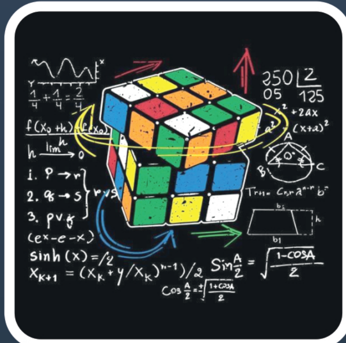
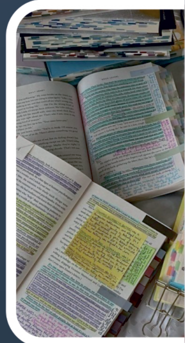
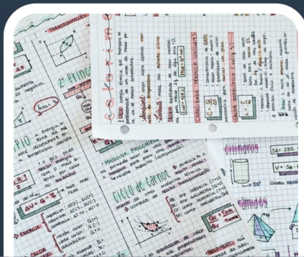
Университет
«Туран-Астана»

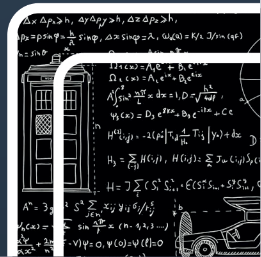
Нуспеков Е.Л.,Мұқашева Т.Д.

МАТЕМАТИКА









АСТАНА 2023

Нуспеков Е.Л., Мұқашева Т.Д.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

АСТАНА, 2023

УДК 510
ББК 22.176 Я73 Д48
ISBN 978-601-7616-77-9

Рецензия:

Адамов А.А Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, к.т.н. профессор.

Жузбаев С.С Профессор кафедры информационных систем Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, к.ф-м.н.

Нуспеков Е.Л., Мұқашева Т.Д. Математика: Учебник/ Астана: Университет Туран-Астана, стр.121 - 2023г.

Учебное пособие "Математика" представляет собой всесторонний и комплексный источник информации о математике для студентов и любителей науки. Пособие охватывает основные области математики, предлагая читателям полное представление о ее ключевых понятиях, методах и применении.

В пособии рассматриваются основы алгебры, включая арифметические операции, уравнения, неравенства и системы уравнений. Также изучаются основные концепции геометрии, включая геометрию плоскости и пространства, фигуры и тела, а также геометрические преобразования.

Другие важные разделы включают теорию вероятностей и статистику, где рассматриваются вероятностные модели, распределения случайных величин, методы оценки и статистические тесты. Также в пособии представлены основы математического анализа, включая пределы, производные и интегралы

УДК 510
ББК 22.176 Я73 Д48
ISBN 978-601-7616-77-9

Содержание

Тема 1. Определители второго и третьего порядков.

- ***Определители второго и третьего порядков, их свойства.***
- ***Алгебраические дополнения и миноры.***
- ***Определители n-го порядка.***
- ***Уравнение плоскости в R^3 (векторная и координатная форма).***
- ***Уравнения прямой в R^2 и R^3 (векторная и координатная формы)***

1.1 Основные понятия

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число det A (или |A|, или Δ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1 n = 1. A = (a_1); det A = a_1.

2 n = 2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

3 n = 3 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} – a_{13}a_{22}a_{31} – a_{12}a_{21}a_{33} – a_{11}a_{23}a_{32}$.

Определитель матрицы A также называют *детерминантом*. Правило для вычисления детерминанта для матрицы порядка N является довольно сложным для восприятия и применения однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда.

Пример 1.1 Найти определители матриц

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Решение:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12 - (-15) = 27$; $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Пример 1.2 Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение:

det A = 5 · 1 · (-3) + (-2) · (-4) · 6 + 3 · 0 · 1 – 6 · 1 · 1 – 3 · (-2) · (-3) – 0 · (-4) · 5 = -15 + 48 – 6 – 18 = 48 – 39 = 9.

1.2 Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторое из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что *если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю*.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Пример 2.3 Показать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3 получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k\cdot 0 = \Delta .$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятием минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель n – 1 порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма i + j – четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$.

Так $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство 7. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 2.4 Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(7\cdot3\cdot4 + (-1)\cdot0\cdot2 + 5\cdot7\cdot1 - (-1)\cdot3\cdot1 - 7\cdot7\cdot2 - 5\cdot0\cdot4) +$$
$$+ (5\cdot3\cdot4 + (-1)\cdot7\cdot2 + 5\cdot7\cdot8 - (-1)\cdot3\cdot8 - 5\cdot7\cdot4 - 5\cdot7\cdot2) -$$
$$- (5\cdot0\cdot2 + 7\cdot1\cdot5 + 7\cdot3\cdot8 - 5\cdot0\cdot8 - 3\cdot1\cdot5 - 7\cdot7\cdot2) = 122$$

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

Тема 2. Матрицы. Система линейных алгебраических уравнений

- ***Действия над матрицами, обратная матрица.***
- ***Ранг матрицы, его вычисление.***
- ***Системы двух и трех уравнений с двумя и тремя неизвестными.***
- ***Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера и матричным методом***

2.1Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$, (т.е $i = 1, 2, 3, \dots, m$) – номер строки, $j = \overline{1,n}$ (т.е. $j = 1, 2, 3, \dots, n$) – номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют *главную диагональ*.

Матрицы ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей ***n-го порядка***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой E.

Пример 3.1

$$E_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - единичная матрицы 3-го порядка.

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ - единичная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой О. Имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы О и Е играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1 × 1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1 \times 1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

2.2 Действия над матрицами

2.2.1 Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ *и* $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Пример 3.2

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

2.2.2 Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Пример 3.3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, k = 2, A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица –A = (-1) · A называется *противоположной матрице A*.

Разность матриц A и B можно определить так: A – B = A + (-B).

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами*:

1. A + B = B + A
2. A + (B + C) = (A + B) + C
3. A + O = A
4. A – A = O
5. 1 · A = A
6. α · (A + B) = αA + αB
7. (α + β) · A = αA + βA
8. α · (βA) = (αβ) · A

где A, B, C – матрицы, α и β – числа.

2.2.3 Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются: перестановка местами двух параллельных рядов матриц; умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля; прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается A ~ B.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.4 Произведение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица

$C_{m \times p} = (c_{ik})$ такая, что

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$ где $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, p}$, т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что A · E = E · A = A, где A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же размера.

Пример 3.4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times2} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times2}$$

Пример 3.5

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда произведение A · B не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2). При этом определено произведение B · A, которое считают следующим образом:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если AB = BA.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. A · (B · C) = (A · B) · C
2. A · (B + C) = AB + AC
3. (A + B) · C = AC + BC
4. α(AB) = (αA)B,

если конечно, написанные суммы матриц и произведения имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

2.3 Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если определитель Δ = det A не равен нулю: Δ = det A ≠ 0. В противном случае матрица A называется вырожденной.

Матрицей, ***союзной к матрице A*** называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы А.

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице А, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (3.1)$$

где Е – единичная матрица того же порядка, что и матрица А. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица А.

Теорема 3.1 Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1 $\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;

2 $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример2 3.6 Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) находим det A: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2) Находим A^*: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$. $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$, поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 3.7 Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдем определитель матрицы А:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$$

Если 4λ – 9 ≠ 0, т.е. $\lambda \neq \frac{9}{4}$, то $\Delta A \neq 0$, т.е. матрица А невырожденная, имеет обратную.

Пример 3.8 Показать, что матрица А является обратной для матрицы В, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Найдем произведение матриц А и В:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогично, В · А = Е. Следовательно, матрица А является обратной для матрицы В.

2.4 Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу А размера m × n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов (k ≤ min(m;n)). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы*. В матрице А выделили минор 2-го порядка.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется ***рангом матрицы***. Обозначается r, r (A) или rang A.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 3.9 Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Все миноры 3-го порядка равны 0. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит r (A) = 2. Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами.

Отметим *свойства ранга матрицы*:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

2.5.1 Общие понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа a_{ij}, i = $\overline{1,m}$, j = $\overline{1,n}$ называются *коэффициентами* системы, числа b_i – свободными членами. Подлежат нахождению числа x_n.

Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме***

$$A \cdot X = B$$

Здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц A · X определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквиваленты, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

2.5.2 Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает *теорема Кронекера-Капелли.*

Теорема 2.5.1 Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы.

Правила практического изыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 2.5.2 Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 2.5.3 Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

2.5.2.1 Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1 Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если r(A) ≠ r($\bar{A}$), то система несовместна.

2 Если r(A) = r($\bar{A}$) = r, то система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные n – r неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3 Найти выражение главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4 Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Пример 2.5.1 Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \ r(A) = 1,$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \ r(\bar{A}) = 2.$$

Таким образом r(A) ≠ r($\bar{A}$), следовательно, система несовместна.

Пример 2.5.2 Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение: r(A) = r($\bar{A}$) = 2, берем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2 \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_1 + 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$ – общее решение. Положив. Например, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получаем одно из частных решений: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

2.5.3 Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме A · X = B. Основная матрица такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы в случае Δ ≠ 0.

Умножив обе части уравнения A · X = B слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и E · X = X, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (5.1)$$

Отыскание решения системы по формуле (5.1) называют *матричным способом* решения системы.

Матричное равенство (5.1) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \cdots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta}$$
$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta}$$
$$\cdots$$
$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентом столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, …, $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}$$

(5.2)

Называются ***формулами Крамера***.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом (5.1) либо по формулам Крамера (5.2).

Пример 5.3 Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$.

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$. Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1, \quad x_2 = \frac{14}{7} = 2$.

2.5.4 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{5.3}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход0 система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

где $k \leq n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называют главными элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$. то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (5.3), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a^{(1)}{}_{22}x_2 + ... + a^{(1)}{}_{2n}x_n = b^{(1)}{}_2 \\ .... \\ a^{(1)}{}_{m2}x_2 + ... + a^{(1)}{}_{mn}x_n = b^{(1)}{}_m \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}, b_i^{(1)} (i, j = \overline{2, m})$ - новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a^{(1)}_{22} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы. Кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (5.3) к ступенчатому виду получаются нулевые уравнения, т.е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же появятся уравнения вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (*обратный ход*) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные ($x_{k+1}, \dots, x_n$). Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через ($x_{k+1}, \dots, x_n$); затем находим $x_{k-2}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным ($x_{k+1}, \dots, x_n$) произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечания. 1 Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение.

2 На практике удобнее работать не с системой (5.3) а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример 5.4 Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

Решение: В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$. Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений системы $x_2 = -3$; $x_1 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Пример 2.5.5 Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение: Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

2.5.5 Системы однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна ($r(A) = r(\overline{A})$), она имеет *нулевое (тривиальное) решение* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевое решение?

Теорема 2.5.4 Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т.е. $r < n$.

Пусть дана однородная система n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Теорема 2.5.5 Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т.е. $\Delta = 0$.

Пример 2.5.6 Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2, \quad n = 3$.

Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3 \end{cases}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3.$$

Стало быть $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2x_3, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 3x_3$ - общее решение. Положив $x_3 = 1$, получаем второе частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

Контрольные вопросы

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Правило решения произвольной системы линейных уравнений.
4. Матричный способ решения системы линейных уравнений.
5. Формулы Крамера.
6. Метод Гаусса.
7. Решение системы линейных однородных уравнений.

Тема 3. Векторы

- ***Векторы. Линейные операции над векторами***
- ***Линейно-независимые системы векторов. Базис***
- ***Длина вектора. Угол между двумя векторами***
- ***Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника и многоугольника***

1.1 Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своими числовыми значениями, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называются *векторными*. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и ***нулевой*** вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается через $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется ортом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,0}$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной или параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются ***равными*** ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку О пространства.

Равные векторы называют также *свободными*.

Векторы называются ***компланарными***, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

1.2 Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку О и построим вектор $\overline{OA} = \overline{a}$. От точки А отложим вектор $\overline{AB} = \overline{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$ (рисунок 1.1).

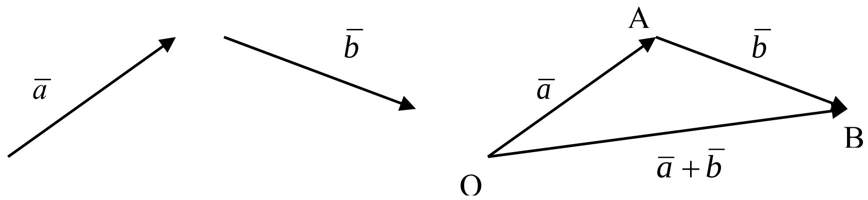


Рисунок 1.1

Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*.

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (рисунок 1.2).

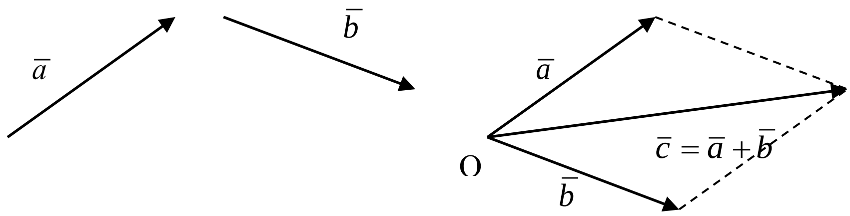


Рисунок 1.2

Под *разностью* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ понимают вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ такой, что $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$ (рисунок 1.3).

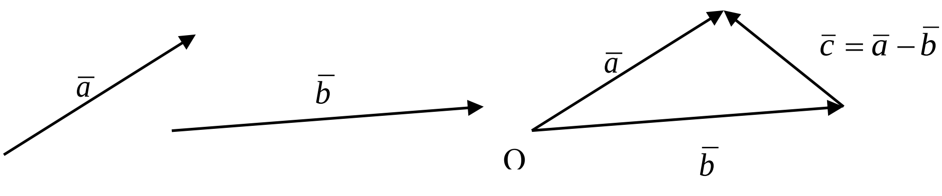


Рисунок 1.3

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая - разностью.

Можно вычитать векторы по правилу: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$, т.е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\bar{a}$ с вектором, противоположным вектору $\bar{b}$.

Произведением вектора $\bar{a}$ ***на скаляр (число)*** $\boldsymbol{\lambda}$ называется вектор $\lambda\cdot\bar{a}$ (или $\bar{a}\cdot\lambda$), который имеет длину $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, коллинеарен вектору $\bar{a}$, имеет направление вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если $\bar{b}=\lambda\cdot\bar{a}$, то $\bar{b}\parallel\bar{a}$. Наоборот, если $\bar{b}\parallel\bar{a}$ ($\bar{a}\neq 0$), то при некотором λ верно равенство $\bar{b}=\lambda\cdot\bar{a}$;
2) всегда $\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\bar{a}^0$, т.е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - коммутативность.
2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
3) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
4) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ - дистрибутивность
5) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

Эти свойства позволяют проводить преобразования в линейных операциях с вектором так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

1.3 Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая.

Проекцией точки М на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку М перпендикулярно оси (рисунок 1.4).

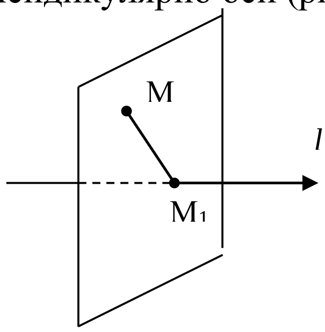


Рисунок 1.4

Если точка М лежит на оси l, то проекция точки М на ось совпадает с М.

Пусть $\overline{AB}$ - произвольный вектор ($\overline{AB} \neq 0$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала А и конца В вектора $\overline{AB}$ и рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число -$|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1} = 0$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: $пр_l\overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{0}$ или $\overline{AB} \perp l$, то $пр_l\overline{AB} = 0$.

Рассмотрим некоторые основные *свойства проекций*.

Свойство 1. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. $пр_l\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$.

Следствие 1.1 Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

Следствие 1.2 Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и туже ось равна сумме их проекций на эту же ось.

Свойство 3. При умножении вектора $\overline{a}$ на число λ его проекция также умножается на это число, т.е.

$$пр_l(\lambda \cdot \overline{a}) = \lambda \cdot пр_l\overline{a}.$$

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

1.4 Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz. Выделим на координатных осях Ox, Oy, Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ соответственно (рисунок 1.5).

Выберем произвольно вектор $\overline{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\overline{a} = \overline{OM}$.

