_3b_3=\theta .$$

Приведем матрицу этой системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы $\{a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3\}$ равен 4. Пусть $\{a_1,a_2,\ a_3,\ b_2\}$ — базис L_1+L_2.

Найдем базис $L_1\cap L_2$. Подпространство $L_1\cap L_2$ натянуто на векторы, которые являются элементами и L_1, и L_2, т. е. векторы $c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$. Выше матрица этой системы была приведена к ступенчатому виду, продолжим преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили, что базис $L_1 \cap L_2$ образуют векторы $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$ и $b_3 = 5a_1 + a_2 - 2a_3$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы при различных значениях λ

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти какую-нибудь базу системы векторов, и векторы, не входящие в базу, линейно выразить через векторы базы:

а) $a_1=(5,2,-3,1)$, $a_2=(4,1,-2,3)$, $a_3=(1,1,-1,-2)$,

$a_4=(3,4,-1,2)$;

б) $a_1=(2,-1,3,5)$, $a_2=(4,-3,1,3)$, $a_3=(3,-2,3,4)$,

$a_4=(4,-1,15,17)$, $a_5=(7,-6,-7,0)$.

4. Найти все базы системы многочленов:

а) $f_1=1+2t$, $f_2=1+2t+3t^2+4t^3$, $f_3=3+6t$;

б) $f_1=1+2t+3t^2$, $f_2=2+3t+4t^2$, $f_3=3+2t+3t^2$, $f_4=1+t+t^2$,

$f_5=4+3t+4t^2$.

5. Найти ранг системы векторов $a_1=(1,2,3,4)$, $a_2=(2,3,4,5)$, $a_3=(3,4,5,6)$, $a_4=(4,5,6,7)$ и описать линейную оболочку этой системы векторов.

6. Будут ли две системы векторов $\begin{cases} x_1=(1,1,1), \\ x_2=(1,0,-1), \\ x_3=(1,3,5) \end{cases}$ и $\begin{cases} y_1=(1,2,3) \\ y_2=(0,1,2) \\ y_3=(3,4,5) \\ y_4=(4,6,8) \end{cases}$ линейно эквивалентны?

7. В базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ заданы векторы $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(1,1,1)$, $\vec{c}=(3,1,3)$, $\vec{d}=(-2,-1,-1)$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис в $\mathbb{V}^3$, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

8. Проверить, что система векторов $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,1)$, $e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$ образует базис в пространстве $\mathbb{R}^4$, и найти координаты вектора $x=(4,4,3,2)$ в этом базисе.

9. Проверить, что многочлены $f_1 = 1 + 2t^3 + 5t^4$, $f_2 = t + 3t^3 + +4t^4$, $f_3 = t^2 + 4t^3 + 7t^4$, $f_4 = 2 - 3t + 4t^2 + 11t^3 + 12t^4$ образуют базис пространства многочленов $\mathbb{R}_5[x]$, и найти координаты $f = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4$ в этом базисе.

10. Определить размерность и найти какой-либо базис линейной оболочки системы векторов:

а) $a_1 = (1,2,2,-1)$, $a_2 = (2,3,2,5)$, $a_3 = (-1,4,3,-1)$, $a_4 = (2,9,3,5)$;

б) $a_1 = (-3,1,5,3,2)$, $a_2 = (2,3,0,1,0)$, $a_3 = (1,2,3,2,1)$,
$a_4 = (3,-5,-1,-3,-1)$, $a_5 = (3,0,1,0,0)$.

11. Найти матрицу перехода от базиса $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (1,2,2)$, $e_3 = (2,1,1)$ к базису $e_1' = (1,1,1)$, $e_2' = (1,1,2)$, $e_3' = (1,2,3)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

12. Найти координаты многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + +a_nx^n$$

а) в базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

б) в базисе $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$.

13. Найти матрицу перехода от базиса $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ к базису $\{1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ \ldots,\ (x-a)^n\}$ пространства многочленов степени, меньшей или равной n.

14. Найти базисы сумм и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов

а) $a_1 = (1,2,1)$, $a_2 = (1,1,-1)$, $a_3 = (1,3,3)$ и $b_1 = (2,3,-1)$,
$b_2 = (1,2,2)$, $b_3 = (1,1,-3)$.

б) $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1,0)$, $a_3 = (0,0,1,1)$ и $b_1 = (1,0,1,0)$,
$b_2 = (0,2,1,1)$, $b_3 = (1,2,1,2)$.

4.5. Общая теория систем линейных уравнений (СЛУ)

Запишем систему m линейных уравнений с n неизвестными над числовым полем P в матричной форме $AX = B$, где $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ — матрица из коэффициентов системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов уравнений системы.

Если $B = \theta$, то система называется однородной, в противном случае она называется *неоднородной*.

Система называется *совместной*, если у нее существует по крайней мере одно решение, в противном случае она называется *несовместной*.

Система называется *определенной*, если у нее существует единственное решение, в противном случае она называется *неопределенной*.

Решение линейных систем по формулам Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными над произвольным числовым полем P.