Найдем проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Тогда $пр_x\overline{a} = |\overline{OM_1}|$, $пр_y\overline{a} =$

$|\overline{OM_2}|$, пр$_z\bar{a}$ = $|\overline{OM_3}|$. По определению суммы нескольких векторов находим $\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}$.

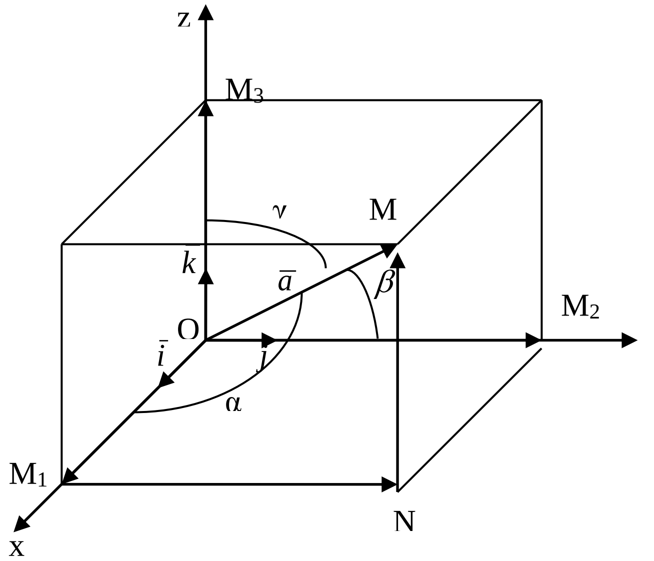


Рисунок 1.5

А так как $\overline{M_1N} = \overline{OM_2}, \quad \overline{NM} = \overline{OM_3}$, то

$$\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3} . \tag{1.1}$$

Но

$$\overline{OM_1} = |\overline{OM_1}| \cdot \bar{i}, \quad \overline{OM_2} = |\overline{OM_2}| \cdot \bar{j}, \quad \overline{OM_3} = |\overline{OM_3}| \cdot \bar{k} . \tag{1.2}$$

Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно через a_x, a_y, a_z. Тогда из равенств (1.1) и (1.2) получаем

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} . \tag{1.3}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей***. Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т.е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (1.3) часто записывают в символическом виде $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$ можно легко найти выражение для модуля вектора.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} , \tag{1.4}$$

т.е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат***.

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\bar a|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\bar a|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\bar a|}.$$

Числа cos α, cos β, cos γ называются направляющими косинусами вектора $\bar a$.

Справедливо соотношение

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

т.е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице***.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т.е. сам вектор.

n-мерным пространством R^n называют бесконечное множество n-мерных векторов $\bar a_s=(a_{s1},a_{s2},...,a_{sn}), s=1,2,...$.

Система k векторов $\{\bar a_s\}$ называется ***линейно независимой***, если

$\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2+...+\lambda_k\bar a_k=\bar 0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k=0$.

Теорема 1.1 Если ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kn}\end{pmatrix}$ равен k, то система k векторов $\{\bar a_s\}$ является линейно независимой.

Базисом пространства R^n называют систему из n линейно независимых векторов $\{\bar a_s\}$.

Скалярным произведением векторов $\bar x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $\bar y=(y_1,y_2,...,y_n)$ в R^n называют число $\bar x\cdot\bar y=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$.

Система векторов $\bar a_s=(a_{s1},a_{s2},...,a_{sn}), s=1,2,...k$, называется ***ортонормированной***, если она обладает свойством: скалярное произведение $\bar a_l\cdot\bar a_m=\begin{cases}1, l=m; l=1,2,...,k\\ 0, l\neq m; m=1,2,...,k\end{cases}$.

Теорема 1.2 Если система n векторов $\{\bar a_s\}$ образует базис в R^n, то любой вектор $\bar x=(x_1,x_2,...,x_n)$ может быть разложен по базису в виде: $\bar x=\alpha_1\bar a_1+\alpha_2\bar a_2+...+\alpha_n\bar a_n$.

Это векторное равенство равносильно СЛАУ: $x_i=\alpha_1a_{1i}+\alpha_2a_{2i}+...+\alpha_na_{ni}, i=1,2,...,n$, которая имеет единственное решение $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Если базис ортонормированный, то коэффициенты разложения равны координатам вектора $\bar x$, т.е. $\alpha_i = x_i$. В частности, орты осей OX, OY, OZ: $\bar i$=(1,0,0) , $\bar j$=(0,1,0), $\bar k$=(0,0,1) образуют ортонормированный базис в R^3, т.е. любой вектор $\bar a$=(x,y,z) можно разложить по базису в виде: $\bar a$=x$\bar i$+y$\bar j$+z$\bar k$

Пример 1.1 Даны векторы $\bar a$=(1; 2; 3), $\bar b$=(-1; 0; 3), $\bar c$=(2; 1; -1) , $\bar d$=(3; 2; 2) . Показать, что векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ образуют базис и найти разложение вектора $\bar d$ по этому базису.

Решение: Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 3 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 2 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 2 \end{cases} \quad \text{линейно независимы.}$$

Тогда $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$\beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$\gamma = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2$;

Итак, $\bar{d} = -\dfrac{1}{4}\bar{a} + \dfrac{7}{4}\bar{b} + \dfrac{5}{2}\bar{c}$.

1.5 Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $b = (b_x; b_y; b_z)$ заданы своими проекциями на координатные оси.

1.5.1 Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$, или кратко $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$. То есть *при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются)*.

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \cdot \bar{i} + \lambda a_y \cdot \bar{j} + \lambda a_z \cdot \bar{k}$ или короче $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$. То есть *при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр*.

1.5.2 Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$, т.е.

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

1.5.3 Коллинеарность векторов

Из определения коллинеарных векторов можно выяснить условие коллинеарности векторов:

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, *проекции коллинеарных векторов пропорциональны*. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

1.5.4 Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат Oxyz. Для любой точки M координаты вектора $\overline{OM}$ называются *координатами точки M*. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M, обозначается $\bar{r}$. Следовательно, координаты точки – это координаты его радиус-вектора $\bar{r}$ = (x; y; z). Координаты точки M записываются в виде M (x; y; z).

1.5.5 Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Имеем

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:* $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

1.6 Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

Обозначается $\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\cdot\bar{b}$ (или $(\bar{a},\bar{b})$). Итак, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (1.5)$$

Формуле (1.5) можно придать иной вид. Так как $|\bar{a}|\cos\varphi = np_{\bar{b}}\bar{a}$ (рисунок 1.5), а $|\bar{b}|\cos\varphi = np_{\bar{a}}\bar{b}$, то получаем

$$\bar{a}\bar{b}\,|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}\,, \qquad (1.6)$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

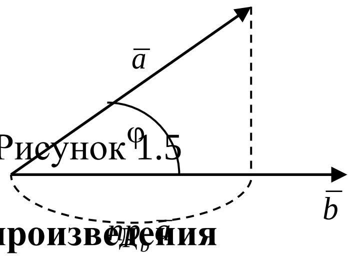


Рисунок 1.5

1.7 Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(\mathrm{m}\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\mathrm{m}\vec{b}) = \mathrm{m}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

В частности: $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$.

Если вектор $\bar{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль $|\bar{a}|$, т.е. $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$.

Пример 1.2 Найти длину вектора $\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, \quad \angle(\bar{a},\bar{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение:

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(3\bar{a}-4\bar{b})^2} = \sqrt{9\bar{a}^2 - 24\bar{a}\bar{b} + 16\bar{b}^2} = \sqrt{9\cdot 4 - 24\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ и $\bar{a}\neq 0\neq\bar{b}$, то $\bar{a}\perp\bar{b}$.

1.8 Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \text{ и } \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены и пользуясь таблицей скалярного произведения векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_xb_x\bar{i}\bar{i} + a_xb_y\bar{i}\bar{j} + a_xb_z\bar{i}\bar{k} + a_yb_x\bar{j}\bar{i} + a_yb_y\bar{j}\bar{j} +$$
$$+ a_yb_z\bar{j}\bar{k} + a_zb_x\bar{k}\bar{i} + a_zb_y\bar{k}\bar{j} + a_zb_z\bar{k}\bar{k} = a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z$$

т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат*.

Пример 1.3 Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин A(-4; -4; 4), B(-3; 2; 2), C(2; 5; 1), D(3; -2; 2), взаимно перпендикулярны.

Решение: Составим вектора $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, лежащие на диагоналях данного четырехугольника. Имеем: $\overline{AC}$ = (6; 9; -3) и $\overline{BD}$ = (6; -4; 0). Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Диагонали четырехугольника ABCD взаимно перпендикулярны.

1.9 Некоторые приложения скалярного произведения

1.9.1 Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \text{ т.е. } \cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

1.9.2 Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле

$$np_{\bar b}\bar a=\frac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar b|}\quad\left(np_{\bar a}\bar b=\frac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar a|}\right),\text{ т.е. } np_{\bar b}\bar a=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

1.9.3 Работа постоянной силы

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения А в положение В под действием постоянной силы $\bar F$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB}=\bar S$. Из физики известно, что работа силы $\bar F$ при перемещении $\bar S$ равна

$$A=F\cdot S\cdot\cos\varphi,\text{ т.е. } A=\bar F\cdot\bar S.$$

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 1.4 Вычислить работу, произведенную силой $\bar F$ = (3; 2; 4), если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения А(2; 4; 6) в положение (4; 2; 7). Под каким углом к АВ направлена сила $\bar F$?

Решение: Находим $\bar S=\overline{AB}=(2,-2,1)$. Стало быть,

$A=\bar F\cdot\bar S=3\cdot 2+2\cdot(-2)+4\cdot 1=6$(ед.работы).

Угол φ между $\bar F$ и $\bar S$ находим по формуле $\cos\varphi=\dfrac{\bar F\cdot\bar S}{|\bar F|\cdot|\bar S|}$, т.е.

$$\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{29}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{29}},\quad \varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

1.10 Определение векторного произведения

Три некомпланарных вектора $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar c$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar a$ ко второму вектору $\bar b$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой.

Векторным произведением векторов $\vec a$ и $\vec b$ называется вектор $\vec c$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec c|=|\vec a|\cdot|\vec b|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec a$ и $\vec b$, $\sin\varphi\ge 0;\quad 0\le\varphi\le\pi$

2) вектор $\vec c$ ортогонален векторам $\vec a$ и $\vec b$

3) $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec c=\vec a\times\vec b$ или $\vec c=[\vec a,\vec b]$.

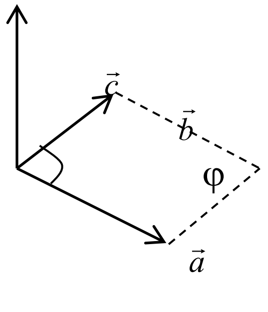


Рисунок 1.6

1.11 Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т.е. $(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$.

3. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

1.12 Выражение векторного произведения через координаты

Мы будем использовать таблицу векторного произведения векторов $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Пусть заданы два вектора $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ и $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$. Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\bar{k}.$$

(1.7)

Полученную формулу можно записать еще короче:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

(1.8)

так как правая часть равенства (1.7) соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки.

1.13 Некоторые приложения векторного произведения

1.13.1 Установление коллинеарности векторов

Если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b}=0$ (и наоборот), т.е.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\bar{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\Leftrightarrow\bar{a}\parallel\bar{b}.$$

1.13.2 Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, т.е. $S_{пар}=|\bar{a}\times\bar{b}|$. И, значит, $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$.

1.13.3 Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке А приложена сила $\bar{F}=\overline{AB}$ и пусть О – некоторая точка пространства (рисунок 1.7).

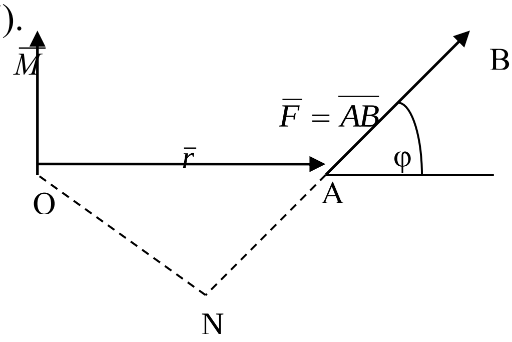


Рисунок 1.7

Из физики известно, что моментом силы $\bar{F}$ относительно точки О называется вектор $\bar{M}$, который проходит через точку О и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки О, А, В;
2) численно равен произведению силы на плечо
$$|\bar{M}|=|\bar{F}|\cdot ON=|\bar{F}|\cdot|\bar{r}|\cdot\sin\varphi;$$
3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

Стало быть, $\bar{M}=\overline{OA}\times\bar{F}$.

1.13.4 Нахождение линейной скорости вращения

Скорость $\bar{\vartheta}$ точки М твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\varpi}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера $\bar{\vartheta}=\bar{\varpi}\times\bar{r}$, где $\bar{r}=\overline{OM}$, где О – некоторая неподвижная точка оси.

1.14 Определение смешанного произведения, его геометрический смысл

Рассмотрим произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рисунок

5.4). Получаем: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\bar{S}\cdot(\pm H)$, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V$, где V – объем параллелепипеда, образованного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

1.15 Свойства смешанного произведения

1 Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$.

2 Смешанное произведение не меняется при перемене местами векторного и скалярного умножения, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

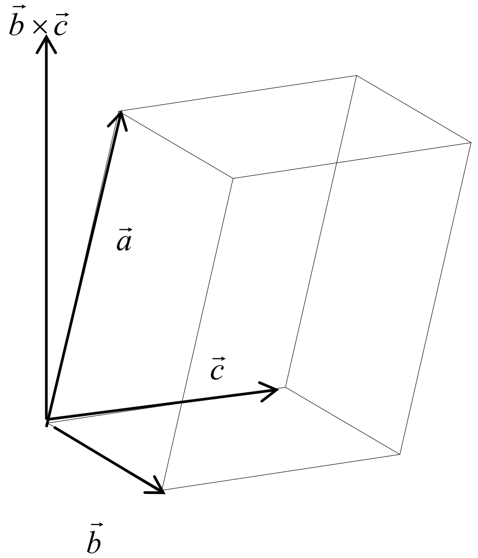


Рисунок 1.8

3 Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов сомножителей, т.е. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$, $(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$, $(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.

4 Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

1.16 Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$ и $\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}$. Смешанное произведение, выраженное через координаты векторов, имеет вид:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

(1.9)

Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

1.17 Некоторые приложения смешанного произведения

1.17.1 Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ основано на следующих соображениях. Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}>0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - правая тройка; если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}<0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - левая тройка.

1.17.2 Установление компланарности векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \text{ векторы } \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ компланарны.}$$

1.17.3 Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется как $V=|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V=\frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Пример 1.5 Вершинами пирамиды служат точки A(1; 2; 3), B(0; -1; 1), C(2; 5; 2) и D(3; 0; -2). Найти объем пирамиды.

Решение: Находим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$\bar{a}=\overline{AB}=(-1;-3;-2)$, $\quad \bar{b}=\overline{AC}=(1;3;-1)$, $\quad \bar{c}=\overline{AD}=(2;-2;-5)$.

Находим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}=-1\cdot(-17)+3\cdot(-3)-2\cdot(-8)=17-9+16=24.$$

Следовательно, $V=\frac{1}{6}\cdot 24=4$.

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором? длиной вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными, равными, компланарными?

3. Линейные операции над векторами.
4. Что называется проекцией вектора на ось?
5. Основные свойства проекций.
6. Разложение вектора по координатным осям.
7. Как найти модуль вектора?
8. Что называется направляющими косинусами?
9. Действия над векторами, заданными проекциями.
10. Определение скалярного произведения.
11. Свойства скалярного произведения.
12. Выражение скалярного произведения через координаты.
13. Угол между векторами.
14. Проекция вектора на заданное направление.
15. Работа постоянной силы.
16. Определение векторного произведения.
17. Свойства векторного произведения.
18. Выражение векторного произведения через координаты.
19. Установление коллинеарности векторов.
20. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.
21. Нахождение линейной скорости вращения.
22. Определение смешанного произведения.
23. Геометрический смысл смешанного произведения.
24. Свойства смешанного произведения.
25. Выражение смешанного произведения через координаты.
26. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.
27. Установление компланарности векторов.
28. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Тема 4. Уравнения плоскости. Уравнения прямой в R^2 и R^3

4.1 Линейная зависимость и независимость векторов в $\mathbf{R}^n$

Базисом в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются ***компонентами или координатами*** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие ***свойства***:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3}.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3};$$

$$\vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}.$$

Векторы $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются ***линейно зависимыми***, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Любые 4 вектора линейно зависимы.

Пример 4.1 Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1) и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение: Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10; \qquad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

4.2 Понятие о линейном операторе как о линейном преобразовании пространства

Как известно, линейные операции (сложение, вычитание, умножение на число) определены по-своему для каждого множества (числа, многочлены, направленные отрезки, матрицы). Сами операции различны, но их свойства одинаковы.

Эта общность свойств позволяет обобщить понятие линейных операций для любых множеств вне зависимости от того, что это за множества (числа, матрицы и т.д.).

Для того, чтобы дать определение линейного (векторного) пространства рассмотрим некоторое множество L действительных элементов, для которых определены операции сложения и умножения на число.

Эти операции обладают свойствами:

1) Коммутативность $\bar{x}+\bar{y} = \bar{y}+\bar{x}$

2) Ассоциативность $(\bar{x}+\bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y}+\bar{z})$

3)Существует такой нулевой вектор $\overline{O}$, что $\overline{O}+\bar{x}=\bar{x}$ для $\forall\, \bar{x} \in$ L

4) Для $\forall\, \bar{x} \in$ L существует вектор $\bar{y} = -\bar{x}$, такой, что $\bar{x}+\bar{y}=\overline{O}$

5)$1\cdot\bar{x} = \bar{x}$

6) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$

7) Распределительный закон $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$

8) $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

Множество L называется ***линейным*** (векторным) пространством, а его элементы называются ***векторами***.

Важно не путать понятие вектора, приведенное выше с понятием вектора как направленного отрезка на плоскости или в пространстве. Направленные отрезки являются всего лишь частным случаем элементов линейного (векторного) пространства. Линейное (векторное) пространство – понятие более широкое. Примерами таких пространств могут служить множество действительных чисел, множество векторов на плоскости и в пространстве, матрицы и т.д.

Если операции сложения и умножения на число определены для действительных элементов, то линейное (векторное) пространство является вещественным пространством, если для комплексных элементов – комплексным пространством.

Свойства линейных пространств:

1) В каждом линейном пространстве существует только один нулевой элемент.

2) Для каждого элемента существует только один противоположный элемент.

3) Для каждого $\bar{x} \in$ L верно $0\cdot\bar{x} = 0$

4) Для каждого $\alpha \in$ R и $\overline{O} \in$ L верно $\alpha\cdot\overline{O}=\overline{O}$

5) Если $\alpha\cdot\bar{x} = \overline{O}$, то $\alpha = 0$ или $\bar{x} = \overline{O}$

6) $(-1)\,\bar{x} = -\bar{x}$

Будем считать, что в линейном пространстве L задано некоторое линейное преобразование A, если любому элементу $\bar{x} \in$ L по некоторому правилу ставится в соответствие элемент A$\bar{x} \in$ L.

Преобразование A называется ***линейным***, если для любых векторов $\bar{x} \in$ L и $\bar{y} \in$ L и любого α верно: 1) $A(\bar{x}+\bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}$; 2) $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x}$

Линейное преобразование называется ***тождественным***, если оно преобразует элемент линейного пространства сам в себя.

$$E\bar{x} = \bar{x}$$

Пример 4.2 Является ли A линейным преобразованием. $A\bar{x} = \bar{x} + \overline{x_0}$; $\overline{x_0} \neq 0$.

Решение: Запишем преобразование A для какого- либо элемента $\bar{y}$. $A\bar{y} = \bar{y} + \overline{x_0}$

Проверим, выполняется ли правило операции сложения для этого преобразования $A(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{y} + \bar{x} + \overline{x_0}$; $A(\bar{x}) + A(\bar{y}) = \bar{x} + \overline{x_0} + \bar{y} + \overline{x_0}$, что верно только при $\overline{x_0} = 0$, т.е. данное преобразование A нелинейное.

Если в пространстве L имеются векторы линейного преобразования $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$, то другой вектор $\bar{b} = \alpha\overline{a_1} + \beta\overline{a_2} + ... + \lambda\overline{a_n}$ является ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_i}$.

Если $\alpha\overline{a_1} + \beta\overline{a_2} + ... + \lambda\overline{a_n} = 0$ только при $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$, то векторы $\overline{a_i}$ называются ***линейно независимыми***.

Если в линейном пространстве L есть n линейно независимых векторов, но любые n + 1 векторов линейно зависимы, то пространство L называется ***n-мерным***, а совокупность линейно независимых векторов называется ***базисом*** линейного пространства L.

Следствие 4.1 Любой вектор линейного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

4.3 Линейные операторы и их матрицы в R^2 и R^3. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Пусть в n- мерном линейном пространстве с базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ задано линейное преобразование A. Тогда векторы $A\overline{e_1}, A\overline{e_2}, \ldots, A\overline{e_n}$ - также векторы этого пространства и их можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$A\overline{e_1} = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n}$$
$$A\overline{e_2} = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{n2}\overline{e_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\overline{e_n} = a_{n1}\overline{e_1} + a_{n2}\overline{e_2} + \ldots + a_{nn}\overline{e_n}$$

Тогда матрица A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется ***матрицей линейного преобразования A***.

Если в пространстве L взять вектор $\bar{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}$, то $A\bar{x} \in$ L.

$$A\bar{x} = x_1'\overline{e_1} + x_2'\overline{e_2} + ... + x_n'\overline{e_n}\text{, где}$$
$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n$$

Эти равенства можно назвать линейным преобразованием в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$.

В матричном виде:

$$\bar{x} = \left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad A\cdot\bar{x} = \bar{x}'$$

Пример 4.3 Найти матрицу линейного преобразования, заданного в виде:

x′ = x + y
y′ = y + z
z′ = z + x

Решение: x′ = 1·x + 1·y + 0·z
y′ = 0·x + 1·y + 1·z
z′ = 1·x + 0·y + 1·z

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На практике действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Если вектор $\bar{x}$ переводится в вектор $\bar{y}$ линейным преобразованием с матрицей A, а вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$ линейным преобразованием с матрицей B, то последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию, переводящему вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$ (оно называется ***произведением составляющих преобразований***).

C = B·A

Пример 4.4 Задано линейное преобразование A, переводящее вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y}$ и линейное преобразование B, переводящее вектор $\bar{y}$ в вектор

$\bar{z}$. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$.

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z$$

$$x \xrightarrow{C} z$$

Решение: C = B·A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2+4+9 & -1+16-15 & 5-4+6 \\ 10-1-3 & -5-4+5 & 25+1-2 \\ 6+6+21 & -3+24-35 & 15-6+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$ Т.е.

$$\begin{cases} z_1 = 15x_1 + 7x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}$$

Пусть L – заданное n- мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\bar{x} \in$ L называется ***собственным вектором*** линейного преобразования A, если существует такое число λ, что выполняется равенство:

$$\mathrm{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}. \qquad (4.1)$$

При этом число λ называется ***собственным значением (характеристическим числом)*** линейного преобразования A, соответствующего вектору $\bar{x}$.

Если линейное преобразование A в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ имеет матрицу A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования A можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.2)$$

Это уравнение называется ***характеристическим уравнением,*** а его левая часть- ***характеристическим многочленом*** линейного преобразования A.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование А не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования А, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое ***собственное направление*** или ***собственную прямую***.

Пример 4.5 Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей А = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение: Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{matrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$;

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для корня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; 0,5t)*** где *t*- параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; -t)*** где *t*- параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0{,}5\overrightarrow{e_2})$; $\overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})$.

Пример 4.6 Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей А = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение: Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{matrix}$

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda)+16 = -12-6\lambda+2\lambda+\lambda^2+16 = 0$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$;

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Получаем: $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; t)*** где *t*- параметр.

Собственный вектор можно записать: $\vec{u} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})t$.

Пример 4.7 Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0$

$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$

$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0$

$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$

$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$

$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$

$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0$

$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$; $x_3 = -1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_1} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3})\cdot t.$

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})\cdot t.$

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_3} = (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

4.2.3 Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды уравнений.

4.2.3.1 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение вполне определяется ординатой b точки N(0; b) пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой:

$$y = kx + b$$

(2.1)

Число k = tg α называется ***угловым коэффициентом прямой***, а уравнение (2.1) – ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***.

4.2.3.2 Общее уравнение прямой

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$Ax + By + C = 0$$

(2.2)

где A, B, и C – произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если A = 0, то уравнение приводится к виду $y = -\dfrac{C}{B}$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox;
2) если B = 0, то прямая параллельна оси Oy;
3) если C = 0, то получаем Ax + By = 0. Уравнению удовлетворяют координаты точки C(0; 0), прямая проходит через начало координат.

4.2.3.3 Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой можно записать в виде:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
(2.3)

4.2.3.4 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, тогда ее уравнение имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
(2.4)

4.2.3.5 Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ох в точке $M_1(a;0)$, а ось Оу – в точке $M_2(0;b)$. В этом случае ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
(2.5)

4.2.3.6 Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\bar{n} = (A; B)$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
(2.6)

Вектор $\bar{n} = (A; B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

4.2.3.7 Полярное уравнение прямой

Уравнение прямой в полярных координатах имеет вид:

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p,$$
(2.7)

где р – расстояние от полюса О до данной прямой, α – угол между полярной осью ОР и осью l, проходящей через полюс О перпендикулярно данной прямой.

4.2.4 Прямая линия на плоскости. Основные задачи

4.2.4.1 Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Угол φ между этими прямыми определяется по формуле

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

(2.8)

Условием параллельности прямых L_1 *и* L_2 *является равенство их угловых коэффициентов*: $k_1 = k_2$. *Условием перпендикулярности прямых является равенство* $k_1 \cdot k_2 = -1$.

4.2.4.2 Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением Ах + Ву + С = 0 и точка $M_0(x_0; y_0)$. Расстояние от точки до прямой определяется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(2.9)

Пример4. 2.5 Найти расстояние от точки $M_0(2;-1)$ до прямой 3х + 4у – 22 = 0.

Решение: По формуле (6.11) получаем

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$

4.2.5 Уравнения плоскости в пространстве

2.5.1 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A;B;C)$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

(2.10)

Вектор $\overline{n}(A;B;C)$ называется нормальным вектором плоскости.

4.2.5.2 Общее уравнение плоскости

Плоскостью называется поверхность, вес точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

(2.11)

где А, В, С – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор ***нормали*** к плоскости.

Возможны следующие частные случаи:

А = 0 – плоскость параллельна оси Ох

В = 0 – плоскость параллельна оси Оу

С = 0 – плоскость параллельна оси Оz

D = 0 – плоскость проходит через начало координат
A = B = 0 – плоскость параллельна плоскости xOy
A = C = 0 – плоскость параллельна плоскости xOz
B = C = 0 – плоскость параллельна плоскости yOz
A = D = 0 – плоскость проходит через ось Ox
B = D = 0 – плоскость проходит через ось Oy
C = D = 0 – плоскость проходит через ось Oz
A = B = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOy
A = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOz
B = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью yOz

4.2.5.3 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(2.12)

4.2.5.4 Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении Ax + By + Cz + D = 0 поделить обе части на –D: $-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z-1=0$, заменив $-\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(2.13)

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z.

4.2.5.5 Нормальное уравнение плоскости

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=p,$$

где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки M(x, y, z), $\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x, y, z, p – длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (2.14)$$

4.2.6 Плоскость. Основные задачи

4.2.6.1 Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

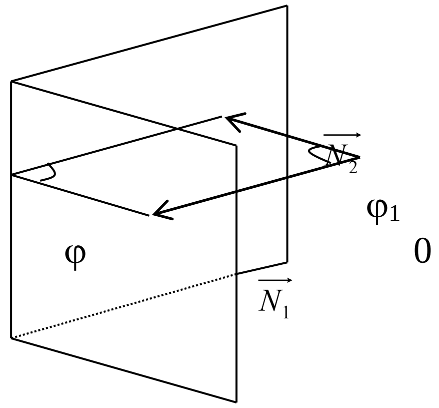


Рисунок 2.1

Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, т.е. $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$. ***Угол между плоскостями*** находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(2.15)

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были ***перпендикулярны*** необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Плоскости ***параллельны***, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \,||\, \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

4.2.6.1 Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (2.16)$$

4.2.7 Уравнения прямой в пространстве

4.2.7.1 Векторное уравнение

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$(m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется ***направляющим вектором*** прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z).

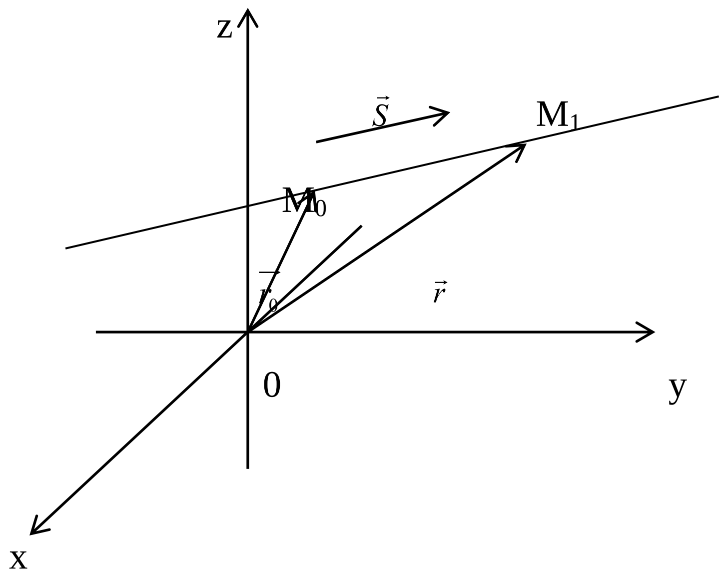


Рисунок 2.2

Обозначим радиус- векторы этих точек как $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r}$ - $\overrightarrow{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}$t, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}$t – ***векторное уравнение прямой***.

4.2.7.2 Параметрическое уравнение прямой

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – ***параметрическое уравнение прямой***.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (2.17)$$

4.2.7.3 Канонические уравнения прямой

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем ***канонические уравнения прямой в пространстве***:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (2.18)$$

4.2.7.4 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой: $\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}$.

Кроме того, для точки M_1 можно записать: $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$.

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (2.19)$$

Это ***уравнение прямой, проходящей через две точки*** в пространстве.

4.2.7.5 Общие уравнения прямой

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (2.20)$$

Пример 4.2.6 Написать каноническое уравнение прямой L, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y-3z+5=0. \end{cases}$$

Решение: Положим z = 0 и решим систему $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2;\ 1;\ 0)\in L$. Положим y = 0 и решим систему $\begin{cases} x-z=-1, \\ 2x-3z=-5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2;\ 0;\ 3)\in L$. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}.$$

4.2.8 Прямая линия в пространстве. Основные задачи

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения: l_1: $\vec{r}=\vec{r_1}+\vec{S_1}t$, l_2: $\vec{r}=\vec{r_2}+\vec{S_2}t$,

$$\vec{r}=(x,y,z);\quad \vec{r_1}=(x_1,y_1,z_1);\quad \vec{r_2}=(x_2,y_2,z_2);\quad \vec{S_1}=(m_1,n_1,p_1);\quad \vec{S_2}=(m_2,n_2,p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

(2.21)

Чтобы две прямые были ***параллельны*** необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

(2.22)

Чтобы две прямые были ***перпендикулярны*** необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

(2.23)

Пример 4.2.7 Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \text{ и } \begin{cases} 2x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}.$$

Решение: Очевидно, $\bar{S}_1 = (2;-1;3)$, а $\bar{S}_2 = \bar{n}_1\times\bar{n}_2$, где $\bar{n}_1 = (2;1;-1), \bar{n}_2 = (2;-1;3)$. Отсюда следует, что $\bar{S}_2 = (2;-8;-4)$. Так как $\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2 = 4+8-12=0$, то $\varphi = 90^0$.