A — основная матрица системы. Если $|A| \neq 0$, то система линейных уравнений называется *невырожденной*, если $|A| = 0$, то — *вырожденной*.

Теорема Крамера. Если СЛУ $AX = B$ — невырожденная система, то она совместна и ее единственное решение находится по формулам Крамера: $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы A, Δ_j — определитель матрицы, полученной из матрицы A путем замены ее j-го столбца столбцом свободных членов системы.

Решение произвольных систем

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными над произвольным числовым полем P.

Теорема Кронекера-Капелли.

$$(AX = B \text{ совместна}) \Leftrightarrow \left(r(A) = r(A|B)\right),$$

где $(A|B)$ — расширенная матрица, отличающаяся от матрицы A добавлением к ней столбца B.

Следствие. Пусть система $AX = B$ совместна. Тогда, если $r(A) = n$, то СЛУ определенна (т. е. имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера).

Если $r(A) = r < n$, то СЛУ неопределенна. В этом случае СЛУ имеет r *базисных неизвестных* и $(n-r)$ *свободных неизвестных*. Так как свободным неизвестным можно придавать любые числовые значения из поля P, то система будет иметь бесконечное множество решений, линейные выражения базисных неизвестных через свободные называют общим *решением* СЛУ.

Общая теория однородных систем линейных уравнений (ОСЛУ)

ОСЛУ в матричной форме имеет вид $AX = \theta$. Она всегда совместна (т. к. обладает, по крайней мере, нулевым решением $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$).

Если $r(A) = n$ (n — число неизвестных), то ОСЛУ имеет только тривиальное (нулевое) решение. Если $r(A) < n$, то ОСЛУ имеет бесконечное множество решений.

Свойства решений ОСЛУ

1. (X_1, X_2 — решения ОСЛУ $AX=\theta$) $\Rightarrow$ (X_1+X_2 — решение ОСЛУ).

2. (X_0 — решение ОСЛУ $AX=\theta$) $\Rightarrow$ ($\forall\lambda\in P$ $\lambda\cdot X_0$ — решение ОСЛУ).

Теорема. Множество всех решений ОСЛУ $AX=\theta, 0<r(A)\le n$, над полем P образует линейное подпространство размерности $n-r(A)$ n-мерного арифметического пространства.

Базис $\{X_1,\ldots X_{n-r}\}$ линейного пространства решений ОСЛУ называется *фундаментальной системой решений ОСЛУ* (ФСР).

Теорема о структуре общего решения ОСЛУ. Общее решение ОСЛУ с n неизвестными ранга $r<n$ есть линейная комбинация векторов ее фундаментальной системы решений с $n-r$ произвольными коэффициентами вида

$$X_{\substack{\text{общее}\\ \text{ОСЛУ}}}=\sum_{i=1}^{n-r}c_iX_i\,.$$

Итак, общее решение ОСЛУ ранга r — бесконечное множество ее решений, образующее линейное подпространство арифметического пространства P^n, натянутое на $(n-r)$ линейно независимых векторов — решений ОСЛУ.

Общая теория неоднородных систем линейных уравнений (НСЛУ)

$AX=B$, $B\neq\theta$ — матричная запись неоднородной системы m линейных уравнений с n неизвестными.

$AX=\theta$ — ОСЛУ, приведенная для $AX=B$.

Связь решений ОСЛУ и НСЛУ

Теорема. Сумма любого решения $AX=B$ и любого решения $AX=\theta$ есть решение НСЛУ $AX=B$.

Теорема. Разность двух решений НСЛУ $AX = B$ есть решение ОСЛУ $AX = \theta$.

Теорема о структуре общего решения НСЛУ

Общее решение НСЛУ $AX = B$ есть сумма общего решения ОСЛУ $AX = \theta$ и некоторого (частного) решения НСЛУ $AX = B$, т. е.

$$X_{\substack{\text{общее}\\ \text{НСЛУ}}} = X_{\substack{\text{общее}\\ \text{ОСЛУ}}} + x_0 .$$

Пример 1. Решить систему по правилу Крамера

$$\begin{cases} 3x - 5y = 7, \\ 4x - 7y = 10. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -1, \ \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = 1, \ \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1, \ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Пример 2. Решить систему по правилу Крамера

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -36, \ \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 15 & -3 & 2 \\ 36 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -72,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 15 & 3 \\ 5 & 15 & 2 \\ 10 & 36 & 5 \end{vmatrix} = 36, \ \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 15 \\ 5 & -3 & 15 \\ 10 & -11 & 36 \end{vmatrix} = -36.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-72}{-36} = 2, \ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{-36} = -1, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-36}{-36} = 1.$$

Пример 3. Решить систему и найти ФСР

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг ОСЛУ равен трем, это означает, что в ОСЛУ три базисных неизвестных, например, $x_1,\ x_2,\ x_4$, и два свободных неизвестных — $x_3,\ x_5$. Свободные неизвестные перенесем в правую часть уравнений системы и выразим базисные неизвестные через свободные. Для этого продолжим решать систему в матричном виде, применяя к ней обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & -8 & 22 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -4x_3 + 11x_5, \\ x_4 = -2x_3 + 3x_5 \end{cases}$ — общее решение исходной системы уравнений.