4.2.9 Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

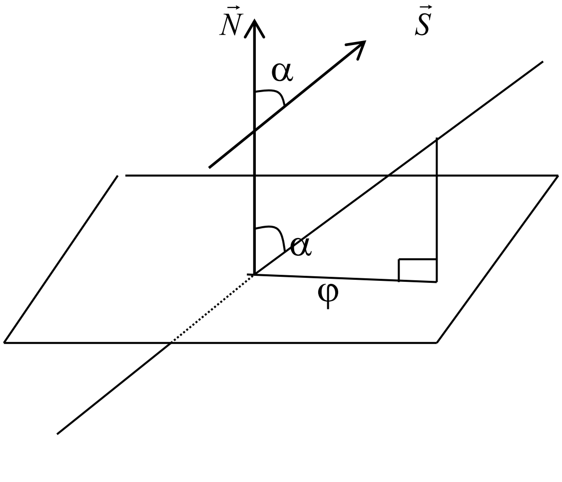


Рисунок 2.3

Этот угол может быть найден по формуле:

$$\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

(2.24)

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N} \cdot \vec{S} = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N} \times \vec{S} = 0; \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

1. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

- ***Линейная зависимость и независимость векторов в R^n.***
- ***Понятие о линейном операторе как о линейном преобразовании пространства.***
- ***Линейные операторы и их матрицы в R^2 и R^3. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.***

Контрольные вопросы

1. Что называется базисом?
2. Какие векторы называются линейно зависимыми? Их свойства.
3. Что называется векторным пространством?
4. Что называется линейным преобразованием пространства?
5. Как найти матрицу линейного преобразования?
6. Как найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования?

Тема 5. Комплексные числа

- ***Комплексные числа. Их изображение на плоскости.***
- ***Модуль и аргументы комплексного числа.***
- ***Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.***
- ***Операции над комплексными числами. Формула Муавра.***

5.1 Комплексные числа. Их изображение на плоскости

Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1;\quad i = \sqrt{-1}.$

При этом число a называется ***действительной частью*** числа z ($a = Re\, z$), а b- ***мнимой частью*** ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются ***комплексно – сопряженными.***

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются ***равными***, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2;\quad b_1 = b_2;$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части: $a = b = 0.$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.

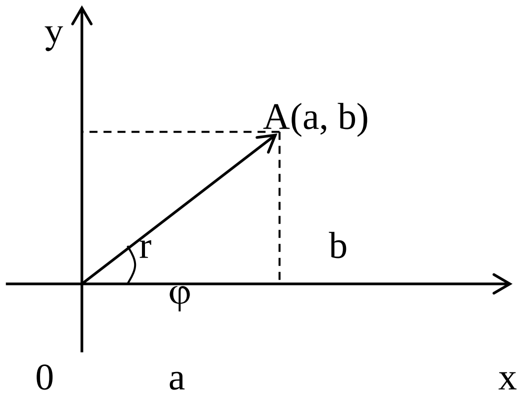


Рисунок 5.1

Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

5.2 Модуль и аргументы комплексного числа

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число z = x + iy. Тогда получаем x = r cos φ, y = r sin φ. Следовательно, комплексное число z = x + iy можно записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

При этом величина *r* называется ***модулем*** комплексного числа, а угол наклона φ - ***аргументом*** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z\,.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

5.3 Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Запись числа z в виде z = x + iy называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Запись комплексного числа z = r (cos φ + i sin φ) называется ***тригонометрической формой***.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция *w* может быть записана в виде:

$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Данное равенство называется ***уравнением Эйлера.***

Если представить комплексное число в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть ***показательная форма комплексного числа.***

Пример 5.1 Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной форме.

Решение: Для z_1 имеем:

$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = arctg\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, т.е. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Для z_2 имеем

$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi$, т.е. $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$.

5.5 Операции над комплексными числами. Формула Муавра

Суммой двух комплексных чисел называется число, определяемое равенством

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

(5.1)

Сложение комплексных чисел обладает ***переместительным*** и ***сочетательным*** свойствами.

Из определения следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. ***Разностью*** двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1:

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

(5.2)

Из равенства (5.2) следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы.

Произведением комплексных чисел называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

(5.3)

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

(5.4)

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

(5.5)

где n – целое положительное число.

Это выражение называется ***формулой Муавра.***

Пример 5.2 Найти $(1+\sqrt{3}i)^9$.

Решение: Запишем сначала число $1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем:

$$z^9 = (1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9\left(\cos 9\frac{\pi}{3} + i\sin 9\frac{\pi}{3}\right) = 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512.$$

Деление определяется как действие, обратное умножению. ***Частным*** двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Пример 5.3 Выполнить деление $\frac{1+3i}{2+i}$.

Решение: $\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$.

Извлечение корня n-ой степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho=\sqrt[n]{r}$; $\quad n\psi=\varphi+2\pi k$; $\quad k\in Z$.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 5.4 Найти значения а) $\sqrt[3]{i}=\omega$; б) $\sqrt{-1}=\omega$.

Решение: а) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Стало быть,

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

При k = 0 имеем

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2};$$

При k = 1 имеем

$$\omega_1=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2};$$

При k = 2 имеем

$$\omega_2=\cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

б) Снова запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$-1=\cos\pi+i\sin\pi$.

Поэтому

$$\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2},\quad k=0,1.$$

При k = 0 получаем $\omega_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, а при k = 1 получаем $\omega_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$. Таким образом, $\sqrt{-1}=i$ и $\sqrt{-1}=-i$.

Контрольные вопросы

1. Какое число называется комплексным, действительной частью, мнимой частью?
2. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
3. Геометрическое изображение комплексных чисел.
4. Алгебраическая форма комплексных чисел.
5. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
6. Показательная форма комплексных чисел.

7. Сложение комплексных чисел.
8. Вычитание комплексных чисел.
9. Умножение комплексных чисел.
10. Формула Муавра.
11. Деление комплексных чисел.
12. Извлечение корня из комплексных чисел.

Тема 6. Кривые второго порядка

- ***Общее уравнение кривых второго порядка.***
- ***Канонические формы уравнений эллипса, гиперболы и параболы.***
- ***Геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы.***
- ***Преобразование координат и упрощение уравнений кривых второго порядка***

6.1 Основные понятия

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{6.1}$$

Коэффициенты уравнения – действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются *линиями (кривыми) второго порядка*.

6.2 Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что ***окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат имеет координаты x_0, y_0, а $M(x; y)$ - произвольная точка окружности.

Тогда уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{6.2}$$

Уравнение окружности после несложных преобразований примет вид $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$. При сравнении этого уравнения с уравнением (6.1) кривой второго порядка легко заметить, что для этого уравнения окружности выполнены два условия:

1) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;
2) отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат.

6.3 Эллипс

6.3.1 Каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек на этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянна, большая, чем расстояние между фокусами.

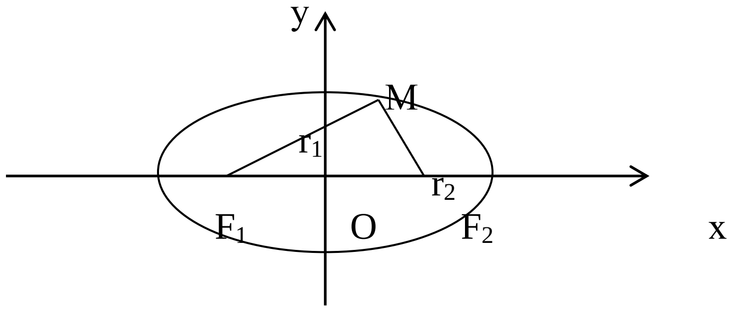


Рисунок 6.1

F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6.3)$$

6.3.2 Исследование формы эллипса по его уравнению

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

1 Эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки O(0; 0), которую называют *центром эллипса*.

2 Ось Ox пересекает эллипс в точках $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$. Ось Oy пересекает эллипс в точках $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются соответственно *большой и малой осями эллипса*.

3 Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a,\ y = \pm b$.

4 При возрастании $|x|$ $|y|$ будет уменьшаться и наоборот.

6.3.3 Дополнительные сведения об эллипсе

Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (6.4)$$

причем $0 < \varepsilon < 1$, т.к. $0 < c < a$.

Пусть $M(x; y)$ - произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются фокальными радиусами точки M. Очевидно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Имеют место формулы

$$r_1 = a + \varepsilon x \text{ и } r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** эллипса.

Теорема 6.1 Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокуса директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

6.4 Гипербола

6.4.1 Каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6.5)$$

6.4.2 Исследование формы гиперболы по ее уравнению

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением.

1 Гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки O(0; 0), которую называют ***центром гиперболы***.

2 Точки пересечения гиперболы с осью Ox $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$. С осью Oy пересечений нет.

Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются ***вершинами гиперболы***, а отрезок A_1A_2 = 2a – ***действительной осью***, отрезок $OA_1 = OA_2$ = a – ***действительной полуосью*** гиперболы.

Отрезок B_1B_2 = 2b соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется ***мнимой осью***, число b – ***мнимой полуосью***. Прямоугольник со сторонами 2a и 2b называется ***основным прямоугольником гиперболы***.

3 Точки гиперболы расположены справа от прямой x = a (*правая ветвь* гиперболы) и слева от прямой x = - a (*левая ветвь* гиперболы).

4 Когда $|x|$ возрастает, $|y|$ тоже возрастает.

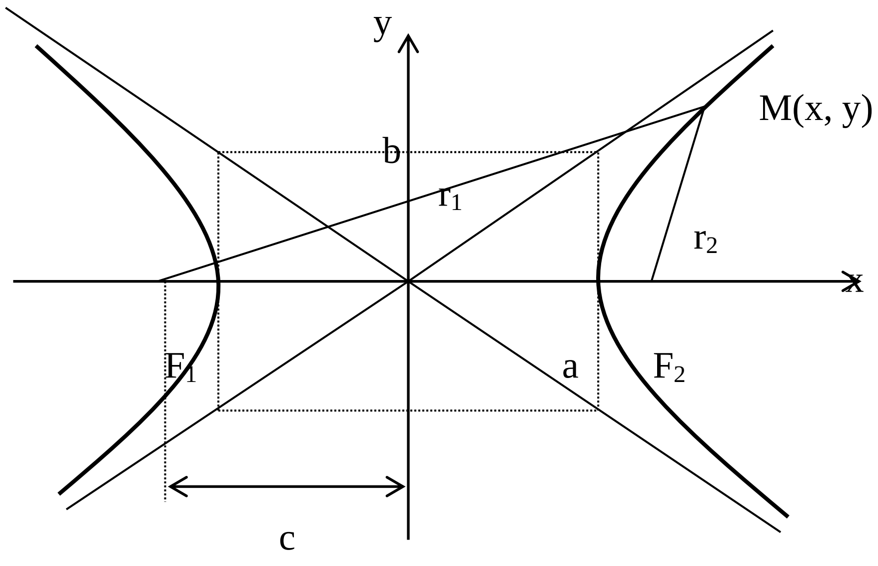


Рисунок 6.2

6.4.3 Асимптоты гиперболы

Прямая L называется *асимптотой* неограниченной кривой К, если расстояние d от точки М кривой К до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки М вдоль кривой К от начала координат.

Гипербола имеет две асимптоты:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x \tag{6.6}$$

При построении гиперболы (6.5) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы, провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, - асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.

6.4.4 Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат оси координат

Гипербола называется ***равносторонней***, если ее полуоси равны (a = b). Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{6.7}$$

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения y = x и y = -x.

Уравнение равносторонней гиперболы, для которой оси Ох и Оу являются асимптотами, будет иметь вид $y = \frac{k}{x}$, где $k = \frac{a^2}{2}$.

6.4.5 Дополнительные сведения о гиперболе

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$.

Фокальные радиусы для точек правой ветви гиперболы имеют вид $r_1 = \varepsilon x + a$ и $r_2 = \varepsilon x - a$, а для левой - $r_1 = -(\varepsilon x + a)$ и $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Правая директриса расположена между центром и правой вершиной параболы, левая – между центром и левой вершиной.

Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\varepsilon = \frac{r}{d}$, что и директрисы эллипса.

6.5 Парабола

6.5.1 Каноническое уравнение параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой***. Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается через p (p > 0).

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px \tag{6.8}$$

6.5.2 Исследование форм параболы по ее уравнению

1 Парабола симметрична относительно оси Ox; ось Ox является *осью симметрии* параболы.

2 Парабола расположена справа от оси Oy.

3 При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает. Точка O(0; 0) называется *вершиной параболы*, отрезок FM = r называется *фокальным радиусом* точки M.

6.6 Общее уравнение линий второго порядка

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ после преобразований можно записать с помощью единого уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{6.9}$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

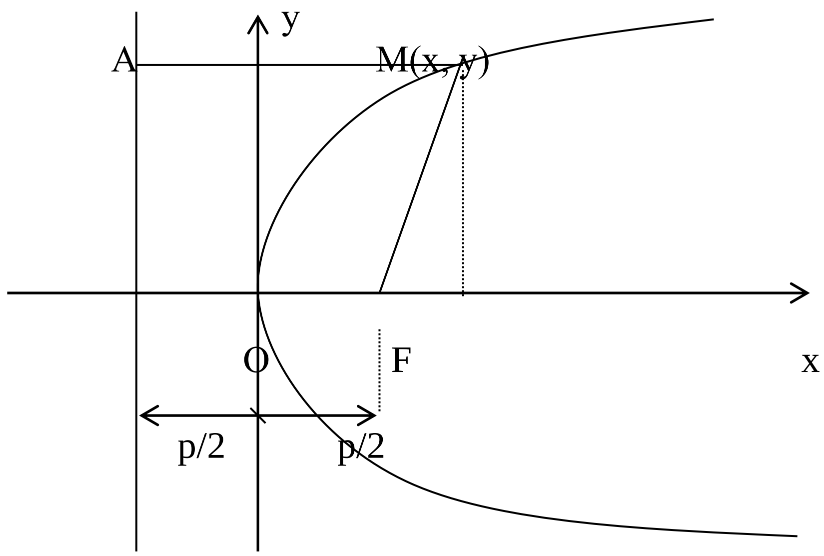


Рисунок 6.3

Теорема 6.2 Уравнение (6.9) всегда определяет либо окружность (при A = C), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) – в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы – в пару пересекающихся прямых, для параболы – в пару параллельных прямых.

Пример 6.1 Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

Решение: Предложенное уравнение определяет эллипс ($A \cdot C = 4 \cdot 5 > 0$). Действительно, проделаем следующие преобразования:

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5(y^2 - 6y + 9) - 25 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2 = 60, \quad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1.$$

Получилось каноническое уравнение эллипса с центром в $O_1\left(-\frac{5}{2};3\right)$ и полуосями $a = \sqrt{15}$ и $b = \sqrt{12}$.

Пример 6.2 Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

Решение: Указанное уравнение определяет параболу (C = 0). Действительно,

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$

$$(x+5)^2 = 2y - 14, \quad (x+5)^2 = 2(y+7).$$

Получилось каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(-5; -7)$ и $p = 1$.

Пример 6.3 Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0 \quad (A \cdot C = -4 < 0)$.

Решение: Преобразуем уравнение:

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) - 4 + 16 - 12 = 0,$$

$$4(x+1)^2 - (y+4)^2 = 0,$$

$$(2(x+1) + (y+4)) \cdot (2(x+1) - (y+4)) = 0,$$

$$(2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые $2x + y + 6 = 0$ и $(2x - y - 2 = 0$.

Контрольные вопросы

1. Общее уравнение линии второго порядка.
2. Что называется окружностью?
3. Каноническое уравнение окружности.
4. Что называется эллипсом, фокусами эллипса, эксцентриситетом эллипса, директрисами эллипса?
5. Каноническое уравнение эллипса.
6. Что называется гиперболой, фокусами гиперболы, эксцентриситетом гиперболы, директрисами гиперболы?
7. Каноническое уравнение гиперболы.
8. Уравнение асимптот гиперболы.
9. Что называется параболой, фокусом параболы, директрисой параболы?
10. Каноническое уравнение параболы.
11. Общее уравнение линий второго порядка.

Тема 7. Поверхности второго порядка

- ***Поверхности второго порядка.***
- ***Канонические формы уравнений***

7.1 Цилиндрические поверхности

Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z, т.е. направляющие параллельны оси Oz. Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$- ***эллиптический цилиндр***. 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - ***гиперболический цилиндр***.

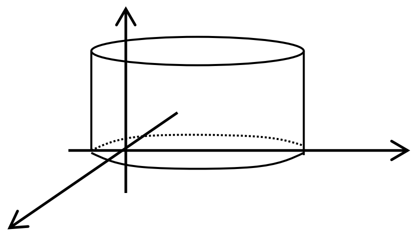


Рисунок 7.1

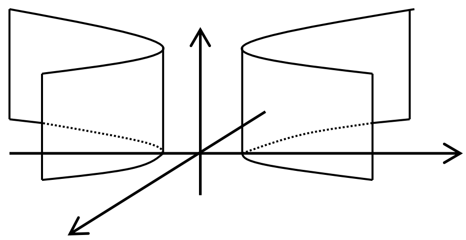


Рисунок 7.2

2) $x^2 = 2py$ – ***параболический цилиндр***.

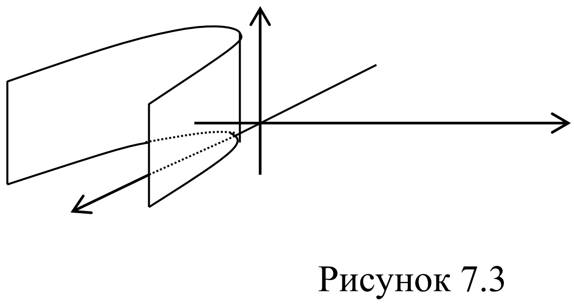


Рисунок 7.3

7.2 Поверхности вращения. Конические поверхности

Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d, называется ***поверхностью вращения*** с осью вращения d.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz.

Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy, $F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

1) $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - ***эллипсоид вращения***

2) $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - ***однополостный гиперболоид вращения***

3) $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ - ***двуполостный гиперболоид вращения***

4) $\frac{x^2+y^2}{p}=2z$ - ***параболоид вращения***

Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ox или Oy.

Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

Сфера: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

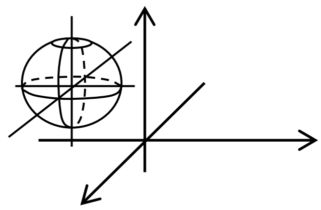


Рисунок 7.4

Трехосный эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.

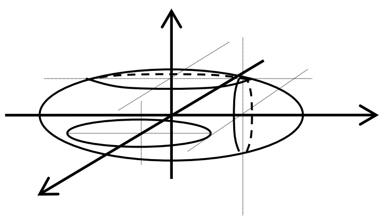


Рисунок 7.5

***Однополостный гиперболоид*:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

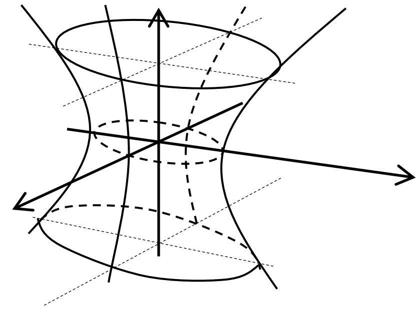


Рисунок 7.6

***Двуполостный гиперболоид*:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

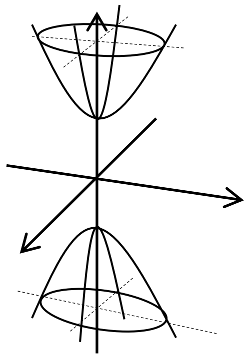


Рисунок 7.7

***Эллиптический параболоид*:**

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$$

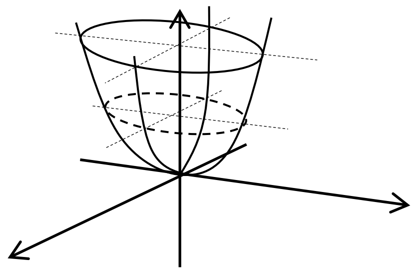


Рисунок 7.8

***Гиперболический параболоид*:**

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

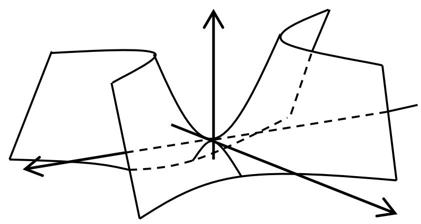


Рисунок 7.9

***Конус второго порядка*:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

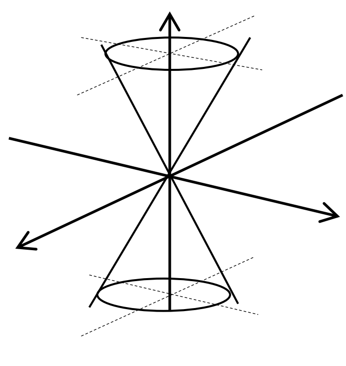


Рисунок 7.10

Контрольные вопросы

1. Цилиндрические поверхности.
2. Поверхности вращения и конические поверхности.

Тема 8. Полярная система координат

- ***Полярная система координат.***
- ***Примеры уравнений и кривых в полярных координатах.***

8.1 Полярная система координат

Точка О называется ***полюсом***, а луч l – ***полярной осью.***

Суть задания какой- либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус–вектором этой точки. Этот угол φ называется ***полярным углом***.

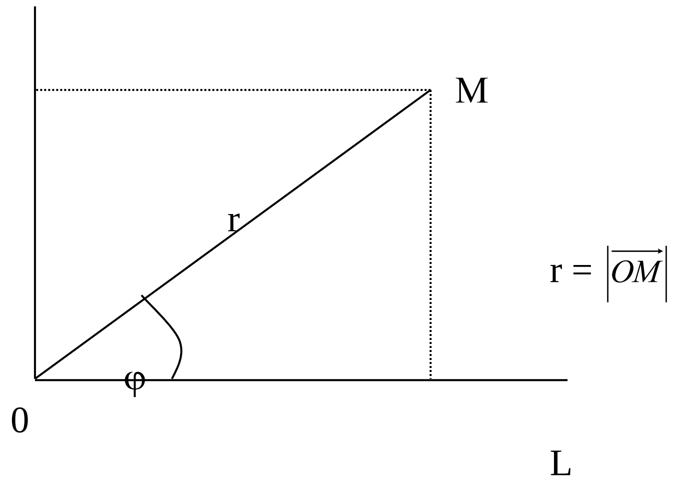


Рисунок 8.1

Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ох.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi; \qquad x^2 + y^2 = r^2 \qquad (8.1)$$

8.2 Примеры уравнений и кривых в полярных координатах

Пример 8.1 Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \dfrac{4}{3 - \cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Решение: Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат: $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4}{3-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \qquad 3\sqrt{x^2+y^2}-x=4$$

$$3\sqrt{x^2+y^2}=x+4 \qquad 9x^2+9y^2=16+8x+x^2$$

$$8x^2-8x+9y^2-16=0$$

$$8(x^2-x+1/4)-8\cdot1/4+9y^2-16=0 \qquad 8(x-1/2)^2-2+9y^2-16=0$$

$$8(x-1/2)^2+9y^2=18 \qquad \frac{(x-1/2)^2}{9/4}+\frac{y^2}{2}=1$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на 1/2 вправо, большая полуось a равна 3/2, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равно c = $\sqrt{a^2-b^2}$ = 1/2. Эксцентриситет равен e = c/a = 1/3. Фокусы $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 0)$.

Пример 8.2 Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

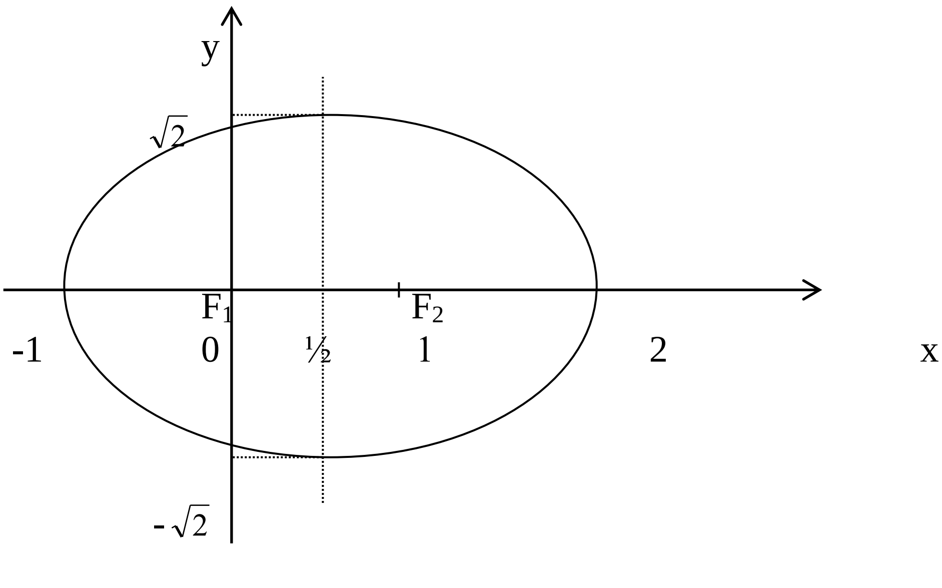


Рисунок 8.2

Решение: Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4-\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \qquad 4\sqrt{x^2+y^2}-5x=9 \qquad 4\sqrt{x^2+y^2}=5x+9$$

$$16x^2+16y^2=81+90x+25x^2 \qquad 9x^2+90x-16y^2+81=0$$

$$9(x^2+10x+25-25)-16y^2+81=0 \qquad 9(x+5)^2-225-16y^2+81=0$$

$$9(x+5)^2-16y^2=144 \qquad \frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы. Из уравнения видно, что гипербола сдвинута вдоль оси Ox на 5 влево, большая полуось a равна 4, меньшая полуось b равна 3, откуда получаем $c^2 = a^2 + b^2$; $c = 5$; $e = c/a = 5/4$.

Фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(0; 0)$.

Построим график этой гиперболы.

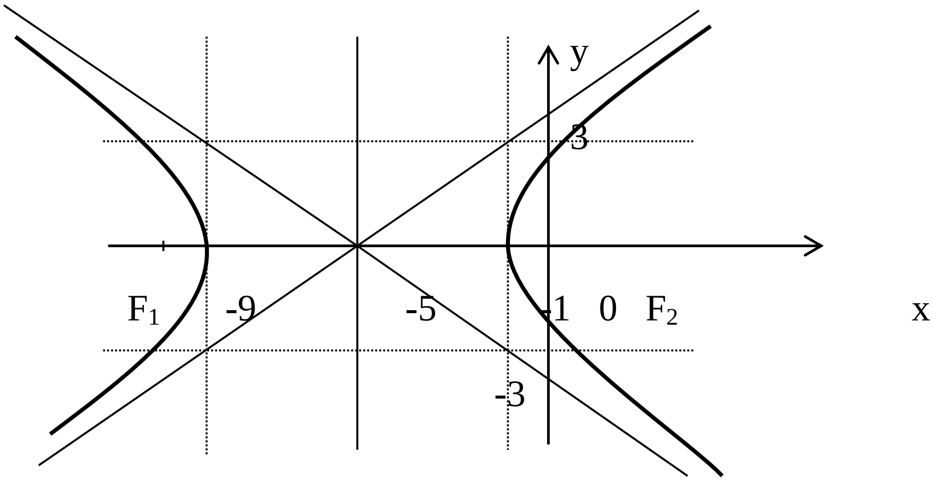


Рисунок 8.3

Контрольные вопросы

1. Формулы перехода к полярной системе координат.
2. Примеры представления кривых второго порядка в полярной системе координат

Тема 9. Последовательности

- ***Множество вещественных чисел.***
- ***Числовые последовательности***
- ***Предел числовой последовательности.***
- ***Верхние и нижние грани множеств.***
- ***Существование предела монотонной ограниченной последовательности.***
- ***Число е, натуральный логарифм.***

9.1 Множества. Основные понятия

Под ***множеством*** понимают совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, из которых состоит множество называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, …, X, Y, …, а их элементы – малыми буквами a, b, …, x, y, …

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом Ø.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены, либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Множество А называется ***подмножеством*** множества В, если каждый элемент множества А является элементом множества в. Символически это обозначают так $A \subset B$ или $B \supset A$.

Говорят, что множества А и В ***равны*** или ***совпадают***, и пишут А = В, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Объединением (или суммой) множеств А и В называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множество обозначают $A \cup B$. Кратко можно записать $A \cup B = \{x : x \in A \, или \; x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) множеств А и В называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству А и множеству В. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$. Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A \, и \; x \in B\}$.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать некоторые простейшие логические символы:

$\alpha \Rightarrow \beta$ - означает «из предложения α следует предложение β»;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ - «предложения α и β равносильны»;

$\forall$ - «для любого», «для всякого»;

$\exists$ - «существует», «найдется»;

: - «имеет место», «такое, что»;

$\mapsto$ - «соответствие».

Например: 1) запись $\forall x \in A : \alpha$ означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α;

2) $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ или } x \in B)$; эта запись определяет объединение множеств A и B.

9.2 Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathrm{N} = \{1;2;3;...;n;...\}$ - множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0;1;2;...;n;...\}$ - множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0;\pm1;\pm2;...;\pm n;...\}$ - множество целых чисел;

$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathrm{Z},\, n \in \mathrm{N}\right\}$ - множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}_0 \subset Z \subset Q \subset R$$

Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Множество R действительных чисел обладает следующими свойствами:

1 Оно *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений a < b либо ab < a.

2 Множество R *плотное*: между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т.е. чисел, удовлетворяющих неравенству a < x < b.

3 Множество R непрерывное. Пусть множество R разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство a < b. Тогда существует единственное число c, удовлетворяющее неравенству $a \le c \le b\ (\forall a \in A, \forall b \in B)$.

9.3 Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и b – действительные числа, причем a < b.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a;b]=\{x: a\le x\le b\}$ - отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a;b)=\{x: a<x<b\}$ - интервал (открытый промежуток);

$[a;b)=\{x: a\le x<b\}$;

$([a;b]=\{x: a<x\le b\}$ - полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty;b]=\{x: x\le b\}$; $[a,+\infty)=\{x: x\ge a\}$;

$(-\infty;b)=\{x: x<b\}$; $(a,+\infty)=\{x: x>a\}$; ;

$(-\infty;\infty)=\{x: -\infty<x<\infty\}=R$ - бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются соответственно левым и правым концами этих промежутков.

Пусть x_0 - любое действительное число. ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал (a; b), содержащий точку x_0. В частности интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ где $\varepsilon>0$, называется ***ε-окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε – ***радиусом***.

Если $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ или, что то же, $|x-x_0|<\varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0.

9.4 Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана ***последовательность*** $x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$. ***Общий элемент*** последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n) \tag{9.1}$$

Таким образом, последовательность может рассматриваться как функция.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n|<M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность ***возрастающая***.

2) Если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех n, то последовательность ***неубывающая***.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность ***убывающая***.

4) Если $x_{n+1} \le x_n$ для всех n, то последовательность ***невозрастающая***

Все эти последовательности называются ***монотонными.*** Возрастающие и убывающие последовательности называются ***строго монотонными***.

9.5 Предел числовой последовательности

Число **а** называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех n > N выполняется условие:

$$|a-x_n|<\varepsilon. \qquad (9.2)$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$***сходится*** к а при $n\to\infty$.

Пример 9.1 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

Решение: По определению, число 1 будет пределом последовательности $x_n=\frac{n-1}{n}, n\in N$, если $\forall\varepsilon>0$ найдется натуральное число N, такое, что для всех n > N выполняется неравенство $\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Оно справедливо для всех $n>\frac{1}{\varepsilon}$, т.е. для всех $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Если $\varepsilon>1$, то в качестве N можно взять $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ + 1.

Итак, $\forall\varepsilon>0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

Сходящаяся последовательность имеет только один предел. Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

9.6 Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема 9.1 Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n\le y_n$, то $a\le b$.

Теорема 9.2 Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ и справедливо неравенство $x_n\le z_n\le y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

9.7 Предел монотонной ограниченной последовательности. Число е. Натуральные логарифмы

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем признак существования предела последовательности.

Теорема 9.3 (Вейерштрасса) Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел. По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+...+\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...$$

$$...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n <$ 3.

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} < \underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\textit{геометр. прогрессия}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что e ≤ 3. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем

$$e \geq 2+\frac{1}{2} = 2{,}5$$

Таким образом, число е заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа е.

Можно показать, что число е иррациональное и его значение равно 2,71828…

Число е является основанием натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \quad т.е. \quad e^y = x.$$

Пусть $x = 10^y$, тогда $\ln x = \ln 10^y$, следовательно $\ln x = y\ln 10$

$y = \lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = M \ln x; \qquad \ln x = \dfrac{1}{M}\lg x$, где $M = 1/\ln 10 \approx 0{,}43429\ldots$- модуль перехода.