Последнюю систему равенств можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -4x_3 + 11x_5, \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -2x_3 + 3x_5, \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_5,$$

где x_3, x_5 – произвольные числа из R.

Так как ранг ОСЛУ равен трем, то ее ФСР состоит из двух вектор- решений. За фундаментальную систему решений данной ОСЛУ можно принять следующую систему решений:

$$\left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда общее решение ОСЛУ будет равно

$$X_{\substack{\text{общее}\\ \text{ОСЛУ}}} = c_1X_1 + c_2X_2 = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные числа из *R*.

Пример 4. Решить систему и найти ФСР

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг ОСЛУ равен трем, это означает, что система имеет единственное (нулевое) решение. ФСР не существует.

Пример 5. Исследовать совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 13 & 13 & -15 \\ 0 & -8 & -5 & 13 & 12 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & 48 & -117 & -330 \\ 0 & 0 & 51 & -195 & -492 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & 48 & -117 & -330 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ранг системы равен числу неизвестных и равен четырем, это означает, что система имеет единственное решение.

Продолжим решать систему в матричном виде, применяя к ней обратный ход метода Гаусса:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & -96 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2.$$

Пример 6. Исследовать совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5, \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1, \\ x_1+4x_2-2x_3+3x_4=2. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 21 & -15 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r(A)=r(A|B)=2 \Rightarrow$ система совместна. $r(A)=r(A|B)<n=4$, это означает, что в системе два базисных неизвестных, например, x_1, x_2 и два свободных неизвестных — x_3, x_4. Выразим базисные неизвестные через свободные. Для этого продолжим решать систему в матричном виде, применяя к ней обратный ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 52 & -34 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 26 & -17 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Получили $x_1=6-26x_3+17x_4$, $\quad x_2=-1+7x_3-5x_4$, где x_3, x_4 — произвольные числа из R.

Пример 7. Исследовать совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

$r(A) = 3,\ r(A|B) = 4 \Rightarrow$ система несовместна (по теореме Кронекера-Капелли).

Пример 8. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -6 & -21 & -57 & 21 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & 5\lambda-21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\lambda \end{array}\right).$$

При $\lambda \neq 0 \;\; r(A)=2, r(A|B)=3 \Rightarrow$ система несовместна.

При $\lambda = 0 \;\; r(A)=2, r(A|B)=2 \Rightarrow$ система совместна. Найдем ее общее решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7/2 & 19/2 & -7/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 25/2 & 65/2 & -15/2 \\ 0 & 1 & 7/2 & 19/2 & -7/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/2 & 13/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 7/2 & 19/2 & -7/2 \end{array}\right)$$

Получили $x_1 = \frac{-3}{2} - \frac{5}{2}x_3 - \frac{13}{2}x_4$, $x_2 = \frac{-7}{2} - \frac{7}{2}x_3 - \frac{19}{2}x_4$, где x_3, x_4 – произвольные числа из R.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Решить системы по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 3x-4y=1, \\ 3x+4y=18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y-2z=6, \\ 2x+3y-7z=16, \\ 5x+2y+z=36. \end{cases}$

2. Исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3, \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1, \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3, \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 10x_1+23x_2+17x_3+44x_4=25, \\ 15x_1+35x_2+26x_3+69x_4=40, \\ 25x_1+57x_2+42x_3+108x_4=65, \\ 30x_1+69x_2+51x_3+133x_4=95. \end{cases}$

3. Решить систему и найти ФСР

а) $\begin{cases} x_1-x_3=0, \\ x_2-x_4=0, \\ -x_1+x_3-x_5=0, \\ -x_2+x_4-x_6=0, \\ -x_3+x_5=0, \\ -x_4+x_6=0, \end{cases}$;

$$\text{б)} \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 24x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 3, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases}$$

Список литературы

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 307 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие / Г. Н. Берман. — СПб. : Лань, 2006. — 608 с.
3. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 304 с.
4. Быкова Н. В. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии: учебное пособие / Н. В. Быкова, Г. М. Ермакова, Л. Б. Куликова. — Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2009.
5. Быкова Н. В. Лекции по алгебре и геометрии / Н. В. Быкова. — Екатеринбург : ООО «Изд-во УМЦ УПИ», 2002.
6. Быкова Н. В. Лекции по линейной алгебре / Н. В. Быкова. — Екатеринбург : ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2004.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : Издательство «Наука». 1972. – 544 с.
8. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд.— М.: ООО «Издательство Оникс»; ООО «Издательство «Мир и Образование», 2006. –304 с.
9. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. — СПб. : Профессия, 2002. — 199 с.
10. Кострикин А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.
11. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — СПб. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 384 с.
12. Табуева В. А. Математика. Математический анализ. Специальные разделы: учебное пособие / В. А. Табуева. — Изд. 2-е (стереотип). — Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2004. — 495 с.
13. Табуева В. А. Математический анализ: контрольно-обучающие задания / В. А. Табуева, В. Б. Репницкий. — Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2005. — 52 с.
14. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М. : Наука, 1981. — 976 с.

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2015

9785799617790