Контрольные вопросы

1. Что называется множеством, элементом множества, подмножеством?
2. Какие множества называются равными, пустыми?
3. Что называется объединением множеств, пересечением?
4. Числовые множества.
5. Свойства множества действительных чисел.
6. Что называется числовым промежутком? Виды числовых промежутков.
7. Что называется окрестностью точки?
8. Что называется числовой последовательностью, общим членом последовательности?
9. Какая последовательность называется возрастающей, убывающей, монотонной?
10. Какое число называется пределом числовой последовательности?
11. Теоремы о предельных переходах в неравенствах.
12. Теорема Вейерштрасса.
13. Число е.
14. Связь между натуральным и десятичным логарифмами.

Тема 10. Функция. Предел функции

- ***Сложная функция, неявно заданная функция, параметрически заданная функция.***
- ***Четные и нечетные функции, периодическая функция, монотонные функции, обратная функция.***
- ***Основные элементарные функции и их графики.***
- ***Предел функции.***
- ***Свойства функций, имеющих предел.***

10.1 Понятие функции

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x), \quad x \in X$ или $f : X \to Y$.

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается D(f). Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается E(f).

10.2 Числовые функции. График функции. Способы задания функции

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют ***числовой функцией***.

Переменная x называется *аргументом* или *независимой переменной*, а y – *функцией* или *зависимой переменной*.

Графиком функции y = f(x) называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Графический способ: задается график функции.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

10.3 Основные характеристики функции

1 Функция y = f(x), определенная на множестве D, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ выполняется условие $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняется условие $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Оу, а нечетной – относительно начала координат.

2 Функция y = f(x), определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется ***убывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \ge f(x_2)$ то функция называется ***невозрастающей*** на множестве D_1.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие. Неубывающие функции на множестве D_1 называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие – ***строго монотонными***. Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***.

3 Функцию y = f(x), определенную на множестве D, называют ограниченной на этом множестве, если существует такое число M > 0, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми y = - M и y = M.

4 Функция y = f(x), определенная на множестве D, называется ***периодической*** на этом множестве, если существует такое число T > 0, что при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется ***периодом*** функции.

10.4 Обратная функция

Пусть задана функция y = f(x) с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется обратной к функции f(x) и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Любая ***строго монотонная функция имеет обратную***. При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

10.5 Сложная функция

Пусть функция y = f(u) определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1 причем $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$ которая называется ***сложной функцией*** от x.

10.6 Предел функции в точке

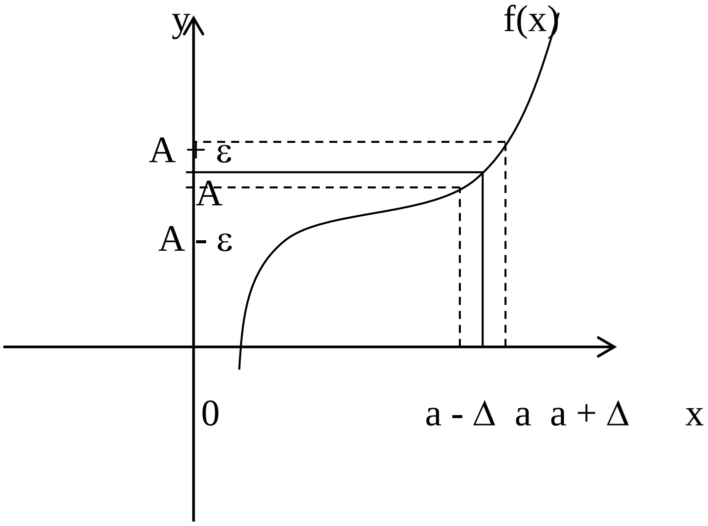


Рисунок 10.1

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Число A называется ***пределом*** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Пример 10.1 Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 5$.

Решение: Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $\Delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-3| < \Delta$, выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon$, т.е. $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Взяв $\Delta = \frac{\varepsilon}{2}$, видим, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x-3| < \Delta\left(=\frac{\varepsilon}{2}\right)$, выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 5$.

Пример 10.2 Доказать, что, если f(x) = c, то $\lim\limits_{x\to x_0} c = c_0$.

Решение: Для $\forall\varepsilon > 0$ можно взять $\forall\Delta > 0$. Тогда при $|x - x_0| < \Delta,\quad x \neq x_0$ имеем $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} c = c_0$.

10.7 Односторонние пределы

Если f(x) $\to$ A_1 при x $\to$ a только при x < a, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется ***пределом*** функции f(x) в точке x = a ***слева***, а если f(x) $\to$ A_2 при x $\to$ a только при x > a, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется ***пределом*** функции f(x) в точке x = a ***справа***.

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также ***односторонними пределами*** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – ***конечный предел*** функции f(x).

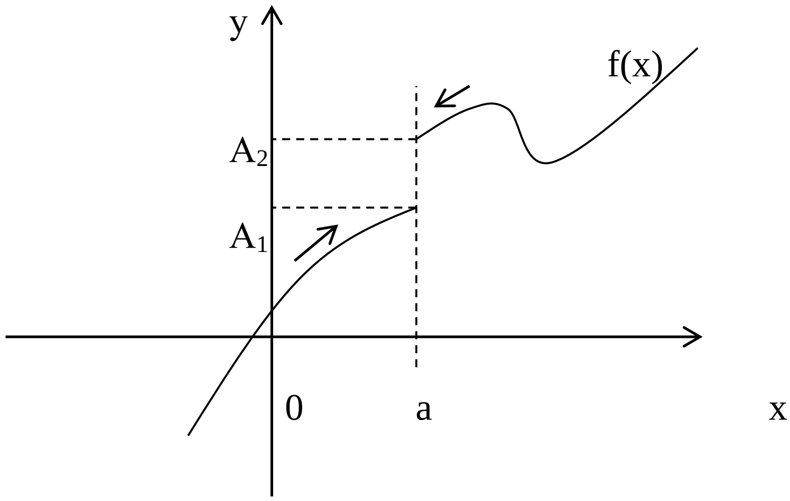


Рисунок 10.2

10.8 Предел функции при $x \to \infty$

Число A называется ***пределом*** функции f(x) при x $\to$ ∞, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число M > 0, что для всех x, $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:

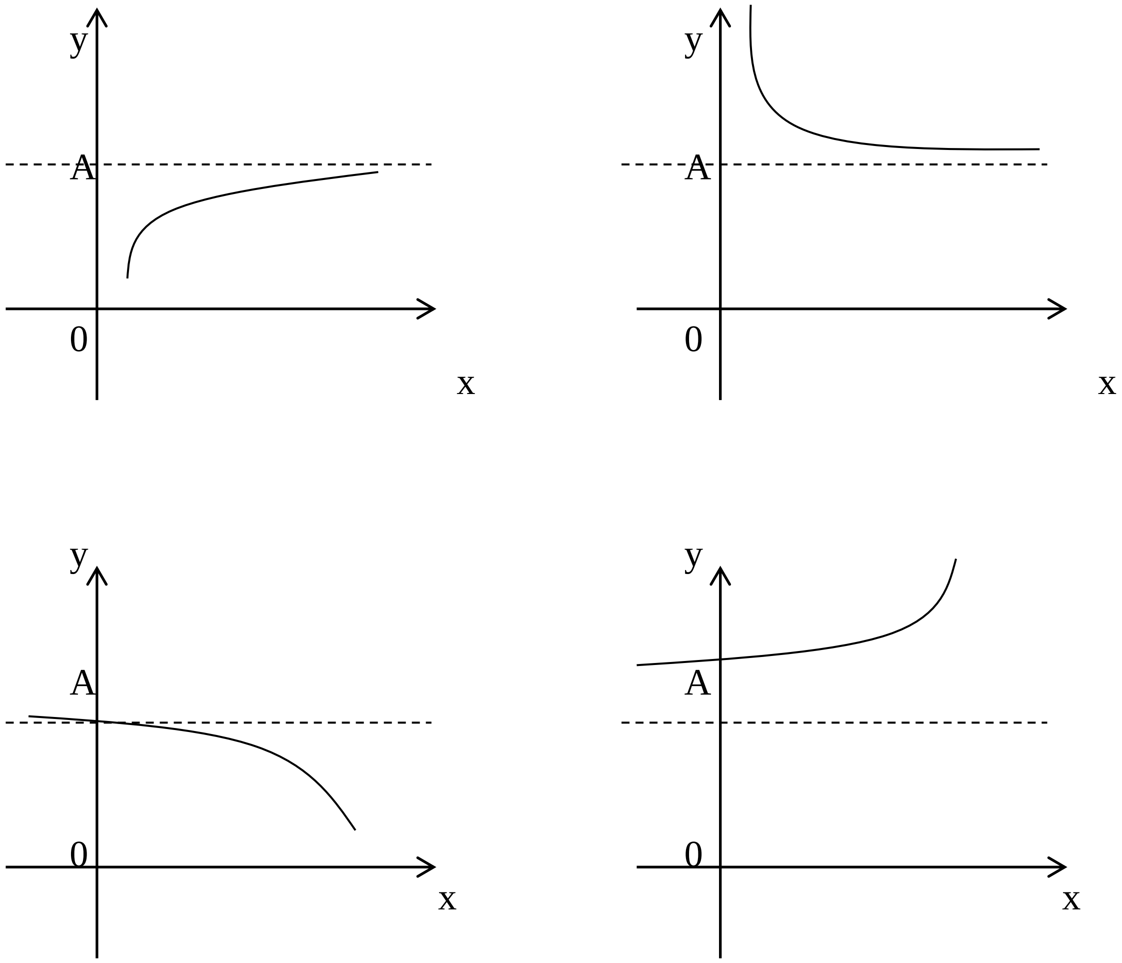


Рисунок 10.3

Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x > M и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x < M.

Контрольные вопросы

1. Что называется функцией? Способы задания функции.
2. Основные характеристики функций.
3. Какая функция называется обратной, сложной?
4. Что называется пределом функции в точке?
5. Какой предел называется односторонним?
6. Какой предел называется пределом функции при $x \to \infty$?

Тема 11. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

- ***Бесконечно малые функции и их свойства.***
- ***Бесконечно большие функции и их свойства***
- ***Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.***
- ***Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.***
- ***Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции, их использование при вычислении пределов.***

11.1 Бесконечно большая функция

Функция у = f(x) называется ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$, если для любого числа М > 0 существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Функция у = f(x) называется ***бесконечно большой при*** $x \to \infty$, если для любого числа М > 0 найдется такое число N = N(M) > 0, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Всякая бесконечно большая функция в окрестности точки x_0 *является неограниченной* в этой *окрестности*. Обратное утверждение не верно.

11.2 Бесконечно малые функции. Определения и основные теоремы

Функция f(x) называется ***бесконечно малой*** при x→a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть, только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Теорема 11.1 Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема 11.2 Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

Следствие 11.1 Так как всякая б.м.ф. ограничена, то из теоремы (11.2) вытекает: произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая.

Следствие 11.2 Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 11.3 Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

Теорема 11.4 Если функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая ($\alpha \neq 0$), то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция f(x) – бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

Пример 11.1 Показать, что функция

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x-1}$$

при $x \to 1$ является бесконечно малой.

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$, то функция $\varphi(x) = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$. Функция $g(x) = \sin^3 \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ ограничена $\left|\sin^3 \frac{1}{x-1}\right| \leq 1$.

Функция $f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x-1}$ представляет собой произведение ограниченной функции (g(x)) на бесконечно малую ($\varphi(x)$). Значит f(x) – бесконечно малая при $x \to 1$.

11.3 Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема 11.5 Если функция f(x) имеет предел равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Теорема 11.6 (обратная) Если функцию f(x) можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число A является пределом функции f(x), т.е. если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Пример 11.2 Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(5+x) = 7$.

Решение: Функцию 5 + x можно представить в виде суммы числа 7 и б.м.ф. x – 2 (при $x \to 2$), т.е. выполнено равенство 5 + x = 7 + (x – 2). Следовательно, по теореме 11.6 получаем $\lim\limits_{x\to 2}(5+x) = 7$.

11.4 Основные теоремы о пределах

Теорема 11.7 Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов: $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Следствие 11.3 Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Теорема 11.8 Предел произведения двух функций равен произведению их пределов: $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Следствие 11.4 Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 11.9 предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Пример 11.3 Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+7)$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7) = \lim_{x\to 1}3x^2 - \lim_{x\to 1}2x + \lim_{x\to 1}7 = 3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2 - 2\lim_{x\to 1}x + 7 = 3\cdot 1 - 2 + 7 = 8.$$

Пример 11.4 Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя при $x\to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x-2\neq 0$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

Пример 11.5 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Функция $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 2;\quad \lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = 4.$$

11.5 Признаки существования пределов

Теорема 11.10 (о пределе промежуточной функции) Если функция f(x) заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=A,$$

$$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$$

то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

Теорема 11.11 (о пределе монотонной функции) Если функция f(x) монотонна и ограничена при $x<x_0$ или при $x>x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$ или ее правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$.

Следствие 11.6 Ограниченная монотонная последовательность $x_n,\ n\in N$ имеет предел.

11.6 Первый замечательный предел

При вычислении переделов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad (11.1)$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

Пример 11.6 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим 3x = t; тогда при $x\to 0$ и $t\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Пример 11.7 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$

11.7 Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (11.2)$$

Равенство (11.2) называется ***вторым замечательным пределом***.

Пример 11.8 Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим x = 2t, очевидно, $t\to\infty$ при $x\to\infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\cdot e=e^2.$$

11.8 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то функция α называется ***бесконечно малой более высокого порядка***, чем функция β.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A,\quad A\neq 0,\quad A=const$, то α и β называются ***бесконечно малыми одного порядка***.

Пример 11.9 Сравнить порядок функций $\alpha=3x^2$ и $\beta=14x^2$ при $x\to\infty$.

Решение: При $x\to 0$ это б.м.ф. одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{14x^2}=\frac{3}{14}\neq 0.$$

Пример 11.10 Являются ли функции $\alpha=3x^4$ и $\beta=7x$ б.м.ф. одного порядка при $x\to 0$?

Решение: При $x\to 0$ функция α есть б.м.ф. более высокого порядка, чем β, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4}{7x}=\dfrac{3x^3}{7}=0$.

Пример 11.11 Сравнить порядок функций $\alpha=tg\,x$ и $\beta=x^2$ при $x\to 0$.

Решение: Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\infty,$$

α есть б.м.ф. более низкого порядка, чем β.

Пример 11.12 Можно ли сравнивать функции $\alpha=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta=x$ при $x\to 0$?

Решение: Функции $\alpha=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta=x$ при $x\to 0$ являются несравнивыми б.м.ф., так как предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

11.9 Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1,$ то функции α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми***. Записывают α ~ β.

Теорема 11.12 Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Теорема 11.13 Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Теорема 11.14 Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалента слагаемому низшего порядка.

Пример 11.13 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$, поскольку $3x+7x^2\approx 3x$ и $\sin 2x\approx 2x$ при $x\to 0$.

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется бесконечно большой, бесконечно малой?
2. Основные теоремы о бесконечно малых функциях.
3. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Признаки существования пределов.
6. Первый замечательный предел.
7. Второй замечательный предел.
8. Сравнение бесконечно малых функций.
9. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными?
10. Основные теоремы о эквивалентных бесконечно малых.

Тема 12. Непрерывность функций

- ***Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.***
- ***Непрерывность суммы, произведения, частного. Непрерывность сложной функции.***
- ***Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность.***
- ***Точки разрыва функции и их классификация.***
- ***Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений***

12.1 Непрерывность функции в точке

Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется ***непрерывной в точке*** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (12.1)$$

Равенство (12.1) означает выполнение трех условий:

1) функция f(x) определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2) функция f(x) имеет предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (12.1).

Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$.

Пример непрерывной функции:

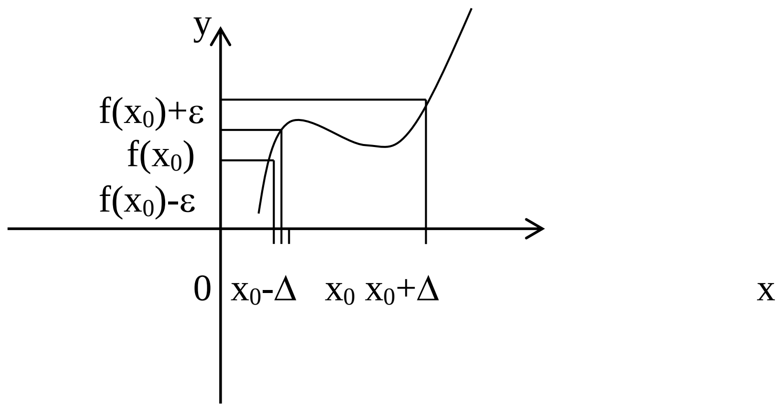


Рисунок 12.1

Пример 12.1 Вычислить $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$.

Функция f(x) называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\Delta$ верно неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \qquad (12.2)$$

Пример 12.2 Исследовать на непрерывность функцию $y=\sin x$

Решение: Функция $y=\sin x$ определена при всех $x\in R$. Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{\Delta x}{2}=0$, так как произведение ограниченной функции и б.м.ф. есть б.м.ф.

Согласно определению (12.2), функция $y=\sin x$ непрерывна в точке x.

12.2 Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция f(x) называется ***непрерывной на интервале (отрезке)***, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

12.3 Точки разрыва функции и их классификация

Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется ***разрывной*** функцией, а точка x_0 – ***точкой разрыва***.

Пример разрывной функции:

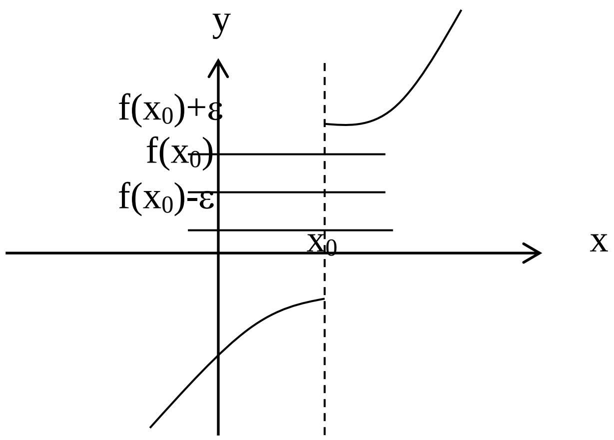


Рисунок 12.2

Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.

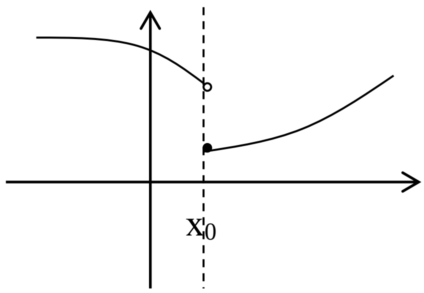


Рисунок 12.3

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва 1- го рода***, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

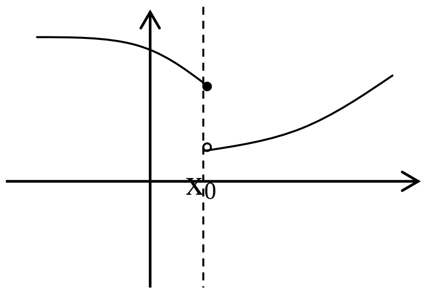


Рисунок 12.4

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют ***устранимой*** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва 2 – го рода***, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример 12.3 Дана функция $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

Решение: Функция f(x) определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки x = 3. Очевидно, $f(x)=\begin{cases}1, & x>3,\\ -1, & x<3\end{cases}$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-1$. Поэтому в точке x = 3 функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен 1 – (-1) = 2.

12.4 Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Теорема 12.1 Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

Теорема 12.2 Пусть функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

Теорема 12.3 Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$ оси Ох, то обратная функция $y=\varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c;d]$ оси Оу.

Все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.

Пример 12.4 Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{ctg\,x}$.

Решение: Функция $2^{ctg\,x}$ непрерывна в точке $x=\frac{\pi}{4}$, поэтому $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{ctg\,x}=2^{ctg\frac{\pi}{4}}=2^1=2$.

12.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 12.4 (Вейерштрасса) Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений.

Следствие 12.1 Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 12.5 (Больцано-Коши) Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Следствие 12.2 Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Пример 12.5 Определить с точностью до ε = 0,00001 корень уравнения $e^{2x+1}+x^2-5=0$, принадлежащий отрезку [0; 1], применив метод половинного деления.

Решение: Обозначим левую часть уравнения f(x).

Шаг 1. Вычисляем $\varphi = f(a)$ и $\psi = f(b)$, где a = 0, b = 1.

Шаг 2. Вычисляем $x=\dfrac{a+b}{2}$.

Шаг 3. Вычисляем $y = f(x)$. Если f(x) = 0, то x – корень уравнения.

Шаг 4. При $f(x)\neq 0$ если $y\cdot\varphi<0$, то полагаем b = x, $\psi = y$, иначе полагаем a = x, $\varphi = y$.

Шаг 5. Если $b-a-\varepsilon<0$, то задача решена. В качестве искомого корня принимается величина $x=\dfrac{a+b}{2}$. Иначе процесс деления отрезка [a, b] пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.

В результате произведенных действий получим: x = 0,29589.

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется непрерывной в точке, на отрезке, в интервале?
2. Какие точки называются точками разрыва функции?
3. Какие точки называются точками разрыва функции первого рода?
4. Какие точки называются точками разрыва функции второго рода?
5. Основные теоремы о непрерывных функциях.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Тема 13. Производная функции

- ***Производная функции, ее геометрический и физический (механический) смысл.***
- ***Правила дифференцирования. Производная суммы, произведения и частного (обзор теорем школьного курса). Таблицы производных элементарных функций.***
- ***Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Функции заданные параметрически, их дифференцирование.***
- ***Гиперболические функции, их свойства и графики. Производные гиперболических функций.***

13.1 Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(13.1)

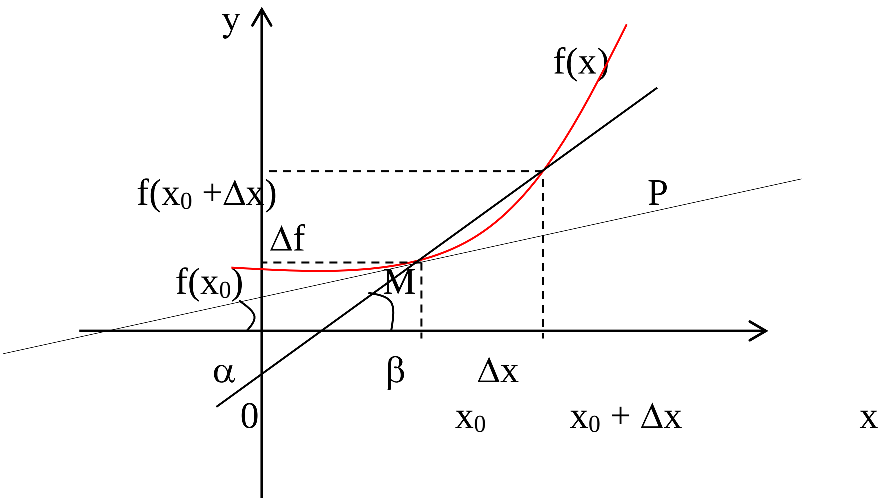


Рисунок 13.1

Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha\,,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции - скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

13.2 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 13.1 если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во-первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во-вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

13.3 Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Обозначим *f(x) = u*, *g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

Теорема 13.2 Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности0 производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Теорема 13.3 Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u\cdot v)' = u\cdot v' + u'\cdot v$.

Теорема 13.4 Производная частного двух функций , если делитель не равен нулю, равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

13.4 Производная сложной и обратной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема 13.5 Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ - взаимно обратные функции.

Теорема 13.6 Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a; b) и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Пример 13.3 Найти производную функции $y = \log_2^3 tg\, x^4$.

Решение: Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки простых функций: $y = u^3$, где $u = \log_2 z$, где $z = tg\, q$, где $q = x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'_x = 3 \cdot \log_2^2 tg\, x^4 \cdot \frac{1}{tg\, x^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3 .$$

Пример 13.4 Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение: Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}} .$$

13.5 Производные основных элементарных функций

Производная степенной функции $y = x^n, \quad n \in N$ равна $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

Например, $(x^3)' = 3x^2$.

Производная показательной функции $y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ равна $(a^x)' = a^x \ln a$.

Пример 13.5 Найти производную функции $y = 7^{x^2-4x}$.

Решение: Используя формулу производной сложной функции и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = \left(7^{x^2-4x}\right)' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2-4x)' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x-4).$$

Производная логарифмической функции $y = \log_a x,\quad a > 0,\quad a \neq 1$ равна $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Пример 13.6 Найти производную функции $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 6)$.

Решение: $y' = \dfrac{1}{x^4-2x^2+6} \cdot (x^4-2x^2+6)' = \dfrac{4x^3-4x}{x^4-2x^2+6}$.

Производные тригонометрических функций равны $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Пример 13.7 Найти производную функции $y = \cos 2x$.

Решение: $(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$.

Производные обратных тригонометрических функций равны: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(arcctg\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 13.8 Найти производную функции $y = \arccos x^2$.

Решение: $(\arccos x^2)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

13.6 Гиперболические функции и их производные

В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются *гиперболические функции*, определяемые следующими формулами:

$sh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус;

$ch\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус;

$th\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - гиперболический тангенс;

$cth\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический котангенс.

Производные гиперболических функций равны: $(sh\ x)' = ch\ x$, $(ch\ x)' = sh\ x$, $(th\ x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$, $(cth\ x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

13.7 Таблица производных

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

13.8 Неявно заданная функция

Под ***неявным заданием*** функции понимают задание функции в виде уравнения F(x; y) = 0, не разрешенного относительно y.

Для нахождения производной y по x достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию от x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Пример 13.9 Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения

$$3x^2 + 3\cdot y^2 \cdot y' - 3(1\cdot y + x\cdot y') = 0$$

следует, что $y^2 y' - xy' = y - x^2$, т.е. $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

13.9 Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (13.2)$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Производная y'_x функции (14.1) вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (13.3)$$

Пример 13.10 Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение: Имеем $x'_t = 3t^2, \quad y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2}$, т.е. $y'_x = \dfrac{2}{3t}$.

13.10 Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ называется ***логарифмической производной*** функции f(x).

Способ ***логарифмического дифференцирования*** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x) \qquad (13.4)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Пример 13.11 Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение: Пользуясь формулой (14.3), получаем:

$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln\sin 2x \cdot 2x + (x^2 + 1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2$.

Контрольные вопросы

1. Определение производной.
2. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
3. Какие производные называются односторонними?
4. Производная суммы, разности, произведения и частного функций.
5. Производная сложной и обратной функций.
6. Производные основных элементарных функций.
7. Как найти производную неявной функции?
8. Как найти производную функции, заданной параметрически?
9. Как найти логарифмическую производную?

Тема 14. Производные высших порядков и дифференциал функции

- ***Дифференцируемость функции. Дифференциал функции. Связь дифференциала с производной. Геометрический смысл дифференциала.***
- ***Дифференциал суммы, произведения, частного.***
- ***Применение дифференциала в приближенных вычислениях.***
- ***Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница***
- ***Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, их применение. Правило Лопиталя.***

14.1 Производные высших порядков

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим ***вторую производную*** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y″ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right). \qquad (14.1)$$

Пример 14.1 Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right),$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right)$$

....

$$y^{(13)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 13\right)$$

Пример 14.2 Найти y''', если $x^2+y^2=1$.

Решение: Дифференцируем уравнение $x^2+y^2-1=0$ по x: $2x+2y\cdot y'=0$. Отсюда $y'=-\dfrac{x}{y}$. Далее имеем: $y''=-\dfrac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}$, т.е. $y''=-\dfrac{y-x\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}=-\dfrac{y^2+x^2}{y^3}=-\dfrac{1}{y^3}$ (так как $x^2+y^2=1$), следовательно, $y'''=-\dfrac{-1\cdot 3y^2\cdot y'}{y^6}=\dfrac{3}{y^4}\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)=-\dfrac{3x}{y^5}$.

Пример 14.3 Найти вторую производную функции $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$.

Решение:

$$y'_x=\frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-ctg\,t$$

$$y''_{xx}=\frac{(-ctg\,t)'_t}{(\cos t)'_t}=\frac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t}=-\frac{1}{\sin^3 t}.$$

14.2 Понятие дифференциала функции

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$, при $\Delta x\to 0$.

Следовательно: $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$dy = f'(x)dx. \tag{14.2}$$

Можно также записать: $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$

Пример 14.4 Найти дифференциал функции

$$y=\ln(1+e^{10x})+\sqrt{x^2+1}.$$

Вычислить dy при x = 0, dx = 0,1.

Решение:

$$dy=(\ln(1+e^{10x})+\sqrt{x^2+1})'dx=\left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx.$$

Подставив x = 0, dx = 0,1, получим

$$dy\Big|_{\substack{x=0,\\ dx=0.1}} = \left(\frac{10}{2}+0\right)0.1 = 0.5\,.$$

14.3 Геометрический смысл дифференциала функции

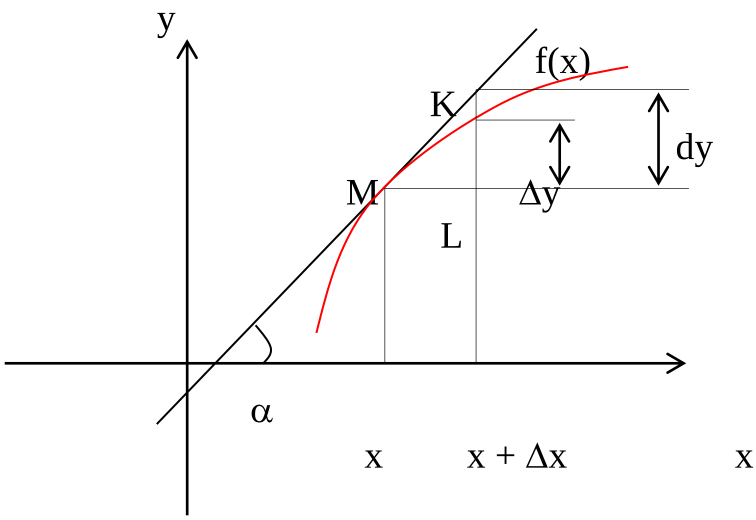


Рисунок 14.1

Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

14.4 Основные теоремы о дифференциалах

Теорема 14.1 Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$$

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Теорема 14.2 Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента: $dy = f'(x)dx$.

14.5 Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Дифференциал функции $y = f(x)$ зависит от Δx и является главной частью приращения Δx.

Также можно воспользоваться формулой

$$dy = f'(x)dx \tag{14.3}$$

Тогда абсолютная погрешность

$$|\Delta y - dy| \tag{14.4}$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| \tag{14.5}$$

Или

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x \tag{14.6}$$

Пример 14.5 Вычислить приближенно arctg 1,05.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = arctg\, x$. Имеем

$arctg(x+\Delta x) \approx arctg\, x + (arctg\, x)'\cdot\Delta x$,

т.е.

$arctg(x+\Delta x) \approx arctg\, x + \dfrac{\Delta x}{1+x^2}$.

Так как $x + \Delta x = 1.05$, то при x = 1 и $\Delta x = 0.05$ получаем:

$arctg 1.05 \approx arctg 1 + \dfrac{0.05}{1+1} = \dfrac{\pi}{4} + 0.025 \approx 0.810$.

14.6 Дифференциалы высших порядков

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первый дифференциал

$$dy = f'(x)dx$$

Если найти производную функции f′(x), получим ***второй дифференциал*** функции f(x).

$$d^2 y = f''(x)dx^2$$

(14.7)

Этот процесс можно продолжить и далее, находя дифференциал степени n.

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

(14.8)

Пример 14.6 Найти $d^2 y$, если $y = e^{3x}$.

Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле (14.10) имеем $d^2 y = 9e^{3x}dx^2$.

14.7 Формула Тейлора

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции $f'(x)$, получим ***вторую производную*** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y″ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Теорема 14.3 (Тейлора) 1) Пусть функция f(x) имеет в точке x = a и некоторой ее окрестности производные порядка до (n+1) включительно.

2) Пусть x- любое значение из этой окрестности, но x ≠ a.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε, что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- это выражение называется ***формулой Тейлора***, а выражение:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

называется ***остаточным членом.***

14.7.1 Формула Маклорена

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при a = 0:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta < 1$$

Мы получили так называемую формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Следует отметить, что при разложении функции, применение формулы Маклорена предпочтительнее, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т.к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой- либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

14.7.2 Функция f(x) = e^x

Тогда: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$

Пример 14.7 Найдем значение числа e.

Решение: В полученной выше формуле положим x = 1.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$

Для 8 членов разложения: e = 2,71827876984127003

Для 10 членов разложения: e = 2,71828180114638451

14.7.3 Функция f(x) = sinx

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

Итого:

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \pm \frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

14.7.4 Функция f(x) = cosx

Для функции cosx, применив аналогичные преобразования, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \pm \frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

14.7.5 Функция f(x) = (1 + x)$^{\alpha}$

(α - действительное число)

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2 \cdot 1} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Если в полученной формуле принять α = n, где n- натуральное число и $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1} = 0$, тогда

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + ... + x^n$$

Получилась формула, известная как ***бином Ньютона***.

Пример 14.8 Вычислить $\sin 28^0 13' 15''$.

Решение: Для того, чтобы представить заданный угол в радианах, воспользуемся соотношениями:

$$1^0 = \frac{\pi}{180}; \qquad 28^0 = \frac{28\pi}{180};$$

$$1' = \frac{\pi}{60 \cdot 180}; \qquad 13' = \frac{13\pi}{60 \cdot 180};$$

$$1'' = \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; \qquad 15'' = \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180};$$

$$28^0 13'15'' = \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60 \cdot 180} + \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{180}\left(\frac{28 \cdot 60 \cdot 60 + 60 \cdot 13 + 15}{60 \cdot 60}\right) = 0{,}492544 \textit{рад}$$

Если при разложении по формуле Маклорена ограничимся тремя первыми членами, то получим: sinx = $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0{,}492544 - 0{,}019915 + 0{,}000242 = 0{,}472871.$

Сравнивая полученный результат с точным значением синуса этого угла,

$$\sin 28^0 13'15'' = 0{,}472869017612759812,$$

видим, что даже при ограничении всего тремя членами разложения, точность составила 0,000002, что более чем достаточно для большинства практических технических задач.

14.7.6 Функция f(x) = ln (1 + x)

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3!}x^3 - ... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1};$$

Полученная формула позволяет находить значения натуральных логарифмов с любой степенью точности. Ниже представлен пример вычисления натурального логарифма ln1,5. Сначала получено точное значение, затем – расчет по полученной выше формуле, ограничившись пятью членами разложения. Точность достигает 0,0003.

$$\ln 1{,}5 = 0{,}405465108108164381$$

$$\ln 1{,}5 = \ln(1+0{,}5) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^4}{4} + \frac{0{,}5^5}{5} - \frac{0{,}5^6}{6} + \frac{0{,}5^7}{7} = 0{,}4058035$$

Разложение различных функций по формулам Тейлора и Маклорена приводится в специальных таблицах, однако, формула Тейлора настолько удобна, что для подавляющего большинства функций разложение может быть легко найдено непосредственно.

14.8 Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, их применение. Правило Лопиталя

Теорема 14.4 (Ролля) Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю, f′(ε) = 0.

Теорема 14.5 (Коши) Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

(14.9)

Теорема 14.6 (Лагранжа) Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon).$$

(14.10)

Формула (14.10) называется ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений***.

Следствие 14.1 Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 14.2 Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянные слагаемые.

Пример 14.9 Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, где $x \in [-1;1]$.

Решение: Пусть $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Тогда $\forall x \in (-1;1)$ имеем $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} =$ 0. Отсюда следует, что f(x) = C, т.е. $\arcsin x + \arccos x = C$. Положив x = 0, находим $0 + \frac{\pi}{2} = C$, т.е. $C = \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Это равенство выполняется и при $x = \pm 1$.

14.9 Правила Лопиталя

Теорема 14.7 (Правило Лопиталя раскрытия неопеределенностей вида $\frac{0}{0}$) Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x → a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(14.11)

Пример 14.10 Найти $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x \ln x}$.

Решение: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x \ln x + 1} = 1.$

Теорема 14.8 (Правило Лопиталя раскрытия неопеределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$) Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = ∞, то предел отношения функций при x → a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(14.12)

Пример 14.11 Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cdot\cos^2 5x}{\cos^2 3x\cdot 5}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 10x}{\sin 6x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{10\cos 10x}{6\sin 6x}=\frac{5}{3}$$

14.9.1 Раскрытие неопределенностей различных видов

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки a при x → a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

Пример 14.12 Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида 1^∞. Логарифмируем выражение $A=(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$. Получим $\ln A=\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x$. Затем находим предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}=-2,\ \text{т.е. } \ln\lim_{x\to 0}A=-2.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}A=e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.

Контрольные вопросы

1. Формула производной высших порядков.
2. Что называется дифференциалом функции?
3. Геометрический смысл дифференциала.
4. Основные теоремы о дифференциалах.
5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

6. Формула для вычисления дифференциалов высших порядков.
7. Формула Тейлора.
8. Теорема Ролля.
9. Теорема Лагранжа.
10. Теорема Коши.
11. Правила Лопиталя.

Тема 15. Исследование функции

- ***Условия возрастания и убывания функций.***
- ***Точки экстремума. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия (признаки) существования экстремума.***
- ***Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.***
- ***Исследование функций на экстремум с помощью производных высшего порядка.***
- ***Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты кривых.***
- ***Общая схема исследования функции и построение ее графика.***

15.1 Возрастание и убывание функции

Теорема 15.1 (необходимые условия) Если дифференцируемая на интервале (a; b) функция f(x) возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$ для $\forall x \in (a;b)$.

Теорема 15.2 (достаточные условия) Если функция f(x) дифференцируема на интервале (a; b) и $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$ для $\forall x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a; b).

Данные теоремы можно проиллюстрировать геометрически:

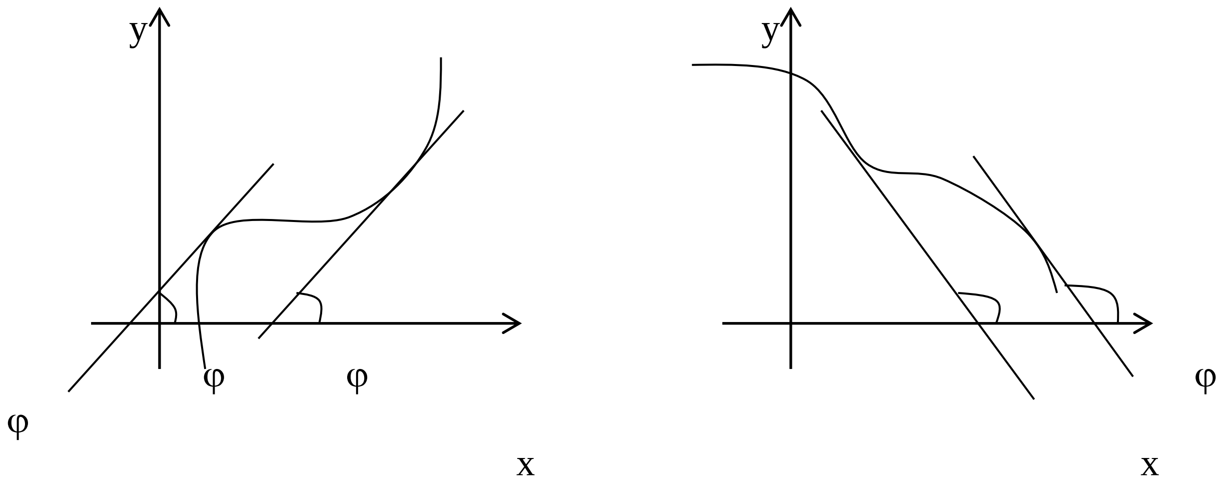


Рисунок 15.1

Пример 15.1 Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на возрастание и убывание.

Решение: Функция определена на $R=(-\infty;\infty)$. Ее производная равна $f'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; $f'(x)<0$ при $x\in(-1;1)$.

Ответ: данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;\infty)$; убывает на интервале (-1; 1).

15.2 Максимум и минимум функции

Функция f(x) имеет в точке x_1 ***максимум***, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 ***минимум***, если $f(x_2+\Delta x)>f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума.***

Теорема 15.3 (необходимое условие существования экстремума) Если функция f(x) дифференцируема в точке $x=x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Теорема 15.4 (достаточные условия существования экстремума) Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1). Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x=x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

Пример 15.2 Найти экстремум функции $y=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Очевидно, D(y) = R. Находим $y'=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$, т.е. $y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1=0$ и равна нулю при $x_2=8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty;0)$, (0; 8), $(8;\infty)$. Отметим на рисунке знаки производной справа и слева от каждой из критических точек.

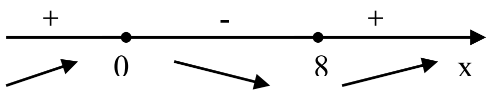


Рисунок 15.2

Следовательно, $x_1 = 0$ – точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$ и $x_2 = 8$ – точка минимума, $y_{\min} = y(8) = -\dfrac{4}{3}$.

15.3 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее

Пример 15.3 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке [-2; 1].

Решение: Находим критические точки данной функции: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$; $f'(x) = 0$ при $x_1 = 0 \in [-2;1]$ и при $x_2 = -1 \in [-2;1]$. Находим f(0) = 1, f(-1) = 3 – 4 + 1 = 0, f(-2) = 48 – 32 + 1 = 14, f(1) = 8. Итак, $f_{нб} = 17$ в точке x = -2, $f_{нм} = 0$ в точке x = -1.

15.4 Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Кривая обращена выпуклостью ***вверх*** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется ***выпуклой***, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется ***вогнутой***.

Теорема 15.5 Если функция y = f(x) во всех точках интервала (a; b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется ***точкой перегиба***.

Теорема 15.6 (достаточное условие существования точек перегиба) Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная f′′(a) = 0 или f′′(a) не существует и при переходе через точку x = a f′′(x) меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.

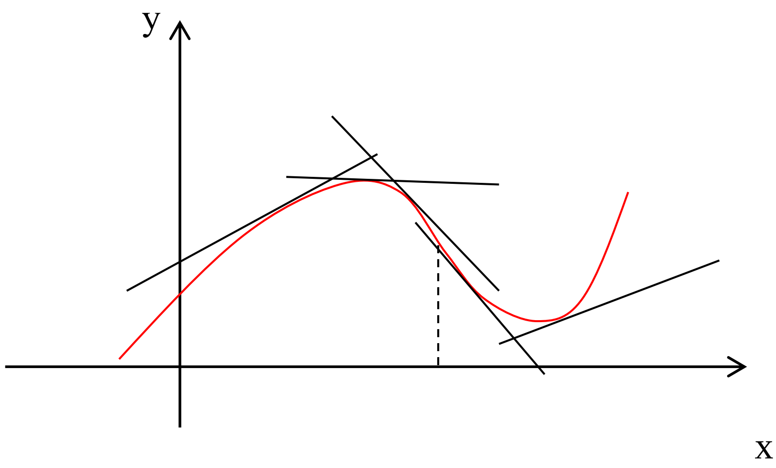


Рисунок 15.3

Пример 15.4 Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1, y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при x = 0. Отмечаем, что $y'' > 0$ при x > 0; $y'' < 0$ при x < 0. Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty;0)$ - выпуклый вверх, в интервале $(0;\infty)$ - выпуклый вниз. Точка (0; 5) есть точка перегиба.

15.5 Асимптоты графика функции

Прямая называется ***асимптотой*** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – вертикальная асимптота кривой y = f(x).

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.

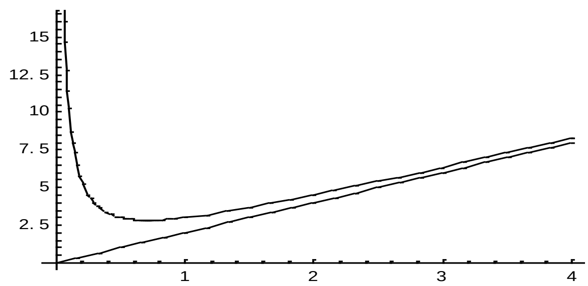


Рисунок 15.4

Прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] \qquad (15.1)$$

Пример 15.5 Найти асимптоты графика функции $y = xe^x$.

Решение: Так как $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то график функции при $x\to+\infty$ наклонной асимптоты не имеет. При $x\to-\infty$ справедливы соотношения $k = \lim_{x\to-\infty} = \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$,

$b = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 0x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$. Следовательно, при $x\to-\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту y = 0.

15.6 Общая схема исследования функции и построения графика

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример 15.6 Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение: Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал (-∞; ∞).

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: x = 0; x = -$\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

-∞ < x < -$\sqrt{3}$, y″ < 0, кривая выпуклая

-$\sqrt{3}$ < x < -1, y″ < 0, кривая выпуклая

-1 < x < 0, y″ > 0, кривая вогнутая

0 < x < 1, y″ < 0, кривая выпуклая

1 < x < $\sqrt{3}$, y″ > 0, кривая вогнутая

$\sqrt{3}$ < x < ∞, y″ > 0, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

-∞ < x < -$\sqrt{3}$, y′ > 0, функция возрастает

-$\sqrt{3}$ < x < -1, y′ < 0, функция убывает

-1 < x < 0, y′ < 0, функция убывает

0 < x < 1, y′ < 0, функция убывает

1 < x < $\sqrt{3}$, y′ < 0, функция убывает

$\sqrt{3}$ < x < ∞, y″ > 0, функция возрастает

Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно 3$\sqrt{3}$/2 и -3$\sqrt{3}$/2.

Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – y = x.

Построим *график* функции:

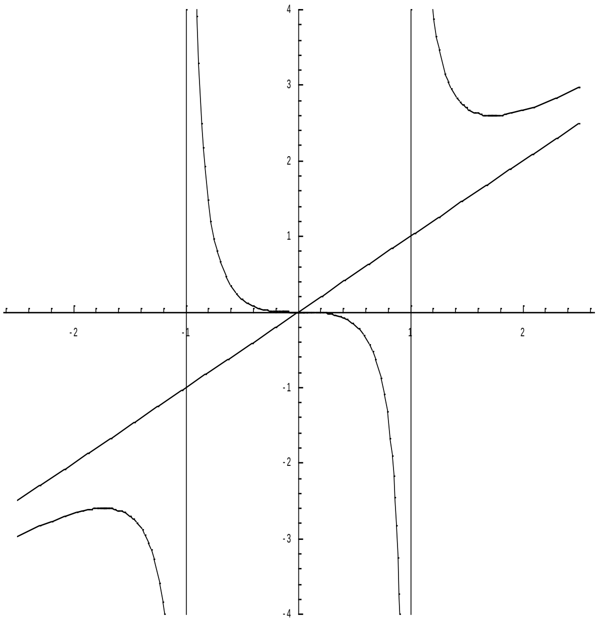


Рисунок 15.5

Контрольные вопросы

1. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.
2. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
3. Как определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
4. Достаточное условие существования точек перегиба.
5. Как найти асимптоты графика функции.
6. Общая схема исследования функции и построения графика.

Список литературы

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах Ч.1: учебное пособие / под редакцией Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. – М.: Высшая школа,2010. – 352 с.
2. Данко П.Е . Высшая математика в упражнениях и задачах Ч.2: учебное пособие / под редакцией Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. – М.: Высшая школа,2010. – 352 с.
3. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. : учебное пособие / под редакцией Бугров Я.С., Никольский С.М.- М.: Наука 2011-440с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов Т. 1. : учебное пособие / под редакцией Пискунов Н.С. М.: Наука – 2011. 430
5. Никольский С.М. Курс математического анализа: учебное пособие / под редакцией Никольский С.М. Наука – 1990. 372
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики: учебное пособие / под редакцией Смирнов В.И. - М.: Наука – 1974, 386
7. Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. Д. Полянин, В. А. Зайцев. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 576 с.
8. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теория алгоритмов :учебное пособие для вузов/В. И. Игошин.-4-е изд., стереотип.-М.:Академия,2008.-302с.
9. Ильин, В. А. Высшая математика : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2012. – 592 с.
10. Какзанова Е.М. Терминологический энциклопедический словарь: Математика и всё, что с ней связано, на немецком, английском и русском языках / Е. М. Какзанова. - М.: Астрель: АСТ, 2009. - 479 с.
11. Конышева, Л. К. Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие для бакалавров и специалистов / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. ¬– СПб. : Питер, 2011. – 190 с.
12. Конышева, Л. К. Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие для бакалавров и специалистов / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. ¬– СПб. : Питер, 2011. – 190 с.
13. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной. Лекции и практикум: учеб. пособие / под общ. ред. И.М. Петрушко. - СПб.: Лань, 2010. - 363 с.
14. Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учеб. пособие / В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. - Изд. 3-е; стереотип. - СПб.: Лань, 2011. - 463 с.

15. Лихтарников, Леонид Моисеевич. Математическая логика :курс лекций : задачник-практикум и решения : учебное пособие для вузов/Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева.-СПб.:Лань,2008.-276 с.: