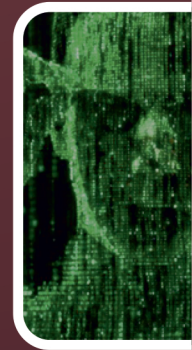
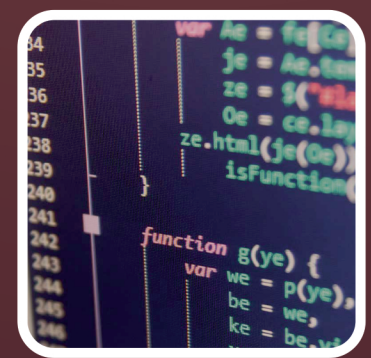




«Тұран-Астана»  
университеті

Нуспеков Е.Л., Мұқашева Т.Д.

# ДИСКРЕТТІ МАТЕМАТИКА



АСТАНА 2023

Нуспеков Е.Л., Мұқашева Т.Д.



**ДИСКРЕТТІ МЕТАМАТИКА**  
Оқу құралы

АСТАНА, 2023

УДК 519.6  
ББК 22.176 Я73 Д48  
ISBN 978-601-7616-77-9

**Пікір білдірушілер:**

**Адамов А.А** Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, математикалық және компьютерлік модельдеу кафедрасының меңгерушісі, т.ғ.к. профессор.

**Жузбаев С.С** Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, ақпараттық технологиялар кафедрасының профессоры, ф-м.ғ.к.

Нуспеков Е.Л., Мұқашева Т.Д. Дискретті математика: Оқу құралы / Нұс-Сұлтан: Туран-Астана университеті, 92б. – 2023 ж.

Ұсынылған оқулық студенттерге «Дискретті математика» тарауларын меңгеруге көмектесуге арналған.

Бұл тарауды игеру үшін студенттерге теориялық шолулар, кездейсоқ оқиғалар, кездейсоқ шамалар, үлгінің статистикалық таралуы, үлестіру параметрлерінің статистикалық бағалаулары, корреляциялық теория элементтері, статистикалық гипотезаларды статистикалық тексеру беріледі. Әр тақырып бойынша тапсырмалар, сондай-ақ әр студентке арналған жеке тапсырмалар берілді және ұсынылды. 25 Нұсқаулық. Нұсқаулық нөмірі тізімдегі студенттің нөміріне сәйкес келеді.

Теориялық ақпарат беріледі, теориялық сұрақтар дәрістер мен оқулықтарда игерілуі керек.

УДК 519.6  
ББК 22.176 Я73 Д48  
ISBN 978-601-7616-77-9

Нуспеков Е.Л., Мұқашева Т.Д. 2023 ж.

## МАЗМҰНЫ

МАЗМҰНЫ.....	3
1. Дәріс. Жиындар және олардың өрнектелуі. Жиындармен операциялар. ....	4
2. Дәріс. Сәйкестік және оның қасиеттері Функциялар мен бейнелеулер. ....	12
3. Дәріс. Жиындардың қуаты .....	17
4. Дәріс. Қатынастар. Бинарлы қатынастар.....	19
5. Дәріс тақырыбы. Математикалық логика элементтері .....	25
6. Дәріс тақырыбы. Логикалық алгебра функцияларын аналитикалық түрде жазу. ДҚФ, КҚФ, МДҚФ, МКҚФ.....	39
7. Дәріс. Ақиқат кесте бойынша берілген. Буль функциясына формула құру әдісі. Буль функцияларының түйінділік принципі. ....	45
8. Дәріс тақырыбы: Буль функцияларының толық жүйелері. Пост теоремасы.....	48
9. Дәріс тақырыбы: Комбинаторика. Орналастыру және теру.....	51
10. Дәріс тақырыбы: Жиындарды бөліктеу.....	54
11. Дәріс тақырыбы: Графтар. Қасиеттері. Операциялар. ....	59
12. Дәріс тақырыбы. Графтар саны. Ағаштар. ....	70
13. Дәріс тақырыбы. Графтардағы маршруттар.....	72
14. Дәріс тақырыбы. Эйлер және Гамильтон циклдары .....	84
15. Дәріс. Транспорттық желілер.....	87
Әдебиеттер тізімі .....	92

## 1. Дәріс. Жиындар және олардың өрнектелуі. Жиындармен операциялар.

**1.1 Жиын** ұғымы – негізгі математикалық терминдердің бірі болып сана-лады. Жиынның нақтылы анықтамасы жоқ. Жиынды ортақ бір белгі бойынша біріккен объектілердің жиынтығы деуге болады. Мысалы натурал сандар жиыны, түзудің бойындағы нүктелер жиынтығы, кітап беттерінің жиынтығы, натурал сандар жиыны, кітап бетіндегі түрлі символдар жиыны, студенттер тобы, компьютерді жинау кезіндегі орындалатын операциялар тобы, “Элегант” фирмасының қызметкерлер тобы т.б. мысалдарды көптеп келтіруге болады. Егер  $x$  объектісі  $M$  жиынының элементі болса, онда  $x$   $M$ -ге тиісті делінеді және  $x \in M$  болып белгіленеді.  $x$ -тің жиынға жатпауы  $x \notin M$  немесе  $x \notin M$  белгіленеді. Әдетте жиын латын алфавитінің бас әріптерімен, ал оның элементтері кіші әріптерімен белгіленеді.

$A$  – «Элегант» фирмасының қызметкерлер жиыны;

$M_1$  – компьютер жинау кезіндегі барлық операциялар жиыны;

$M_2$  – «Силует»фирмасы ұсынатын қызметтер жиыны;

$N_1$  – 100 аспайтын натурал сандар жиыны;

$R$  – барлық натурал сандар жиыны т.б.

### 1.2. Жиындардың өрнектелуі

Жиындарды өрнектеу үшін оған қандай элементтердің жататындығын көрсету керек. Оны бірнеше әдістермен жасауға болады.

1. *Жиынға жататын элементтер тізімін көрсету арқылы.* Тізіммен тек ақырлы жиындарды көрсетуге болады. Тізім фигуралы жақшамен қоршалады:  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Мысалы, процессор  $a$ , монитор  $b$ , клавиатура  $c$  және принтерден  $d$  тұратын компьютер  $A$  жиынын былай өрнектеуге болады:  $A = \{a, b, c, d\}$

2. *Жиын элементтерінің (сипаттамалық предикат арқылы) немесе қандай да бір қасиетін көрсету арқылы.* Айталық  $P(x)$   $A$  жиынының элементтері қанағаттандыратын я қанағаттандырмайтын қандай да бір қасиет болсын. Олай болса  $A$  жиынының  $P$  қасиетін қанағаттандыратын барлық элементтерінен тұратын  $M$  жиыны  $M = \{x \mid P(x)\}$  немесе  $M = \{x : P(x)\}$  деп жазылады.

*Ескерту:* Сипаттамалық предикат  $P(x)$  – логикалық тұжырым формасындағы шарт (немесе логикалық мән қайтаратын процедура). Егер жиын элементі үшін шарт орындалса элемент жиынға жатады, әйтпесе жатпайды. Мысалы, барлық натурал жұп сандар жиыны  $M_{2n}$   $M_{2n} = \{x : x = 2n, n \in N\}$  болып, ал компьютердің сыртқы құрылғылар жиыны  $A = \{x : x - \text{PC сыртқы құрылғылар жиыны}\}$  болып өрнектеледі.

3. *Туындатқыш процедура арқылы:*  $M = \{x \mid x := f\}$ .

Туындатқыш процедура дегеніміз – алдыңғы алынған элементтерден немесе объектілерден жиын элементтерін алу әдісі болып табылады. Туындатқыш процедура іске қосылған кезде алынған объектілер жиынның элементі болып отырады. Мысалы, 2-ң дәрежесі болып табылатын барлық бүтін сандар жиынын  $M_{2^n}$ ,  $n \in N$ , ( $M_{2^n} = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ) рекурсивті немесе индуктивті деп аталатын 2 түрлі тәртіппен алынатын туындатқыш процедура арқылы өрнектеуге болады

а)  $1 \in M_{2^n}$ ; б) егер  $m \in M_{2^n}$  болса, онда  $2m \in M_{2^n}$ .

**Мысалдар:**

1. Барлық натурал сандар жиынын әртүрлі әдістермен өрнектеңіз: 1, 2, 3,...

**Шешуі:**  $N$  натурал сандар жиыны шексіз болғандықтан оны тізім арқылы өрнектеуге болмайды.

Туындатқыш процедура екі ережеден тұрады:

а)  $1 \in N$ ; б) егер  $n \in N$ , онда  $n+1 \in N$ .

$N$  жиыны элементтерінің қасиеттерін сипаттау арқылы:  $N = \{x : x - \text{бүтін оң сан}\}$ .

2. Айталық  $U = \{a, b, c\}$ . Айқын түрде (элементтерін тізбектеу арқылы)  $U$  жиынының элементтерінен тұратын барлық ішкі жиындардың жиыны  $\beta(U)$  булеанын анықтаңыз.  $\beta(U)$  жиынының қуаты қандай?

**Шешуі:**  $\beta(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ ,  $|\beta(U)| = 8$ .

**Анықтама.** Егер  $A$  жиынының барлық элементтері  $B$  жиынында жатса, онда  $A$  жиыны  $B$  жиынының *ішкі жиыны* деп аталады да,

$A \subseteq B$  деп белгіленеді,  $A$  жиыны  $B$  жиынына *кіреді* деп оқылады ( $A \not\subseteq B$  –  $A$  жиыны  $B$ -ның ішкі жиыны емес). Бұдан шығатын тұжырым:



$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ , яғни кез келген  $x$  үшін, егер  $x \in A$  болса, онда  $x \in B$ .

**Анықтама**  $A$  мен  $B$  жиындары тең болады, егер  $A \subseteq B$  және  $B \subseteq A$  болса, яғни тең жиындар бірдей элементтерден құралады. ( $A \subseteq B$  және  $B \subseteq A$ )  $A, B$  жиындары бір бірінің ішкі жиыны. Мысалдар:

$N \subseteq Z, Z \subseteq Q, Q \subseteq R, R \subseteq C$  дұрыс.

$M_1 = \{x \mid \sin x = 1\}$  және  $M_2 = \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$  жиындарының тең екендігін ( $M_1 = M_2$ ) дәлелдеу керек болсын.

**Шешуі.** а) Егер  $x \in M_1$  болса, онда  $x \sin x = 1$  теңдеуінің шешімі болғаны, яғни оны  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$  деуге болады. Демек, жиынның анықтамасы бойынша  $x \in M_2$ . Олай болса  $M_1 \subseteq M_2$ .

в) Егер  $x \in M_2$  болса,  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$  деуге болады, яғни онда  $x$  мәні  $\sin x = 1$  теңдеуінің шешімі. Демек  $M_2 \subseteq M_1$  бұдан  $M_1 = M_2$ .

**Анықтама.** Егер  $A \subseteq B$  және  $A \neq B$  болса, онда  $A$  жиыны  $B$ -ға қатаң кіреді дейміз және  $A$  жиыны  $B$ -ның меншікті ішкі жиыны деп аталады. Анықтамаларға байланысты төмендегідей тұжырымдарды жазуға болады:

1.  $\forall X: X \subseteq X$ ; 2.  $\forall M: \emptyset \subset M$ ; 3. Егер  $X \subseteq Y$ , ал  $Y \subseteq Z$ , онда  $X \subseteq Z$ ; 4.  $X \subseteq Y$ , ал  $Y \subseteq X$ , болса, онда  $X = Y$ ;

Жиындардың теңдігін дәлелдеу үшін олардың бір-біріне ішкі жиын болатындығын көрсету керек.

Элементтің жиынға жатуы ( $\in$ ) мен жиынның басқа жиынның ішкі жиын болуын ( $\subseteq$ ), яғни жиынның басқа жиынға кіруі ұғымдарын шатастырмау керек ( $\in, \subseteq$ ).  $O \in \{o\}$  және  $\{o\} = \{\{o\}\}$  болғанымен  $O \in \{\{o\}\}$  деу дұрыс емес, себебі  $\{\{o\}\}$  жиынының жалғыз ғана элементі  $\{o\}$  бар. ( $o$  – элементі бола алмайды).

**Анықтама.** Элементтердің ақырлы санынан тұратын жиын, *ақырлы жиын* деп аталады, керісінше болса *ақырсыз жиын* деп аталады. Мысалы  $N, R$  жиындары ақырсыз.

**Анықтама.** Ақырлы жиындардағы элементтердің саны жиынның *қуаты* деп аталады және  $| \cdot |$  белгілерімен қоршалып жазылады. Мысалы,  $M$  – ақырлы жиын болса, оның қуаты  $| M |$ . Қуаты 0-ге тең жиын, яғни элементтері жоқ жиын *бос жиын* деп аталады және  $\emptyset$  белгіленеді  $| \emptyset | = 0$ . ( $|\{\emptyset\}| = 1$  емес) Бос жиын кез-келген жиынның ішкі жиыны болады деп есептеледі. Егер  $A$  және  $B$  жиындары тең болса, олар тең қуатты жиындар деп аталады. Мысалдар:

1.  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, A \neq B$ .

2.  $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{4, 3, 1, 2\}; A = B$ , себебі  $A \subset B, B \subset A$ ;

3.  $A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 4, 6\}; C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \subset C; B \not\subset A$ .

**Анықтама.**  $A$  жиынының барлық ішкі жиындарының жиынтығы *булеан* немесе *дәрежелі жиын* деп аталады және  $P(A)$  деп белгіленеді ( $2^A$  деп те белгіленеді). Сонымен,  $2^A = P(A) \Leftrightarrow \{B \mid B \subseteq A\}$  немесе  $2^A$ . Мысалдар: Егер  $A = \{1, 2, 3\}$  болса,  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ .

**Анықтама.** Қарастыруға болатын барлық мүмкін элементтерден тұратын жиын *универсал* немесе *универсум* деп аталады және  $U$  деп белгіленеді.

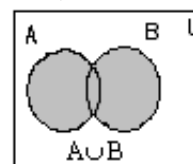
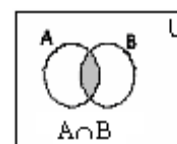
1.3. Жиындармен операциялар (амалдар).

$P(U)$  булеанындағы операцияларды және олардың геометриялық кескінделулерін қарастырамыз.

**1. Қиылысу операциясы.** Егер  $A, B \subseteq P(U)$  онда, осы  $A, B$  жиындарының екеуіне де тиісті элементтерден тұратын жиынды  $A, B$  жиындарының қиылысуы деп атайды және ол төмендегідей өрнектеледі:

$A \cap B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$ ; Мысалы,  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$  болса  $A \cap B = \{3\}$ ;

**2. Бірігу операциясы.**  $A, B$  жиындарының ең болмаса біреуіне тиісті элементтерден тұратын жиынды  $A, B$  жиындарының бірігуі деп атайды және ол төмендегідей



өрнектеледі:

$A \cup B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$  Мысалы,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ;

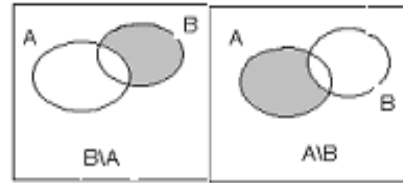
$B = \{4, 3, 6, 7\}$  болса,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

$A, B$  жиындарының қиылысуын олардың көбейтіндісі ( $A * B$ ), ал бірігуін олардың қосындысы ( $A + B$ ) деп те атайды

**Жиындардың айырымы.**  $A$  жиынының

$B$ -ға кірмейтін элементтерінен тұратын жиынды

$A, B$  жиындарының айырымы деп атаймыз және ол төмендегідей өрнектеледі:



$A \setminus B \Leftrightarrow A - B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \text{ және } x \notin B\}$ .

$A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  болса,  $A \setminus B = \{1, 2\}$ ;  $B \setminus A = \{4, 5\}$ ;

**3. Сақиналы қосынды.**  $A, B$  жиындарының өзара

айырымдарының бірігуін сақиналы қосынды немесе

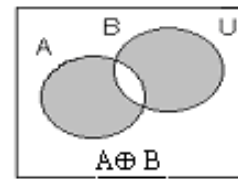
симметриялық айырым деп атайды  $A \oplus B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

болып белгіленеді.  $(A \setminus B) \neq (B \setminus A)$ . Жоғарыда қарастырылған

$A, B$  үшін:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $B = \{4, 3, 6, 7\}$ ;  $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus$

$\{3, 4, 6, 7\} = \{1, 2\}$ ;  $B \setminus A =$

$\{3, 4, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{6, 7\}$ ;  $A \oplus B = \{1, 2, 6, 7\}$ ;



**Симметриялық айырымның тағы бір формуласы:**

$A \oplus B = A \div B = A \oplus B \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;

$A \oplus B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2, 6, 7\}$ .

**4. Жиынының толықтауышы.**  $U$  универсумындағы  $A$ -ға тиісті емес элементтер  $U$  универсумындағы  $A$  жиынының толықтауышы деп аталады ( $A$ -ны  $U$ -ға дейін толықтыратын)  $\bar{A} \Leftrightarrow U \setminus A$  болып белгіленеді.

Мысалы,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  жиынының толықтауышы.  $\bar{A} = \{6, 7\}$ ;

$B = \{4, 3, 6, 7\}$  жиынының толықтауышы  $\bar{B} = \{1, 2\}$ ;  $\{\cap, \cup, -\}$  операциялары

буль операциялары деп аталады.

**5. Анықтама.** Жиындардың геометриялық кескіндері *Эйлер-Венн диаграммалары* деп аталады. Біріктіру, қиылысу операцияларын кез-келген жиындардың жиыны болатын  $A_i$  (мұндағы  $i \in I$  жиынының элементтерін қабылдайды) жиынына да анықтауға болады:

Айталық  $I$  – элементтері индекс ретінде қолданылатын қандай да бір жиын болсын және  $\forall i \in I$  үшін  $A_i$  белгілі болсын. Олай болса, қиылысу

$\cap \{A_i \mid i \in I\}$  мен бірігуді  $\cup \{A_i \mid i \in I\}$  төмендегідей анықтауға болады.  $\cap \{A_i \mid i \in I\} = \{x \mid x \in A_i, \forall (кез-келген, барлық) i \in I \text{ үшін}\}$ ;  $\cup \{A_i \mid i \in I\} = \{x \mid x \in A_i, \exists (ең болмағанда бір i \in I \text{ үшін})\}$  теңдіктерімен беріледі. Көбінесе,  $\cap \{A_i \mid i \in I\}$ ,  $\cup \{A_i \mid i \in I\}$  орнына  $\bigcap_{i \in I} A_i$ ,  $\bigcup_{i \in I} A_i$  немесе текстің мәтінінен  $I$  жиынының қандай екендігі белгілі болса жай ғана  $\cap A_i$ ,  $\cup A_i$  белгілерін қолданады.  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$ ;  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \exists i \in I\}$ ; Егер



$I = \{1, 2, \dots, n\}$  болса  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$  ;  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$  ;  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  және  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  белгілеулері қолданылады.

### Жиындарға қолданылатын операциялардың қасиеттері

Айталық  $U$  универсумы берілсін. Олай болса  $\forall A, B, C \subset U$  төмендегідей қасиеттер орындалады:  $\cap, \cup$  операцияларының ассоциативтігі

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

2.  $\cup, \cap$  операцияларының коммутативтігі

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Дистрибутивті заң (үлестіру заңы)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. Идемпотенттік заң

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A$$

5. Жұтылу заңы

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A$$

6. Де Морган заңы

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

7. Нөл мен бір заңы, айталық  $0 \Leftrightarrow \emptyset$ ,  $1 \Leftrightarrow U$  онда

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cup 1 = 1; \quad A \cap 1 = A;$$

$$A \cup \overline{A} = 1; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

8. Қос терістеу заңы (инволютивность)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

9. Толықтыру заңы.

$$A \cup \overline{A} = U; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Жиындарға қолданылатын операциялардың қасиеттерінің дұрыстығына бірнеше тәсілдермен көз жеткізуге болады:

Нақтылы жиындар мен амалдарды орындау арқылы (екі жағынан бірдей нәтиже шығады) ;

Венн диаграммасын сызу арқылы;

Амалдардың анықтамасын пайдалану арқылы.

$\cap$  операциясының **ассоциативтігін** дәлелдейік:

Дәлелдеуі: Ассоциативті заңды дәлелдеу  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  (Теру заңы);  $A = \{a, b\}$ ;  $B = \{a, c, d\}$ ;  $C = \{b, c, d, e\}$  болсын.

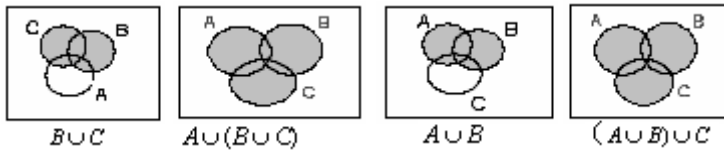
1-тәсіл. Амалдарды орындайық.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ;

Сол жағы :  $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$ ;

Оң жағы:  $(\{a,b\} \cup \{a,c,d\}) \cup \{b,c,d,e\} = \{a,b,c,d\} \cup \{b,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$ ;

Демек жиындар тең.

**2-тәсіл.** Диаграммасын салайық:



Диаграммаларының бірдейлігінен жиындар тең деген қорытындыға келеміз.

### 1.3. Жабу және бөліктеу

Айталық,  $\{A_i \mid i \in I\}$   $A$  жиынының бос емес ішкі жиындары болсын.  $A_i \subset A$

**Анықтама.** Егер  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  болса, яғни  $A$  жиынының әр элементі  $A_i$

жиындарының ең болмаса біреуіне кірсе, онда бос емес  $\{A_i \mid i \in I\}$  жиыны  $A$  жиынының жабуы деп, ал егер  $i \neq j$  болғанда  $A_i \cap A_j = \emptyset$  болса, жабу бөліктеу деп аталады ( $\forall i, j \in I \ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ ). Басқа сөзбен айтқанда  $A$  жиынының бос емес  $\{A_i \mid i \in I\}$  ішкі жиындары қиылыспаса яғни  $A$ -ның әр элементі бос емес  $A_i$  жиындарының тек біреуіне ғана кіретін болса, онда  $\{A_i \mid i \in I\}$  жиыны  $A$  жиынының бөліктеуі деп аталады. Мысалы,  $A = \{1,2,3\}$  болса, онда  $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}\}$  –  $A$  жиынын жабады, ал  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  –  $A$  жиынының бөліктеуі болады.

### Жиындардың Декарт көбейтіндісі

$x_1 \dots x_n$   $n$  элементтен тұратын реттелген тізбекті  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  немесе  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  деп белгілеуге болады. Мұндағы дөңгелек, бұрышты жақшалар элементтердің жазылу ретін көрсету үшін ғана қолданылады. Мұндай нөмірлерінің ретіне қарай орналасқан тізбек ұзындығы реттелген тізбек немесе ұзындығы  $n$  болатын **кортеж** деп аталады.  $x_i$ -элемент  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  кортежінің  $i$ - координатасы деп аталады.

### Мысалдар

$\{a,b,c\}$  және  $\{1,2\}$  жиындарынан ұзындығы 2-ге тең 6 кортеж құруға болады:

$(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)$

2. Кез-келген әріптерден құралған сөз кортеж, натурал сандардың ондық жүйедегі жазылуы цифрлардан тұратын кортеж т. б.

Кез-келген координаттары әртүрлі реттелген ақырлы жиын кортеж. Ұзындығы 2-ге тең кортеждер реттелген жұптар, ұзындығы 3-ке тең кортеждер реттелген үштіктер, ұзындығы  $n$ -ге реттелген  $n$ -діктер деп аталады. Жиындар екі элементпен алу амалының көмегімен төмендегі ережеге сәйкес кодталады.

$\langle \rangle \Leftrightarrow \emptyset, \langle x_1 \rangle \Leftrightarrow x_1, \langle x_1, x_2 \rangle \Leftrightarrow \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \Leftrightarrow \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$

**Анықтама.** Екі кортеж ұзындықтары бірдей, әрі бірдей нөмірлі координаттары тең болса ғана тең болады. Яғни  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$  кортеждері  $x_1=y_1; x_2=y_2, \dots, x_n=y_n$  болғанда ғана тең болады ( $x=y$ ). Мысалы  $(1^2, 2^2, 3^2)$  және  $(\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81})$  кортеждері тең.  $(1,2,3)$  және  $(3,1,2)$  әртүрлі;  $(1,2,3)$  және  $(1,2,3,4)$  әртүрлі;  $(1,2) \neq (2,1)$  ал  $\{1,2\}$  және  $\{2,1\}$  жиындары тең. Кортеждердің координаттары жиын, кортеж т. б. болуы мүмкін. Мысалы,  $(\{a,b\}, c) = (\{b,a\}, c)$  себебі  $\{a,b\} = \{b,a\}$ , ал  $((a,b), c)$  және  $((b,a), c)$  кортеждері тең емес, себебі  $(a,b) \neq (b,a)$ . Бір де бір координаты жоқ кортеж (ұзындығы 0) бос кортеж деп аталады.

Сонымен жиын мен кортеж ұғымдарының айырмашылығы:

а) жиындардың элементтерінің орны, реті бәрі бір, ал кортеждерде элементтерінің ұзындығы бірдей болып элементтерінің реті басқаша болса тең емес (құрамы бірдей болса да);

б) жиында элементтер әртүрлі, кортежде бірдей бола береді.

**Анықтама.**  $A$  және  $B$  жиындарының тура(декарт) көбейтіндісі деп элементтері реттелген  $(x, y)$  жұбынан тұратын жиынды айтамыз. Мұндағы,  $x \in A$ , ал  $y \in B$ . Декарт көбейтіндісі әр түрлі жиын элементтерінен құралады,  $A \times B$  болып белгіленеді:  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ және } y \in B\}$ .

$A_1, A_2, \dots, A_n$  жиындары үшін Декарт көбейтіндісі?

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{m=1}^n A_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

болады.

Егер  $A_1=A_2=\dots=A_n=A$  болса, онда  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  жиыны  $A$  жиынының  $n$ -ші Декарт дәрежесі деп аталады және  $A^n$  болып белгіленеді. Анықтама бойынша  $A^0 = \{\emptyset\}$

Мысалдар:

1.  $A=\{1,2\}$ ,  $B=\{3,4\}$  берілсін.  $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ ;

$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$ ;

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ ; Бұл мысалдардан  $A \times B \neq B \times A$ .

2. (Шахмат тақтасы).

$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ ;  $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$  жиындары берілсін. Олай болса әр  $(x,y)$  жұбына  $x,y \in A \times B$  шахмат тақтасының торлар жиыны сәйкес келеді.

3.  $[0,1]^2$  жиыны  $\{(a,b) \mid 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\}$ ; Бұл жиынға жазықтықтың 1-ден аспайтын теріс емес координаттары бар нүктелер жиыны сәйкес келеді.

4.  $A=\{a,b,c\}$ ;  $B=\{1,2\}$ ;  $A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$ ;  
 $B \times A = \{(1,a), (2,a), (1,b), (2,b), (1,c), (2,c)\}$ ;  $A \times B \neq B \times A$

5.  $A=\{1,2,3\}$ ;  $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ ;

6.  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ;  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ;  $X, Y$  - жиындарының Декарт көбейтіндісін табайық. Декарт көбейтіндісінің элементтері әр түрлі жиын элементтерінен алынған жұптардан тұратындығы белгілі.

Оларды кестеге орналастырайық: Бұл кестеде  $m$  жол,  $n$  бағаннан тұратын элементтер жұбын көреміз.  $\mu(x, y)$  - саны  $x$ -элементтерінің жиыны мен  $y$  элементтерінің жиындарының көбейтіндісіне тең.  $\mu(x, y) = \mu(x) \cdot \mu(y)$  (1)

Бұл жиындарды көбейту ережесі. Егер декарт көбейткіштері  $n$  жиыннан тұрса, онда (1) төмендегідей жалпылауға болады:

$x_i$ \ $y_j$	1	2	...	n
1	$(x_1, y_1)$	$(x_1, y_2)$	...	$(x_1, y_n)$
2	$(x_2, y_1)$	$(x_2, y_2)$	...	$(x_2, y_n)$
...	...	...	...	...
m	$(x_m, y_1)$	$(x_m, y_2)$	...	$(x_m, y_n)$

$\mu(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = \mu(x_1) \cdot \mu(x_2) \dots \mu(x_n)$  (2)  $A \times B \times C$ ;  $(A \times B) \times C$ ;  $A \times (B \times C)$  жиындары да әр түрлі.  $A \times B \times C - (a, b, c)$ ;  $(A \times B) \times C -$

$((a, b), c)$   $a \in A, b \in B, c \in C$ ;  $A \times (B \times C) = (a, (b, c))$ ; Егер  $A, B$  жиындарының бірі бос болса, олардың Декарт көбейтіндісі де бос деп есептеледі.  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ ;

Мысал,  $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ;  $A \times B = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$ ;

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай жиынды ішкі жиын деп атайды?
2. Қандай жиындар тең болады?
3. Жиындармен орындалатын негізгі операцияларды қандай?
4. Бірігу, қиылысу, толықтыру операцияларының негізгі қасиеттерін атаңыз.
5. Жиындарды өрнектеудің қандай әдістері бар?

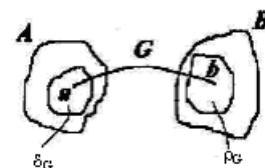
## 2. Дәріс. Сәйкестік және оның қасиеттері Функциялар мен бейнелелер.

Сәйкестіктер – жиын элементтерінің арасындағы өзара байланысты беру тәсілі. Оның дербес жағдайлары: функциялар, бейнелер, түрлендірулер, т.б.

**Анықтама.**  $A, B$  жиындарының арасындағы сәйкестік деп бұл жиындардың тура (декарт) көбейтіндісінің  $G$  ішкі жиынын айтады.

$G \subseteq A \times B$  Егер  $(a, b) \in G$  болса,  $G$  сәйкестігінде  $b$   $a$ -ға сәйкес деп айтады.  $\delta_G = \{a | (a, b) \in G, G \text{ сәйкестігінің анықталу облысы, ал } \rho_G = \{b | (a, b) \in G\}$  мәндер жиыны деп аталады.

**Анықтама.** Егер  $\delta_G = A$  болса толық анықталған сәйкестік,  $\delta_A \subseteq A$  болса толық емес (жартылай) сәйкестік болады. (толық анықталмаған).



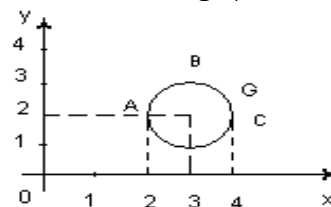
**Анықтама.** Егер  $\rho_G = B$  – сюръективті сәйкестік деп аталады. ( $B$ -ның әрбір элементінің  $A$  прообразы бар) **Анықтама**  $A$  жиынының әрбір  $a \in A$  элементіне  $B$  жиынының  $G$  сәйкестігіндегі  $a$ -ға сәйкес барлық  $b \in B$  элементтерінің жиыны  $a$  элементінің образы, ал әрбір  $b \in B$  элементіне  $A$  жиынының  $G$  сәйкестігіндегі  $b$ -ға сәйкес барлық  $a \in A$  элементтерінің жиыны  $b$  элементінің  $A$  жиынындағы прообразы деп аталады.

**Анықтама.** Барлық  $a \in C \subseteq \rho_G$  элементтерінің образдарының жиыны  $C$  жиынының образы деп аталады. Барлық  $b \in D \subseteq \rho_G$  элементтерінің прообраздарының жиыны  $D$  жиынының прообразы деп аталады.

**Анықтама.** Егер анықталу облысынан ( $\delta_G$ ) алынған кез-келген  $a$  элементінің мәндер жиынында ( $\rho_G$ ) бір ғана образы  $b \in \rho_G$  болса,  $G$  – функционал (бір мәнді) сәйкестік деп аталады.

**Анықтама.** Егер  $G$  сәйкестігі толық анықталған, сюръективті, функционалды және  $\forall b \in \rho_G$  элементінің анықталу облысында бір ғана прообразы  $a \in \delta_G$  болса, онда  $G$  өзара бір мәнді сәйкестік болады.

Егер  $A$  мен  $B$  жиындарының арасында өзара бір мәнді сәйкестік болса, онда олардың қуаттары тең және олар тең қуатты жиындар  $|A| = |B|$  деп аталады. Бұл фактілер жиынды санамай-ақ, олардың тең қуаттылығын анықтауға болатындығын көрсетеді. Қуаты белгілі немесе оңай санауға болатын басқа жиынмен өзара бір мәнділігін дәлелдеу арқылы жиын элементтерін санамай-ақ оның қуатын анықтауға болады.  $N$  натурал сандар жиыны мен тең қуатты жиындар *саналымды жиын* деп аталады.



$R$  нақты сандар жиынымен тең қуатты сандар континуальды деп аталады.

**1- мысал.** Айталық  $G = \{(x,y) | (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$  қатынасын қанағат тандыратын барлық  $(x,y)$  нақты санды сандар жиыны болсын.  $G = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R} \text{ үшін } (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$  сәйкестігінің графикалық кескіні центрі  $(3,2)$  нүктесінде болатын, радиусы 1-ге тең дөңгелек. Бұл 3.2 суреттегідей  $G$  дөңгелегі  $\mathbb{R}$  мен  $\mathbb{R}$  арасындағы сәйкестік (яғни  $Ox$  өсі мен  $Oy$  өстерінің арасындағы сәйкестік).

а) 2, 3, 4 сандарының образы мен прообраздарын табу керек.

Шешуі:  $2 \in \delta_G$   $G$  сәйкестігіндегі образы жалғыз ғана  $2 \in \rho_G$ , 3-ң  $G$  сәйкестігіндегі образы  $[1,3]$  кесіндісіндегі барлық нақты сандар жиыны, 4-ң образы 2.  $G$  сәйкестігінің мәндер жиыны  $\rho_G$  алынған ( $2 \in \rho_G$ ) 2 санының  $G$  сәйкестігіндегі прообразы  $[2,4] \subseteq \delta_G$ ;  $3 \in \rho_G$   $G$  сәйкестігіндегі прообразы  $3 \in \delta_G$ .  $4 \in \rho_G$  –  $G$  сәйкестігінде прообраздары жоқ

б) 1)  $[2,3] \in \delta_G$  сандарының образы осы  $[2,4]$  кесіндідегі барлық образдарының бірігуі, яғни  $[1,3] \subset \rho_G$ ;

2) Осыған ұқсас  $[2,4]$  кесіндісінің  $G$  сәйкестігіндегі образы  $[1,3]$ ;

3)  $[2,3]$  кесіндісінің прообразы  $[2,4]$ ;  $[2,4] \subset \rho_G$  прообразы  $[2,4]$ ;

Егер  $G$  сәйкестігі нақты сандар жиынында анықталған десек, яғни  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  онда

1)  $G$  – толық анықталмаған себебі,  $\delta_G \neq \mathbb{R}$  ( $\delta_G \subset \mathbb{R}$ )

2) Сюръективті емес себебі,  $\rho_G \neq \mathbb{R}$  ( $\rho_G \subset \mathbb{R}$ )

3) Функционалды (бір мәнді) емес, себебі  $[2,4] = \delta_G$  үшін (2 мен 4-тен басқа) образдар жалғыз емес.

4) Өзара бір мәнді болудың қажетті шарттары (1,2,3 шарттар) орындалмағандықтан сәйкестік өзара бір мәнді емес.

Егер сәйкестік  $G \subseteq [2,4] \times [1,3]$  болса  $G$  толық анықталған және сюръективті, бірақ функционалды және өзара бір мәнді емес.

**2 мысал.** Айталық  $G$  сәйкестігі  $x-2=y$ ,  $x,y \geq 0$  түзуінің бойындағы нүктелер жиыны

$G = \{(x,y) | x-2=y, x,y \geq 0\}$ ;  $G = \{ \text{элементтері } x-2=y \text{ қатынасын қанағаттандыратын нүктелер жиыны} \}$ .  $G$  – сәйкестігінің қандай қасиеттері бар?

Шешуі: Егер  $G$  нақты сандар жиынында берілген сәйкестік ( $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) болса, онда:

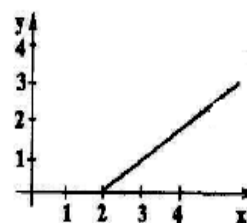
1)  $G$  толық анықталмаған сәйкестік, себебі

$$\delta_G = [2, \infty) \subset \mathbb{R};$$

2) Сюръективті емес, себебі анықталу облысы  $\rho_G = \mathbb{R}_+ = [0, \infty]$  нөлмен қоса алғанда барлық нақты сандар жиыны.

3) Функционалды, себебі  $\forall x \in \delta_G$ ,  $\rho_G$  – анықталу облысынан алынған әрбір  $x$ -ке бір ғана  $y \in \rho_G$  сәйкес ( $x$ -ң бір ғана образы бар). 4) Өзара бір мәнді емес, себебі толық анықталмаған және сюръективті емес.

2.  $G$  сәйкестігі нөлмен қоса алғандағы  $\mathbb{R}_+$  жиынында яғни  $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  берілген болса, онда  $G$  сәйкестігінің төмендегідей қасиеттері болады: толық анықталмаған, себебі  $\delta_G = [2, \infty)$  және  $\delta_G \subset \mathbb{R}_+$ ;



- сюръективті, себебі анықталу облысы  $\rho G = R_+$ ;
  - функциональды;
  - Өзара бір мәнді емес, себебі толық анықталмаған .
3.  $G$  сәйкестігі  $G \subseteq [2, \infty) \times R^+$  болса :
- в толық анықталған;
  - сюръективті;
  - функциональды;
  - Өзара бір мәнді ,себебі алдыңғы аталған қасиеттерге қоса, анықталу облысынан алынған кез –келген  $y \in \rho G$  үшін бір ғана прообраз бар.

### Функциялар мен бейнелеулер

Айталық,  $A, B$  жиындарында  $f \subseteq A \times B$  сәйкестігі бар болсын.

**Анықтама** Егер  $\delta_f = A$ ,  $\rho_f = B$  және  $(x, y_1) \in f$ ,  $(x, y_2) \in f$  болғандығынан  $y_1 = y_2$  болса,  $A \xrightarrow{f} B$  онда  $f \subseteq A \times B$  сәйкестігі функция деп аталады ол  $f: A \rightarrow B$  немесе болып жазылады. Бұл анықтамадан функция дегеніміз функционал сәйкестік екендігін көреміз және  $f$  функциясының типі  $A \rightarrow B$  деп оқылады .  $f$  функциясы анықталу облысының әрбір элементіне ( $x$ ) мәндер облысынан бір мәнді ( $y$ ) сәйкестендіреді және  $y = f(x)$  болып белгіленеді. ( $x$  аргумент,  $y$  функцияның мәні) болып жазылады ( $y$   $x$ -тың образы). Мысалдар:  $f = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$  – функция;  $f = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$  - функция емес;  $\{(x, x^2 - 2x + 3), x \in R\}$  – функция ; бұл функция әдетте  $y = x^2 - 2x + 3$  болып жазылады.

**Анықтама** Толық анықталған функция  $f: A \rightarrow B$   $A$ -ны  $B$ -ға іштей бейнелеу деп аталады.

$f: A \xrightarrow{\text{іштей}} B$  ( $\delta_f = A$ ,  $\rho_f \subseteq B$ ) толық анықталған функция

**Анықтама** Егер  $\rho_f = B$  болса функция сюръективті функция деп аталады.

**Анықтама** Егер функция толық анықталған ( $\rho_f = A$ ) және сюръективті ( $\rho_f = B$ ) болса , онда ол  $A$ -ны  $B$ -ға **толық бейнелеу** деп аталады:  $f: A \xrightarrow{\text{толық}} B$  болып жазылады.

**Анықтама**  $A \xrightarrow{\text{іштей}} A$  бейнелеу  $A$  жиынын түрлендіру, ал  $A \xrightarrow{\text{толық}} A$  бейнелеуі  $A$ -ға алмастыру деп аталады  $A \xleftarrow{\text{Алмастыру}} A$  болып та белгіленеді.

$f$  және  $g$  функциялары тең болады, егер төмендегі шарттар орындалса:

- Олардың анықталу облыстары біреу -ол  $A$  жиыны;
- Кез-келген  $a \in A$  үшін  $f(a) = g(a)$ .

Сәйкестік	Міндетті түрде болу керек қасиеті		
	Функционалды	Толық анықталған	Сюръективті
Функция А-ны В-ға іштей бейнелеу	+		
А-ы В-ға толық бейнелеу	+	+	+

$f: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$  типті функция  $n$  –орынды функция деп аталады. Бұл жағдайда функцияның  $n$  аргументі бар деп түсіну келісілген:  $f(a_1, \dots, a_n) = b$ , мұндағы  $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n, b \in B$ . Айталық,  $G \subseteq A \times B$  сәйкестігі берілсін. Тек  $(a, b) \in G$  болса ғана  $(b, a) \in H$  болатын  $H \subseteq B \times A$  сәйкестігі,  $G$ -ң кері сәйкестігі деп аталады және  $G^{-1}$  болып белгіленеді.

**Анықтама** Егер  $f: A \rightarrow B$  сәйкестігіне кері сәйкестік функционалды болса (яғни әрбір  $b \in \rho_f$  үшін бір ғана  $a \in \delta_f$  болса), онда ол  $f$  функциясына кері функция деп аталады,  $f^{-1}$  болып белгіленеді.

Кері сәйкестікте образ бен прообраздың орындары ауысып келетіндіктен  $f$  функциясына кері функция болу үшін  $f: A \rightarrow B$   $f$  функциясының мәндер жиынының әрбір  $b \in \rho_f$  элементінің жалғыз ғана образы болу керек. Бұдан  $f: A \rightarrow B$  функциясы өзінің анықталу облысы мен мәндер облысының өзара бір мәнді сәйкестігі болса ғана оған кері функция болатындығы көрінеді.

Егер  $h(x) = g(f(x))$ , мұндағы,  $x \in A$  орындалса  $h: A \rightarrow C$  функциясы  $f$  және  $g$  функцияларының композициясы деп аталады және  $f \circ g$  белгіленеді.

Көбіне  $h$  функциясы  $f$  ті  $g$  –ң орнына қойғаннан алынды деп айтады. Көп орынды  $f: A^m \rightarrow B$ ,  $g: B^n \rightarrow C$  функциясы үшін  $f$ -ті  $g$  –ға қоюдың әртүрлі варианттары бар. Нәтижесінде әртүрлі типтегі функциялар алынады. Мысалы,  $m = 3$  және  $n = 4$  үшін  $h = g(x_1, f(y_1, y_2, y_3), x_3, x_4)$  функциясында 6 аргумент бар ал оның типі  $B \times A^3 \times B^2 \rightarrow C$ . Аргументтерін басқаша атап  $f_1, \dots, f_n$  функцияларын бір-біріне қойғаннан алынған функция  $f_1, \dots, f_n$  функ-цияларының суперпозициясы деп аталады. Бұл суперпозицияны және функ-ционалдық белгі мен аргументтердің символдарын сипаттайтын өрнек формула деп аталады.

Функциялардың берілу тәсілдері:

- График түрінде;
- Кесте;
- Функцияны басқа функциялардың суперпозициясы түрінде сипаттайтын формула түрінде;

**Анықтама.** Егер  $f^{-1}$  сәйкестігі толық емес функция болса, яғни  $\forall x_1, x_2 \in \delta_f$  үшін,  $x_1 \neq x_2$  болғандығынан  $f(x_1) \neq f(x_2)$  болса,  $f$  функция инъективті (Инъекция) функция деп аталады. Егер  $f$  – инъекция болса  $f: A \xrightarrow{1-1} B$  болып белгіленеді.

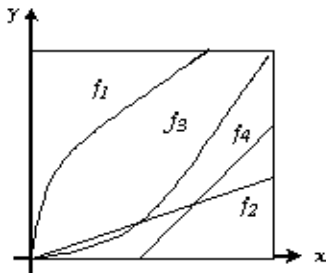


**Анықтама.** Егер  $\rho_G = B$  болса  $f: A \rightarrow B$  функциясы сюръективті (сюръекция) функция деп аталады  $f: A \xrightarrow{\text{толық}} B$ .

**Анықтама.** Егер  $f$  инъективті және сюръективті болса, ол биективті деп аталады:  $f: A \leftrightarrow B$

**Анықтама.** Егер  $f$   $A$ -ы  $B$ -ң әр түрлі мәндеріне бейнелесе, онда  $f$  функциясы өзара бір мәнді сәйкестік немесе биективті функция (биекция) деп аталады. Сонымен, егер функция сюръективті және инъективті болса, функция биекция болады. Егер  $f$   $A$  мен  $B$  арасындағы биекция болса,  $f: A \leftrightarrow B$  болып жазылады.  $F: A \leftrightarrow A$  биекциясы  $A$  жиынының (подстановка) алмастыруы деп аталады.

Суретте графиктік түрде функциялар берілген



$$f_i : [0,1] \rightarrow [0,1], \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

$f_1$  – сюръективті, инъективті емес

$f_2$  – инъективті, сюръективті емес

$f_3$  – инъективті, сюръективті – биекция

$f_4$  – инъективті де емес, сюръективті де емес

2- мысал: Үш функцияны қарастырайық  $f_i : R \rightarrow R, i=1,2,3$ :

1)  $f_1(x) = e^x$  инъективті, сюръективті емес

2)  $f_2(x) = x \cdot \sin x$  сюръективті, инъективті емес

3)  $f_3(x) = 2x - 1$  биективті;

Бақылау сұрақтары:

1. Сәйкестік, бейнелеу, функциональды бейнелеу дегеніміз не?
2. Қандай бейнелеулер инъективті, сюръективті, биективті деп аталады?
3. Кері функция бар болудың қажетті және жеткілікті шарты?

### 3. Дәріс. Жиындардың қуаты

Берілген  $A$  және  $B$  ақырлы жиындарының қуаттарының теңдігін олардың элементтерін санау арқылы білуге болады. Мысалы,  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ;  $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ ;  $|A| = |B| = 6$ .

Жиындардың теңдігін білудің басқа да жолы бар:

$A$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$B$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\zeta$

Егер  $a \in A$  үшін бір ғана  $b \in B$  сәйкес болса және керісінше әрбір  $b \in B$  үшін бір ғана  $a \in A$  сәйкес болса, онда  $A$  және  $B$  жиындарының арасында өзара бір мәнді сәйкестік бар дейді. Мұндай жиындар эквивалентті немесе тең қуатты жиындар деп аталады. Айталық  $N$  натурал сандар жиыны болсын  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, M$  – олардың квадраттарының жиыны:  $1, 4, 9, 16, 25$ , Олай болса,  $N \sim M$ .

Натурал сандар жиынына эквивалентті жиындар саналымды жиындар деп аталынады. Саналымды жиын туралы мынадай теорема бар:

*1-Теорема.* Қандай да бір жиын саналымды болу үшін, оның элементтерін шексіз тізбек түрінде кескіндеу қажетті және жеткілікті.

*2-Теорема.* Саналымды жиынның кез-келген ішкі жиыны саналымды жиын.

*3-Теорема.* Ақырлы немесе саналымды жиындардың бірігуі-саналымды жиын.

*Салдар.* Рационал сандар жиыны саналымды жиын. Шынында да барлық оң рационал сандарды шексіз кесте түрінде өрнектеуге болады:

$1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$

$2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5, \dots$

$3/1, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5, \dots$

$4/1, 4/2, 4/3, 4/4, 4/5, \dots$

.....,

Бұл кестені сол жақ жоғарғы бұрыштан бастап диагональ бойымен айналуға болады. Бірақ барлық шексіз жиындар саналымды емес.

*Кантор теоремасы.*  $[0;1]$  кесіндісіндегі барлық нақты сандар жиыны саналымды емес. Теореманы кері жорып дәлелдейміз. Айталық бұл жиын саналымды болсын. Демек, бұл жиынның барлық элементтерін шексіз тізбек түрінде өрнектеуге болады.

$A_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots$

$A_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots$

$A_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots$

.....

Төмендегі тәртіппен  $B = b_1b_2b_3b_4 \dots$  шексіз ондық бөлшек тізбегін  $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, b_3 \neq a_{33}$  және т.б. құрайық. Бұл бөлшек айтылған тізбекке енбейді, себебі тізбектің бірінші мүшесінен оның бірінші цифры

өзгеше, екіншісінен екінші цифры өзгеше т.б. Ендеше  $[0;1]$  кесіндісінің барлық нақты сандар жиыны саналымды емес. Бұл жиынның қуаты континуум (C қуатты), ал C қуатты жиын континуальды жиын деп аталады.

*Теорема.*  $[a,b]$  кесіндісінің барлық нақты сандар жиыны континуум қуатты.

Шынында да  $y=a+(b-a)x$  функциясы  $[0; 1]$  және  $[a; b]$  кесіндісінің нүктелерінің арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнатады, демек  $[a; b]$  кесіндісіндегі нақты сандар жиынының қуаты  $[0; 1]$  кесіндісіндегі нақты сандар жиынының қуатындай.

*Теорема.* Континуум қуатты ақырлы немесе саналымды жиындардың жиыны – континуум қуатты жиын болып табылады.

*1 Салдар.* Барлық нақты сандар жиыны континуум қуатты.

$$R = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{[k-1; k] \cup [-k; -k+1]\}$$

*2 Салдар.* Барлық иррационал сандар жиынының қуаты C.  $I=R/Q$

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай жиын саналымды жиын деп аталады?
2. Қандай жиындар континуум қуатты?
3. Ақырлы жиынға, континуум қуатты жиындарға мысал келтіріңіз.
4. Жазықтықтағы нүктелер жиынының қуаты қандай?
5. Екінші дәрежесі болатын сандардан құралған жиынның қуаты қандай?

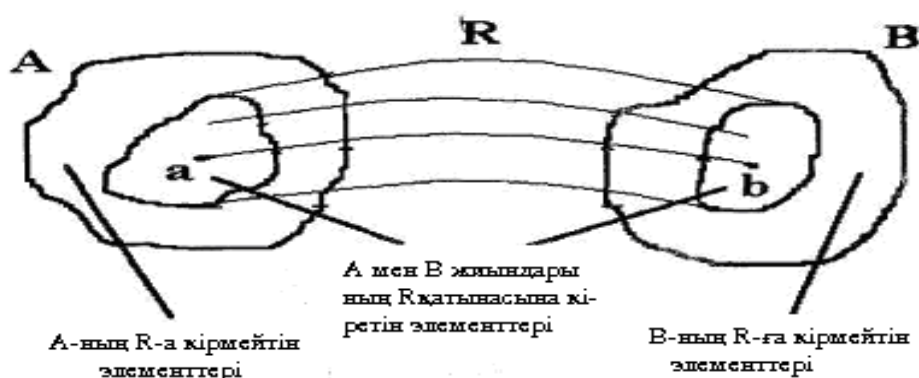
#### 4. Дәріс. Қатынастар. Бинарлы қатынастар.

**Қатынастар**—жиын немесе жиындар элементтерінің арасындағы өзара байланыстарды беру тәсілдері. Қатынастардың ішінен унарлы, бинарлы қатынастар көбірек белгілі. Унарлы (бір орынды) қатынастар бір жиын элементтерінің белгілі бір  $R$  қасиетінің болуын бейнелейді.  $M$  жиынының  $R$  қасиетімен (белгісімен) ерекшеленетін элементтерінің жиыны  $M$ -ң бір ішкі жиынын құрайды. (Мысалы, қобдишадағы шарлардың бір бөлігінің ақ болуы) Оларды унарлы қатынас деп атайды,  $R$  мен белгіленеді, яғни  $a \in R, R \subseteq M$ .

##### **Бинарлы қатынастар.**

Бинарлы қатынастар  $M$  жиынының бір жұп элементтерінің қандай да бір өзара қарым-қатынасын анықтауға қолданылады. Мысалы,  $M$  адамдар жиыны десек 2 адамның бір қалада тұруы, бір ұйымда қызмет істеуі, біреуінің екіншісінен жас болуы, әке мен бала болуы т. б.

**Анықтама** Екі орынды немесе бинарлы  $R$  қатынасы деп  $A, B$  жиындарының декарт (тура) көбейтіндісінің  $(a,b)$  жұптарынан тұратын ішкі жиынын айтады және  $(a,b) \in R, R \subseteq A \times B$  болып белгіленеді.  $A$ — $R$  қатынасының анықталу облысы, ал  $B$  мәндер облысы деп аталады. Айталық,  $R \subseteq A \times B$  қатынасы мына суреттегідей кескінделсін:



Бинарлы қатынас бір жиынның ішінде болса, мысалы  $M$ -жиынында болса  $R$  қатынасы  $(a,b) \in R, R \subseteq M \times M = M^2$  немесе  $(a,b) \in R, aRb$  болып белгіленеді. Жалпы жағдайда  $n$  орынды  $R$  қатынасы деп  $n$  жиынның тура (декарт) көбейтіндісінің  $R$  ішкі жиынын айтады:

$$R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

Егер  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ , ал  $(a_1 \in M_1, \dots, a_n \in M_n)$  онда  $a_1, a_2, \dots, a_n$  элементтері  $R$  қатынасында делінеді. Егер  $n$  орынды  $R$  қатынасы  $M$  жиынында болса, яғни  $M_1 = M_2 = \dots = M_n$ , онда  $R \subseteq M^n$ .

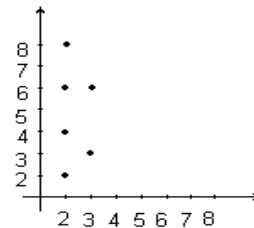
##### **Бинарлық қатынастардың берілу тәсілдері.**

Бинарлық қатынастар жиын болғандықтан, жиынның берілу тәсілдерінің бәрімен беріле алады. Ақырлы жиындарда берілген қатынастар әдетте төмендегідей әдістермен беріледі:

### 1. Бинарлы қатынас орындалатын жұптардың тізімі арқылы.

Мысалы,  $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$  жиыны берілсін.  $P=\{(x,y) \mid x,y \in A, y \text{ x-ке бөлінеді және } x \leq 3\}$  бинарлы қатынасын  $P=\{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)\}$  түрінде жазуға болады.

**2. Графиктік түрде:** Графиктік кескіндеудің бірнеше түрлері бар:

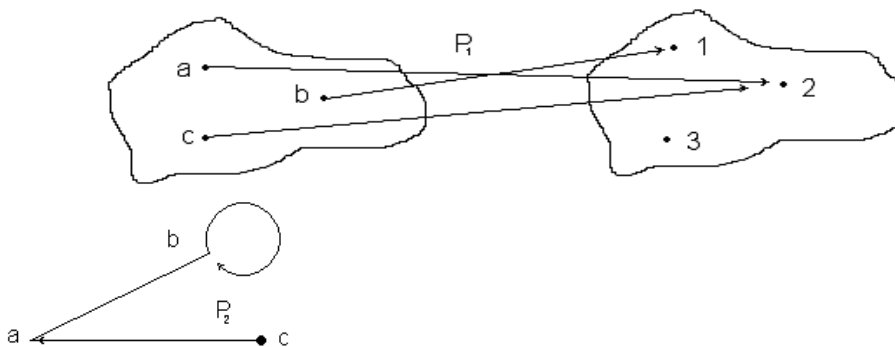


2.1. Координат осьтеріне қатынастың элементтерін белгілеу арқылы. Алдыңғы мысалды графикалық түрде суреттегідей кескіндеуге болады.

2.2. A мен B жиындарының элементтерінің арасындағы P қатынасын стрелкалар арқылы көрсетуге болады.

Мысалы,  $A=\{a,b,c\}$ ;  $B=\{1,2,3\}$  жиындары берілсін. Олардың элементтерінің арасындағы

$P_1=\{(a,2), (b,1), (c,2)\}$  қатынасын төмендегі 6-суретпен кескіндеуге болады.



2.3. Граф арқылы да кескіндеуге болады. Мысалы,  $P_2=\{(a,b), (b,b), (c,a)\}$  қатынасының граф түріндегі бейнесі 6-суреттегідей болады.

### 3. Бинарлы қатынастың матрица арқылы берілуі. $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

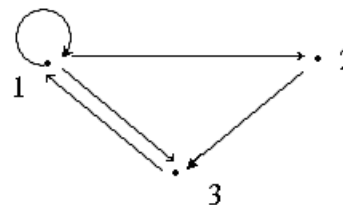
және  $B=\{b_1, \dots, b_n\}$  ақырлы жиындары және  $P \subseteq A \times B$  бинарлы қатынас берілсін. P бинарлы қатынастың  $[P]=(P_{ij})$   $m \times n$  мөлшерлі матрицасын төмендегі ережемен анықтаймыз:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } (a_i, b_j) \in P \text{ егер бинарлы аатына бар болса} \\ 0, & \text{егер } (a_i, b_j) \notin P \text{ егер бинарлы аатына жо болса} \end{cases}$$

Алынған бұл матрица элементтер арасындағы байланыс туралы толық ақпарат береді және оны компьютерге өрнектеу мүмкіндігі бар.

Мысалы. Суретте көрсетілгендей  $P \subseteq A^2$   $A=\{1,2,3\}$  бинарлы қатынасының матрицасы

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1)\}$$



**2-мысал.**  $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ . Егер  $P <$  қатаң кіші болуды білдірсе  $P \subseteq M \times M$  қатынасын тізім және матрица түрінде бейнелеу керек: P қатынасы M

жиынының  $a < b$  болатын элементтер жұбынан тұрады.  $P = \{(a,b) \mid a,b \in M; a < b\}$ . Олай болса,  $P$  қатынасын тізім және матрицамен беруге болады:  $P = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}$  ;

**Анықтама.** Кез-келген жиын үшін анықталған  $Id_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$  қатынасы тепе-теңдік қатынас немесе диагональ қатынас деп аталады, ал  $U_A \Leftrightarrow A^2$  универсалды немесе толық қатынас деп аталады. Айталық,  $P$  – бинарлы қатынас болсын.  $\delta_P \Leftrightarrow \{x \mid (x,y) \in P \text{ қандай да бір } Y \text{ үшін}\}$  жиыны  $P$  қатынасының анықталу облысы деп, ал  $\rho_P \Leftrightarrow \{y \mid (x,y) \in P \text{ қандай да бір } X \text{ үшін}\}$  жиыны  $P$  қатынасының мәндер жиыны деп аталады. Мысалы,  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  жиынының  $P = \{(x, y) \mid x, y \in A, y \text{ } x \text{ ке бөлінеді және } x \leq 3\}$  қатынасы үшін  $P = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)\}$  қатынасы мен  $x = \{3\}$  үшін анықталу облысы  $\delta_P = \{2,3\}$ . Мәндер аймағы  $\rho_P = \{2,3,4,6,8\}$ ;

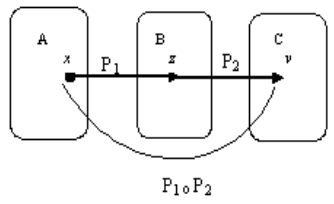
$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Бинарлы қатынастарға қолданылатын операциялар.**

Бинарлы қатынастар  $P \subseteq M_1 \times M_2$  ( $P \subseteq M^2, M_1 = M_2 = M$ ) жиын болғандықтан оларға жиынға қолданылатын барлық амалдар орындалады. Олар:

- 1. Бірігу  $P_1 \cup P_2$ ;  $P_1 \cup P_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in P_1 \text{ немесе } (a,b) \in P_2\}$
- 2. Қиылысу  $P_1 \cap P_2$ ;  $P_1 \cap P_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in P_1 \text{ және } (a,b) \in P_2\}$
- 3. Айырым  $P_1 \setminus P_2$ ;  $P_1 \setminus P_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in P_1 \text{ және } (a,b) \notin P_2\}$
- 4. Толықтауыш  $\bar{P}$ ;  $\bar{P} = U \setminus P$ , мұндағы  $U = M_1 \times M_2$  ( $U = M^2$ )
- 5. Кері қатынас  $P^{-1}$ ;  $P^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in P\}$ .

$P^{-1} \Leftrightarrow \{(y,x) \mid (x,y) \in P\}$  жиыны  $P$  қатынасына кері қатынас деп аталады. Мысалы,  $P$ -жас болу болса,  $P^{-1}$  үлкен болу,  $P$ -баласы болу болса,  $P^{-1}$  әкесі болу.  $P(x) = \{y \mid (x,y) \in P \text{ қандай да бір } x \text{ үшін}\}$   $X$  жиынының  $P$ -ға қатысты образы (бейнесі) деп, ал  $P^{-1}(x)$  –  $X$  жиынының  $P$ -ға қатысты прообразы деп аталады. Мысалы,  $A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$  жиыны берілсін.



$P = \{(x,y) \mid x,y \in A, y \text{ } x \text{-ке бөлінеді және } x \leq 3\}$  бинарлы қатынасына кері қатынас  $P^{-1} = \{(2,2), (4,2), (6,2), (8,2), (3,3), (6,3)\}$ ;  $X$ -ң  $P$ -ға қатысты образы  $P(x) = \{3,6\}$ ;  $X$ -ң  $P$ -ға қатысты прообразы немесе  $P^{-1}(x) = \{3\}$ .6 Бинарлы қатынастың көбейтіндісі немесе  $P_1$  мен  $P_2$  композициясы  $P_1 \circ P_2$ .

Айталық  $A, B, C$  жиындары және  $P_1, P_2$  қатынастары берілсін.  $P_1 \subseteq A \times B$  және  $P_2 \subseteq B \times C$  бинарлы қатынастарының көбейтіндісі немесе  $P_1$  мен  $P_2$  композициясы бар болады яғни  $(a,b) \in P_1 \circ P_2$  егер  $(a,z) \in P_1$  және  $(z,b) \in P_2$  болатындай  $z \in B$  элемент табылса;  $P_1 \circ P_2 = \{(a,b) \mid a \in A, b \in C \text{ және } (a,z) \in P_1\}$ .

Дербес жағдайда, егер  $P$  қатынасы  $M$  жиынында анықталған болса  $P \subseteq M^2$ , онда

$$P \circ P = \{(a,b) \mid (a,c), (c,b) \in P\}$$

Мысалы  $P$ -баласы болу болса, онда  $P \circ P$ -немересі болу.

### Бинарлы қатынастардың қасиеттері

1.  $A$  жиынында берілген бинарлы қатынас болсын:  $P \subseteq A^2$ . Кез-келген  $x \in A$  үшін  $x P x$  қатынасы бар болса,  $P$  қатынасы рефлексивті деп аталады. (бір жиын ішіндегі жұптар қатынасы мысалы бір қалада тұру - рефлексивті).

2. Егер  $x P x$  қатынасы  $A$  жиынның бір де бір элементі үшін орындалмаса  $P$  қатынасы антирефлексивті (баласы болу қатынасы - антирефлексивті). Антирефлексивті матрицаның бас диагоналы тек нөлдерден тұрады.

3. Егер кез-келген  $x, y \in A$  үшін  $(x, y) \in P \rightarrow (y, x) \in P$  болса, яғни  $P^{-1} = P$  немесе  $[P]^T = [P]$  болса,  $P$  қатынасы симметриялы деп аталады. Егер  $x \in A$   $y$  болудан  $y A x$  болса (бір фирмада жұмыс жасайды), онда  $A$  симметриялы.

4. Егер  $(x, y) \in P$  және  $(y, x) \in P$  болғандығынан  $x=y$  болса, яғни  $P \cap P^{-1} \subseteq Id_A$ , онда  $P$  қатынасы антисимметриялы деп аталады, яғни  $x P y$  және  $y P x$  қатынастары әртүрлі  $x$  пен  $y$ -тың ешқандай жұбында бір уақытта орындалмаса (баласы болу, бастық болу - антисимметриялы), онда бұл қатынас антисимметриялы.

5. Егер  $(x, y) \in P$  және  $(y, z) \in P$  болғандығынан  $(x, z) \in P$  болса, (яғни  $P \cdot P \subseteq P$ ) онда  $P$  – транзитивті қатынас деп аталады, яғни  $x P y$  және  $y P z$  болудан  $x P z$  болса (жасырақ болу, інісі болу)  $P$ -транзитивті болады.

**Ескерту: 1.** Антисимметрия мен симметрия емес ұғымдары бірдей емес. Мысалы  $A = \{1, 2, 3\}$  жиынындағы  $P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$  қатынасы симметриялы емес ( $(1, 2) \in P$ , ал  $(2, 1) \notin P$ ) антисимметриялы да емес, себебі  $(2, 3) \in P$ ,  $(3, 2) \in P$  бірақ  $2 \neq 3$

2.  $Id_A$  – қатынасы бір уақытта симметриялы да, антисимметриялы да болады.

### Бинарлы қатынастар матрицалдарының негізгі қасиеттері.

Егер  $P, Q \subseteq A \times B$ ,  $[P] = (p_{ij})$ ,  $[Q] = (q_{ij})$  болса, онда  $[P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij})$  және  $[P \cap Q] = (p_{ij} * q_{ij})$

мұндағы қосу  $[P \cup Q] = [P] + [Q]$ ,  $0 + 0 \Rightarrow 0$ ,  $1 + 1 \Rightarrow 1 + 0 \Rightarrow 0 + 1 \Rightarrow 1$  ережесімен, ал  $[P \cap Q]$  көбейту  $[P]$  мен  $[Q]$  сәйкес элементтерін тура көбейтуден алынады:  $[P \cap Q] = [P] * [Q]$

Мысалы,  $[P] = \begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix}$ ,  $[Q] = \begin{pmatrix} 011 \\ 001 \end{pmatrix}$  P,Q қатынастарының матрицасы

болса, онда  $[P \cup Q] = [P] \cup [Q] = \begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 011 \\ 001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 011 \end{pmatrix}$ ;

$[P \cap Q] = [P] * [Q] = \begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 011 \\ 001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 001 \\ 001 \end{pmatrix}$

Егер  $P \subseteq A \times B$ ,  $Q = B \times C$ , онда  $[P \cdot Q] = [P] \cdot [Q]$ ; Мұнда  $[P]$  және  $[Q]$  матрицаларын көбейту матрицаларды көбейтудің әдеттегі ережесімен, ал  $[P]$  мен  $[Q]$  алынған элементтердің көбейтіндісі мен қосындысы 1 пункттегі ережелермен жүргізіледі. Мысалы,

$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; онда  $[P \times Q] = \begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ ;

$P^{-1}$  кері қатынастың матрицасы P қатынасының транспонирленген матрицасы:  $[P]^{-1} = [P]^T$

$P \subseteq Q$ ;  $[P] = (p_{ij})$ ,  $[Q] = (q_{ij})$  болса, онда  $p_{ij} \leq q_{ij}$

### Эквивалентті қатынастар

**Анықтама** Рефлексивті, симметриялы және транзитивті R бинарлы қатынасы эквивалентті қатынас немесе жай ғана эквивалентті деп аталады. Эквиваленттілік E символымен немесе  $\sim$  белгісімен белгіленеді.  $x \in E$  немесе  $x \sim y$  Мысалы  $x=y$  болу қатынасы кез-келген A жиынында эквивалентті қатынас.  $x=x$ —болғандықтан рефлексивті.  $x=y \Rightarrow y=x \rightarrow$  симметриялы.  $x=y, y=z \Rightarrow x=z$ — транзитивті.

Адамдар жиынында бір қалада тұру эквиваленттік.

7 бөлгендегі бірдей қалдық болу қатынасы эквиваленттік.

$R = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}, a/7, b/7 \text{ қалдық бірдей}\}$  R – жиындағы эквиваленттік.

Бұл қатынас (11,46), (14,170) жұптарына орындалады. ҚазҰТУ студенттер жиынынан бір топқа жату эквиваленттілік—эквивалентті қатынас. Айталық, M жиынында R эквиваленттілігі берілсін (R эквивалентті қатынас берілсін). Белгілі бір тәртіппен M-ң ішкі жиындарын құрайық. Ішкі жиындарды класс деп атайық.  $C_1$ —класы  $a_1 \in M$  және оған эквивалентті элементтен құралсын;  $C_2$  – класы  $a_2 \in M$  және оған эквивалентті элементтерден құралсын т.с.с. осылай жалғаса берсін.  $C_1, C_2, \dots, C_i$  кластар жүйесі құралады. M жиынының кез-келген элементтері ең болмағанда бір класқа кіреді, яғни

$$\bigcup_i C_i = M$$

Бұл кластар жүйесінің мынадай қасиеттері бар: Олар бөлімдер құрайды, яғни кластар өзара қиылыспайды; Бір кластағы кез-келген 2 элемент эквивалентті; Әр кластан алынған кез-келген 2 элемент эквивалентті емес. Бұл қасиеттер R қатынасының рефлексивтілік, симметриялық және



транзитивтік қасиеттерінен шығады.  $M$  жиынынан осылай бөлшектеу, яғни кластар жүйесі  $R$  қатысты эквивалентті кластар жүйесі деп аталады. Бұл жүйенің қуаты бөлу индексі деп аталады.

### **Реттің қатынасы**

Егер қатынас рефлексивті, антисимметриялы және транзитивті болса, қатаң емес ретті қатынас деп аталады. Егер қатынас антирефлексивті, антисимметриялы және транзитивті, қатаң ретті қатынас деп аталады. Қатынастардың бұл екі түрі реттің қатынастары деп аталады. Мысал  $\leq$ ,  $\geq$  қатынастары қатаң емес,  $<$ ,  $>$  қатынастары қатаң. Бұл екі қатынастар  $N$ ,  $R$  жиындарын реттейді.

Бақылау сұрақтары:

1. Жиындағы қатынас дегеніміз не?
2. Бинарлы қатынасқа мысал келтіріп оның матрицасын құрыңыз.
3. Қандай бинарлы қатынас рефлексивті, симметриялы, транзитивті?
4. Қандай қатынастар эквиваленттілік, реттік деп аталады?
5. Бинарлы қатынасқа қолданылатын амалдар қандай? Рефлексивті, транзитивті тұйықтық дегендер не?

## 5. Дәріс тақырыбы. Математикалық логика элементтері

Математикалық логика жоғары математиканың бір (бөлімі) саласы болып табылады. Математикалық логиканың заңдары мен әдістері арқылы түрлі процестерге, жүйелерге, құбылыстарға зерттеулер жүргізуге болады. Математикалық логиканың негізгі объектілерінің бірі тұжырымдар.

### 1. Тұжырымдар мен тұжырымдар формасы.

**Анықтама.** Тұжырымдар деп деп ақиқаттығы немесе жалғандығы туралы айтуға болатын хабарлы сөйлемді айтамыз. Бүкіл ғылыми білімдер (физика, химия, биологияның заңдары мен құбылыстары, математика т.б) күнделікті өмірде болып жатқан оқиғалар, экономика мен басқару процесінде туындайтын түрлі ситуациялар тұжырымдар түрінде формальданады.

Сұраулы, лепті не болмаса мағнасыз сөйлемдер тұжырым бола алмайды. Тұжырымдарға мысалдар: «2 жерде 2-төрт» , «Біз 20 –шы ғасырда өмір сүріп жатырмыз», «Қосылғыштардың орны ауысқаннан қосынды өзгермейді» , «Астана- Қазақстанның астанасы», «Теңге-Қазақстан валютасы» , «Бүгін сейсенбі», «Егер жаңбыр жауып тұрса қол шатыр алыңыз» т.б тұжырымдар. «Математика- қызықты пән немесе қуырдақ дәмді тамақ» деген сөйлемдер де тұжырым емес, себебі бірдей пікір жоқ. «Бөлменің ауданы 20 м<sup>2</sup>», «Қар жауып тұр», « $a^2=4$ » деген сөйлемдер тұжырым емес , 1- сөйлемде нақтылы қандай бөлме екендігі көрсетілуі керек, екінші сөйлемде қайда қар жауып тұрғанын көрсететін қосымша сөз керек, үшінші сөйлем  $a = \pm 2$  (а-тұжырымдылық айнымалысы ) болғандықтан тұжырым бола алмайды. Бұл сөйлемдермен амалдар орындау үшін олардың әрқайысының ақиқаттық мәнін білу керек.

**Анықтама.** Құрамына ең болмаса бір айнымалы бар және айнымалылардың орнына мәндерін қойғанда тұжырымға айналатын сөйлем тұжырымдылық форма деп аталады.

Мысалы, Сан 7-ге бөлінеді;  $3x < 2$ ; Ол қара торы; Сан, x ол сөздерінің орнына белгілі бір мәндер қойылса , сөйлем тұжырымға айналады.

### Тұжырымдар логикасының негізгі логикалық байланыстырушылары.

Табиғи қарапайым сөйлемдерден құрмалас сөйлемдер құру үшін “ және “, “ немесе “, “егер ... онда “, “ сонда ... тек сонда ғана “ сияқты шылаулар қолданылатындығы белгілі.

Тұжырымдар теориясында да элементар тұжырымдардан күрделі тұжырымдар құрастыруға болады. Айталық P, Q логикалық тұжырымдар болсын. Оларға кестедегідей логикалық байланыстар қолданылады: Логикалық байланыстырушылар арқылы құрылған құрама

аталуы	сқалуы	белгіленуі
Логикалық терістеу конъюнкция	терістеу және	$\neg$ &
дизъюнкция	немесе	$\vee$
импликация	егер ... онда	$\Rightarrow$
эквиваленция	эквивалентті	$\Leftrightarrow$

тұжырымдардың ақиқат не жалғандығы, оның құрамына кіретін қарапайым тұжырымдардың ақиқаттық мәндерімен анықталады.

### Тұжырымдарға қолданылатын амалдар

**1. Анықтама.** Терістеу (инверциясы)  $A$ -ның инверсиясы деп  $A$  жалған болса мәні ақиқат, ақиқат болса жалған болатын тұжырымды айтады.  $\bar{A}$  болып белгіленеді,  $A$  емес,  $A$  деген дұрыс емес болып оқылады. Мысалы,

$A$	$\bar{A} (\neg A)$
а	ж
ж	а

1. «3-2 ге тең» тұжырымын  $A$  десек, «3-2 ге тең емес» тұжырымын  $\bar{A}$  - дейміз.

2. Кез келген шеңберге іштей үшбұрыш сызуға болады дегенді- $A$  десек, кез келген шеңберге іштей үшбұрыш сызуға болады деу дұрыс емес- $\bar{A}$ .

Конъюнкция мен дизъюнкция. Айталық,  $A$  мен  $B$  кез-келген тұжырымдар болсын. Тұжырымның ақиқат белгісін а әрпімен, жалған белгісін ж әрпімен белгілейік.

**2. Анықтама.**  $A$  мен  $B$  тұжырымдарының конъюнкциясы деп (логикалық көбейтінді немесе «және» операциясы)  $A$  мен  $B$  екеуі де ақиқат болса мәні ақиқат, әйтпесе (екеуі де жалған болса) жалған болатын тұжырымды айтамыз.

$A$	$B$	$A \wedge B$
а	а	а
а	ж	ж
ж	а	ж
ж	ж	ж

Конъюнкция  $\wedge, * , \&$  белгілерімен белгіленеді.

$A \& B; A \wedge B; A * B.$

**3. Анықтама.**  $A$  мен  $B$  дизъюнкциясы деп мәні  $A$  мен  $B$  тұжырымының екеуі де жалған болғанда мәні жалған, ал қалған жағдайларда ақиқат болатын тұжырымды айтамыз. Дизъюнкция  $\vee$  белгісімен белгіленеді.  $A \vee B; A$  немесе  $B$  – болып оқылады. Сонымен «және», «немесе» логикалық байланыстырушылар арқылы байланысқан тұжырымдар құрама тұжырымдар болады. «Және», «немесе» логикалық байланыстырушылар арқылы жаңа құрама тұжырымдар алуды логикалық операция дейміз. Арифметикалық операцияларда операция және оның нәтижелері әртүрлі аталады: қосылғыш, қосынды, көбейтінді. А логикалық операцияларда операнд пен нәтиже бірдей аталады. Сонымен конъюнкция мен дизъюнкция анықтамасын құрама тұжырымның қайсысына болса да қолдануға болады.

$A$	$B$	$A \vee B$
а	а	а
а	ж	а
ж	а	а
ж	ж	ж

$N$  тұжырымның конъюнкциясы деп  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$  түріндегі сөйлем құрамындағы барлық тұжырымдар ақиқат болғанда ғана ақиқат болатын сөйлемді айтамыз.

$N$  тұжырымның дизъюнкциясы деп  $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$  түріндегі сөйлем құрамындағы барлық тұжырымдар жалған болған сөйлемді айтамыз.

## Импликация және эквиваленция

**4. Анықтама.** Импликация (логика). Екі  $A$  мен  $B$  тұжырымдарының импликациясы деп  $A$ –ақиқат,  $B$  жалған болғанда мәні жалған, ал қалған жағдайда ақиқат болатын тұжырымды айтамыз. Операция  $\rightarrow$  (Егер... онда) белгімен белгіленеді.  $A \rightarrow B$ ,  $A \supset B$  ( егер  $A$  болса, онда  $B$ ) ( $A$  дан  $B$ ) болып оқылады. Мұнда  $A$ –тұжырымының алғы шарты деп ал  $B$  қорытындысы деп аталады.

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
а	а	а
а	ж	ж
ж	а	а
ж	ж	а

**5. Анықтама.** Эквиваленция  $A$  мен  $B$  тұжырымының ақиқаттық мәндері бірдей болғанда, мәндері ақиқат, әр түрлі болғанда ( $A, B$ ) жалған болатын тұжырым эквивалентті тұжырым деп аталады. Белгілеулері:  $A \approx B$ ;  $A \equiv B$ ;  $A \leftrightarrow B$ ;  $A$  эквивалентті  $B$ -ға ; Егер тек  $B$  болғанда  $A$  ;  $A$  мен  $B$  бір мәнді,  $A$  мен  $B$  сонда ғана ақиқат, егер  $A, B$  тұжырымдарының екеуі де не ақиқат, не жалған болса. болып оқылады.

$A$	$B$	$A \leftrightarrow B$
а	а	а
а	ж	ж
ж	а	ж
ж	ж	а

**6. Анықтама.** 2-нің модулі бойынша қосу. Бір мәнді емес тұжырым. («немесе»-ні терістеу, антиэквиваленция, 2-ң модулі бойынша қосу).  $A$ -мен  $B$ - ң ақиқаттық мәндері бірдей болмаса мәні ақиқат, керісінше бірдей болса жалған болатын тұжырым бір мәнді емес тұжырым деп аталады.  $A \oplus B$ ,  $A \Delta B$ ,  $A \div B$  болып белгіленеді ( не  $A$ , не  $B$  болып оқылады).

$A$	$B$	$A \oplus B$
а	а	ж
а	ж	а
ж	а	а
ж	ж	ж

## Шеффер штрихы және Пирс стрелкасы

**7. Анықтама**  $A|B$  Шеффер штрихы деп аталады  $\overline{A \& B}$  (антиконъюнкция).

**8. Анықтама.**  $A \downarrow B$ –Пирс стрелкасы (антидизъюнкция)  $\overline{A \vee B}$

$A$	$B$	$A \downarrow B$
а	а	ж
а	ж	ж
ж	а	ж
ж	ж	а

## Логика алгебрасы.

Логика алгебрасы математикалық логиканың бір бөлімі. Логика алгебрасында күрделі логикалық тұжырымдардың (логикалық формулалардың) құрылымы және алгебралық әдістердің көмегімен олардың ақиқаттығын анықтау әдістері қарастырылады.

Бұл бөлімде негізінен логика алгебралық формулаларын қарастыратын боламыз.

Формулалар әріптерден, логикалық операциядан және жақшадан тұрады. Әріптер тек “ақиқат”, “жалған “ деген екі мәннің бірін ғана қабылдай алатын логикалық айнымалылар. Операция белгілері логикалық амалдарды белгілейді. Әр формула логикалық функцияны береді, ал функция өз кезегінде 2 мәннің бірін қабылдайды (0,1). Логика алгебрасы дегеніміз өзінің барлық мүмкін операцияларымен бірге қарастырылатын  $\{0,1\}$  жиынынан құралған алгебра.

**Тұжырымдар логикасының тілі** Айталық  $X, Y$  және  $Z$  орындарына кез – келген тұжырымды қоюға болатын айнымалылар болсын. Мұндай

айнымалылар тұжырымдылық айнымалылары деп аталады. Тұжырымдылық айнымалылар мен логикалық операциялар символдарының көмегімен кез – келген тұжырымды формальдандыруға, яғни формуламен алмастыруға болады.

Мысалы, мына тұжырымды егер 100 2-ге және 5ке бөлінсе, онда 100 10ға бөлінеді деген тұжырым берілсін:  $X : 100$  2-ге бөлінеді;  $Y : 100$  5-ке бөлінеді;  $Z : 100$  10-ға бөлінеді

Бұл тұжырымды  $(X \wedge Y) \rightarrow Z$  формуласы арқылы кескіндеуге болады.

Енді тұжырымдар логикасының формуласы ұғымын толықтырайық. Ол үшін тұжырымдар логикасында қолданылатын алфавит ұғымын енгізейік.

$X, Y, Z, x_i, y_i, z_i$  ( $i$ - натурал сан)  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  тұжырымдылық айнымалылары;

$a, ж$  – ақиқат, жалған логикалық тұрақтарды белгілейтін символдар;

$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ , - логикалық операциялар символдары;

$(, )$ -логикасы операциясының ажыратушы;

### **Тұжырымдар логикасы формуласының анықтамасы**

**Анықтама.** Егер  $A$  – формуласының барлық айнымалылары  $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$  реттелген жиынтығына жатса, онда бұл  $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$  жиынтығы  $A$  формуласының айнымалылар тізімі деп аталады. Тізімдегі айнымалылардың бір бөлігі  $A$  ға айқын кірмеу мүмкін. Оларды жасанды айнымалы дейміз.

**Анықтама.** Тізімдегі әр айнымалыға ақиқаттық мән сәйкестендіруді айнымалылар тізімін бағалау дейміз. Егер  $A$  формуласының айнымалылар тізімінде  $k$  айнымалы болса онда  $2^k$ – ке тең бағалар болады, демек ақиқаттың кестесінде  $2^k$  – тең жол болады.

Тұжырымдарды белгілейтін әріптер, логикалық байланыстар, жақшалар логикалық тұжырым тілінің алфавиті деп аталады. Алфавит элементтерінің көмегімен түрлі формулалар құруға болады. Математикалық логикада қабылданғандай формулаға нақтылы анықтама берейік:

**Анықтама.** Тұжырымдардың белгілері және логикалық байланыстырушылармен (жақшада көрсетілген) құрылған өрнек логикалық формула деп аталады, егер ол төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

Тұжырымдарды белгілейтін кез келген логикалық айнымалы - формула;

$A, Ж$  – символдары формула

Егер  $A$  – формула болса, онда  $\neg A$  формула

Егер  $A$  и  $B$  – формулалар болса, онда  $(A \& B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \sim B)$ ,  $(P \oplus Q)$  – формула болады;

Алдыңғы төрт пункттегіден басқа формула жоқ.

### **Тұжырымды формальдау процедурасы**

Егер тұжырым қарапайым болса, оған қарапайым формула сәйкестендіріледі.

Егер тұжырым құрама болса, онда оған сәйкес формула құру үшін

а) Құрама тұжырым құрып тұрған барлық қарапайым тұжырымдарды байланыстырушылардан бөліп алу керек;

б) Оларды сәйкес символдармен алмастыру керек;

в) Тұжырымдардың мағынасына қарай жақшалар қою керек. Формула қарапайым болу үшін сыртқы жақшаларды жазбауға болады; Жақшалар сыңарлары тең болу керек. Мысалы,  $(x_1 \wedge x_2) \supset x_3 \neg x_1$  - формула емес;  $(\neg x_1 \supset x_2) \vee x_1$  - формула;  $(x_1 \sim x_2) \supset \neg x_3$  - формула.

### Логикалық тұжырымдар формулаларының эквиваленттілігі.

**Анықтама.** Айталық А мен В бір айнымалылар тізіміне  $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$  тәуелді екі формула болсын. Егер олар  $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$  тізімінің кез-келген бағасында бірдей мәндер қабылдаса оларды эквивалентті формулалар деп атайды.

**Анықтама.** Егер  $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  және  $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  формулаларының ақиқаттық кестелері бірдей болса бұл формулалар эквивалентті деп аталады және « $\sim$ », « $\equiv$ », « $\leftrightarrow$ » белгілерінің бірімен көрсетіледі. Екі формуланың эквиваленттілігін білудің стандартты тәсілі екеуінің ақиқаттық кестесін құрып, алынған нәтижені салыстыру болып табылады. Мысалы:  $(x \rightarrow y) \sim (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$  формулаларының эквиваленттігін мына ақиқаттық кестеден көруге болады.

Алынған ақиқаттық кесте әрбір құрама бойынша салыстырылады. Эквивалент формулалардың мынадай қасиеттері бар:

x	y	$x \rightarrow y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{y} \rightarrow \bar{x}$
	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

### Буль алгебрасының негізгі эквивалентті қатынастары (заңдары)

1. Конъюнкция мен дизъюнкцияның ассоциативтілігі

а)  $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ ; б)  $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

2. Конъюнкция мен дизъюнкцияның коммутативтілігі

а)  $x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$ ; б)  $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$

3. Конъюнкцияның дизъюнкцияға қатысты дистрибутивтілігі (Дизъюнкцияның конъюнкцияға қатысты дистрибутивтілігі).

а)  $x_1 \& (x_2 \vee x_3) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& x_3)$ ; б)  $x_1 \vee (x_2 \& x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$

4. Идемпотенттілік

а)  $x \& x = x$ ; б)  $x \vee x = x$

5. Қос терістеу заңы.  $\bar{\bar{x}} = x$

6. 0 мен 1 константаларының қасиеттері:

- а)  $x \wedge 1 = x$ ; в)  $x \vee x = 1$ ; д)  $\bar{0} = 1$ ;  
 б)  $x \wedge 0 = 0$ ; г)  $x \vee 0 = x$ ; е)  $\bar{1} = 0$ ;

7. Морган заңдары:

а)  $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ ; б)  $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$

Қарама- қарсылық заңдары:

а)  $x \& \bar{x} = 0$  ( $x \& \bar{x} = \text{ж}$ )

б)  $x \vee \bar{x} = 1$  ( $x \vee \bar{x} = \text{а}$ )

Бұл негізгі эквиваленттік қатынастардың ерекшелігі, олар бір – бірінен шықпайды, олардың дұрыстығына, стандартты әдіспен ғана (ақиқат тық кесте) көз жеткізуге болады.

**2-модулі бойынша қосу, импликация, Шеффер және Веб операцияларының қасиеттері.**

Импликация мен 2 модулі бойынша қосу функцияларының қасиеттері дискретті құрылыстарды анализдеу, синтездеу кезінде пайдалы.

2-нің модулі бойынша қосу операциясы үшін ассоциативті, коммутативті заңдар және конъюнкцияға қатысты дистрибутивті (распределит) заңы бар.

1.  $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$  коммутативтілік

2.  $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$  ассоциативтілік

3.  $x_1 \& (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \& x_2) \oplus (x_1 \& x_3)$

бұларға қоса

1.  $x \oplus x = 0$ ; 2.  $x \oplus 0 = x$ ; 3.  $x \oplus 1 = \bar{x}$ ; 4.  $x \oplus \bar{x} = 1$ ;

және  $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \& x_2$

$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} = \overline{(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)}$

формулалары бар.

Импликация үшін коммутативті, ассоциативті заңдар жоқ.

$x \rightarrow x = 1$ ;  $x \rightarrow \bar{x} = \bar{x}$ ;  $x \rightarrow 1 = 1$ ;

$x \rightarrow 0 = \bar{x}$ ;  $0 \rightarrow x = 1$ ;  $1 \rightarrow x = x$ ;

$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_1$ ;  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 = x_1$

Шеффер және Веб функциялары үшін коммутативті (переместит) заң бар.

$x_1 \mid x_2 = x_2 \mid x_1$

$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$

ассоциативті заң бұлар үшін орындалмайды.

$x_1 \mid (x_2 \mid x_3) \neq (x_1 \mid x_2) \mid x_3$

$x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3$

Және мына заңдар орындалады.

$x   x = \bar{x}$	$x \downarrow x = \bar{x}$	$x_1   x_2 = \overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
$x   \bar{x} = 1$	$x \downarrow \bar{x} = 0$	$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$
$x   1 = \bar{x}$	$x \downarrow 1 = 0$	
$x   0 = 1$	$x \downarrow 0 = \bar{x}$	

Шеффер мен Веб функциялары бір-бірімен дизъюнкция мен конъюнкцияға арналған Морган заңдары сияқты заңдылықтармен байланысқан.

а)  $x_1 | x_2 = \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}}$ ; в)  $x_1 \downarrow x_2 = \overline{\overline{x_1} | \overline{x_2}}$

Жалпылама формулалар.  $\&$ ,  $\vee$  операциялары ассоциативті болғандықтан  $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n$ ,  $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$  өрнектерінде жақша қоймауға болады. Бірінші өрнек көп мүшелі конъюнкция, екіншісі көпмүшелі дизъюнкция. Бұлар дистрибутивті заңға және Морган заңдарына бағынады:

Дистрибутивті заң:

$$\begin{aligned} (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_l) &\equiv (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge \dots \\ &\wedge (A_1 \vee B_l) \wedge (A_2 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2) \wedge \dots \wedge (A_2 \vee B_l) \wedge \\ &\dots \dots \dots \dots (A_k \vee B_1) \wedge (A_k \vee B_2) \wedge \dots \wedge (A_k \vee B_l) \wedge (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \\ &\wedge A_k) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_l) \equiv \\ (A_1 \wedge B_1) \vee (A_1 \wedge B_2) \vee \dots \vee (A_1 \wedge B_l) \vee (A_2 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2) \vee \dots \vee ( \\ A_2 \wedge B_l) \vee \\ \dots \dots \dots (A_k \wedge B_1) \vee (A_k \wedge B_2) \vee \dots \vee (A_k \wedge B_l) \vee \end{aligned}$$

Көп мүшелі конъюнкция мен дизъюнкцияға да Морган заңдарын қолдануға болады.

- $\overline{(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k)} \equiv (\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \dots \vee \overline{A_k})$
- $\overline{(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_k)} \equiv (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \dots \wedge \overline{A_k})$
- $x \vee x \vee \dots \vee x = x$
- $x \wedge x \wedge \dots \wedge x = x$
- $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \overline{\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n}}$
- $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n}}$

**Эквивалентті түрлендірулер. Формулаларды ықшамдау.**

Эквивалентті формулаларда бір айнымалыны (барлық жерінде) басқа бір формуламен ауыстырсақ, жаңадан алған формула тағы да эквивалентті болып шығады.

Мысалы, мына формуланың  $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$  эквиваленттігін жоғарыда стандартты әдіспен дәлелдедік яғни ол тавтология. Ал енді бұл формуладағы  $x$ -ң орнына  $\overline{x}$  қойсақ,  $\overline{y}$ -ң орнына  $\overline{x \wedge y}$  қойсақ жаңа эквивалентті формула аламыз.  $\overline{X \wedge (X \wedge Y)} \equiv \overline{X} \vee \overline{X \wedge Y}$



Егер қандай да бір F формуланың құрамына кіретін F1-ді оған эквивалентті F2 формуласымен алмастырсақ, алынған формула F-ке эквивалентті болып шығады.

Осыған байланысты

$$\overline{\overline{X \vee X \wedge Y}} \equiv X \vee \overline{\overline{X \wedge Y}} \text{-қос терістеу заңы бойынша}$$

$$X \vee \overline{\overline{X \wedge Y}} \equiv X \vee (\overline{\overline{X \vee Y}}) \text{-Де Морган заңы бойынша}$$

$$X \vee (\overline{\overline{X \vee Y}}) \equiv X \vee (X \vee \overline{Y}) \text{-қос терістеу заңы}$$

$$X \vee (X \vee \overline{Y}) \equiv (X \vee X) \vee \overline{Y} \text{-ассоциативті заң бойынша}$$

$$(X \vee X) \vee \overline{Y} \equiv X \vee \overline{Y} \text{-идемпотентті заңы бойынша}$$

Эквиваленттік қатынастың транзитивті қасиетіне байланысты жоғарыдағы формулалар тізбегінің 1-шісімен соңғының эквиваленттігін жазуға болады.

$$\overline{\overline{X \vee X \wedge Y}} \equiv X \vee \overline{Y}$$

Логиканың аталған заңдарына формулаларды қысқартқанда жиі қолданылатын тағы бірнеше эквиваленттіктерді қосуға болады.

**Анықтама.** Формуланы оған эквивалентті (мәндес) басқа формуламен ауыстыруды эквивалентті түрлендіру дейміз.

### Формулаларды ықшамдау.

Формуланы ықшамдау деп ( $\rightarrow, \leftrightarrow, \equiv$  -қос терістеу белгілері жоқ формулаға түрлендіретін немесе алғашқыға қарағанда  $\wedge, \vee$  белгілері аз формулаға түрлендіруді айтамыз. Негізгі эквиваленттік қатынастардан басқа формулаларды ықшамдау үшін төмендегідей эквивалентті қатынастар қолданылады.

1. Жұтылу заңдары.

$$X \wedge (X \vee Y) \equiv X ;$$

2. Желімдеу заңдары.

$$(X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Y) \equiv Y ;$$

3. Жалпылама желімдеу заңы.

$$XZ \vee \overline{Y}Z \vee XY \equiv XZ \vee \overline{Y}Z$$

$$4. x \vee \overline{x} \wedge y = x \vee y ;$$

$$5. \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = x_1 \wedge x_2$$

$$6. \overline{\overline{x_1 \wedge x_2}} = x_1 \vee x_2$$

7. Импликацияны дизъюнкция, конъюнкция және терістеу арқылы байланыстыратын төмендегідей формулалар бар.

$$7.1 \overline{x_1} \rightarrow x_2 \equiv x_1 \vee x_2$$

$$7.2 \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2} \equiv x_1 \vee x_2$$

$$7.3 \overline{\overline{x_1 \rightarrow x_2}} \equiv x_1 \wedge x_2$$

$$7.4 \quad x_1 \rightarrow x_2 \equiv \overline{x_1 \wedge x_2}$$

8. Эквиваленцияның дизъюнкция, конъюнкция және терістеу арқылы өрнектелуі

$$8.1 \quad x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv ((x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)) \equiv (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x_1})$$

$$8.2 \quad x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$$

$$8.3 \quad x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x_1})$$

$$8.4 \quad x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv \overline{x_1 \wedge x_2} \wedge \overline{x_2 \wedge x_1}$$

Кейде формулаларды қысқарту үшін конъюнкция белгісін жазбайды.

$(X \wedge Y) \vee Z$  - өрнегін  $\overline{X \vee Z} \vee \overline{Y}$ , деп ал  $X(Y \vee Z) \vee \overline{X}$  - өрнегін  $(X \wedge (Y \vee Z)) \vee \overline{X}$  деп түсіну керек.

**Импликация мен эквиваленцияны конъюнкция, дизъюнкция, терістеу арқылы өрнектеу.**

$\rightarrow, \leftrightarrow$  белгілері бар кез-келген формуланы  $\rightarrow, \leftrightarrow$  белгілері жоқ басқа эквивалентті формуламен ауыстыруға болатының дәлелдейміз.

Айталық  $X \rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y$  (1)  $X \rightarrow Y \equiv \overline{X \wedge \overline{Y}}$  (2) формулалары белгілі болсын. Бірінші формулада импликация дизъюнкция мен терістеу арқылы, ал екінші формуладағы импликация конъюнкция мен терістеу арқылы өрнектеліп тұр. Мына эквиваленцияны  $X \leftrightarrow Y \equiv (X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X)$  (3) конъюнкция, импликация арқылы өрнектеуге болатындығын көрсетейік.

Тексеру:

X	Y	$X \rightarrow Y$	$Y \rightarrow X$	$(X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X)$	$X \leftrightarrow Y$
а	а	а	а	а	а
а	ж	ж	а	ж	ж
ж	а	а	ж	ж	ж
ж	ж	а	а	а	а

(3) пен (1) ден  $X \leftrightarrow Y \equiv (\overline{X} \vee Y) \& (Y \vee \overline{X})$  (4) (конъюнкция, дизъюнкция, терістеу) (3)-пен (2)-ден  $X \leftrightarrow Y \equiv \overline{(\overline{X \wedge \overline{Y}})} \wedge \overline{(\overline{X \wedge \overline{Y}})}$  (5) (конъюнкция, терістеу)

**Буль функциялары. Буль функцияларының тұжырымдар формулаларымен өрнектелуі. Суперпозиция**

**Анықтама:** Аргументтері де, өзі де 0 және 1 мәндерін қабылдайтын  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясы Буль функциясы деп аталады.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясының аргументтері  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сәйкес  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  мәндерін қабылдасын  $(x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n)$ .  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  мәндер құрамасы деу атау келісілген.  $n$  – құрамасының ұзындығы деп аталады. Әр құрама 2-лік жүйе

цифрларынан тұрады және оларға(құрамаларға) нөмір беру келісілген. Құрамаларды нөмірлерінің табиғи өсу ретімен орналастырады. Мысал:  
 $n=3$

$n=3$  000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111; - 8 құрама

$n=4$  0000; 0001; 0010; 0101; 0100; 0101; 0110; 0111;

1000; 1001; 1010; 1011; 1100; 1101; 1110; 1111;- 16 құрама

Құрамалардың осылайша табиғи нөмірлерінің өсуімен орналасуын стандартты орналасу дейміз. Ұзындығы  $m$ -ге тең  $N$ -элементтен жасалған орналасулардың саны  $N^m$  екендігі белгілі. Бұдан ұзындығы  $n$ -ге тең 0 мен 1 жасалған барлық функциялардың саны  $2^n$  тең екендігін көреміз.  $n$ -аргументтен тұратын барлық функциялардың саны  $2^{2^n}$  тең. 0,1-константаларын 0-орынды Буль функциясы деу керек. Әрбір логикалық функцияны сол жағында барлық  $2^n$ -құрамалар (айнымалының мәндері ұзындығының  $n$ -ге тең екілік вектор), ал оң жағында осы құрамадағы функцияның мәні орналасқан кесте арқылы беруге болады.

Мысалы, 3 айнымалыдан тәуелді  $f(x_1, x_2, x_3)$  функцияларын мына таблицамен беруге болады. Кестенің әр жолында айнымалылардың мәндерінен тұратын құрамалар

$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	0	...	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	...	1	0	$f(1, 1, \dots, 1, 0)$
1	1	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

және осы құрамаға сәйкес функцияның мәні орналасқан.

Логикалық функцияның мәнін 1-ге тең ( $f=1$ )ететін айнымалылардың жиынтығы  $f$  – функцияның бірлік жиынтығы деп аталады. Бірлік жиын тықтар  $f$  – функцияның бірлік жиыны деп аталады Осыған ұқсас  $f=0$  болатын мәндер жиынтығы  $f$  – функцияның нольдік жиыны деп аталады.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функция суреттегідей ақиқаттық кестемен анықталады. Егер  $f$  буль функциясы мен  $\varphi$  формуласының ақиқаттық кестелері бірдей болса,  $\varphi$  формуласы  $f$  функциясын өрнектейді деп айтамыз

Егер  $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  болса  $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  формуласындағы  $x_i$  аргумент маңызсыз (фиктивный) деп аталады. Бұл жағдайда  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Шын мәнінде  $f$ - $n$  айнымалыдан тәуелді, ал  $g-f$ -тен маңызсыз айнымалыны шығарып тастағаннан алынды дейді. Нөлден немесе бірден тұратын құрамалардағы 0 немесе 1 мәнін қабылдайтын  $f(x_1, \dots, x_n)$  функциясы тұрақты деп аталады.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$ ;  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$ .

### Логикалық алгебраның элементар функциялары.

Логикалық алгебрада бір немесе 2 айнымалысы бар унарлы, бинарлы операциялар көп қолданылады. Бір айнымалысы бар барлық логикалық функциялар жиынтығы кестеде берілген.  $\varphi_0, \varphi_3$ - 0,1 тұрақтылары. Олардың мәндері  $x$ -тен тәуелсіз. Демек  $x$ -ң мәні оларға маңызсыз (фиктивная).

$$\varphi_0(0) = 0; \varphi_0(1) = 0$$

$$\varphi_3(1) = 1; \varphi_3(0) = 1$$

-x-мәніне тәуелсіз  $\varphi_1(x) = x$  - x -

x	$\varphi_0$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	0	x	$\bar{x}$	1

ті қайталайды;  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $\varphi_1(1) = 1$ ,  $\varphi_2(x) = x$ -ң терістеуі деп

аталады  $\bar{x} = \varphi_2(x)$  айнымалысы бар логикалық функциялардың жиынтығы төменде берілген. 16 функция бар

Мысалы,  $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 \& x_2 = x_1 \wedge x_2$ —конъюнкция деп аталады.

$\varphi_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$  (логикалық қосу, «немесе» операциясы)

1.  $\varphi_0, \varphi_{15}$  - константалар

2. конъюнкция :  $\varphi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x_1 = x_2 = 1 \\ 0, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$

3. импликацияға кері функция:

$\varphi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x_1 = 1, x_2 = 0 \\ 0, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$

4.  $\varphi_3(x_1, x_2) = x_1$

5.  $\varphi_4(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x_1 = 0 \& x_2 = 1 \\ 0, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$

6.  $\varphi_5(x_1, x_2) = x_2$

7. 2-ң модулі бойынша қосу.  $x_1 \oplus x_2, (x_1 \nabla x_2)$ :

$\varphi_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = \begin{cases} 0, & \text{егер } x_1, x_2 \text{ ақиқаттық мәндері бірдей болса} \\ 1, & \text{егер ақиқаттық мәндер ер т\%орліболса} \end{cases}$

8. Дизъюнкция:  $\varphi_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0, & \text{егер } x_1 = x_2 = 0 \\ 1, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$

9. Пирс бағыты:  $\varphi_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \begin{cases} 1, & \text{егер } x_1 = 0 \& x_2 = 0 \\ 0, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$

10. Эквиваленция:

$\varphi_9(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2 = \begin{cases} 1, & \text{егер } x_1, x_2 \text{ ақиқаттық мәндері бірдей болса} \\ 0, & \text{егер ақиқаттық мәндер ер т\%орліболса} \end{cases}$

11.  $\varphi_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_2$

12.  $\varphi_{11}(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2 = \begin{cases} 0, & \text{егер } x_1 = 0 \& x_2 = 1 \\ 1, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$

13.  $\varphi_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$

14. импликация :  $(x_1 \rightarrow x_2)$

$\varphi_{13}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \begin{cases} 0, & \text{егер } x_1 = 1 \& x_2 = 0 \\ 1, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$

15. Шеффер штрихы:  $x_1 | x_2$

$$\varphi_{14}(x_1, x_2) = x_1 | x_2 = \begin{cases} 0, & \text{егер } x_1 = x_2 = 1 \\ 1, & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$$

16. константа:  $\varphi_{15}(x_1, x_2) = 1$

Бұл 16 функцияның ішінен  $\varphi_0, \varphi_{15} - 0$  және 1 константалары, яғни екі маңызсыз айнымалы функция. Қалғандардың ішінен жиі қолданылатындары:

Конъюнкция: $\varphi_1 = x_1 \& x_2$	Пирс стрелкасы немесе Вев функция : $\varphi_8 = x_1 \downarrow x_2$
Дизъюнкция: $\varphi_7 = x_1 \vee x_2$	Шеффер функциясы : $\varphi_{14} = x_1   x_2$ ;
Эквивалентция: $\varphi_9 = x_1 \sim x_2$	2-модулі бойынша қосу: $\varphi_6 = x_1 \oplus x_2$
Импликация: $\varphi_{13} = x_1 \rightarrow x_2$	терістеу $\varphi_{12} = \overline{x_1}$

элементар функциялар болып есептеледі.  $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \downarrow, \rightarrow, \leftrightarrow,$

Үш және одан көп айнымалысы бар функциялар ақиқаттық кесте арқылы және айнымалылардың символдары және оларға қолданылған унарлы, бинарлы операциялардың символдарынан тұрады. Мысалы;  $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2) \rightarrow (x_1 \wedge x_3)$  функция  $x_1, x_2, x_3$  символдарынан және  $(\wedge), (\rightarrow), (\neg), (\vee)$  операцияларынан тұрады. Сонымен формулалар ақиқаттық кестеге қоса функцияны (берілу) өрнектеу және есептеу үшін қолданылады. Жалпы жағдайда формулалар логикалық функцияны басқа элементар функциялардың суперпозициясы түрінде сипаттайды.

### Суперпозициялар

**Анықтама.** Функция аргументтерінің орнына элементар немесе басқа да функцияларды  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  қою арқылы алынған жаңа функция  $(F)$  функциясы  $f_1, f_2, \dots, f_k$  функцияларының суперпозициясы деп аталады. Мысалы, терістеу, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция функциялары арқылы олардың суперпозициясы болып табылатын логикалық алгебраның жаңа функцияларын жазуға болады:

$$x_2 \rightarrow x_1; \overline{x_1 \vee x_2}; (x_1 \vee x_2) \rightarrow (\overline{x_1 \vee x_3}); ((x \sim x_3) \vee x_1) \rightarrow (x_2 \rightarrow \overline{x_1}) \text{ т.б}$$

Егер формулада операция таңбасы аргументтердің арасында тұрса, ондай жазуды инфиксті жазу деп атайды.  $f_1 = x_3 \vee x_1$ ;  $f_2 = x_1 \oplus x_2$ ;  $f_3 = x_1 \wedge (f_2)$ ;  $f_4 = (x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \& (x_1 \oplus x_2))$ ;

Элементар функциялардың ақиқаттық кестесі арқылы олардың суперпозициясы болып табылатын кез келген функцияның ақиқат кестесін анықтауға болады.

$f(x_1, x_2, x_3) = \{[(\overline{x_1} \sim x_3) \vee (x_1 \downarrow x_2)] \uparrow (x_1 \oplus x_2)\} \rightarrow x_3$  функциясын ақиқаттық кесте арқылы өрнектеу керек болсын;

Жақшаларды қою ретіне логика алгебрасында арнаулы келісімдер қабыл данған: Сыртқы жақшалар жазылмайды. Мысалы,  $((x \vee y) \rightarrow z)$

өрнегінің орнына  $x \vee y \rightarrow z$  жазуға болады. Операциялардың орындалу приоритеттері:

(  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $|$ ,  $\downarrow$ ,  $\oplus$ ,  $,$  );

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \approx x_3$	$x_1 \downarrow x_2$	[ ]	$x_1 \oplus x_2$	{ [ ] $\wedge$ ( ) }	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

Мысалдар:

1.  $x \wedge u \wedge z$  өрнегі  $((x \wedge u) \wedge z)$  болып жазылады.

2.  $x \vee y \leftrightarrow z \rightarrow u$  өрнегі  $((x \vee y) \leftrightarrow (z \rightarrow u))$  болып жазылады.

3.  $x \oplus y \leftrightarrow \overline{z} \rightarrow u \vee v \wedge w \downarrow x$  у өрнегі  $((x \oplus y) \leftrightarrow (\overline{z} \rightarrow (u \vee ((v \wedge w) \downarrow x))))$  болып жазылады

4.  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$  өрнегінде жақшаны қалдыруға болмайды. Жақшасыз жазылса  $(x \rightarrow \overline{y}) \rightarrow z$  болып кетеді.

Логикалық алгебра функциясын бульдік функция, екілік функция (двоичная) немесе ауыстырып қосқыш (переключательная) функция деп атайды. Буль функциялары арқылы қандай да бір құрылғыға берілген сигналдардың қортынды сигналға түрленуін белгілеуге болады. Мысалы, суретте көрсетілгендей құрылғының n нүктеден тоқ қабылдау мүмкіндігі бар. Құрылғыларға берілген токқа байланысты  $x_i=1$  айнымалының мәні токтың i-ші нүктеге берілуін көрсетеді,  $x_i=0$  ток жоқты көрсетеді.  $f(b_1 b_2, \dots, b_n) = 1$  токтың шығу нүктесін берілуін,  $f = 0$  болуы токтың берілмеуін көрсетеді.

1-мысал. конъюнкция  $X \wedge Y$  – екі ток беру нүктесі, бір шығу нүктесі бар құрылғыны көрсетеді. Шығу нүктесіне ток беріледі, егер x, y-ке ток берілсе.



2-мысал. Үш адамнан тұратын комиссияның дауыс беруін белгілеп отыратын құрылғыны қарастырайық. Комиссия мүшелері резолюцияға (ұсынылған шешім) өз кнопкасын батырады. Егер комиссия мүшелерінің көпшілігі резолюцияны мақұлдаса, онда резолюция (шешім) қабылданады. Бұл регистрация жасайтын құрылғымен белгіленіп отырылады

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(x,y,z)	0	0	0	1	0	1	1	1

Құрылғының жұмысының ақиқаттық кестесі суретте көрсетілгендей функциямен сипатталады; алынған функцияны  $f(0,0,0) = f(001) = f(010) = f(100) = 0$  теңдіктер жүйесімен де беруге болады.

$(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1)$  – жиынтығы  $f$  функциясының мәндер векторы деп аталады.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай функциялар логикалық деп аталады?
2. Бір айнымалыдан тәуелді барлық функцияларды атаңыз.
3.  $n$  айнымалыдан тәуелді неше логикалық айнымалылар бар ?
4. Қандай айнымалылар негізгі деп аталады, қандайлары – жалған?
5. Логика алгебрасының қандай формулалары эквивалентті деп аталады?

## 6. Дәріс тақырыбы. Логикалық алгебра функцияларын аналитикалық түрде жазу. ДҚФ, КҚФ, МДҚФ, МКҚФ.

**Анықтама.** Егер  $x$  логикалық айнымалы,  $\delta \in \{0,1\}$  болса, онда  $x^\delta = \begin{cases} x, & \text{егер } \delta = 1 \\ \bar{x}, & \text{егер } \delta = 0 \end{cases}$  өрнегі литер деп аталады.  $x, \bar{x}$  литерлері контрарлы литерлер деп аталады.

**Анықтама.** Егер формула айнымалылар немесе олардың терістеулерінің дизъюнкциясы болса (бір мүшелі болуы да мүмкін) оны элементар дизъюнкция (дизъюнктер) деп атайды.

Мысалдар.  $x_2, x_3; x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3; x \vee y \vee z; x \vee y \vee x$  – дизъюнктер.

**Анықтама.** Егер формула айнымалылар немесе олардың терістеулерінің конъюнкциясы болса (бір мүшелі болуы да мүмкін) оны элементар конъюнкция (конъюнктер) деп атайды.

$x_1, x_2, x_1 \wedge x_2, \bar{x}_3, x_2 \& \bar{x}_3, x_2 \& x_3, x_1 \wedge x_2 \wedge x_3; x_1 \& \bar{x}_3 \& x_4 \& x_2$

$x$  – бір уақытта дизъюнктер те, конъюнктер те бола алады.

**Анықтама.** Конъюнктердің дизъюнкциясы дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ – Элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясы) деп, ал дизъюнктердің конъюнкциясы конъюнктивті қалыпты форма деп аталады (КҚФ – Элементар дизъюнкциялардың конъюнкциясы).

Мысалы. ДҚФ:  $x_2, \bar{x}_3, x \bar{y}, x_1 \& x_2 \& x_3, x \bar{y} \vee yz,$   
 $(x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3) \vee (x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3)$

КҚФ:  $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee z) y;$  – ДҚФ;  $x \bar{y}$  – КҚФ-те ДҚФ-те бола алады.

*1-Теорема.* Кез-келген  $A$  формуласы үшін оған эквивалентті қалыпты дизъюнктивті формадағы  $B$  формуласын ( $A \equiv B$ ) табуға болады.  $B$   $A$ -ның қалыпты дизъюнктивті формуласы деп аталады. Дәлелдеусіз (кез келген формула өзінің ДҚФ, КҚФ эквивалентті).

### Формуланы дизъюнктивті қалыпты формаға келтірудің алгоритмі

1. Формула құрамындағы барлық логикалық операцияларды

$(\varphi \rightarrow \psi) \sim (\bar{\varphi} \vee \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \sim (\bar{\varphi} \vee \psi) \wedge (\bar{\psi} \vee \varphi),$  эквиваленттіліктер

және  $|\downarrow, \oplus$  операцияларының анықтамаларын пайдаланып дизъюнкция, конъюнкция, терістеу арқылы өрнектейміз. (Дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіру)

2. Морган заңын пайдаланып, барлық терістеулерді айнымалыларға көшіріп, қос терістеулерді  $\bar{\bar{x}} = x$  формуласы бойынша қысқартамыз.

Дистрибутивті  $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$  заңды пайдаланып, формуланы барлық конъюнкциялар дизъюнкциялардан бұрын



орындалатындай түр-лендіреміз. 1-3 пункттерді орындаудың нәтижесінде формула дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіріледі.

Мысалы,  $\varphi = ((x \rightarrow y) \downarrow (x \rightarrow z))$  формуласын дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіру керек болсын.  $\rightarrow, \downarrow$  операцияларын  $\wedge, \vee, \neg$  – арқылы өрнектейміз.

$$\begin{aligned} x &= (\overline{x \vee y}) \downarrow (\overline{y \vee z}) = \overline{\overline{x \vee y} \vee \overline{y \vee z}} = \overline{\overline{x} \vee y \wedge \overline{y} \vee z} \equiv \\ &\equiv \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z)} \equiv (\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z) \equiv |дистрибутивті за бойынша| \equiv \\ &(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z); \end{aligned}$$

$$\text{Сонымен, } \varphi = ((x \rightarrow y) \downarrow (x \rightarrow z)) \equiv (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z);$$

**2-Теорема.** Кез келген А формуласы үшін оған эквивалентті және ҚҚФ болатын В формуласын табуға болады  $A \equiv B$  (дәлелдейміз) В А-ның ҚҚФ. Кез келген формула өзінің ҚҚФ эквивалентті.

Конъюнктивті қалыпты формаға келтірудің алгоритмі алдыңғыға ұқсас, тек 3 пункттың орнына 3' қолданылады.

3'.  $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$  дистрибутивті заңды пайдаланып, фор-муланы барлық дизъюнкциялар, конъюнкцияларға қарағанда бұрын орын-далатындай түрлендіреміз.

Мысалы.  $\varphi \equiv (x \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow z) \rightarrow x)$  формулада  $\rightarrow$  болмайтындай түрлендір-еміз:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim (\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{(y \rightarrow z) \vee x}) \equiv (\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{y \vee z \vee x}) \\ &\equiv (\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{(\overline{y} \wedge \overline{z}) \vee x}) \equiv |дистр. заң бойынша| \equiv \\ &(\overline{x \vee y})(\overline{x \vee y})(\overline{x \vee z}) - \text{бұл формуланы одан әрі тағы түрлендіруге} \\ &\text{болады:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\overline{x \vee y})(\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{x \vee z}) \\ &\equiv |дистр. заңды қолданып| \equiv (\overline{x \vee (y \wedge y)}) \wedge (\overline{x \vee z}) \equiv \\ &\overline{x} \wedge (\overline{x \vee z}) \equiv \overline{x}; \overline{x} - \text{ті ҚҚФ деуге де, ДҚФ деуге де болады. Бұлардан} \\ &\text{басқа егер формуланың ДҚФ белгілі болса ҚҚФ-ке, ҚҚФ белгілі болса} \\ &\text{ДҚФ көшудің алгоритмдері бар. Олар төмендегідей:} \end{aligned}$$

### ДҚФ-ті ҚҚФ-ке түрлендірудің алгоритмі.

Егер формуланың ДҚФ белгілі болса, оны төмендегі ережемен ҚҚФ түрлендіруге болады.

Айталық, ДҚФ  $F = \kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m$   $m \geq 1$  түрінде болсын.

Мұндағы  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$  -элементар конъюнкциялар.

1. F-ке қос терістеу  $F = \overline{\overline{\kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m}}$  заңын қолданып,  $\overline{\kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m}$  -ті ДҚФ -ке  $\kappa_1' \vee \kappa_2' \vee \dots \vee \kappa_m'$  түрлендіру керек. Мұндағы  $\kappa_1', \kappa_2', \dots, \kappa_m'$  -элементар конъюнкциялар. Сонда,

$$F = \kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m = \overline{\overline{\kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m}} = \overline{\kappa_1' \vee \kappa_2' \vee \dots \vee \kappa_m'};$$

Морган заңымен екінші терістеуден құтылып элементар конъюнкциялардың терістеулерін элементар дизъюнкцияларға  $D_1, D_2, \dots, D_p$  түрлендіру керек.

$$\text{Сонда, } F = \overline{\kappa_1' \vee \kappa_2' \vee \dots \vee \kappa_p'} = \overline{\kappa_1'} \cdot \overline{\kappa_2'} \cdot \dots \cdot \overline{\kappa_p'} = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_p.$$

### Кез келген ҚҚФ ДҚФ-қа түрлендірудің алгоритмі.

Егер формуланың ҚҚФ белгілі болса, оны төмендегі ережемен ДҚФ түрлендіруге болады.

Айталық, ДҚФ  $F = \kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m$   $m \geq 1$  түрінде болсын. Мұндағы  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ -элементар дизъюнкциялар.

F-ке қос терістеу  $F = \overline{\overline{\kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m}}$  заңын қолданып,  $\overline{\kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m}$ -ді ҚҚФ-ке  $\overline{\kappa_1' \vee \kappa_2' \vee \dots \vee \kappa_m'}$  түрлендіру керек. Мұндағы  $\kappa_1', \kappa_2', \dots, \kappa_m'$ -элементар дизъюнкциялар. Сонда,

$$F = \kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m = \overline{\overline{\kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m}} = \overline{\kappa_1' \vee \kappa_2' \vee \dots \vee \kappa_m'}$$

Морган заңымен екінші терістеуден құтылып элементар дизъюнкциялардың терістеулерін элементар конъюнкцияларға  $D_1, D_2, \dots, D_p$  түрлендіру керек.

$$\text{Сонда, } F = \overline{\kappa_1' \wedge \kappa_2' \wedge \dots \wedge \kappa_p'} = \overline{\kappa_1'} \vee \overline{\kappa_2'} \vee \dots \vee \overline{\kappa_p'} = D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_p.$$

Буль функцияларының шексіз көп ҚҚФ, ДҚФ болуы мүмкін. Олардың ішінен МДҚФ, МКҚФ- ерекше ролі бар.

**Мүлтіксіз дизъюнктивті, конъюнктивті қалыпты форма (МДҚФ, МКҚФ).**

*Анықтама.* Кез келген формуланы оған эквивалентті ДҚФ-ті ҚҚФ-ке түрлендірудің алгоритмі.

$D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_m$   $m \geq 1$  формулаға түрлендіруге болады, мұндағы  $D_i$ -не айнымалы, не оның терістеуі немесе айнымалы мен оның терістеуінің дизъюнкциясы (конъюнкциясы). Осындай формула берілген формуланың дизъюнктивті (конъюнктивті) қалыпты түрі деп аталады.

### Мүлтіксіз дизъюнктивті қалыпты форма (МДҚФ)

*Анықтама.* Айталық, А формуласы  $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$

айнымалыларынан тәуелді болсын. Егер төмендегі шарттар орындалса А формуласы берілген айнымалылар тізімінде мүлтіксіз дизъюнктивті қалыпты формада делінеді.

А- дизъюнктивті қалыпты формада (элементар конъюнктер дизъюнкциясы)

А- ның әрбір дизъюнктивті мүшесі k-мүшелі конъюнкция және бұл конъюнкцияның әрбір l- орында ( $1 < l < k$ ) не  $x_{l_k}$  айнымалысы не оның

терістеуі орналасады. А-ның барлық дизъюнктивті мүшелері өзара әртүрлі.

Мысалы,  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ -айнымалылар тізімінде

$(x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3, (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$  -дизъюнктивті қалыпты формалар.

**Мүлтіксіз конъюнктивті қалыпты форма (МКҚФ).**

*Анықтама.* Айталық, А формуласы  $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$  айнымалыдан тәуелді болсын. Егер төмендегі шарттар орналаса А- берілген айнымалылар тізімінде мүлтіксіз конъюнктивті қалыпты формада делінеді.

А-конъюнктивті қалыпты формада

А-ң әрбір мүшесі к мүшелі дизъюнкция және бұл дизъюнкцияның  $l$ -ші орнында ( $1 < l < k$ ) не  $x_{l_k}$  айнымалысының не өзі, не оның терістеуі тұрса.

А-ның барлық конъюнктивті мүшелері өзара әр түрлі.

Мысалдар.  $(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$  - МДҚФ

$(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$  - МДҚФ емес.

Берілген  $\varphi$  формулаға эквивалентті МДҚФ, МКҚФ табу есептерін шешу үшін, алдымен  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  Буль функциясы үшін Шеннон жіктеуін қарастырамыз.

**Шеннон жіктелулері.**

Кез келген Буль функциясы Шеннон жіктелуі түрінде өрнектеледі.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{f(\delta_1 \dots \delta_n) = 1 \\ \text{болатын бар-} \\ \text{лық } \delta_1, \dots, \delta_n \\ \text{қ±рамалары}}} \left( \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\delta_i} \right) = \bigvee_1 \left( \begin{array}{l} f = 1 \text{ болатын } k \pm \text{рама} \\ \text{лар нүмірлері} \end{array} \right)$$

Мысалы,  $f(x_1, x_2, x_3)$  000, 010, 011 құрамаларында 1-ге тең болсын. Олай

болса,  $f(x_1, x_2, x_3)$  жіктелуі:  $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$ ;

Осыған ұқсас 0-ге тең емес  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциялары төмендегідей болып жіктеледі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{f(\delta_1 \dots \delta_n) = 0 \\ \text{болатын бар-} \\ \text{лық } \delta_1, \dots, \delta_n \\ p \quad p \quad p}} \left( \bigvee_{i=1}^n x_i^{1-\delta_i} \right) = \bigwedge_0 \left( \begin{array}{l} f = 0 \text{ болатын } p \quad p \\ \text{лар } n \quad m \quad m \end{array} \right)$$

Бұл формулалардан төмендегі теореманы келтіруге болады.

**Теорема.** Кез келген Буль функциясын өрнектейтін формула табылады Егер  $f \neq 0$

болса оны МДҚФ түрінде өрнектейтін жалғыз ғана формула бар.

$$\varphi = \bigvee_{f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)=1} K^1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

Егер  $f \neq 1$  болса оны МКҚФ түрінде өрнектейтін жалғыз ғана формула бар.

$$\varphi = \bigwedge_{f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)=1} K^0(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

Мысалы, ақиқаттық кестемен берілген  $f(x, y, z)$  функциясының МДҚФ, МКҚФ табу керек. Функцияның толықтығы туралы теорема бойынша

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x, y, z)$	1	0	0	1	0	1	0	1

$$\varphi_1 = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} y \overline{z} \vee x \overline{y} z \vee x y z \text{ -МДҚФ;}$$

$$\varphi_2 = x y \overline{z} \vee x \overline{y} z \vee \overline{x} y z \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z} \text{ -МКҚФ}$$

Сонымен МДҚФ, МКҚФ - белгілері.

Дизъюнкцияның (конъюнкцияның) мүшелері әр түрлі конъюнктердің (дизъюнктердің) мүшелері әр түрлі бір де бірі конъюнкте (дизъюнкте) айнымалының әрі өзі, әрі оның терістеуі бірге болмайды.

Әрбір конъюнктің (дизъюнктің) құрамында формулаға енетін барлық айнымалылар болуы керек, яғни  $x_1^\alpha \wedge x_2^\alpha \wedge \dots \wedge x_n^\alpha$  мұндағы  $x_i^\alpha$  не  $x_i$  өзі, не  $\overline{x}_i$ .

Мысалы,  $\overline{x} y z \vee x \overline{y}$ -өрнегі  $\overline{x} \vee y \wedge (\overline{z} \rightarrow x)$  формуласының – дизъюнктивті қалыпты формаларының бірі. Бұл МДҚФ-ң алдыңғы үш талабын қанағаттандырады, ал төртіншісін қанағаттандырмайды. Сондықтан оған түрлендірулер жүргіземіз ( $z \vee \overline{z}$  көбейтміз).

$$x y z \vee x y \equiv x y z \vee (x y (z \vee \overline{z})) \equiv x y z \vee x y z \vee x y \wedge \overline{z} \equiv x y z \vee x y \overline{z}$$

Кез келген  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  формуласын МДҚФ (МКҚФ) түріне келтіру үшін мына ережені қолдануға болады.

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  формуласын қандайда бір дизъюнктивті (конъюнктивті) қалыпты формаға түрлендіру.

Егер конъюнктке қандай да бір айнымалы өзінің терістеуімен бірге кірсе оны ДҚФ-тан жою керек. ( $x \wedge \overline{x} = 0$ )

Егер конъюнктке бір литер  $x^\alpha$  бірнеше рет кірсе, олардың біреуін ғана қалдырып қалғандарын қысқарту керек. ( $x \wedge x = x$ )

Егер конъюнктердің біріне ( $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_k^{\delta_k}$ ) у айнымалыс кірмей тұрса, онда бұл конъюнктті оған эквивалентті  $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_k^{\delta_k} \wedge (y \vee \overline{y})$  формуламен алмастырамыз да, дистрибутивті заңды ( $x \wedge (y \vee z) = x y \vee x z$ )

қолданып ДҚФ түріне келтіреміз. Егер толық емес конъюнкт бірнешеу болса олардың әрқайысы үшін сәйкес  $(y \vee \bar{y})$  формуласын қосамыз.

Алынған ДҚФ-да бірдей бірнеше конъюнктер болса олардың  $(x \wedge x)$  біреуін ғана қалдырамыз. Нәтижесінде МДҚФ шығады.

Мысалы,  $\varphi = x\bar{x} \vee x \vee yzy$  ДҚФ –ны МДҚФ-қа түрлендіру керек.

$\varphi = x\bar{x} \vee x \vee yzy \equiv (x(y \vee \bar{y}) \vee yz(x \vee \bar{x})) \equiv$  [дистрибутивтік заңымен ашамыз]  $\equiv xy \vee x\bar{y} \vee xyz \vee \bar{x}yz \equiv xy(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xyz \vee \bar{x}yz \equiv$   
 $\equiv xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \equiv xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$

КҚФ-ны МКҚФ түрлендірудің алгоритмі де осындай. Мысал арқылы көрейік.  $\bar{x}yz \wedge (xy \rightarrow x\bar{y}\bar{z})$  формуланы МКҚФ ға келтіру керек болсын.

Бақылау сұрақтары:

1. Буль функцияларының негізгі қасиеттерін атаңыз.
2. Логикалық функцияларды жіктеу туралы Шеннон теоремасы қандай?
3. Буль алгебрасындағы негізгі эквиваленттік түрлендірулерді атаңыз.
4. Функцияның МДҚФ,МКҚФ қалай табуға болады ?
5. Қандай логикалық функцияда МДҚФ болмайды?

## 7. Дәріс. Ақиқат кесте бойынша берілген. Буль функциясына формула құру әдісі. Буль функцияларының түйінділік принципі.

Тұжырымдар логикасының әрбір формуласына ақиқат кесте құруға болатынын білеміз. Керісінше қалай?. Керісінше де яғни ақиқат кесте бойынша формула құруға болатынын көреміз.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_{r-1}$	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	0	...	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	...	1	0	$f(1, 1, \dots, 1, 0)$
1	1	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

2. Осы құрамаларға сәйкес конъюнкция жазамыз. Егер  $x_i$  аргументінің құрамадағы мәні 1-ге тең болса ол конъюнкцияға өзгеріссіз енеді, ал  $x_i=0$ , болса конъюнкцияға оның терістеуі алынады.

3. Алынған барлық конъюнкциялардың дизъюнкциясы іздеген формула болады және ол құрылған функцияның МДҚФ-ы болады.

Мысалы,  $f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1(3, 4, 6)$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1(0, 2, 5, 7)$

3,4,6-құрамалардың нөмірлері 0,2,5,7- құрамалардың нөмірлері

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1

$$F = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3) F = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3)$$

### Ақиқаттық кесте бойынша МКҚФ құрудың алгоритмі.

Алгоритмді  $f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_0(0, 3, 7)$  функциясына МКҚФ құруға

қолданайық.

1. Кестеден функцияны 0-ге айналдыратын аргументтерге сәйкес құрамалар алынады(асты сызылады).

2. Осы құрамаларға сәйкес дизъюнкция жазамыз. Егер  $x_i$  аргументінің құрамадағы мәні 0-ге тең болса ол конъюнкцияға өзгеріссіз енеді, ал  $x_i=1$ , болса конъюнкцияға оның терістеуі алынады.

3. Алынған барлық дизъюнкциялар конъюнкциямен жалғастырылады.

$$F = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \wedge x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

**Анықтама.** Егер  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$  онда  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясы  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясына түйіндес функция деп аталады.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясына түйіндес функцияны анықтау үшін, барлық айнымалылар және функцияның өзін оның қарама-қарсы мәндеріне ауыстыру керек.

Мысал. Үш айнымалыдан тәуелді  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim x_2) \rightarrow ((x_1 \vee x_3) \& x_2)$  функциясын буль формуласы яғни МДҚФ-түрінде өрнектеу керек.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\overline{x_2}$	$x_1 \sim \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_3) \& x_2$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Іздеп отырған МДҚФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$$

**Түйіндестік принципі:** Егер  $f$  функциясын өрнектейтін  $F$  формуласындағы барлық операция белгілерін түйіндес функцияның операция белгілеріне алмастырғаннан алынған  $F^*$  формуласы берілген  $f$  функциясының түйіндес функциясын өрнектейтін болады.

Тек  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\sim$  символдарымен ғана байланысқан формулаларды қарастырамыз.  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\sim$  символдары бір біріне түйіндес деп аталады.

Мысалдар: ақиқат-формуласының түйіндесі - жалған;

$f_1 : x \vee \bar{x}$ ;	$f_2 : x \wedge \bar{x} \equiv \bar{x}$ ;	$f_3 = x \vee y$ ;	$f_4 = x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1)$ ;
$f_1^* : x \wedge \bar{x}$ ;	$f_2^* : x \vee \bar{x} \equiv x$ ;	$f_3^* = (x \wedge y)$ ;	$f_4^* = x_1 \vee (x_2 \wedge \bar{x}_1)$ ;

Егер  $f_1, f_2$  функциялары тең болса, онда оларға сәйкес түйіндес формулалар да тең болады.  $f_1 = f_2$  онда  $f_1^* = f_2^*$ . Түйіндестік принцип дизъюнкция, конъюнкция, терістеу арқылы байланысқан формулалармен берілген функциялардың түйіндестерін табу үшін ыңғайлы. Бұл жағдайда берілген формулада конъюнкция дизъюнкцияға, дизъюнкция

конъюнкцияға ауысады. Сөйтіп ДҚФ–КҚФ, КҚФ–ДҚФ, МДҚФ–МКҚФ немесе керісінше.

Мысалы:  $(xy \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z})^* = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$

Егер  $\varphi$  формуласы  $\mu$ -ге эквивалент болса:  $\varphi \sim \mu$  онда оларға сәйкес түйіндес формулалар да эквивалентті болады, яғни  $\varphi^* \sim \mu^*$  болады.

Егер  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  онда  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясы өзіне-өзі түйіндес функция деп аталады. Мысалы,  $\varphi = xy \vee xz \vee yz$  функциясы өзіне-өзі түйіндес функцияны кескіндейді. Оған  $(b_1, b_2, b_3)$  және  $(1-b_1, 1-b_2, 1-b_3)$  жиынтықтарының қарама-қарсы мәндерінде функция да қарама-қарсы мән қабылдайтындығына көз жеткізуге болады. Ол үшін ақиқаттық кесте құрып:

X	0	0	0	0	1	1	1	1	$\varphi(0,0,0) = \overline{\varphi(1,1,1)}; \quad \varphi(0,0,1) = \overline{\varphi(1,1,0)};$ $\varphi(0,1,0) = \overline{\varphi(1,0,1)}; \quad \varphi(0,1,1) = \overline{\varphi(1,0,0)}$
Y	0	0	1	1	0	0	1	1	
Z	0	1	0	1	0	1	0	1	
$\varphi$	0	0	0	0	0	1	1	1	

екендігін көреміз.

Мысал: Түйінділік принципін сүйене отыра, буль алгебрасындағы түйінділік принципін дұрыстығын дәлелдеу керек. Буль алгебрасында  $(P_2; \&, \vee, \neg)$  үш амал бар:  $\sum \{ \&, \vee, \neg \}$ ;

Буль алгебрасының әр бір амалына түйіндес амалдарды анықтайық.

а) Айталық,  $f(x, y) = x \cdot y$  болсын.

Олай болса  $f^*(x, y) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y$ ;

б) Айталық,  $f(x, y) = x \vee y$ ; Олай болса

$f^*(x, y) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{y}} = x \cdot y$ ;

в) Айталық,  $f(x) = \bar{x}$ ; Олай болса  $f^*(x) = \overline{f(\bar{x})} = \overline{\bar{\bar{x}}} = \bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x} = x$ ;

Сонымен конъюнкция дизъюнкцияға, дизъюнкция конъюнкцияға түйіндес, ал терістеу өзіне өзі түйіндес.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай функциялар бір-біріне түйіндес деп аталады? Мысал келтіріңіз.

2. Ақиқаттық кесте бойынша формула құру ережелері



## 8. Дәріс тақырыбы: Буль функцияларының толық жүйелері. Пост теоремасы

**Буль функцияларының толық жүйелері.** Кез келген логикалық функция өрнектелетін логикалық операциялардың жиынтықтары болады. Мұндай операциялар жиыны функционалды толық жүйелер немесе базис деп аталады. Функционалды толық жүйелерге немесе базистерге мысалдар.

$\{\&, \vee, \neg\}; \{\&, \neg\}; \{\vee, \neg\}; \{\neg\}; \{\downarrow\}; \{\&, \oplus, 1\}; \{\rightarrow, \neg\}; \{\vee, \sim, \oplus\}; \{\&, \sim, \oplus\};$

т.б

Бұлардың ішінде көбірек зерттелгені  $\{\&, \wedge, \neg\}$ -базис; Бұлар буль формулалары деп аталады.

**Анықтама.** Логикалық функциялар жиыны  $P_2$ -негізгі жиыны, ал операциялары-дизъюнкция, конъюнкция, терістеу болатын  $\{P_2; \&, \vee, \neg\}$  алгебрасы логикалық функциялардың бульдік алгебрасы деп аталады.

**1-Теорема.** Кез келген логикалық функция буль формуласы түрінде кескінделеді яғни дизъюнкция, конъюнкция, терістеудің суперпозициясы. Бұдан буль формулаларының жүйесі  $\Sigma = \{\&, \vee, \neg\}$ ; функционалды толық жүйе. Бұл кесте түрінде берілген кез келген функцияны буль алгебрасының формуласы түрінде кескіндеуге болатындығын көрсетеді.

**2-Теорема.** Егер функционалды толық  $\Sigma^*$  жүйенің барлық функциялары  $\Sigma$ -жүйенің формулалары арқылы өрнектелетін болса, онда  $\Sigma$ -жүйе де функционалды толық жүйе болады.

Кез келген жүйенің толықтығы туралы сұраққа Пост теоремасы жауап береді:

*Пост кластарының анықтамасы.*

$P_0$ -класы. Бұл 0-ді сақтайтын буль функциялары класы, яғни  $f(0,0,\dots,0)=0$  болатын функциялар.  $P_0 = \{f \mid f(0,0,\dots,0) = 0\}$ .

$P_1$ -класы. 1-ді сақтайтын функциялар класы, яғни  $f(1,1,\dots,1) = 1$  болатын функциялар.  $P_1 = \{f \mid f(1,1,\dots,1) = 1\}$

$S$ -өзіне-өзі түйіндес функциялар класы.  $S = \{f \mid f\text{-өзіне-өзі түйіндес функция}\}$

$M$ -монотонды функциялар класы. Кез-келген  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  және  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  нөлдер мен бірлер жиынтығында  $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$  шарттың орындалуынан

$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)$  орындалса  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясы монотонды деп аталады.  $M = \{f \mid f\text{-монотонды функциялар}\}$ .

**5. L-сызықты функциялар класы.**

Егер буль сақинасында  $\langle \{0,1\}, \oplus, \odot \rangle$   $f$ -функциясы  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n$  түрінде өрнектелетін болса, мұндағы  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \{0,1\}$  онда Буль функция сызықты деп аталады.  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  коэффициенттері төмендегідей анықталады.

$c_0 = f(0,0,\dots,0)$ ,  $c_0 \oplus c_1 = f(1,0,\dots,0)$ ,  $c_0 \oplus c_2 = f(0,1,\dots,0)$ , ...,  $c_0 \oplus c_n = f(0,0,\dots,1)$   
яғни  $c_0 = f(0,0,\dots,0)$ ,  $c_1 = c_0 \oplus f(1,\dots,0)$ , ...,  $c_n = c_0 \oplus f(0,0,\dots,1)$

Сонымен  $f$ -функциясының сызықтығын тексеру деген  $c_i$  коэффициенттерінің тауып, берілген формуланың ақиқаттық кестесімен табылған  $c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n$  формуланың ақиқат кестесін салыстыру болып табылады. Мысалы.  $x \vee y$  функциясы сызықты ма ?

Тексеру:  $c_0 = 0 \vee 0 = 0$ ;  $c_1 = c_0 \oplus f(1,0) = 0 \oplus (1 \vee 0) = 1$ ;  $c_2 = 0 \oplus f(0,1) = 0 \oplus (0 \vee 1) = 1$ ;

Сонымен  $c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y = x \oplus y$ ;  $x \vee y$  пен  $x \oplus y$  ақиқат кестесі бірдей емес. Ендеше  $x \vee y$  –сызықты емес. Егер функцияның МДҚФ түріндегі  $V$ -операциясының орнына  $\oplus$  қойылса онда сызықты функцияның мүлтіксіз полиномды қалыпты түрін аламыз. (МПКФ) (дизъюнкция белгісінің орнына  $\oplus$ ). Бұл Жегалкин полиномы деп аталады.

Мысалы.  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \sim x_3) \vee (x_1 \downarrow x_2)$  функциясын 2 модулі бойынша қосу полиномы түрінде жазу керек.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_2} \vee x_3) \vee (x_1 \downarrow x_2) \equiv (x_2, \oplus x_3, \oplus 1) \vee (x_1 \oplus x_2, \oplus x_1 x_2) \equiv (x_2, \oplus x_3, \oplus 1) \vee (x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus 1) \equiv (x_2, \oplus x_3, \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus 1) = x_1 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus 1 = \oplus x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus 1$$

$(P_2, \&, \oplus, 1)$  – Жегалкин алгебрасы деп аталады.  $\Sigma = \{\&, \oplus, 1\}$  болып белгіленеді:

$\wedge$  — сигнатура деп аталады.

*Анықтама.* Егер Жегалкин көпмүшелігінің құрамында айнымалылардың көбейтіндісі бар болса, онда көпмүшелік сызықты емес деп аталады, жоқ болса сызықты деп аталады.

Буль функциясының сызықтылығы Жегалкин көп мүшелігінің сызықтылығымен эквивалентті яғни Жегалкин көпмүшелігі сызықты болса оған сәйкес буль функциясы да сызықты болады.

Мысал.  $f(x,y) = x|y$  функциясы Пост класстарының қайсысына жататынын анықтау керек.

$$f(0,0) = 1; f(1,1) = 0, f(x,y) \notin P_0 \text{ және } f(x,y) \notin P_1$$

$$f(1,0) \neq f(0,1) \text{ болғандықтан } f(x,y) \notin S;$$

$$f(0,0) > f(1,1) \text{ болғандықтан } f(x,y) \notin M;$$

$f(x,y)$  функциясы үшін Жегалкин көпмүшелігі  $f(x,y) = x|y = xy = x \vee y =$

$$\overline{x} = x \oplus 1 = (x \oplus 1) \vee (y \oplus 1) = (x \oplus 1) \vee (y \oplus 1) \text{ сызықты емес. Мынадай}$$

кесте құруға болады: Пост теоремасы Буль функциялар жүйесі  $F$  толық жүйе болады тек сонда ғана, егер әрбір  $P_0, P, S, M, L$  кластары үшін  $F$  жүйесінен осы класқа жатпайтын функция табылса.

функция	кластар				
	$P_0$	$P_1$	$S$	$M$	$L$
$x y$	жоқ	жоқ	жоқ	жоқ	жоқ

Бұл теоремадан жоғарыдағы  $x|y$  функция толық жүйе құрады, яғни Шеффер функциясы арқылы кез келген буль функциясын алуға болады:

$$x \sim x|x, \quad x \wedge y \sim \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \sim \overline{x|y} = \sim(x|y)(x|y)$$

Буль функциялар жүйесі толық болса базис деп аталады, ал жүйеден кез келген функция алынып тасталса жүйе толық емес болады.

**Теорема.** Әрбір базис 4-тен артық емес буль функциясынан тұрады.

Мысалы.

$\{\wedge, \neg\}$ ,  $\{\vee, \neg\}$ ,  $\{\rightarrow, \neg\}$ ,  $\{\downarrow\}$ ,  $\{\mid\}$ ,  $\{\leftrightarrow, \vee, 0\}$ ,  $\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$  базистер.

1-мысал.  $(P_2, \&, \oplus, 1)$ –Жегалкин алгебрасындағы  $\Sigma = \{\&, \oplus, 1\}$  сигнатурасы функционалды толық жүйе. Бұл кез келген логикалық функция  $\Sigma$  сигнатурамен кескінделетіндігін, яғни кез келген логикалық функция айнымалылар мен  $\{\&, \oplus, 1\}$  операция символдары арқылы өрнектелетіндігін көрсетеді.  $\{\&, \oplus, 1\}$  – функцияналдың толықтығын дәлелдеу үшін.

а) $\overline{x} = x \oplus 1$	в) $x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3$	е) $x \oplus \overline{x} = 1$
б) $x \oplus 0 = x$	г) $x_1 \vee x_2 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$	

қатынастары қолданылады. Формулалардың эквиваленттігін дәлелдеудің стандартты әдісін қолданып, бұл қатынастардың дұрыстығына көз жеткізуге болады.

$x$	$\overline{x}$	1	$x \oplus 1$	$x_1$	$x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$	$x_1 \& x_2 \oplus x_1$	$x_1 \& x_2 \oplus x_1 \oplus x_1$
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
				1	0	1	0	1	1
				1	1	1	1	0	1

Бірінші теоремадан Буль функцияларының жиыны  $\Sigma^* = \{\&, \vee, \neg\}$ -функционалды толық. 2-теорема бойынша  $\Sigma = \{\&, \oplus, 1\}$  жүйесінің толықтығын дәлелдеу үшін  $\Sigma^* = \{\&, \vee, \neg\}$ -базистің операцияларын  $\Sigma = \{\&, \oplus, 1\}$ -базистің операциялары арқылы өрнектеуге болатындығын көрсету жеткілікті. Конъюнкция ( $\&$ ) операциясы екі жүйеге де ортақ. Енді қалған операциялардың (дизъюнкция ( $\vee$ ), терістеу ( $\neg$ ))  $\{\&, \oplus, 1\}$ -символдары арқылы өрнектелетіндігін көрсетсек жеткілікті. Бұл жоғарыдағы а), г) қатынастарынан көрініп тұр.

Бақылау сұрақтары:

2. Пост кластарының әрқайсысына анықтама беріңіз.
3. Логикалық функциялардың қандай жүйелері толық деп аталады?
4. Функционалдық толықтығы туралы Пост теоремасы қандай?
5. Қандай логикалық функциялар сызықты деп аталады?
6. Жегалкин алгебрасына қандай логикалық функциялар кіреді?

## 9. Дәріс тақырыбы: Комбинаторика. Орналастыру және теру.

Комбинаториканың негізгі есебі—қайта санау және ақырлы жиын элементтерін тізбектеу.

Егер берілген ақырлы жиын элементтерінің қаншасының берілген бір қасиетке ие екендігін анықтау қажет болса бұл қайта санау есебі, ал берілген қасиетке ие барлық элементтерді анықтау керек болса, бұл тізімдеу есебі Комбинаторика есебін дәлелдеуде екі ереже жиі қолданылады. Олар: қосу және көбейту ережелері.

Егер  $X$   $n$  элементтерден тұратын ақырлы жиын болса,  $X$  объектісін  $X$  тен  $n$  тәсілмен алуға болады дейді және  $|X|=n$  болып белгіленеді.

Егер  $X_1, \dots, X_n$ —қос қостан қиылыспайтын жиындар болса, яғни  $X_i \cap X_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), онда

$$\left| \bigcup_{i=1}^k X_i \right| = \sum_{i=1}^k |X_i|$$

- қосу ережесі. (1)

Бұл ережені  $k=2$  үшін былай жазуға болады: Егер  $x$  объектісі  $m$  тәсілмен таңдалса, ал  $y$  басқа  $n$  тәсілмен таңдалса, онда "не  $x$ , не  $y$ " таңдау  $m+n$  тәсілмен іске асырылады ( $x$  және  $y$  элементтерін бір уақытта таңдау болмайды).

Көбейту ережесі. Егер  $x$  объектісін  $m$  тәсілмен таңдауға болса, және осындай таңдаудан кейін  $y$  объектісін өз кезегінде  $n$  тәсілмен таңдауға болса, онда реттелген  $(x, y)$  жұбын  $m \times n$  тәсілмен таңдауға болады. ( $x, y$  — таңдаулары тәуелсіз).

Жалпы жағдайда, егер  $x_1$  объектілері  $n_1$  тәсілмен таңдалса, одан кейін  $x_2$   $n_2$  тәсілмен таңдалса және кез келген  $2 \leq i \leq m-1$  үшін  $x_1, x_2, \dots, x_i$  объектілерін таңдағаннан кейін  $x_{i+1}$  объектісін  $n_{i+1}$  тәсілмен таңдауға боллатын болса, онда  $m$  объектіден құралған  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  реттелген тізбегі  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$  тәсілмен таңдалады.

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$  жиынынан алынған  $x_{i1}, \dots, x_{ir}$  элементтерінің жиынтығы  $n$  элементтен алынған  $r$  көлемді таңдама деп аталады.

Егер элементтердің орналасу тәртібі берілген болса, таңдама реттеген деп, ал орналасу тәртібіне белгілі бір шарт қойылмаса, таңдама реттелмеген деп аталады.

Таңдамаларда элементтердің қайталануы да, қайталанбауы да мүмкін.

Элементтері қайталануы мүмкін  $(n, r)$  - таңдамасы  $(n, r)$ -қайталама таңдамасы деп аталады. Ал егер реттелген  $(n, r)$  таңдаманың элементтері қос қостап әр түрлі болса,  $(n, r)$  қайталанбайтын таңдама немесе жай ғана  $(n, r)$ -орналасу деп аталады.

$(n, n)$ -қайталанбайтын орналасу  $X$  жиынын алмастыру деп аталады.

Элементтері қайталануы мүмкін реттелмеген  $(n, r)$ -таңдама, қайталанба  $(n, r)$ -теру деп аталады. Егер реттелмеген  $(n, r)$  таңдаманың элементтері қос қостан әр түрлі болса, онда ол қайталанбайтын  $(n, r)$ -теруі

немесе жай ғана  $(n, r)$  теруі деп аталады. Кез келген  $(n, r)$ -теруін  $n$ -элементті жиынның  $r$ -элементті ішкі жиыны деп қарауға болады.

Мысал, айталық  $X = \{1, 2, 3\}$  болсын.

1)  $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$  -  $(3, 2)$ -қайталама орналастырулар.

2)  $(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$  -  $(3, 2)$ -қайталама орналасу;

3)  $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)$  –  $X$  жиынын алмастыру;

4)  $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}$  -  $(3, 2)$ -қайталама теру;

5)  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$  -  $(3, 2)$ -қайталанбайтын теру. Қайталама теру

саны  $(n, r)$ -ді  $A_n^r$ , қайталанбайтын теру- $A_n^r$ .  $n$ -элементті теру саны  $P_n$  (яғни  $P_n = A_n^n$ ) болып белгіленеді. Қайталама теру  $(n, r)$ -саны  $C_n^r$ , ал қайталанбайтын теру- $C_n^r$ .

1-тұжырым.  $A_n^r = nr$ .

Шынында әрбір  $(n, r)$ -қайталама теру ұзындығы  $r$ -ға тең реттелген тізбек, ал оның әр мүшесі  $n$  тәсілдің бірімен таңдалады, бұдан көбейту ережесінен  $A_n^r = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = nr$ .

(Дербес жағдайда бұл өрнек негізі  $n$  санау жүйесінде  $r$  позицияда жазылған әр түрлі сандардың нешеуі екендігін анықтайды.)

2-тұжырым.  $A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ,  $r \leq n$  және  $A_n^r = 0$ ,  $r > n$

болғанда.

Шынында,  $r$  элементтен тұратын реттелген тізбектің бірінші мүшесі  $n$  тәсілмен таңдалады, екіншісі- $(n-1)$  тәсілмен, соңғысы- $(n-r+1)$  тәсілмен. Жалпыланған көбейту ережесінен ізделінді формуланы аламыз.

Салдар  $A_n^n = P_n = n(n-1) \dots (n-n+1) = n!$

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

3-тұжырым., егер  $r \leq n$ ,  $C_n^r = 0$  егер  $r > n$ .

Шынында да, әр  $(n, r)$ -теруін  $r!$  әдіспен реттеуге болады, яғни  $C_n^r$ -ді  $r!$  рет  $A_n^r$ -ге қарағанда  $r!$  рет аз. Бұл формуладан  $C_n^r = C_n^{n-r}$ .

4-тұжырым.  $C_n^r = C_{n+r-1}^r$ .

Шынында да  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  жиынының элементтерінен құрылған әрбір қайталанба  $(n, r)$ -  $B$  теруі үшін,  $r$  нөл мен  $n-1$  1-ден тұратын  $(i-1)$ -ші және  $i$  бірлердің (мұндағы  $2 \leq i \leq n-1$ ) арасындағы нөлдердің саны  $B$  теруіндегі  $x_i$  элементтерінің санына тең, ал бірінші бірдің алдындағы нөлдердің саны  $B$ -ға енетін  $x_i$  элементтерінің санына тең болатын ұзындығы  $\alpha(B)$  болатын векторды сәйкестендіруге болады.

Мысалы  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $n=4$ ,  $r=6$  болса, Егер  $B = \{2, 2, 3, 3, 3, 4\}$  - (4, б)-қайталанба теру болса онда  $\alpha(B) = 100100010$  болады. Екінші жағынан егер  $\alpha(B_1) = 110010000$ , онда  $B_1 = \{3, 3, 4, 4, 4, 4\}$ .

Бұл қайталанба  $(n, r)$ -теруімен  $n-1$  бір және  $r$  нөлден тұратын вектор арасындағы сәйкестік.  $n-1$  бірден және  $r$  нөлден құралған  $n+r-1$  мөлшерлі векторлар саны  $C_{n+r-1}^r$  тең.

$$\overline{A_n^0} = A_n^0 = \overline{C_n^0} = C_n^0 = 1.$$

### Орналастыру және функционал бейнелеу.

Комбинаторикалық классикалық есептерінің бірі, қандай да бір объектілердің «жәшіктерде» белгілі бір шектеулер орындалатындай орналастыру санын анықтау болып табылады. Бұл есепті төмендегідей тұжырымдауға болады:

Айталық  $|X| = r$ ,  $|Y| = n$ . Барлық бейнелеулер  $f : X \rightarrow Y$  санын  $Y^X$  белгілейік. Берілген шектеулерді қанағаттандыратын қанша  $f : X \rightarrow Y$  функционал бейнелеулер бар? Егер бұл бейнелеулерге шектеулер жоқ болса төмендегідей тұжырым келтіруге болады.

5-тұжырым.  $|Y^X| = A_n^r = nr = |Y||X|$ .

Шынында,  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  болсын. Олай болса кез келген бейнелеуді  $f: X \rightarrow Y$  реттелген  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r))$ , мұндағы  $f(x_i) \in Y$ , тізбегі түрінде кескіндеуге болады, яғни біз функционал бейнелеулер мен саны  $n^r$ -ге тең, көлемі  $n$  болатын  $Y$  жиынынан алынған қайталанба реттелген таңдамалар жиынының арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнаттық.

(Егер  $X$  - объектілер,  $Y$  - "жәшіктер" болса, онда  $f$  функция әрбір  $x \in X$  объектісі үшін объект орналасқан  $f(x) \in Y$  жәшігін көрсетеді).

Бірден артық емес объект орналасқан жәшігі бар орналасудың санын табу қиын емес, ондай теру бір мәнді функцияларға сәйкес (инъективті бейнелеу).

6-тұжырым. Инъективті бейнелеулердің  $f: X \rightarrow Y$  (яғни  $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ ) саны  $A_n^r$ .

Шынында да, бұл жағдайда реттелген тізбек  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r))$  әр түрлі болуы керек, яғни бұл тізбек қайталанбайтын теру болып табылады.

Салдар. Егер  $S_n$  - өзіне өзін бейнелейтін  $n$ -элементті барлық биективті бейнелеулердің жиыны болса олардың саны  $|S_n| A_n^n = P_n = n!$

Бақылау сұрақтары:

Қосу, көбейту ережелерін атаңыз.

Реттелген, реттелмеген таңдамалар қалай аталады?

Орналасу, теру сандарын қандай формулалармен есептеуге болады?

Қанша функционал бейнелеулер  $f : X \rightarrow Y$  бар?

Өзіне өзін бейнелейтін қанша биективті бейнелеу құрастыруға болады?

## 10. Дәріс тақырыбы: Жиындарды бөліктеу.

$n$ -элементті жиынды  $k$  ішкі жиынға бөліктеу деп  $\bigcup_{i=1}^k X_i = X$ ,

$X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j, X_i \neq \emptyset, i = \overline{1, k}$  орындалатын  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  кез келген жиындар үйірін түсінеміз.  $X$ -ті  $k$  блокқа бөлетін бөліктеулер жиынын  $P_k(x)$  деп белгілейік.  $|P_k(x)|$ . Бұдан әрине,  $S(n, k) = 0$  үшін  $k > n$ ;  $S(0, 0) = 1$  деп алынады.  $n$ -элементті жиынды  $K$  блокқа бөлетін бөліктеулер санын  $S(n, k) = |P_k(x)|$  белгілейміз.

1-тұжырым.  $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$  егер  $0 < k < n$ ;  $S(n, n) = 1$  егер  $n \geq 0$ ;  $S(n, 0) = 0$  егер  $n > 0$ .  $S(n, k)$  саны II ретті Стирлинг саны деп аталады. Шынында да бірінші және үшінші формулалар түсінікті: 1 формуланы дәлелдеу үшін  $\{1, 2, \dots, n\}$  жиынын  $k$  блокқа бөлетін барлық бөліктеулердің жиынын қарастырамыз. Бұл жиын үлкен 2 класқа бөлінеді: бір элементті  $\{n\}$  блогы бар бөліктеулер және  $n$ -қауаты 1 деп үлкен блоктың элементі болып саналатын бөліктеулер. Бірінші класта  $S(n-1, k-1)$  блок бар, ал екіншісінде  $S(n-1, k)$ . Себебі бұл кластың  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  жиынын  $k$  блокқа бөлетін әр бөліктеуінде бұл класта әр блокқа кезекпен  $n$  элементін қосудан алынған  $k$  бөліктеуі сәйкес келеді. Мысалы,  $S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2(S(2, 1) + 2S(2, 2)) = 1 + 2(1 + 2) = 7$ .

Егер  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  онда бұл жиынды 2 блокқа бөлетін 7 бөліктеу төменгідей:

$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}; \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}; \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}; \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\};$

$\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}; \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}; \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\};$  II ретті Стирлинг

сандарын үшбұрышты кесте түрінде орналастыруға болады:

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1							...
2	1	1						...
3	1	3	1					...
4	1	7	6	1				...
5	1	15	25	10	1			...
6	1	31	90	65	15	1		...
7	1	63	301	350	140	21	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Кестенің шеткі бірлерден басқа әр элементі есептелетін элементтен жоғарғы жолда орналасқан санды  $k$ -ға көбейтіп, оның сол жағындағы элементпен қосқаннан алынады.

Енді ақырлы  $X$  жиынын  $X_1, X_2, \dots, X_k$  ( $k \geq 1$ ) (мұндағы әр  $X_i$   $n_i$  элементтен тұрады) ішкі жиындарына бөлетін бөліктеулердің санын анықтайық:

$$\bigcup_{i=1}^k X_i = X$$

$$X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j \quad |X_i| = n_i, i = \overline{1, k}; \quad \sum_{i=1}^k n_i = n$$

екені белгілі. Кейбір  $i$  нөмірі үшін  $X_i = \emptyset$  болуы мүмкін. Тұрақатн  $n_i$  үшін бөліктеулер санын  $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$  деп белгілейік (Мұндағы бөліктеулердегі ішкі жиындар жиынтығы реттелген жиындар тізбегі болып табылады.

2 - тұжырым. 
$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}.$$

Шынында да, әрбір  $X_i$  ішкі жиынын қайталанбайтын теру деп қарауға болады, олай болса,

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Мысал. 25 адамнан тұратын топқа староста сайланды. 12 адам келісті, 10 қарсы болды, 3-і қалыс қалды. Мұндай сайлау қанша әдіспен жүргізіледі?

$$C_{25}^{12, 10, 3} = \frac{25!}{12! \cdot 10! \cdot 3!} = 1487285800$$

Енді  $i=1, 2, \dots, n$  үшін әрқайсысында  $i$  элементі бар  $m_i$  ішкі жиыны бар болатын  $(\sum_{i=1}^n m_i \cdot i = n)$   $|X|=n$ ,  $X$  жиынын қанша ішкі жиынға бөлуге болатынын есептейік: Мұнда алдыңғы жағдайға қарағанда ішкі жиындарды таңдау реттелмеген. Мысалы,  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  жиыны үшін келесі үш бөліктеу бірдей.

$$\{1, 3\}, \{4\}, \{2, 5\}; \{4\}, \{2, 5\}, \{1, 3\}; \{2, 5\}, \{4\}, \{1, 3\}$$

Бұл бөліктеуде  $m_1=1, m_2=2, m_3=m_4=m_5=0$ . Аталған бөліктеулердің санын  $N(m_1, m_2, \dots, m_n)$  арқылы белгілейміз. 3 - тұжырым.

$$N(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1! \dots m_n! (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}$$

Қарастырылып отырған реттелмеген бөліктеудің әрқайсысын  $m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!$  тәсілмен төмендегі реттелген бөліктеуге түрлендіруге болады:

$$X_1, \dots, X_{m_1}, X_{m_1+1}, \dots, X_{m_1+m_2}, \dots, X_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, X_{m_1+\dots+m_n}$$

мұндағы,



$$|X_1| = \dots = |X_{m_1}| = 1, |X_{m_1+1}| = \dots = |X_{m_1+m_2}| = 2, \dots, |X_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}| = \dots = |X_{m_1+\dots+m_n}| = n.$$

Мұндай реттелген бөліктеудің саны:

$$C_n^{1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, n, \dots, n} = \frac{n!}{(1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}$$

Ал реттелмеген бөліктеудің саны бұдан  $m_1! \cdot \dots \cdot m_n!$  есе аз.

Мысал. 25 адамнан тұратын топты әрқайсысы 5 адамнан 5 коалацияға қанша әдіспен топтастыруға болады?  $|X| = 25$ ,  $m_1 = \dots = m_4 = 0$ ,  $m_5 = 5$ ,  $m_6 = \dots = m_{25} = 0$ ;

$$N(0, 0, 0, 0, 5, 0, \dots, 0) = \frac{25!}{5!(5!)^5} = \frac{25!}{(5!)^6} = 5194672859376.$$

**Ендіру және шығару формуласы. Жиындарды бөліктеу** Айталық,  $X_1, X_2$  – ақырлы жиындар берілсін. Егер  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , онда  $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2|$ . Егер  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ , онда  $|X_1| + |X_2|$  жиынында  $X_1 \cap X_2$  алынған элемент 2-рет есепке алынады, демек  $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$ .

Кез келген жиын үшін ендіру және шығару формуласын қорытайық:

4-тжырым.  $X_i$ ;  $i=1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$  ақырлы жиындары берілсін. Олай болса  $|X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = (|X_1| + \dots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n|) + (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \dots + (-1)^{n+1} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|$ .

Салдар. Айталық  $X$  – ақырлы жиын болсын,  $X_1, \dots, X_n$  –  $X$ -тің ішкі жиындары. Онда ішкі жиындардың ешбіріне тиісті емес  $x \in X$  элементтердің саны мына

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)| = |X| - (|X_1| + \dots + |X_n|) + (|X_1 \cap X_2| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n|) - \dots - (-1)^n |X_1 \cap \dots \cap X_n|$$
 формула бойынша есептеуге болады.

Ендіру және шығару формуласын жазудың кең тараған формасы төмендегідей. Айталық,  $X$   $N$  элементтен тұратын ақырлы жиын,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$   $X$ -тің элементтерінде бар болуы да, болмауы да мүмкін қасиеттер.  $X_i$  арқылы  $\alpha_i$  қасиеттері бар элементтерден құралған жиынды белгілейміз. Яғни  $X_i = \{x \in X \mid \alpha_i(x)\}$ ,  $i=1, \dots, n$ .

$N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$  арқылы  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$  қасиеттерінің бәріне ие  $X$  элементтерінің санын белгілейік:

$$N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_k}|, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ қасиеттердің}$$

ешқайсысы жоқ элементтің санын  $N_0 = |X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)|$  деп белгілейік.

$$\text{Олай болса } N_0 = N - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n = N + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k,$$

мұндағы  $S_k = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ ,  $k=1, \dots, n$ .

Мысалы, егер  $n=3$ , онда  $N_0=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)-N(\alpha_3)+N(\alpha_1,\alpha_2)+N(\alpha_1,\alpha_3)+N(\alpha_2,\alpha_3)-N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ .

Мысал. Айталық,  $X=\{1,2,\dots,10\}$ ,  $\alpha_1(x)$ : "x-жұп",  $\alpha_2(x)$ : "x>6",  $\alpha_3(x)$ : "2<x<8" болсын. Ешқандай қасиеті жоқ элементтердің саны  $N_0$  есептейік.  $N_0 = 10-5-4-5+2+2+1-0=1$  (шынында, X-ң ешқандай қасиеті жоқ элементі 1  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ).

Ендіру және шығару формуласын шығарып пайдаланатын тағы бір есепті қарастырайық.

Тәртіпсіздік туралы есеп. Әр түрлі  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  зат және әр түрлі  $b_1, b_2, \dots, b_n$  жәшіктер бар.  $a_i$  заттарының ешқайсысы  $b_i$  жәшігіне түспейтіндей етіп,  $a_i$  бұйымдары қанша әдәспен жәшіктерге салуға болады? Басқаша айтсақ, кез келген  $i=1, 2, \dots, n$  үшін  $a_i \neq i$  болатындай

1	2	...	i	...	N
$a_1$	$a_2$	...	$a_i$	...	$a_n$

1, 2, ..., n сандарының қанша алмастырулары  $a_1, a_2, \dots, a_n$  бар? Яғни кез келген элементтің образы өзінің образына тең болмайтындай қанша алмастыру бар?

Берілген X жиыны ретінде бұйымдардың жәшіктерге барлық мүмкін орналасуларының жиынтығын аламыз. Олай болса  $N=|X|=n!$   $\alpha_i$  қасиеттерін енгізейік: " $a_i$   $b_i$  жәшігінде бар",  $i=1,\dots,n$ .  $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$  саны  $\alpha_{ij}$  бұйымы  $b_{ij}$   $j=1,\dots,k$  жәшігінде бар болатын орналасулар  $(n-k)!$ -ға тең.

Бірақ онда  $k$  бұйымның өздерінің  $S_k$  жәшіктеріне түсетін орналасулар саны:

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = C_n^k (n-k)! = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!}$$

Енді ендіру және шығару формуласын пайдаланып, ешқандай қасиет орындалмайтын (яғни ешқандай  $a_i$  бұйымы  $b_i$  жәшігіне түспейді) орналасу саны:

$$N_0 = N + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} = n! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Жақшадағы өрнек - e-1 шексіз қатар жіктеуінің 1-ші мүшелері, ендеше

$\frac{n!}{e}$  -n символдан тұратын тәртіпсіздіктер санына жақсы жуықтайды.

Егер бізді тәртіпсіздіктің саны ғана емес,  $a_i=i$  дәл k орында болатын, 1, 2, ..., n құралған  $a_1, \dots, a_n$  алмастырулардың санын да анықтау керек болса, онда «кездесу» деп аталатын басқа есеп туады. Оның шешімі: n-нен

$k$  санды  $C_n^k$  тәсілмен таңдауға болады, таңдағаннан кейін оны қалған  $n-k$  символдағы тәртіпсіздіктердің санына көбейту керек. Сонда

$$N = C_n^k (n-k)! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right) = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right) = \frac{n!}{k!} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right)$$

Бақылау сұрақтары:

1. Сізге жиындарды бөліктеудің қандай типтері белгілі?
2. Стирлинг саны қалай есептеледі?
3. 4 жиын үшін ендіру және шығару формуласын құрыңыз.
4. Тәртіпсіздік туралы есепті сипаттаңыз.
5. Кездесу есебін келтіріңіз.

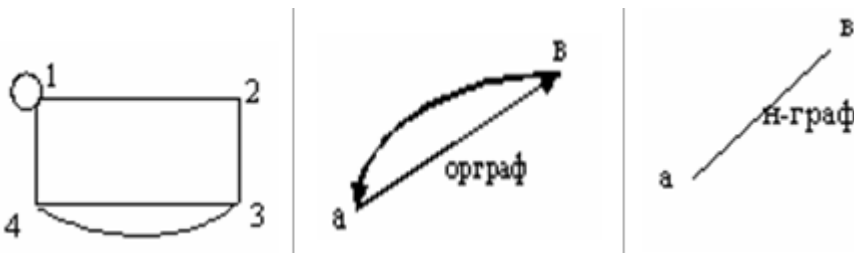
## 11. Дәріс тақырыбы: Графтар. Қасиеттері. Операциялар.

### Графтар теориясының элементтері

Граф ұғымы. Көптеген қолданбалы есептерде айналамызды қоршаған ортаның әртүрлі объектілер арасындағы байланыстар жүйесі зерттеледі. Объектілер төбелер деп аталып, нүктелер арқылы белгіленеді, ал төбелер арасындағы байланыстар доғалар деп аталып, сәйкес нүктелерді қосатын бағытталған түзулермен белгіленеді. Қала көшелерін граф арқылы кескіндеуге болады: көше қиылысуларын графтардың төбесі деп, ал көшелерді доғалар деп алуға болады;

Блок-схемаларды да граф түрінде кескіндеуге болады: блоктар — граф төбелері, ал операцияның орындалу кезегін көрсететін стрелкалар доғалар.

Анықтама:  $G=(M,R)$  алгебралық жүйе граф деп аталады. Мұндағы  $M$ —жиынтығы бос емес жиын, оның элементтері графтың төбелері деп аталады, ал бинарлы  $R$  қатынасының  $R \subseteq M^2$  элементтері доғалар деп аталады. Сонымен граф төбелері дегеніміз –айналамызды қоршаған ортаның кез келген объектісі. Олардың саны шектеулі болғандықтан,біз оларды натурал сандармен белгілейміз. Ал граф қабырғалары оның кейбір төбелерін қосады. Граф қабырғаларын әдетте латын әріптерімен белгілейді.  $G= \langle M,R \rangle$  графының геометриялық кескіні жазықтықта графтың әр төбесін нүкте арқылы белгілеп , егер  $(a,b) \in R$  болса  $a$  төбесінен  $b$  төбесіне доға жүргізу арқылы алынады. Мысалы: төбелері  $M=\{1,2,3,4\}$ , ал доғалары  $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(4,1)\}$  болатын  $G$  графының геометриялық кескіні төмендегідей:



Графтың төбелерінің қандай сызықтарымен қосылатындығы (түзу әлде қисық), сызықтардың ұзындығы туралы ақпараттар маңызды емес. Төбелердің арасында байланыс бар екендігі және ол байланыс туралы ақпарат  $R$  доғалар жиынында екендігі болса болды. Төбелерді қосатын сызықтардың бағыты көрсетілген болуы мүмкін (мысалдағы сияқты). Мұндай граф бағытталған граф деп аталады (орграф). Оған математикалық түрде мынандай анықтама беруге болады.

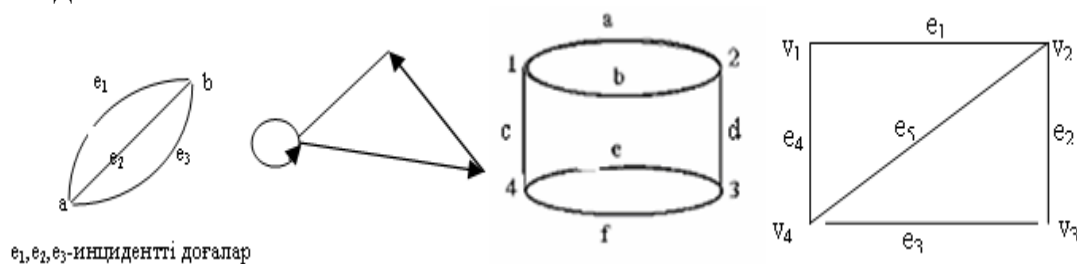
Анықтама: Егер  $R$  қатынасы симметриялы болмаса, яғни  $(a,b) \in R, (b,a) \notin R$  онда  $G= \langle M,R \rangle$  графы бағытталған (орграф) деп аталады, ал  $R$  қатынасы симметриялы болса  $(a,b) \in R, (b,a) \in R$  онда  $G$  бағытталмаған (неорграф) немесе н-граф деп аталады. Айталық:  $a,b$ -граф

төбелері,  $e=(a,b)$  оларды қосатын доға болсын. Мұндай жағдайда  $a$ ,  $b$  төбелері мен  $e$  доғасы инцидентті деп аталады.  $b$  мен  $e$  доғасы да инцидентті. Әр доға  $e \in E$  өзі қосатын екі төбеге инцидентті болады. Бір доғамен қосылатын 2 төбе сыбайлас (бүйірлес) деп аталады.

*Анықтама:* Төбелердің бір жұбына инцидентті доғалар еселі немесе параллель доғалар деп аталады

*Анықтама:* Еселі доғалары бар граф мультиграф деп аталады.

*Анықтама:* Шығатын және кіретін төбесі біреу болатын доға ілгек деп аталады.



*Анықтама:* Егер  $(a,b)$ ,  $(b,a)$  доғалары бір уақытта  $R$  қатынасына жатса, онда бұл доғалар туралы ақпаратты  $[a,b] = \{(a,b), (b,a)\}$  жиыны арқылы көрсетуге болады.  $[a,b]$  жиыны қабырға деп аталады.

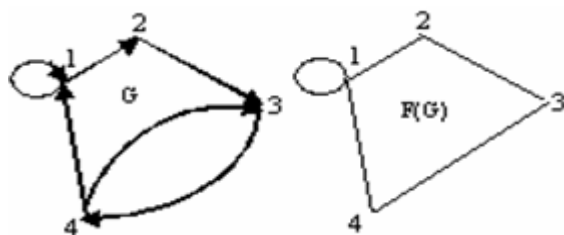
Мысалы,мына суреттегі графтың 4 төбесі, 5 қабырғасы бар.

Төбелері:  $v_1, v_2, v_3, v_4$ ; Қабырғалары:  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ ; Бұл графтағы  $v_1$  мен  $v_2$ ;  $v_2$  мен  $v_3$ ;  $v_3$  пен  $v_4$ ;  $v_4$  пен  $v_1$  іргелес төбелер,  $v_1, v_3$ -сыбайлас емес.

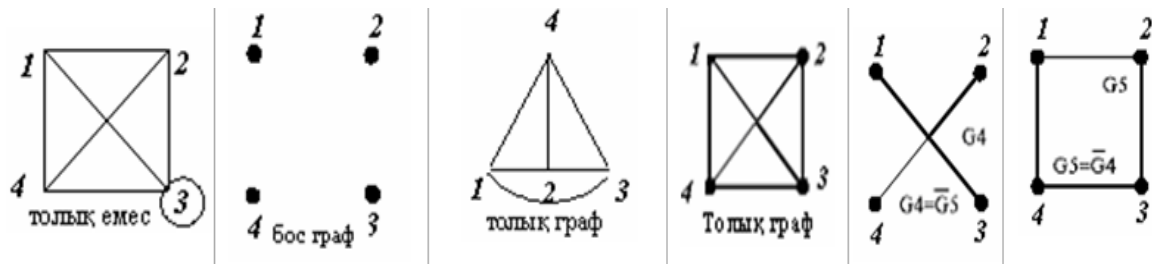
Сол сияқты:  $e_1, e_2$ ;  $e_2, e_3$ ;  $e_3, e_4$ ;  $e_4, e_1$ ;  $e_1, e_5$ ;  $e_2, e_5$ ;  $e_3, e_5$ ;  $e_4, e_5$ ; -қабырғалары сыбайлас.  $e_1, e_3$ ;  $e_2, e_4$ ; - сыбайлас емес қабырғалар.

Егер  $G = \{M, R\}$  орграфындағы әр  $(a,b) \in R$  доғасына,  $(b,a)$  жұбын қосса нәтижесінде берілген  $G$  графына сәйкес  $H$ -граф шығады, оны  $F(G)$  деп белгілейді.

*Анықтама:* Егер граф элементтерінің (төбелері мен қабырғалары) жиыны ақырлы болса, графта ақырлы деп, ал қабырғалар жиыны бос болса, бос граф деп аталады.



Ілгексіз, әрі еселі қабырғалары жоқ және әрбір төбелер жұбы қабырғамен қосылған граф толық граф деп аталады.

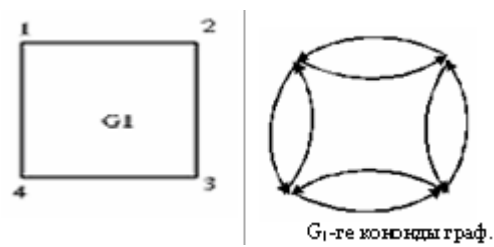


**Анықтама:** Берілген  $G$  графындағыдай төбелері және  $G$  графына қосқанда оны толық графқа айналдыра тындай ғана қабырғалары бар  $\bar{G}$  графы  $G$ -н толықтауыш графы деп аталады.

**Анықтама:** Бағытталмаған графтың әр қабырғасын қарама қарсы бағытталған доғалармен алмастырғаннан алынған граф берілген графқа сәйкес канонды граф деп аталады.

**Анықтама:** Еселі доғаларсыз бағытталған графты көбіне диграф деп атайды.  $G = \langle V, E \rangle$  -  $V$ -бос емес (төбелерінің) жиын;  $E \subseteq V \times V$ ;

**Анықтама**  $G$   $n$ -графының  $V$  төбесіне инцидентті қабырғалар саны  $P(v)$   $\forall v \in V$  төбесінің локальді дәрежесі деп аталады.  $n$ -графта барлық төбелердің локальды дәрежелерінің қосындысы графтың 2 еселенген қабырғалар санына тең, яғни жұп сан. Ілгек төбе дәрежесіне 2-ге тең үлес қосады:



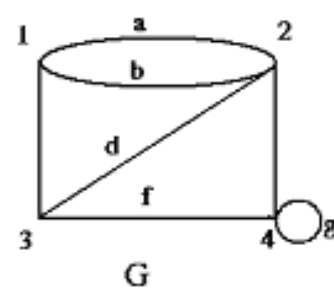
$$\sum_{v \in G} \rho(v) = 2m$$

**Анықтама** Егер локальды дәреже жұп болса, төбе жұп деп, ал тақ болса төбе тақ төбе деп аталады. 0 дәрежелі төбе оқшауланған төбе деп аталады.

$$V = \{1, 2, 3, 4\}. G_1 : \rho(1) = 3, \rho(2) = 4, \rho(3) = 3, \rho(4) = 4,$$

$$\sum_{v \in G} \rho(v) = 14 = 2m; \text{ Мұндағы, } m = 7 \text{—графтың}$$

қабырға ларының саны. Бағытталған графтың төбелері үшін 2 локальды дәреже анықталады.  $\rho_1(v)$  -  $v$  төбесінен шығатын қабырғалар саны.  $\rho_2(v)$  -  $v$  төбесіне кіретін қабырғалар саны.



Бағытталған графта барлық төбелердің локальды дәрежелері  $\rho_1(v)$ ,  $\rho_2(v)$  осы графтың қабырғалар санына тең, демек олар өзара тең

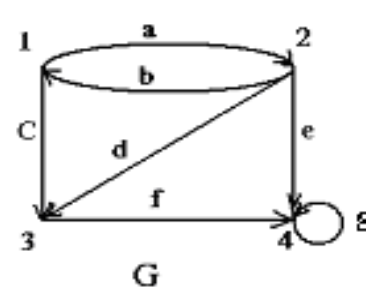
$$\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = m; \text{ Мысалы:}$$

$$\rho_1(1) = 2, \rho_1(2) = 3, \rho_1(3) = 1, \rho_1(4) = 1;$$

$$\rho_2(1) = 1, \rho_2(2) = 1, \rho_2(3) = 2, \rho_2(4) = 3;$$

$$\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = 7 = m$$

1-ші, 2-ші типті дәрежелер қосындысы бірдей



қабырғалар санына тең. Егер  $G^1$  төбелері мен қабырғалары  $G_2$  графының төбелері мен қабырғалары бірдей болса, яғни:  $V_1=V_2, E_1=E_2$  болса, онда  $G_1=G_2$ .

### Графтардың берілу тәсілдері.

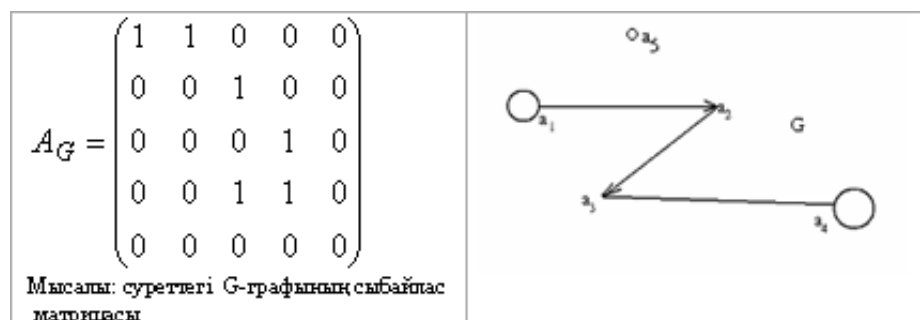
Графтардың берілуі дегеніміз оның төбелері мен қабырғаларынан тұратын жиындарды сипаттау болып табылады. Төбелер мен қабырғаларды жай ғана нөмірлеуге болады.

1. Төбелері:  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ; Қабырғалары:  $e_1, e_2, \dots, e_n$

2. Граф құрылымы туралы ақпарат бинарлы қатынас матрицасы арқылы да беріледі. Мысалы,  $G=\langle M, R \rangle$  граф болсын.  $M$  төбелер жиыны  $M=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .  $R$  граф төбелерінің арасындағы бинарлы қатынас болсын.  $G$ -графының сыбайлас матрицасы деп төмендегідей анықталған  $n$  ретті  $A_G = \{A_{ij}\}$  матрицаны айтамыз.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } (a_i, a_j) \in R \\ 0, & \text{егер } (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

$n$ -графта  $a_i, a_j$  төбелері іргелес болады, егер  $A_{ij}=1$  немесе  $A_{ji}=1$ , яғни  $n$ -графта  $A_{ij}=A_{ji}=1$ . Егер  $G$  мультиграф болса оның іргелестік  $A_G$  матрицасының  $A_{ij}$  элементтері анықтама бойынша  $a_i$  төбесінен шығып  $a_j$  төбесіне кіретін доғалардың санына тең ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ).



Егер  $A_G$ — $n$ -граф болса, оның іргелестік матрицасы  $A_G$ -симметриялы, яғни  $A_G^T = A_G$ . Төбені өзімен қайта қосатын доға—ілгек деп аталады. Егер графта ілгек доғалар болмаса, онда іргелестік  $A_G$  матрицаның бас диагоналінде нөлдік элементтер тұрады.

3. Графының инциденттік матрица арқылы берілуі.

Анықтама:  $m \times n$  мөлшерлі инциденттік матрица  $B_G$  деп төмендегі ережемен анықталатын матрицаны айтамыз.  $G$ - $n$ -граф болса

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } e_i \text{ кабырға } v_j \text{ төбесіне инцидентті болса} \\ 0 & \text{— егер керісінше болса} \end{cases}$$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & * & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & * & & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

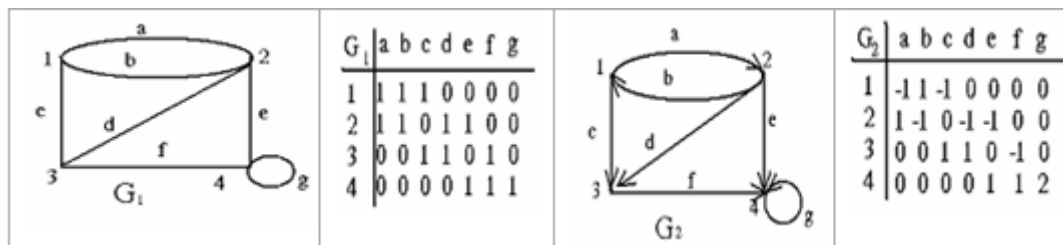
G орграф болса

$$B_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{егер } v_j \text{ төбе } e_i \text{ аабырааб басы болса;} \\ 1, & \text{егер } v_j \text{ төбе } e_i \text{ аабырааб соо болса;} \\ \alpha & (-1,1,0 \text{ бас } a \text{ кез келген сан}), \text{егер } e_i \text{—ілгек,} \\ & \text{ал } v_j \text{—о } a \text{ инцидентті төбе болса;} \\ 0 & \text{— аал } a \text{ жаааа;} \end{cases} \quad \vdots$$

#### 4. Графтың кабырғаларының тізімімен берілуі:

Граф екі бағанмен беріледі: біріншісінде барлық кабырғалар  $e_i$ , ал оң жақ бағанда оған инцидентті төбелер жазылады; n-граф үшін төбелердің жазылу реті еркін түрде, ал орграф үшін кабырғаның басталатын төбесі 1-ші тұрады.

1-мысал: суреттегі графты іргелес және инциденттік матрицалармен және кабырғалар тізімімен беру керек.



$G_1, G_2$ — графтары мен олардың инциденттік матрицалары

$G_1$	1	2	3	4	$G_2$	1	2	3	4	$G_1$ Кабырға	төбе	$G_2$ Кабырға	төбе		
1	0	2	1	0	1	0	1	1	0	a	2	1	a	1	2
2	2	0	1	1	2	1	0	1	1	b	1	2	b	2	1
3	1	1	0	1	3	0	0	0	1	c	3	1	c	1	3
4	0	1	1	1	4	0	0	0	1	d	2	3	d	2	3
										e	2	4	e	2	4
										f	4	3	f	3	4
										g	4	4	g	4	4

$G_1, G_2$  графтарының сыбайлас (іргелес) матрицалары және кабырғалары мен төбелерінің тізімімен берілуі.  $G_1$ -бағытталмаған граф болғандықтан төбелердің бағыты еркін түрде көрсетіледі



$G$  графын оның әр төбесіне  $v_i \in V(G)$  сыбайлас төбелердің жиыны арқылы да өрнектеуге болады. Ол жиынтықты  $v_i$ . Төбесінің аймағы деп атайды және  $O(v_i)$  деп белгілейді. Сонымен

$$O(v_i) = \{ v_j \mid [v_i, v_j] \in E(G) \}.$$

$G$  диграфын оның әр төбесіне  $v_i \in V(G)$  шығунемесе кіру аймақтарын көрсету арқылы да өрнектеуге болады:  $O^-(v_i) = \{ v_j \mid (v_i, v_j) \in E(G) \}$ ,

$$O^+(v_i) = \{ v_j \mid (v_j, v_i) \in E(G) \}.$$

*1. Қабырғаларының тізімі бойынша инцидентті матрица құру.*

Тізімнің әр жолы сол нөмірмен алынған матрица жолына сәйкес.  $n$ -граф үшін тізім жолында инцидентті матрица жолындағы 1-ге тең элементтердің (төбелердің) нөмірлері көрсетілген.

Орграф үшін бұл жолда бірінші болып матрицаның -1-ге тең элементінің нөмірі, екіншісі болып матрицаның 1-ге тең элементінің нөмірі көрсетіледі. Тізім жолындағы нөмірлер бірдей болған жағдайда, инцидентті матрицаның жолындағы аталған элементке 2 қойылады.

*2. Іргелес матрица бойынша, қабырғалар тізімін құру.*

$i$ -жол мен  $j$ -баған қиылысуында орналасқан матрица элементіне әр қайсысында  $i, j$  нөмірлері жазылған қабырғалар тізімінің  $\delta_{ij}$  жолы сәйкес келеді. ( $\delta_{ij} = 0$  болса бір де бір жол жоқ).  $n$ -граф үшін бұл жолдар іргелес матрицаның тек жоғарғы оң жақ үшбұрышындағы элементтерге сәйкес болады, яғни  $j > i$  орындалатын  $\delta_{ij}$  элементтер үшін, ал орграф үшін барлық  $\delta_{ij}$  элементтерді қарастыру керек.

### **Салмақтанған графтар.**

Көп есептерде графтардың төбесі мен доғалары туралы қосымша ақпарат қажет болады, мысалы, егер граф қалааралық жолдарды бейнелесе салмақтанған графтар қолданылады.

Айталық  $S_M, S_R$  - таңбалар жиыны болсын.  $f: M \rightarrow S_M$  (төбелерді таңбалау),  $g: R \rightarrow S_R$  (доғаларды таңбалау) функциялары  $G = \langle M, R \rangle$  графын таңбалау бөлінуі деп аталады.  $G = \langle M, R, f, g \rangle$  таңбаланған немесе салмақтанған граф деп аталады.

$f(a)$ - $a$  төбесінің салмағы деп, ал  $g(e)$   $e$  доғасының салмағы деп аталады. Доға мен төбенің біреуінің ғана таңбалануы жиі кездеседі.

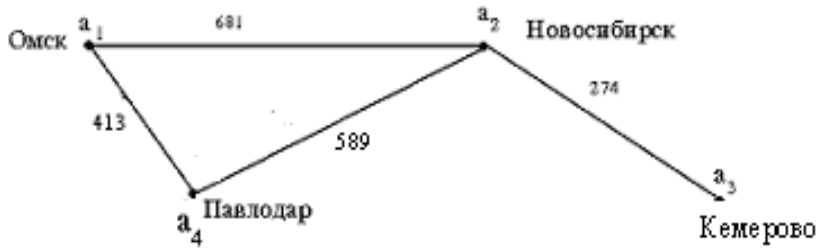
Мысалы: Айталық  $M = \{a_1, a_2, a_3, a_n\}$ ,  $R = \{[a_1 a_2], [a_2 a_3], [a_1 a_4], [a_2 a_4]\}$ ;

$f: M \rightarrow C$  мұндағы,  $C$ - қалалар жиыны,  $g: R \rightarrow W$ .

$f(a_1) = \text{Омск}$ ,  $f(a_2) = \text{Новосибирск}$ ,  $f(a_3) = \text{Кемерово}$ ,  $f(a_4) = \text{Павлодар}$

$g([a_1 a_2]) = 681$ ;  $g([a_2 a_3]) = 274$ ,  $g([a_1 a_4]) = 413$ ;  $g([a_2 a_4]) = 589$ . Таңбалаған

$\langle M, R, f, g \rangle$  графты – белгілі бір қалалар арасындағы ұзындығы көрсетілген автомобиль жолдарының схемасы. Салмақталған графтардағы доғалардың салмағы туралы ақпаратты салмақ матрицасы арқылы кескіндеуге болады.  $W = (w_{ij})$  – мұндағы  $w_{ij} = (a_i, a_j)$  доғасының салмағы жоқ доғалар әдетте ноль немесе  $\infty$  белгісімен белгіленеді. Қарастырылған мысал үшін салмақтылық матрицасының түрі



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

**Графтарға қолданылатын амалдар. Графқа төбе қосу.**

$G = \langle M, R \rangle$  графына  $a$  төбесін қосқаннан  $\langle M \cup \{a\}, R \rangle$  графы құралады.

Графқа доға қосу операциясының нәтижесінде  $\langle M \cup \{(a,b)\}, R \cup \{(a,b)\} \rangle$  графы құрылады.

Графтан доға алу —  $R$  доғалар жиынынан  $(a,b)$  жұбы алынады.  $\langle M, R \setminus \{(a,b)\} \rangle$

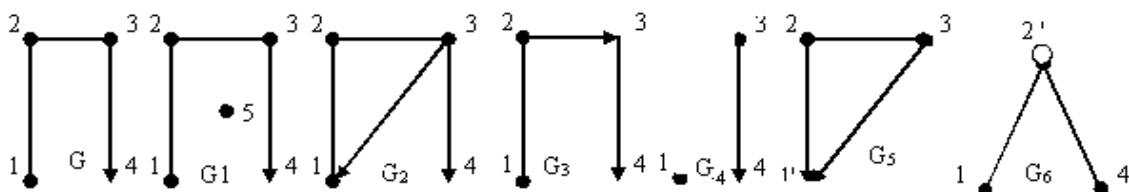
Графтан төбе алу операциясының нәтижесінде  $G$  графынан  $a$  төбесі оған инцидентті доғалармен бірге алынады деп айтады.  $\langle M \setminus \{a\}, R \setminus \{(b,c) \mid b=a \text{ немесе } c=a\} \rangle$

Графтың  $a, b$  төбелерін теңестіру деп графтан  $a, b$  төбелерін алып тастап мына тәртіппен төбе мен қабырға қосу: жаңа  $a^1$  төбесі мен  $(a^1, c)$ , егер  $(a, c) \in R$  немесе  $(b, c) \in R$  және  $(c, a^1)$  доғасын егер  $(c, a) \in R$  немесе  $(c, b) \in R$  болса:  $\langle (M \setminus \{a,b\}) \cup \{a^1\}, (R \setminus \{(c,d) \mid c=a \text{ немесе } d=a, \text{ немесе } c=b, \text{ немесе } d=b\}) \cup \{(a^1,c) \mid (a,c) \in R, \text{ немесе } (b,c) \in R\} \cup \{(c,a^1) \mid (c,a) \in R, \text{ немесе } (c,b) \in R\} \rangle$ .

Алынған граф  $G$  графынан  $a, b$  төбелерін теңестіргеннен алынды делінеді.

$a, b$  төбелері доғамен қосылса, төбелерді теңестіру  $a, b$  доғасын созғаннан алынады дейді. Мысалдар:

Берілген  $\langle \{1,2,3,4\}, \{[1,2], [2,3], (3,4)\} \rangle$  графынан суреттегі  $G_1 - G_6$  графтары қандай операциялармен алынды?



$G$  графына 5 төбені қосқаннан  $G_1$  графы алынды.

$G$  графына  $(3,1)$ –доғасын қосқаннан  $G_2$  графы алынды.

$G$  графына  $(3,2)$  доғасы алынады  $G_3$  графы алынды.

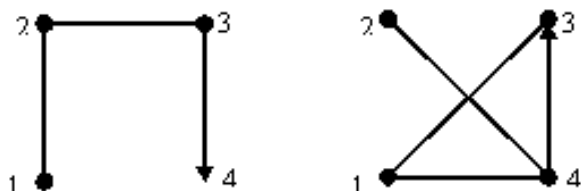
$G$  графына 2 – төбені алғаннан  $G_4$  графы алынды.

$G$  графының (1,4) төбелерін теңестіргеннен  $G_5$  графы алынды.

$G$  графының (2,3) доғасын қысқаннан  $G_6$  графы алынды.

$\bar{G} = \langle M, M^2 \setminus R \cup Id_M \rangle$  графы ілгексіз  $G = \langle M, R \rangle$  графының толықтырушы графы деп аталады.

Мысал: Айталық,  $G_1 = \langle M_1, R_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle M_2, R_2 \rangle$  графтары берілсін.



$$G = \langle M, R \rangle; \bar{G} = \langle M, M^2 \setminus R \cup Id_M \rangle$$

**Анықтама:**  $G_1, G_2$  графтарының бірігуі деп  $G_1 \cup G_2 = \langle M_1 \cup M_2, R_1 \cup R_2 \rangle$  графын айтады.

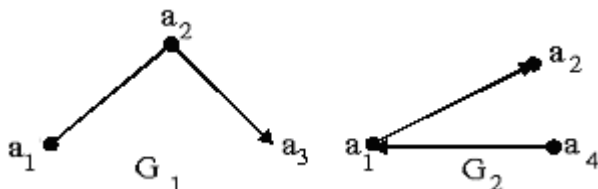
**Анықтама:** Егер  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  онда  $G_1, G_2$  графының қиылысуы деп,  $G_1 \cap G_2 = \langle M_1 \cap M_2, R_1 \cap R_2 \rangle$  графын айтады.

**Анықтама:**  $G_1, G_2$  графтарының сақиналы қосындысы деп  $G_1 \oplus G_2 = \langle M_1 \cup M_2, R_1 \oplus R_2 \rangle$ , мұндағы  $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$ .

Мысалы  $G_1$  және  $G_2$  графтары берілсін.

$$G_1 = \langle \{a_1, a_2, a_3\}, \{[a_1, a_2], (a_2, a_3)\} \rangle;$$

$$G_2 = \langle \{a_1, a_2, a_4\}, \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\} \rangle;$$



Табу керек:  $G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2, G_1 \oplus G_2$ ?

**Шешуі:** Анықтама бойынша:

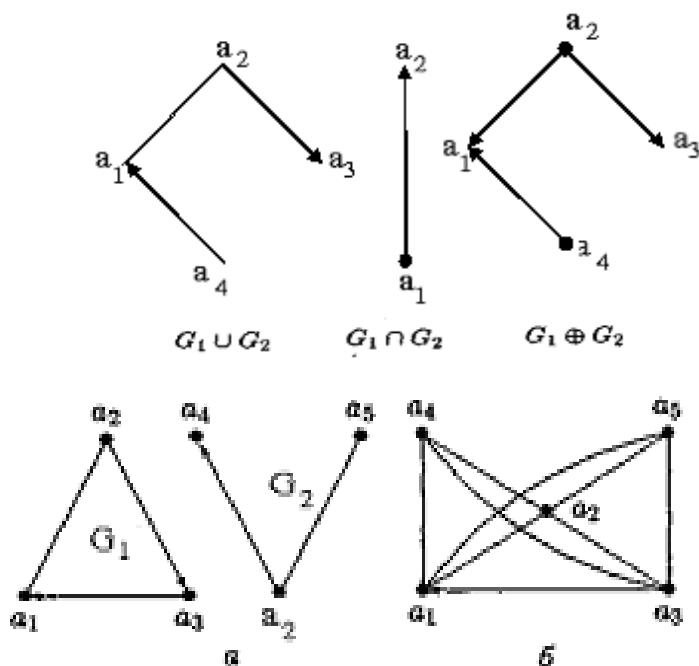
$$G_1 \cup G_2 = \langle \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{[a_1, a_2], (a_2, a_3), (a_4, a_1)\} \rangle;$$

$$G_1 \cap G_2 = \langle \{a_1, a_2\}, \{[a_1, a_2]\} \rangle.$$

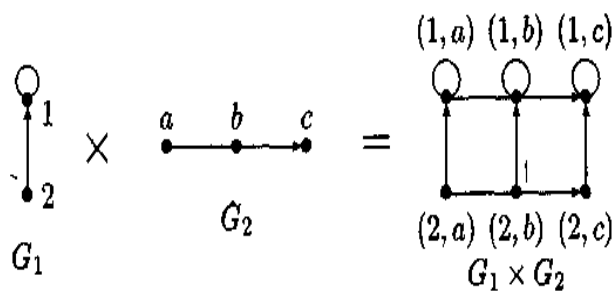
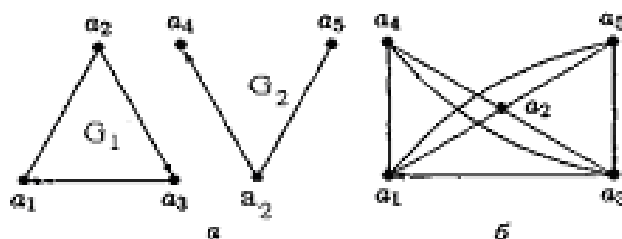
$$G_1 \oplus G_2 = \langle \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\} \rangle;$$

$G_1, G_2$  графтарының қосылуы деп

$$G_1 + G_2 = \langle M_1 \cup M_2, R_1 \cup R_2 \cup \{[a, b] \mid a \in M_1, b \in M_2, a \neq b\} \rangle.$$



Мына суреттің а пунктіндегі  $G_1$ ,  $G_2$  графтарының қосындысы б пунктте көрсетілген.



$G_1, G_2$  графтарының көбейтіндісі деп  $G_1 \times G_2 = \langle M_1 \times M_2, R \rangle$ , мұндағы  $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$  тек сонда ғана, егер  $a_1 = a_2$  және  $(b_1, b_2) \in R_2$  немесе  $b_1 = b_2$  және  $(a_1, a_2) \in R_1$ .

### Ішкі графтар және графтардың бөлігі.

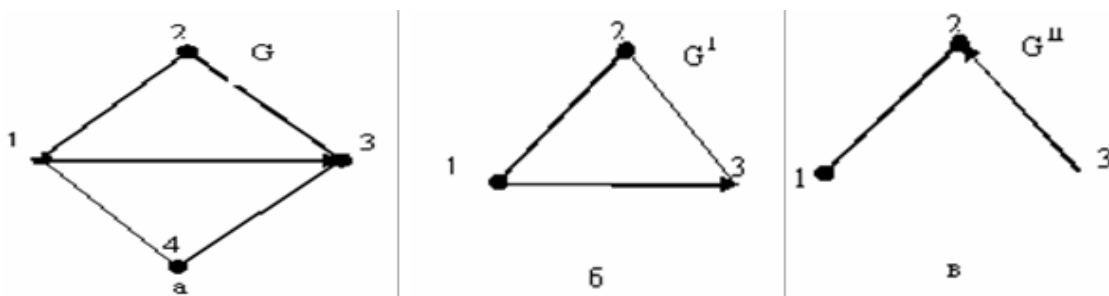
#### Граф бөліктерімен операциялар.

Анықтама: Егер  $M^1 \subseteq M$  және  $R^1 \subseteq R \cap (M^1)^2$  болса, яғни  $G^1$  графының төбелер жиыны  $G$  графы төбелер жиынына, ал  $G^1$  қабырғалар жиыны  $G$  графының қабырғалар жиынына жатса  $G^1$ -  $G$  бөлігі деп аталады.

Анықтама Айталық.  $G = \langle M, R \rangle, G^1 = \langle M^1, R^1 \rangle$  графтары берілсін. Егер  $M^1 \subseteq M$  және  $R^1 = R \cap (M^1)^2$  болса, яғни  $G^1$  графының төбелер жиыны  $G$ -н төбелер жиынында жатса ал  $G^1$ -н доғалары екі жағымен де  $G$  графына жатса  $G^1$ - $G$  графының ішкі графы деп аталады.

Анықтама. Егер  $H$  графының төбелер жиыны  $V(H)$  мен қабырғалар жиыны  $E(H)$   $G$  графының сәйкесінше төбелері мен қабырғалар  $V(G), E(G)$  жиындарында жатса  $V(H) \subset V(G)$  және  $E(H) \subset E(G)$ , онда  $H$  графы  $G$  графының бөлігі деп аталады  $H \subset G$ .

Анықтама Егер  $V(H) = V(G)$ ,  $G$  графының бөлігі  $H$  суграф деп аталады. Егер  $G$  графының кез келген төбесі  $H$  графының ең болмаса бір қабырғасына инцидентті болса, онда бағытталмаған  $H$  графы  $G$  графын жабады дейміз.



Мысалы: а)  $G = \langle \{1, 2, 3, 4\}, \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [3, 4]\} \rangle$

б)  $G^1 = \langle \{1, 2, 3\}, \{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\} \rangle$  -  $G$  ішкі графы ( $M^1 \subseteq M, R^1 \subseteq R \cap R^1$ )

в)  $G^{II} = \langle \{1, 2, 3\}, \{[1, 2], [2, 3]\} \rangle$  -  $G$  графының бөлігі ( $M^{II} \subseteq M, R^{II} \subseteq R \cap (M^{II})^2$ )

### Граф бөліктеріне қолданылатын амалдар.

Граф бөліктеріне төмендегідей амалдар орындалады:

$H$ -бөліктің толықтаушы  $\bar{H}$ - $G$ -графының  $H$ -ға жатпайтын барлық қабырғалар жиынымен анықталады.

$H : E(H) \cap E(\bar{H}) = \emptyset, E(H) \cup E(\bar{H}) = E(G)$ , мұндағы  $E(G)$ - $G$ -графының қабырғаларының жиыны.

-  $G$  графының  $H_1, H_2$  бөліктерінің қосындысы  $H_1 \cup H_2$ :

-  $V(H_1 \cup H_2) = V(H_1) \cup V(H_2)$  және  $E(H_1 \cup H_2) = E(H_1) \cup E(H_2)$ ;

-  $G$  графының  $H_1, H_2$  бөліктерінің көбейтіндісі  $H_1 \cap H_2$ :

$V(H_1 \cap H_2) = V(H_1) \cap V(H_2)$  және  $E(H_1 \cap H_2) = E(H_1) \cap E(H_2)$ ;

Егер  $H_1, H_2$  бөліктерінің ортақ төбелері болмаса, яғни  $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$ , демек ортақ қабырғалары да жоқ  $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$ , онда  $H_1, H_2$  бөліктері төбелері бойынша қиылыспайды.

Егер  $H_1, H_2$  бөліктерінің ортақ қабырғалары болмаса  $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$ , онда  $H_1, H_2$  бөліктері қабырғалары бойынша қиылыспайды.

Егер  $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$  болса онда  $H_1 \cap H_2$  тура қосынды деп аталады.

### Графтар мен бинарлы қатынастар.

$V$  жиынында берілген  $R$  қатынасына өзара бір мәнді анықталған,  $v' R v''$  орындалса ғана  $(v', v'')$  қабырғасы бар болатын  $V$  төбелер

жиындарымен қабырғалар еселі емес бағытталған  $G(R)$  графы сәйкес келеді.

1-мысал: Симметриялы, антисимметриялы, рефлексивті, антирефлексивті, транзитивті  $R$  бинарлы қатынасына өзара бір мәнді сәйкес  $G$  графының қандай ерекшеліктері бар?

Айталық  $R$  бинарлы қатынасы  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  жиынында анықталсын.

а) симметриялы  $R$  қатынасына еселі қабырғалары жоқ,  $v' R v''$  орындалса ғана  $(v', v'')$  қабырғасы бар болатын бағытталмаған  $G(R)$  графы сәйкес келеді (симметриялы болғандықтан  $v'' R v'$ ).

б) Антисимметриялы  $R$  қатынасына еселі қабырғаларсыз, (әртүрлі төбелерге қарама-қарсы бағытталған қабырғалары бар төбелер болмайтын) өзара бір мәнді бағытталған  $G(R)$  графы сәйкес келеді.

в) Егер  $R$  рефлексивті болса, барлық төбелерінде ілгектері бар еселі қабырғаларсыз  $G(R)$  графы сәйкес келеді.

г) Егер  $R$  антирефлексивті болса, еселі қабырғаларсыз  $G(R)$  графында бір де бір ілгек болмайды.

д) Егер  $R$  транзитивті болса, еселі қабырғаларсыз  $G(R)$  графының әрбір  $(v', v'')$  және  $(v'', v''')$  қабырғалар жұбына оларды тұйықтайтын  $(v', v''')$  қабырғасы бар болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай графтар бағытталған графтар деп аталады?
2. Қандай графтар бағытталмаған деп аталады?
3. Графтарда қандай төбелер сыбайлас төбелер деп аталады?
4. Төбелер дәрежесі деген не?
5. Графтардың берілу тәсілдерін атаңыз.
6. Графтармен қандай операциялар орындалады.

## 12. Дәріс тақырыбы. Графтар саны. Ағаштар.

**Цикломатикалық сан.** Бағытталмаған  $G(V, E)$  графы берілсін.  $\nu(G)=m-n+r$ , Мұндағы  $m$ —граф қабырғаларының саны;  $n$ —граф төбелерінің саны;  $r$ —байланысты компоненттер саны  $G(V, E)$  графының цикломатикалық саны деп аталады. Цикломатикалық санының физикалық мағынасы бар: ол графтың тәуелсіз циклдарының санына тең. Электр шынжырларын есептеген кезде цикломатикалық сан тәуелсіз контурлар санын есептеуге қолданылады.

*1-Теорема.* Егер  $G_1$  графы  $G$  графының суграфы болса, онда  $\nu(G_1) \leq \nu(G)$ .

*2-Теорема.* Байланысты графта цикл болмауы үшін  $\nu(G)=0$  қажетті және жеткілікті.

*3-Теорема.* Егер  $G$  графтың екі байланысты  $G_1$  және  $G_2$  компоненттері бар болса, онда  $\nu(G)=\nu(G_1)+\nu(G_2)$ .

*4-Теорема.* Графта цикл болмауы үшін  $\nu(G)=0$  қажетті және жеткілікті.

Айталық,  $G(V, E)$  бағытталмаған граф.  $G$  графының  $S_1, S_2, \dots, S_k$  циклдар жүйесі сызықты тәуелді деп аталады, егер қандай да бір  $i_1, i_2, \dots, i_r$  ( $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq k$ )  $S_{i_1} \Delta S_{i_2} \Delta \dots \Delta S_{i_k}$  ноль граф болса. Керісінше болса  $S_1, S_2, \dots, S_k$  циклдары сызықты тәуелсіз циклдар деп аталады. Сызықты-тәуелсіз циклдардың ең көп саны  $G$  графындағы тәуелсіз циклдар саны деп аталады.

*5-Теорема.* Графтың цикломатикалық саны оның тәуелсіз циклдарының санына тең.

**Хроматикалық сан.** Әр төбесіне қандай да бір бояу сәйкестендірілген және сыбайлас төбелер әртүрлі бояулармен боялған граф деп аталады.  $G$  графын дұрыс бояуға қажетті бояулардың саны оның хроматикалық саны деп аталады және  $\chi(G)$  болып белгіленеді.

*6-Теорема.*  $G$  графы ноль-граф болса ғана бір хроматикалы граф болады.

*7-Теорема (Кениг теоремасы).* Граф бихроматикалы болуы үшін онда тақ ұзындықты қарапайым цикл болмауы қажетті және жеткілікті.

**Ағаштар, ағаштардың негізгі қасиеттері.** Шексіз бағытталмаған байланысты граф ағаш деп, ал циклсыз байланыссыз граф орман деп аталады. Анықтама бола алатындай  $G$  ағашының кейбір қасиеттерін қарастырамыз:

- а)  $G$  байланысты және циклы жоқ;
- б)  $G$  циклы жоқ және  $n-1$  қабырғасы бар;
- в)  $G$  байланысты және  $n-1$  қабырғасы бар;
- г)  $G$  графында цикл жоқ, бірақ сыбайлас емес төбелер арасында қабырға қосу тек бір ғана циклдың пайда болуына әкеледі;
- д)  $G$  байланысты, бірақ бұл қасиетін кез келген қабырға алынып тасталса жоғалтады;

е)  $G$  графының кез келген төбелер жұбы тек бір ғана шынжырмен байланысқан.

### **Граф қаңқасы.**

*8-Теорема.* Граф байланысты болса ғана орман болатын суграф болады.

Орман болатын  $G$  суграфы қаңқалы ағаш немесе  $G$  суграфының қаңқасы деп аталады.

Ең аз қосылу туралы есеп. (Ең аз салмақты қаңқалы ағаш құру)

Жол тұрғызу есебі түрінде өрнектеуге болатын мына есептің практикалық мағынасы үлкен. Жолдар желісімен қосылуы қажет бірнеше қалалар болсын. Әр екі қаланы қосатын жолдың бағасы белгілі. Мүмкін болатын жолдар желісінің ең арзанын салу қажет болсын. (Жолдардың орнына электр желісін, мұнай құбыры желісі, т.б. алуға болады.

Ең арзан жолдар желісін кескіндейтін граф әрқашан ағаш болады. Себебі, егер цикл бар болса, циклдың бір қабырғасын алып тастауға болар еді, ал төбелер қосылған болып қала берер еді. Есептің математикалық қойылуы. Айталық, бағытталмаған  $G(V, E)$ ,  $|V|=n$ , графының әр қабырғасына осы қабырғаның салмағы болып саналатын қандай да бір  $\mu(e)$  нақты сан бекітілген болсын.  $G$  графында салмағы ең аз, ең кіші қосылу, яғни  $G$  графының  $T$  қаңқасын салу керек болсын.

$$\mu(T) = \sum_{e \in T} \mu(e).$$

*Краскал алгоритмін* қарастырайық (ең аз салмақты қаңқалы ағаш сызу).

Сызу жұмысын салмағы  $\mu(e_1)$  ең аз  $e_1 \in E$  қабырғасын таңдаудан басталады. Егер мұндай қабырғалар бірнешеу болса, олардың кез келгенін алуға болады. Таңдалған қабырғаға  $E \setminus \{e_1\}$  алынған ең аз салмақты  $e_2$  қабырғасы  $e_3$  ретінде цикл құрмайтын  $E \setminus \{e_1, e_2\}$  деп алынған ең аз салмақты  $E \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$  таңдалады. Қабырға таңдау процесі кез келген қабырға қосу цикл пайда болуына әкеліп соққанға дейін жүргізіледі. Осы граф ең аз салмақты қаңқалы ағаш болып саналады.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай графтар ағаштар деп аталады?
2. Графтың цикломатикалық санын қандай формуламен есептеуге болады?
3. Графтың хроматикалық саны деп нені айтады?
4. Граф каркасы деген не?
5. Ағаштардың негізгі қасиеттерін атаңыз?



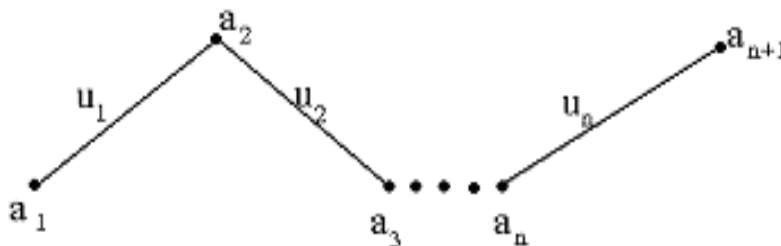
### 13. Дәріс тақырыбы. Графтардағы маршруттар.

Егер графтың кез келген 2 төбесін қосатын маршрут бар болса, граф байланысты (мықты байланысты) деп аталады, ондай маршрут болмаса ол байланыспаған граф болады.

**Маршруттар.** Айталық  $G = \langle M, R \rangle$   $n$ -граф болсын.

Мұндағы  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in M$   $U_1 U_2, \dots, U_n \in R$

**Анықтама:** Егер  $U_i = (a_i, a_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (екі көрші төбені қосатын қабырға) болса  $a_1, U_1, a_2, U_2, a_3, \dots, U_n, a_{n+1}$  (\*) маршрут деп аталады.



$a_1$ -төбесі маршруттың басы,  $a_{n+1}$ -соңы болады. (\*) Маршрутты төбелердің тізбегі арқылы беруге болады. Маршрут доғаларының саны оның ұзындығы деп аталады. Айталық,  $G$   $n$ -граф болсын. Егер (\*) маршрутта қабырғалар  $[a_1 a_2], \dots, [a_n a_{n+1}]$  әртүрлі болса, яғни әр қабырға бірден артық кездеспесе, маршрут шынжыр деп аталады, ал графтың кез келген төбесі 2-ден артық емес қабырғаға инцидентті болса (төбелер әртүрлі), онда маршрут қарапайым шынжыр деп аталады.

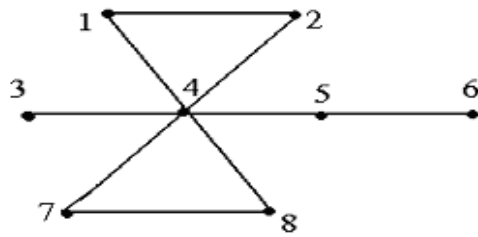
**Анықтама.** Егер  $a_1 = a_{n+1}$  болса (\*) маршруты циклды деп аталады (басы мен соңы бірдей маршрут).

**Анықтама.** Циклы бар маршрут шынжыр болса цикл деп аталады, ал маршрут қарапайым шынжыр болса қарапайым цикл деп аталады.

**Анықтама.** Бағытталмаған циклсыз граф ациклды граф деп аталады. Бағытталмаған графтың циклдарының ұзындықтарының ең кішісі құлаш деп аталады (обхват).

Бұл графта (1,2), (1,2,4,7), (3,4,5,6)-қарапайым шынжыр. (1,2,4,7,8,4) - қарапайым емес шынжыр (4-екі рет). (1, 2, 4, 7, 8, 4, 2)-шынжыр емес маршрут; (1, 2, 4, 7, 8, 4, 1)-қарапайым емес цикл;

(1, 2, 4, 1)-қарапайым цикл; Графтың құлашы 3-ке тең. Айталық граф бағытталған болсын. Егер (\*) маршруттарындағы доғалар әртүрлі болса, маршрут жол деп аталады. Егер  $a_1 = a_{n+1}$  болса маршрут контур деп аталады. Контур жоқ графтар контурсыз граф деп аталады.

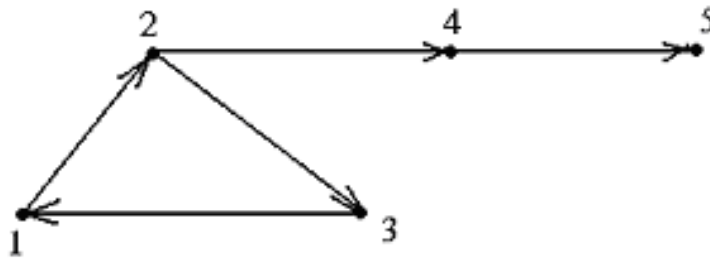


Маршруттың (жолдың) қабырғаларынаң (доғаларының) саны оның ұзындығы деп аталады.

**Анықтама.** Егер  $(a, b)$  жолы бар болса, онда  $b$  төбесі  $a$  дан жекізетін (достижымый) төбе деп аталады.

Мысал: Контур бар  $(1,2,3)$ .

5-төбеге басқа кез-келген төбеден жетуге болады, ал 5-тен ешқандай басқа төбе жеткізбейді.



### Графтың байланыс компоненттері.

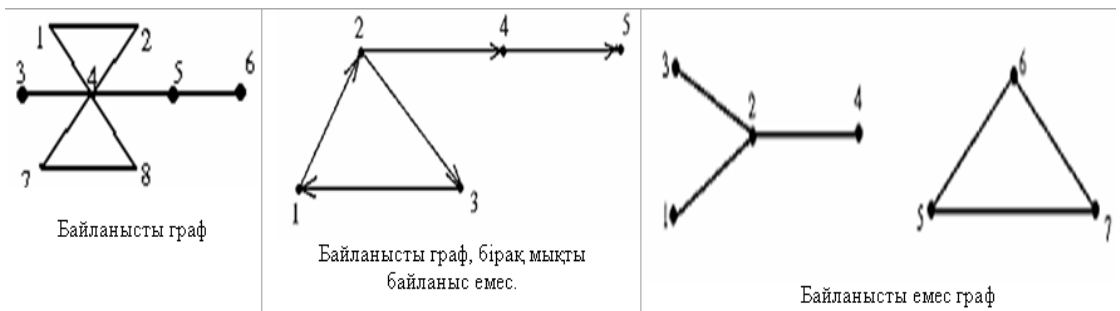
**Анықтама.** Бірдей емес екі төбесі  $(v_1, v_{i1}) \in G$  маршрутпен қосылған ( $v_1$ -басы,  $v_{i1}$ -соңы) бағытталмаған  $G$  графы байланысты граф деп аталады.

**Анықтама:** Егер бағытталмаған  $G$  графының әртүрлі  $a, v$  төбелері үшін  $(a, v)$  және  $(v, a)$  маршруттары бар болса, онда  $G$  мықты байланысқан граф деп аталады.



Мұндай ұғымды мультиграф үшін де енгізуге болады.

Мысалдар:

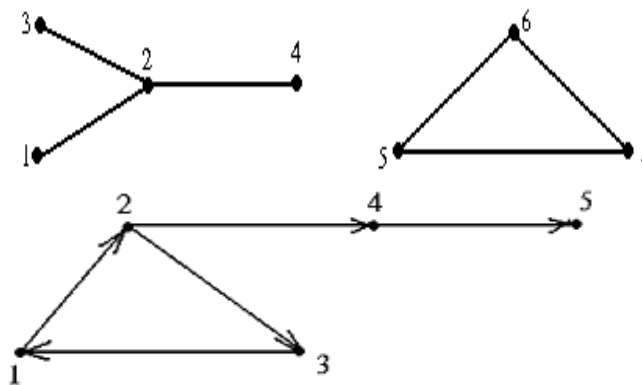


Кез келген байланысты бағытталмаған графтар мықты байланысқан граф екендігін байқауға болады.

Маршрутпен байланысты төбелер қарапайым шынжыр мен де байланысқан болады.

Байланыстылық қатынастың эквиваленттік қасиеті бар және ол граф төбелерін өзара қиылыспайтын  $V_i, i=1, 2, \dots, k$  ішкі жиындарға бөлінуін анықтайды. Сондықтан барлық ішкі графтар  $G(V_i)$  байланысқан және олар графтың байланыс компоненттері деп аталады. Бағытталған  $G$  графы доғалардың бағыты ескерілмесе байланысқан делінеді, ал егер кез келген  $V^1$  төбесінен  $V^{11}$  төбесіне жол болса мықты байланысқан болады.

Мысалы, мына суреттегі графта екі  $\{1, 2, 3, 4\}$  және  $\{5, 6, 7\}$  байланыс компоненттері бар. Ал мына төмендегі суреттегі бағытталған графта  $\{1, 2, 3\}, \{4\}$  және  $\{5\}$  төбелерімен берілген 3 мықты компоненттері бар.



**Теорема.** Кез келген графты қиылыспайтын байланыс компоненттерінің бірігуімен өрнектеуге болады. Графтың байланыс компоненттеріне жіктелуі бір мәнді анықталады.  $G = \cup_i G(V_i)$  Сонымен, төбелердің байланысты компоненттері мен мықты компоненттер жиыны төбелер жиындарын бөлшектейді, ал байл. компоненттерінің саны бір мәнді анықталады.

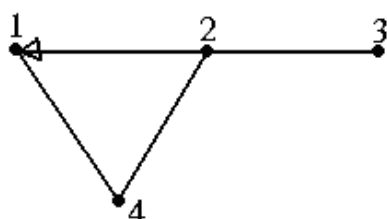
Келесі теорема сыбайлас  $A_G$  матрицасы бойынша  $G$  графының маршруттарын зерттеуге мүмкіндік береді.

**Теорема.** Егер  $A_G$ - $G$  графының іргелестік матрицасы болса, онда  $A_G^k = A_G \cdot A_G \cdot \dots \cdot A_G$  матрицасының  $(i, j)$ -ші элементі ұзындығы  $k$ -ға тең  $(a_{i,j})$ -маршруттарының санын анықтайды.

Салдар.  $A_G + A_G^2 + \dots + A_G^{n-1}$  матрицасының  $(i,j)$ -ші элементі 0-ге тең болмаса ғана  $n$  қуатты  $G$  графында  $a_i$  төбесі ішінде болатын  $(a_i, a_j)$  - маршрут  $(a_i \neq a_j)$  бар.

Мысалы. Сыбайлас  $A_G$  матрицаның көмегімен  $G$  графында  $(1,3)$  маршрутының бар екендігін анықтаймыз.

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$(1,3)$ - элемент 0-ге тең, демек ұзындығы 1-ге тең маршрут жоқ

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$(1,3)$ -элемент тағыда 0-ге тең. Ұзындығы 2-ге тең  $(1,3)$ -маршруты жоқ Ұзындығы 3-ке тең  $(1,3)$ -маршруттың саны 1-ге тең

$$A_G^2 \cdot A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Графтың суретінен бұл маршрут  $(1, 4, 2, 3)$  төбелерімен анықталады. Бұл тізбекті іргелестік матрицаны көбейту арқылы алуға болады:  $A_G^3$  матрицаның  $(1, 3)$  элементі  $A_G^2$  матрицаның  $(1, 2)$  элементімен  $A_G$  матрицаның  $(2, 3)$  элементін көбейткеннен алынады.

Өз кезегінде  $A_G^2$  матрицаның  $(1, 2)$  элементі  $A_G$  матрицаның  $(1, 4)$  элементімен  $A_G$  матрицаның  $(4,2)$ -ге көбейткеннен алынды. Демек 1-ден 3-ке жылжи отыра үш қадамнан кейін  $(1, 4, 2, 3)$  маршруты алынады.

$A_G^3$  матриц-да (4, 2) элементі 3 ке тең, демек, ұзындығы 3 ке тең (4, 2)- маршрутының саны үшеу. Олар:(4, 1, 4, 2), (4, 2, 4, 2), (4, 2, 3, 2)  
Граф төбелерінің арасында ұзындығы к-ға тең маршруттың (жол) бар жоғын анықтайтын алгоритмді қарастырайық:

Айталық,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

төбелері  $v_1, v_2, v_3, v_4$  бағытталған G графының сыбайлас матрицасы болсын.

$$A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицасын қарастырайық. Жалпы алғанда,  $A_{ik} \wedge A_{kj} = 1$  орындалатындай к саны бар болса ғана  $A_{ij}^{\otimes 2} = 1$  болады, басқаша айтқанда  $v_i$  төбесімен  $v_k$  төбесін және  $v_k$  төбесімен  $v_j$  төбелерін қосатын қабырға бар. Сондықтан  $v_i$  төбесінен  $v_j$  төбесіне апаратын ұзындығы 2-ге тең жол бар.

*Теорема.* Айталық, G төбелері  $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$  және сыбайлас A матрицасы берілген бағытталған граф болсын.  $v_i$  мен  $v_j$  төбелерінің арасында  $A_{ij}^{\otimes k} = 1$ . ( $1 \leq k \leq n$ ) шарты орындалса ғана ұзындығы к –ға тең жол бар болады.

**Уоршалл алгоритмі.**

1. A матрицасының бірінші бағанын қарап шығыңыз. Бұл бағаннан 1 бар жолды табыңыз да оған бірін жолды қосыңыз.

2. (1) пунктте құрылған матрицаның 2 бағанын қараңыз. Бұл бағаннан 1 бар жолды тауып, оған 2-жолды қосыңыз.

3.(2) пунктте құрылған матрицаның 3 бағанын қараңыз. Бұл бағаннан 1 бар жолды тауып оған 3- жолды қосыңыз.

4.Осылайша алдыңғы қадамда құрылған матрицаның келесі бағандарын қарауды жалғастырасыз. Одан 1 бар жолды тауып, оған зерттеліп отырған бағанға сәйкес жолды қосасыз.

5. Барлық бағандар қарастырылып болғанша жалғастырасыз.

**Жеткізу матрицасы.**  $(b_{ij})=E+A_G+A^2_G+\dots+A^n_G$  матрицасынан төменде берілген ережемен  $n$  ретті  $C=(c_{ij})$  матрицасын құрамыз:  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{егер } b_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{егер } b_{ij} = 0 \end{cases}$

Бұл  $C$  матрицасы егер  $G$ - $H$ -граф болса байланыстық матрица деп аталады, ал  $G$ -бағытталған граф болса жеткізуші матрица деп аталады.  $G$  графында  $c_{ij}=1$  болса ғана  $(a_i, a_j)$   $i \neq j$  маршрут бар болады.

Сонымен  $C$  матрицасында  $G$  графының әр түрлі элементтерінің арасындағы байланыстың бар я жоқ екендігі турлы ақпарат болады (маршруттар арқылы).

Егер  $G$ -бағытталмаған байланысты граф болса, онда  $C$  байланыс матрицасының барлық элементтері 1-ге тең.

Жалпы (жағдайда) алғанда бағытталмаған графтың байланыс матрицасы граф төбелері жиынын байланыс компоненттеріне бөлетін эквиваленттік қатынас матрицасы болып табылады.

### Контр жеткізу матрицасы.

Төмендегі ережемен анықталған  $Q=(q_{ij})$ -матрицасын анықтаймыз.

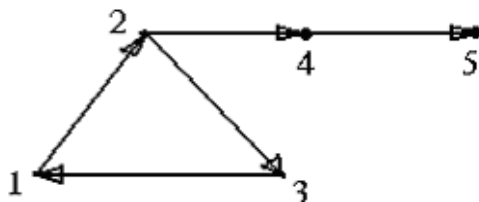
$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{егер } a_i \text{ тікбесіне } a_j \text{ тікбесінен жетуге болса} \\ 0, & \text{керісінше болса} \end{cases}$$

Бұл матрицаның анықталуынан, егер  $C$ -жеткізу матрицасы болса,  $Q=C^T$ . Бұл екі матрицаларды  $(Q, C)$  графтың мықты компоненттерін табуға пайдалануға болады.

$S=Q*C$  матрицасын қарастырамыз, мұндағы  $*$  операциясы  $C$  мен  $Q$  матрицаларының сәйкес элементтерін көбейту дегенді көрсетеді, яғни:

$$s_{ij}=q_{ij} * c_{ij}$$

матрицаның  $a_i$  және  $a_j$  төбелері өзара жеткізетін төбелер болса, яғни  $a_i \rightarrow a_j, a_j \leftarrow a_i$  болса ғана  $s_{ij}=1$ .



Демек  $s$  матрицасы төмендегідей  $E$  эквивалентті қатынас болып табылады:  $a_i$  мен  $a_j$  бірге бір мықты компонентте болса ғана  $a_i E a_j$  орындалады. Демек,  $a_i$  төбесі бар мықты компонент  $s_{ij}=1$   $a_j$  элементтерінен тұрады. Суреттегі графтың жеткізуші  $C$  матрица сымен контр жеткізуші  $Q$  матрицалары төмендегідей:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = C * Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S матрицаның екінші жолы бойынша 2-ші төбе кіретін мықты компонент {1,2,3} төбелерінен тұрады.

**Графтағы ең қысқа жолдар** (арақашықтық). Айталық, G кез-келген граф, ал  $x, y \in V(G)$  оның екі төбесі болсын. x-тен y апаратын маршрутты  $P_0$  деп, ал ұз. P арқылы x пен y-ті қосатын кез келген маршруттың ұзындығын белгілейік. (ұз. Q арқылы Q маршрутының ұзындығы белгіленеді.).

*Анықтама.* Егер ұз.  $P_0 \leq$  ұзындығы P болса  $P_0$  маршруты ең қысқа маршрут деп аталады.

Ең қысқа жолда төбелер мен доғалар (қабырғалар) қайталанбайды. Шынында да, егер  $P_0$  маршрутында  $P_0: x=z, e_1, z_1, \dots, z_{p-1}, e_p, z_p=y$   $z_i=z_j$  бар болса, онда  $P_0$  маршрутын  $z_i$ -ден  $z_j$ -ға дейінгі кесіндіні алып тастап қысқартуға болар еді, яғни  $P_0$  -ді  $x = z_0, e_1, \dots, e_i, z_i, e_{j+1}, \dots, z_{p-1}, e_p, z_p=y$  маршрутымен алмастырар едік. Сондықтан да шын мәнінде ең қысқа маршрут қарапайым шынжыр болады. «Ең қысқа жол», «Ең қысқа маршрут», «Ең қысқа шынжыр» терминдерінің мағынасы бірдей.

Айталық,  $G = \langle M, R \rangle$  байланысқан бағытталмаған граф, ал a мен b оның әртүрлі төбелері болсын.

*Анықтама.* Ең қысқа (a, b) -маршруты a, b төбелерінің арақашықтығы деп аталады және  $\rho(a,b)$  мен белгіленеді.

$\rho(a,b) = 0$  (анықтама бойынша арақашықтық 0 ге тең болсын). Бұлай анықталған арақашықтық метрицаның төмендегідей аксиомаларын қанағаттандырады.

- $\rho(a,b) \geq 0$ ;
- $\rho(a,b) = 0 \iff a=b$ ;
- $\rho(a,b) = \rho(b, a)$  (симметриялық);
- $\rho(a,b) < \rho(a,c) + \rho(c,a)$  (үшбұрыш теңсіздігі)

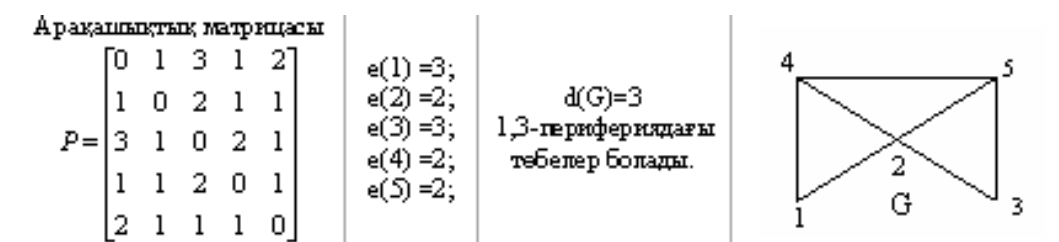
*Анықтама.* Егер  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  төбелер жиыны болса, онда элементтері  $P_{ij} = (p_{ij})$  арақашықтықтар арқылы анықталатын  $p_{ij} = \rho(a_i, a_j)$  матрицасы арақашықтық матрицасы деп аталады.  $P^T = P$ , яғни P-симметриялы матрица.

**Анықтама.** Тұрақты бір  $a$  төбесі үшін  $e(a) \Leftrightarrow \max\{\rho(a,b) \mid b \in M\}$   $a$  төбесінің эксцентриситеті деп аталады. Яғни төбелердің эксцентриситеті осы төбемен одан ең алыс жатқан төбенің арақашықтығы.

Егер  $P$  арақашықтық матрицасы болса онда  $e(a_i)$  эксцентриситеті  $i$ -ші жолда орналасқан сандардың ең үлкеніне тең. Төбелері эксцентриситеттерінің ішіндегі ең үлкені  $G$  графының диаметрі деп аталады және ол  $d(G)$  болып белгіленеді;  $d(G) = \max\{e(a) \mid a \in M\}$

**Анықтама.** Егер  $e(a) = d(G)$  болса  $a$  төбесі перифериядағы төбе деп аталады **Мысал :**

Суреттегі  $G$  графының диаметрін табу керек.



**Анықтама.** Эксцентриситеттердің ең кішісі графтың радиусы деп аталады  $r(G)$  болып белгіленеді;  $r(G) \Leftrightarrow \min\{e(a) \mid a \in M\}$ ;

**Анықтама.** Егер  $e(a) = r(G)$   $a$  төбесі орталық төбе деп аталады. Барлық орталық төбелердің жиыны графтың центрі деп аталады. Мысалы, жоғарыдағы графтың радиусы 2-ге тең  $r(G) = 2$ , центрі  $\{2, 4, 5\}$  жиыны болады.

Орталық төбелерді табу есебі іс жүзінде көптеп кездеседі. Мысалы граф – төбелері елді мекендер, қабырғалары олардың арасындағы жолдарды білдіретін – жолдар желісін өрнектейтін болсын. Ауруханаларды, қызмет көрсету пунктерін т.б. тиімді орналастыру керек. Тиімділік дегенді бұл жерде қызмет көрсететін пункттен неғұрлым алыс орналасқан елді мекендердің ара қашықтығын неғұрлым азайту болып табылады. Демек, графтың орталық төбелері больница, қызмет көрсету пункттерін орналастыратын орындар болып табылады. Нақтылы есептерде бұларға қоса елді мекендердің ара қашықтығын, жолға кететін уақыт, жол бағасын т.б. ескеруге тура келеді. Бұл параметрлерді ескеру үшін салмақталған графтар қолданылады. Айталық  $G = \langle M, R \rangle$  әр  $(a, b)$  доғасының салмағы  $\mu(a, b)$  нақты санына тең салмақтанған граф болсын.

**Анықтама.**  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  маршрутының салмағы деп  $\mu = \sum_{i=1}^n \mu(a_i, a_{i+1})$  санын айтады.  $(a, b)$ - маршрутының салмақтарының ең кішісі  $a$  және  $b$  төбелерінің салмақтанған арақашықтығы деп аталады  $\rho_\omega = (a, b)$  болып белгіленеді.

**Анықтама.** Салмағы  $\rho_\omega = (a, b)$  арақашықтығына тең  $(a, b)$  маршруты салмақтанған  $G$  графындағы ең қысқа маршрут деп аталады.



Анықтама.  $a$  төбесінің салмақтанған эксцентриситеті деп  $\max\{\rho_\omega = (a,b) \mid b \in M\}$  санын айтады, оны  $e_\omega(a)$  деп белгілейді.

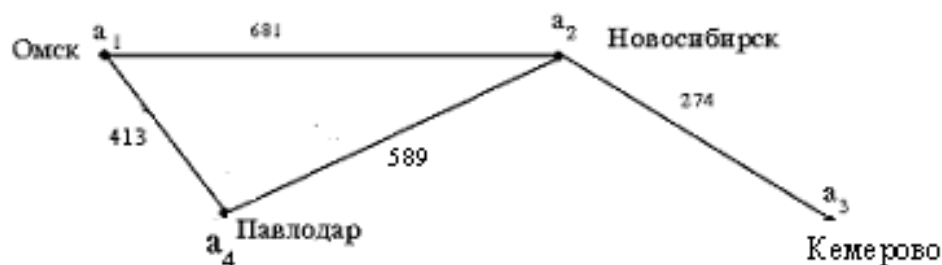
$$e_\omega(a) = \max\{\rho_\omega = (a,b) \mid b \in M\}$$

Анықтама.  $G$  графының салмақтанған орталық төбесі деп  $e_\omega(a) = \min\{e_\omega(b) \mid b \in M\}$   $a$  төбесін айтады.

Анықтама. Орталық төбенің салмақтанған эксцентриситеті  $G$  графының салмақтанған радиусы деп аталады,  $r_\omega(G)$  болып белгіленеді.

Мысалы: Салмақтанған орталық төбе Новосибирск  $e_\omega(a) = 274$ , ал  $r_\omega(G) = 681$

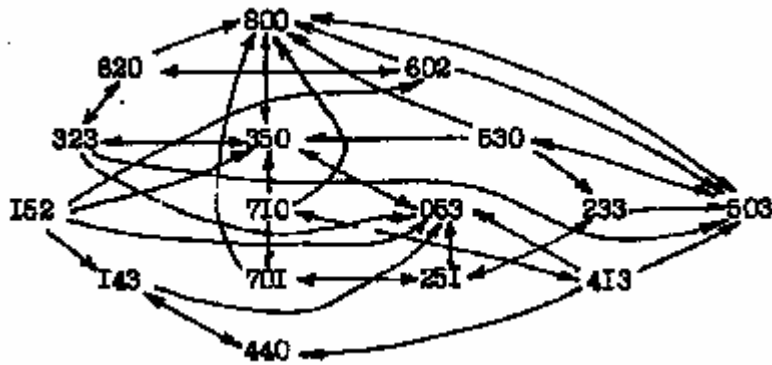
Графтағы ең қысқа маршрутты анықтайтын өте қарапайым әрі тиімді алгоритм бар.



Оны бұрыннан белгілі бас қатырғыш жұмбақ есеп мысалында қарастырайық. Екі адамда вино құйылған 8 литрлік бір құмыра және 5 литрлік, 3 литрлік екі бос құмыра бар. Виноны құмыралар не толық, не бос болатындай құйып, екі адам барлық виноны тең бөлісуі керек.

Алдымен екі мүмкіндікті қарастырамыз: 8 литрлік құмырадан вино 5 литрлік және 3 литрлік құмыраларға құйылады. Бұл мүмкіндіктерді символдық түрде  $800 \rightarrow 350$  және  $800 \rightarrow 503$  деп белгілейік. Құмыраларға виноны құюдың әртүрлі мүмкіндіктерін  $(x,y,z)$  үштігімен немесе қысқаша хуз деп белгілейміз. Мұндағы  $x$  – 8 литрлік құмырадағы вино,  $y$  – 5 литрлік құмырадағы вино және  $z$  – 3 литрлік құмыраға құйылатын вино. 350 жағдайында 3 түрлі құю мүмкіндігі бар:  $350 \rightarrow 323$ ,  $350 \rightarrow 053$ ,  $350 \rightarrow 800$ . Осындай ситуацияларға талдау жасай келе және құмыраларды түрліше толтыра отыра суретте көрсетілгендей бағытталған граф аламыз. Алынған графтың төбелері ретінде әртүрлі жағдайларды сипаттайтын үштіктер ал виноны түрліше құюлар доғаларға сәйкес келеді. Әрине, бұл графта еселі доғалар жоқ, яғни бұл диграф. Жалпы, ең қысқа маршрутты анықтау есептеріндегі графтарда ілгектер мен еселі қабырғалар (доға) жоқ деп алынады. 800 төбеден 440 төбесіне апаратын маршрут табылса есеп шешілді деп есептейміз. Суреттен мұндай жол оңай табылатындығын көреміз: 800, 350, 323, 620, 152, 143, 440. Бұл жолға есептің шешімін беретін төмендегідей құюлар сәйкес келеді.

Вино 8 литрлік құмырадан 5 литрлік құмыраға толтырылады.



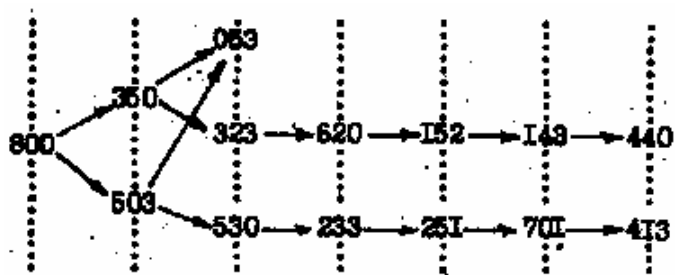
1-Сурет. Түрлі жағдайлар мен құюлар графы.

Содан кейін 5 литрлік құмырадан вино 3 литрлік құмыра толғанға дейін құйылады. 3 литрлік құмырадан вино түгелдей 8 литрлікке құйылады. 5 литрліктегі 2 литр 3 литрлікке құйылады. 8 литрліктегі 5 литрлікке толтырылады. 5 литрліктен 1 литрді 8 литрлік құмыраға құю керек (толғанға дейін). Соңында 3 литрліктен барлық виноны 8 литрлік құмыраға құйылады. Нәтижесінде 8 литрлік құмырада 4 литр вино және сонша литр 5 литрлік құмырада болады. Вино тең бөлінді.

Осы 800 төбеден 440 төбеге апаратын жол ең қысқа болады. Бұл жолды графтардағы ең қысқа маршрутты анықтайтын алгоритмді пайдаланып табуға болады. Енді осы алгоритмнің жұмысын формальды түрде сипаттап көрейік:

Алгоритмнің жұмысы барысында  $x_0=800$  алғашқы төбеден бірдей қашықтықтағы төбелер жиыны құрылады. Бұл жиындарды вертикаль түзулер яғни ярустарға (2 сурет) орналастырамыз (2-сурет). Нөлінші яруста бір ғана  $x_0=800$  төбесі орналасқан. Бірінші яруста 800-ден шығатын доғалар кіретін төбелер орналасқан (350 және 503). Екінші ярусқа 350 және 503 төбелерге сыбайлас, бірақ 0-ші немесе 1-ші ярустарға кірмейтін төбелерді белгілейміз. Егер  $k$ -шы ярус құрылған болса  $(k+1)$ -ярусқа  $G$  графының алдыңғы ярустарда жоқ және  $k$ -шы ярустағы төбелерге сыбайлас төбелерді енгіземіз. Ярус құру  $y_0=440$  төбесі алынған сәтте тоқталады.

Осыдан кейін құрылған графтың  $y_0=440$  төбесінен  $x_0=800$  төбесіне қайту барысында маршрутты анықтаймыз. Бұл маршрутпен кері жүру барысында  $x_0=800$  төбесінен  $y_0=440$  төбесіне апаратын ең қысқа жол табылады.



2-сурет "Ярусты" граф

Біз ең қысқа жолды табу алгоритмін 1-суреттегі графқа қолданылатындай сипаттадық. Нақтылы бір мысалға жазылған бұл алгоритмді кез келген графқа қолдануға болатындай алгоритмнің сипаттамасын келтірейік: A11 алгоритмін графтың берілген екі төбесін қосатын ең қысқа маршрутын табу үшін сипаттаймыз. Бұл алгоритмнің негізіне берілген графтың бір төбесінен шығатын ең қысқа жолдардың графы деп қарастыруға болатын ярустық граф құру алгоритмі жатады. Сондықтан алдымен ең қысқа жолдардан құралған ішкі граф құратын A12 алгоритмін сипаттайық:

A12 алгоритмі (ең қысқа жолдар графын құрады).

Басы. Бағытталған  $G$  графы және оның бір  $x_0 \in V(G)$  төбесі берілген.  $G$  графын кіретін және шығатын аймақтар  $\{O+(x), O-(x) | x \in V(G)\}$  үйірімен берейік.

$$1. L := \{x_0\}, M := \emptyset, \Gamma(x_0) := \emptyset, h(x_0) := 0, t := 0;$$

Мұндағы  $L$  мәндері құрылғалы тұрған ағымдағы яруста жатқан төбелер жиыны болатын айнымалы;  $M$ -мәндері құрылғалы тұрған ағымдағы ярустың алдындағы яруста орналасқан төбелер жиыны болатын айнымалы;  $\Gamma$  әрбір  $x$  төбесіне құрылатын графтың  $x$ -ке апаратын төбелер жиынын белгілейтін функция;  $h$   $x_0$  төбесінен  $x$  төбесіне дейінгі аралықты көрсететін натурал санды кез келген  $x$  төбесіне белгілейтін функция;  $t$ -  $h$  функциясын есептеуге қолданылатын бүтін мәнді айнымалы  $t$ .

$$2. M := M \cup L;$$

$$3. \text{Әрбір } z \in L, t := t + 1; L := \cup \{O-(x) | x \in L\} \setminus M, \Gamma(z) := O+(z) \cap M, \Gamma(z) := t + 1;$$

4. Тексеру:  $L = \emptyset$ . Егер дұрыс болса 2 пунктке көш.

Соңы.  $M, h$  және  $\Gamma$  баспаға бер.

Мұнда  $M$   $x_0$  төбесінен шығатын ең қысқа жолдар графының төбелер жиыны;  $\Gamma(x)$  ең қысқа жолдар графынан шығатын  $x$  төбесінің аймағы.

$h(x)$ — $G$  графындағы  $\rho(x_0, x)$  арақашықтығы ( $x$  пен  $y$  төбесінің арақашықтығы деп  $x$  пен  $y$ -ті қосатын ең қысқа жолды айтады).

1-кесте

X	800	350	503	053	323	530	620	233	602	251	152	701	143	710	440	413
Г		800	800	350	350	503	323	530	620	233	602	251	152	701	143	710
h	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7

A12 алгоритмін  $x_0=800$  төбесімен  $G$  басқатырғыш графына қолданғанда 26 қадам жүргізіледі, оған қоса  $M$  айнымалысының ең соңғы мәні  $\Gamma$  және  $h$  функцияларының мәндерімен берілген 1-кестеде көрсетілген жиын болады. 1-кестеде шын мәнінде  $x_0=800$  төбесінен шығатын ең қысқа жолдар графы көрсетілген. ( $\Gamma(x)$  бұл графта  $x$  төбесінің кір етін аймағы).

$x_0$  төбесінен  $y_0$  төбесіне жеткізетін ең қысқа жолды табу үшін кестеден  $\Gamma(y_0)$  мәнін табамыз және одан қандай да бір  $y_1 \in \Gamma(y_0)$  төбесін

аламыз.  $y_1$  төбесі үшін  $\Gamma(y_1)$  мәнін табамыз да, одан қандай да бір  $y_2 \in \Gamma(y_1)$  төбесін аламыз. Осылай жалғастыра келе  $x_0$  төбесіне келеміз ( бұл төбе үшін  $\Gamma(x_0)=0$ ). Мысалы,  $y_0=440$  алсақ мынадай тізбек аламыз:  $y_0=440$ ,  $y_1=143 \in \Gamma(440)$ ,  $y_2=152 \in \Gamma(143)$ ,  $y_3=602 \in \Gamma(143)$ ,  $y_4=620 \in \Gamma(602)$ ,  $y_5=323 \in \Gamma(620)$ ,  $y_6=350 \in \Gamma(323)$ ,  $y_7=800$ ,  $\Gamma(800)=0$ . Демек, 800 төбесінен 440 төбесіне жеткізетін ең қысқа маршрут: 800, 350, 323, 620, 602, 152, 143, 440.

Графтың екі төбесінің арасындағы ең қысқа жолды анықтайтын A11 алгоритмін A12 алгоритмінен жеңіл шығарып алуға болады.

A11 алгоритмі (графтың екі төбесінің арасындағы ең қысқа жолды анықтайды)

Басы. G бағытталған граф,  $x_0, y_0$  оның екі төбесі

A12 алгоритмін (G,  $x_0$ ) жұбына қолдану.

$y:=y_0, u:=y_0$ .

Мұнда құрылып жатқан ең қысқа жолдың ағымдағы төбесі  $u$ -тің мәні болады.

$\Gamma(y)$  табу және  $\Gamma(y)=0$  екендігін тексеру. Егер шарт дұрыс болса, « $x_0$ -ден  $y_0$ -ге апаратын жол жоқ» деген хабар баспаға шықсын.

$x_0 \in \Gamma(y)$ . екендігін тексеру. Егер дұрыс болса, соңына көш.

Қандай да бір  $z \in \Gamma(y)$  төбесін алу. Анық болу үшін  $\Gamma(y)$  тізіміндегі бірінші төбені аламыз да  $u:=z$  және  $u:=z, u$  3 қадамға көш.

Мұндағы  $z, u$   $z$ -ті  $u$  тізбегінің басына қосқандағы нәтижені білдіреді.

Соңы. U тізбегін баспаға шығару.

Бақылау сұрақтары:

1. Маршруттың, шынжырдың, қарапайым шынжырдың, тұйық маршруттың, циклдың, қарапайым циклдың анықтамаларын беріңіз.

2. Маршрут ұзындығы не?

3. Қандай граф байланысты деп аталады?

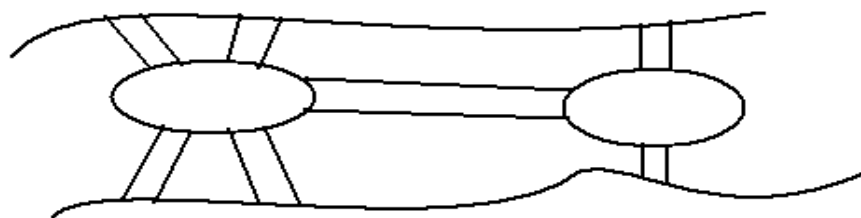
4. Граф төбелерінің арасындағы ұзындығы  $k$ -ға тең маршруттың бар екендігін қалай анықтауға болады?

5. Графтың екі төбесін қосатын ең қысқа жолды табудың алгоритмі.

## 14. Дәріс тақырыбы. Эйлер және Гамильтон циклдары

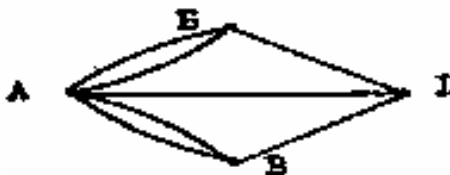
Графтар теориясына негіз болған есептердің бірі Кенигсберг көпірлері туралы есеп. 1-Суретте Леонард Эйлердің тұсындағы(17 ғасыр) XVII ғасырдағы Кенигсберг қаласының картасы салынған. Қала Прегель өзенінің екі жақ жағалауында және 2 аралда. орналасқан Аралдар өзара және жағалаулармен 7 көпірмен жалғасқан. Кенигсберг тұрғындарының арасында сол кезде Кенигсберг көпірлері деп аталатын есеп кең тараған:

*Есеп.* Үйден шығып әр көпірмен бір рет қана жүріп үйге қайтып келуге бола ма деген сұрақ туады?



3-сурет

Бұл есеп үшін көпірлерден өтудің маңызы бар. Сондықтан көпірлердің орналасуын 2-суреттегі бағытталмаған мультиграфпен алмастыруға болады. Бұл графта Б, В төбелері өзеннің жағаларына, ал А, Г төбелері аралдар, ал мультиграфтың қабырғалары көпірлерге сәйкес келеді. Егер G графында оның барлық қабырғалары арқылы өтетін цикл табылса Кенигсберг туралы есеп шешілді деп есептеледі (Цикл деп бірде бір қабырға қайталанбайтын циклды маршрутты айтатынын еске саламыз). Демек графтар тілінде есептің қойылуы төмендегідей: Мультиграфта оның барлық қабырғалары болатындай цикл бар ма? Атақты ғалым-математик Л. Эйлер байланысты, бағытталмаған мультиграфта оның барлық қабырғалары болатындай цикл болудың шартын анықтап дәлелдеп берді.



4-сурет

Теорема Байланысты бағытталмаған мультиграфтың әр төбесінің дәрежесі жұп сан болса ғана Эйлер циклы болады.

*Анықтама.* Мультиграфтың барлық қабырғалары болатын цикл Эйлер циклы деп, ал Эйлер циклы бар граф Эйлер графы деп аталады. Жоғардағы суреттегі мультиграфта Эйлер циклы жоқ, себебі онда дәрежесі тақ төбе бар. Айталық ондай цикл бар деп жорыық. Олай болғанда бұл циклдың бойымен жүре отыра графтың кез келген төбесіне одан шығу

қанша болса сонша рет кіреміз. Демек,  $G$  графының әр төбесінің дәрежесі жұп болуы керек.  $G$  графында керісінше барлық төбелер тақ дәрежелі.

Бұл тұжырым кез келген бағытталған  $G$  графына да жарамды. Сонымен бағытталмаған  $G$  графында оның барлық қабырғалары арқылы өтетін цикл бар болу үшін  $G$  графының төбелерінің дәрежесі жұп болуы қажетті.

*Анықтама.* Бағытталмаған (бағытталған)  $G$  графындағы цикл оның барлық қабырғалары арқылы өтсе, ол- Эйлер циклы деп аталады. Бағытталмаған графта Эйлер циклы бар болу үшін бұл графтың байланысты болуы қажетті.

*Анықтама.* Кез келген  $x, y \in V(G)$  төбелерін қосатын жол бар болса бағытталмаған  $G$  графы байланысты граф деп аталады.

*Анықтама.* Егер  $C$  циклы Бағытталмаған  $G$  графының барлық қабырғалары арқылы өтетін болса, кез-келген  $x, y \in V(G)$  төбелері үшін  $C$  циклының  $x$  төбесінен  $y$  төбесіне апаратын  $C(x, y)$  кесіндісі  $x$ -тен  $y$ -ке апаратын жол болып табылады. Олай болса  $G$  байланысты. Эйлер циклының бар болуы үшін графтың дәрежелерінің жұп болуы және оған қоса графтың байланысты болуы жеткілікті екен.

Эйлер теоремасы. Бағытталмаған графта Эйлер циклы болу үшін оның байланысты болуы және оның барлық дәрежелерінің жұп болуы қажетті және жеткілікті.

Эйлер теоремасын шамалы өзгеріспен бағытталған графтарға да қолдануға болады. Ол үшін бағытталған графтардың да байланысты болу ұғымын енгізу керек.

Доғаларының бағыттарын алып тастағаннан кейінгі алынған бағытталмаған  $G$  графы байланысты болса, бағытталған  $G$  графы байланысты деп аталады.

Теорема. Бағытталған  $G$  графында Эйлер циклы болу үшін оның әр төбесіне кіретін дәрежемен шығатын дәрежелердің бірдей болуы қажетті және жеткілікті. Дәр.  $+(x) =$  дәр.  $-(x)$  барлық  $x \in V(G)$ .

Байланысты және тиелген бағытталмаған графтағы белгіленген  $V_0$  және  $V_n$  төбелерін қосатын ең қысқа жолды іздеуді жүзеге асыратын Форд алгоритмі.

$V_0$  төбесіне  $\lambda_0$  таңбасы беріледі де, қалған төбелердің таңбалары  $\lambda = \infty V_0$  болады.

$(V_i, V_j)$  қабырғаларының ішінен  $\lambda_j - \lambda_i > L((V_i, V_j))$  орындалатындай қабырғалар ізделеді және олардың  $\lambda_j$  индекстері  $\lambda_j' = \lambda_i + L((V_i, V_j))$  алмастырылады. Индекстерді өзгерту процесі одан әрі  $\lambda_j$  таңбасын азайту мүмкіндігі болмайтын бірде бір қабырға қалмағанша жүргізіледі. Нәтижесінде әр төбенің таңбасы осы төбенің  $V_0$  төбесіне дейінгі ең қысқа қашықтықты көрсетеді. Ең қысқа жолдың өзін табу үшін  $V_n$  төбесінен екі жағындағы төбелердің таңбаларының айырымы қабырғаның ұзындығына тең қабырғалардың бойымен қозғалу қажет.

*Гамильтон циклдары.* Гамильтон циклдары туралы есептің интерпритациясы ретінде ең көп тараған коммивояжер туралы есепті қарастыруға болады.

Коммивояжер аралайтын бірнеше қалалардың арақашықтықтары белгілі.

Барлық қалаларда бір реттен ғана болып алғашқы шыққан қаласына қайтып келетін маршрутты табу керек. Егер мұндай маршруттар бірнешеу болса, олардың ең қысқасын табу керек. Мұндай есептер іс жүзінде жиі кездеседі, мысал үшін өндіріс өнімдерін сауда орталықтарына ең қысқа жолмен жеткізу есебі.

Мұндай есептерді шешудің жалпы ортақ теоремалары мен көлемі жөнінен шағын, әрі тиімді алгоритмдердің жоқтығы есепті шешуде қиындықтар туғызады.

**Анықтама.** Айталық  $G(V,E)$  байланысты бағытталмаған граф.  $G$  графының барлық төбелері арқылы өтетін, басталуы мен аяқталуы әр түрлі төбелерде болатын қарапайым цикл Гамильтон циклы деп аталады. Графтарда Гамильтон циклдары мен шынжырлары бар болудың жеткілікті шартын келтірейік. Айталық дәр.  $V-v \in V$  төбесінің дәрежесі болсын.

**Теорема.** Егер  $G(V, E)$ , мұндағы  $|V|=n$  графында кез келген төбелер  $v_i$  және  $v_j$  жұптары үшін дәр.  $v_i + \text{дәр.} v_j \geq n-1$ , орындалса, графта гамильтон шынжыры бар, ал егер дәр.  $v_i + \text{дәр.} v_j \geq n$  немесе дәр.  $v_i \geq n/2$  графта Гамильтон циклы бар.

Бақылау сұрақтары:

1. Цикл деп нені айтамыз?
2. Қандай граф Эйлер графы деп аталады?
3. Графтың Эйлер графы болуының жеткілікті және қажетті шартын атаңыз?
4. Гамильтон шынжыры, Гамильтон циклы дегендер не?
5. Коммивояжер есебін шешудің қандай алгоритмі белгілі?

## 15. Дәріс. Транспорттық желілер.

**Анықтама.** Төменде аталған шарттар: а) ілгек жоқ; б) шығу төбесі (бірде бір доға кірмейтін, тек шығатын ғана төбелері бар) бар болса; с) кіру төбесі (бірде бір доға шықпайтын, тек кіру төбелері ғана бар) бар болса; d) доғалардың  $E$  жиынындағы әр доғада мәні өткізу қабілеті деп аталатын теріс емес бүтін мәнді  $c(e)$  функциясы анықталған болса; бағытталған, байланысты  $G(E, V)$  графы транспорт желісі деп аталады.

Транспорт желісінің шығу, кіру деп аталатын төбелерден басқа төбелері аралық төбелер деп аталады. 1-суретте  $v_0$ -басталу төбесі,  $z$ -аяқталу төбесі,  $v_1, v_2, v_3, v_4$ -аралық төбелер, ал әр доғада өткізу қабілеті көрсетілген.

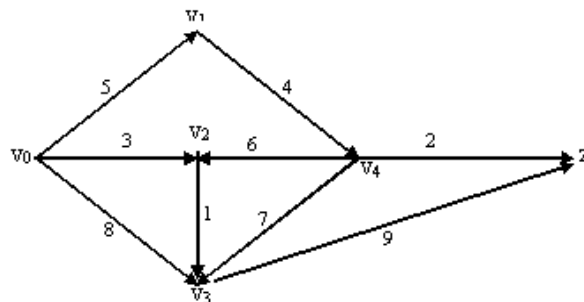
**Анықтама.** Айталық,  $E_v^-$  желінің  $v \in V$  төбесінен қосылатын, а  $E_v^+$  - төбесінен шығатын доғалар жиыны болсын.  $G(V, E)$  желісінің  $E$  доғалар жиынында берілген бүтін мәнді теріс емес  $\varphi(e)$  функциясы а), б), с) шарттарын қанағаттандырса ағын деп аталады.  $\Phi(e)$  функциясының мәнін  $x$  төбесінен  $y$  төбесіне баратын  $v(x, y)$  доғасымен уақыт бірлігінде өтетеін заттың саны деп қарауға болады. Бұл сан доғаның өткізу қабілетінен аспайды. Желінің басталатын және аяқталатын төбелерінен басқа төбелерде келетін заттардың саны одан шығатын заттарға тең болатындықтан еш жерде олар жиналып қалмайды

$$a) \sum_{e \in E_v^-} \varphi(e) = \sum_{e \in E_v^+} \varphi(e),$$

$$v \neq v_0, v \neq z;$$

$$b) \varphi(e) \leq c(e);$$

$$c) \sum_{e \in E_{v_0}^+} \varphi(e) = \sum_{e \in E_z^-} \varphi(e)$$



5-сурет

**Анықтама.**  $\sum_{e \in E_z^-} \varphi(e)$  ағын шамасы деп аталады және  $\varphi_z$  болып белгіленеді.



**Анықтама.**  $e$  доғасы үшін  $\varphi(e)=c(e)$  болса, ол толыққан доға деп, ал әрбір жолдың басынан бастап ағына дейін ең болмаса бір қаныққан доғасы болса  $\varphi z$  ағыны толық деп аталады.

**Анықтама.** Айталық,  $v_0 \notin A$ , ал  $z \in A$  шарты орындалатындай транспорт желісі төбелерінің ішкі жиыны  $A \subset V$  болсын.  $A$ -ға енбейтін төбелерді  $A$ -ның төбелерімен қосатын доғалар жиыны  $E_A^- \subset G(V, E)$  желісінің  $T$  қимасы деп аталады. Мысалы, 1-суретте көрсетілген желідегі төбелердің  $A = \{v_1, v_2, v_4, z\}$  ішкі жиыннан бөлек,

$$E_A^- = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_3, z)\}$$

доғалар жиыны қима болады.

**Анықтама.**  $E_A^-$  қимасының өткізу қабілеті  $c(E_A^-)$  деп қимаға кіретін доғалардың өткізу қабілеттерінің қосындыларын айтады,  $c(E_A^-) = \sum_{e \in E_A^-} c(e)$

деп белгілейді.

**Теорема.**  $G(V, E)$  транспорт желісіндегі  $v_0 \notin A$ ,  $z \in A$  орындалатындай төбелердің ішкі жиыны  $A \subset V$  арқылы анықталатын  $G(V, E)$  транспорт желісінен алынған  $\varphi$  ағыны мен кез келген  $T$  қимасы үшін  $\varphi z \leq c(E_A^-)$ , орындалса, яғни желідегі кез келген ағынның шамасы (оның ішінде ең үлкені де) кез келген қиманың өткізу қабілетінен артық емес (оның ішінде ең кішісі де).

Салдар. Егер кез-келген  $\varphi$  ағыны мен  $E_A^-$  қимасы үшін  $\varphi z = c(E_A^-)$ , орындалса, онда  $\varphi$  ағыны – ең үлкен, ал  $E_A^-$  қимасының өткізу қабілеті ең аз болады.

Транспорт желісінің ең үлкен ағынын анықтайтын Форд-Фалкерсон алгоритмін қарастырайық. Ол алгоритм бойынша ағын біртіндеп ең үлкен мән қабылдағанша үлкейтіле береді.

$AL$  алгоритмі. (транспорт желісіндегі ең үлкен ағынды табуға арналған).

**Басы.** Транспорт желісі  $V$  төбелер жиыны, доғалар жиыны  $E$  және желінің басы  $v_0 \in V$ , соңы  $z \in V$  арқылы беріледі. Доғалардың өткізу қабілеті  $c(e)$ ,  $e \in E$  беріледі.

1.  $G(V, E)$  желісінің  $v_0$  мен  $z$  төбелерінен басқаларын еркін түрде нөмірлейміз.

2. Барлық  $e \in E$  үшін  $\varphi(e) = 0$  деп алып кез-келген ағын тұрғызамыз.

3. Транспорт желісінің басталу төбесі  $v_0$  мен соңғы  $z$  төбелерін қосатын барлық жолдарды қарап шығу. Егер  $\varphi$  ағыны толық болса 4 пунктке көш. Болмаса  $v_0$  төбесін  $z$  қосатын барлық доғалары қаныққан емес  $\mu$  жолын қарастыру керек те мына формула бойынша

$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e), e \notin \mu \\ \varphi(e) + k, e \in \mu, \end{cases} \quad \varphi' \text{ ағынын құрыңыз.}$$

Мұндағы  $k = \min_{e \in \mu} (c(e) - \varphi(e))$ .

3-пунктті қайталаңыз.

4. Желінің төбелеріне бүтін мәнді таңбалар және желі доғаларын "+" және "-" таңбаларымен мына ережелер бойынша белгілейміз:

а)  $v_0$  басталу төбесін  $e_0$ ;

в) Егер  $v_i$  төбесі таңбаланса, ал  $v$  әлі таңбаланбаса, онда егер  $v$  -ға  $v_i$  төбесінен  $(\varphi(v_i, v) < c((v_i, v)))$ , қанықпаған доға келсе,  $v$  төбесіне  $i$  таңбасы, ал  $(v_i, v)$  доғасына "+" таңбасы беріледі; немесе  $v$  төбесінен нөлдік емес ағынмен  $v_i$  төбесіне  $(\varphi((v, v_i)) > 0)$  баратын доға бар болса,  $(v, v_i)$  доғасы "-" белгісімен таңбаланады. Қалған белгіленбеген доғалар мен төбелерге таңба берілмейді;

с) 4в пункттегі сипатталған процесс жаңа таңбаланған доға мен төбенің пайда болуы тоқталғанға дейін қайталанады. Осы процестің нәтижесінде  $z$  таңбаланбаса, онда құрылған ағын ең үлкен болғаны одан соңына көшу керек, керісінше болса 5 пунктке көшіңіз.

5. Әрқайсысы келесі төбенің нөмірімен таңбаланған төбелердің және жиынынан алынған төбелерді қосатын  $\mu$  (не обязательно маршрут болуы міндетті емес) доғалар тізбегін қарастырамыз. Төменде көрсетілгендей жаңа ағын құрасыз.

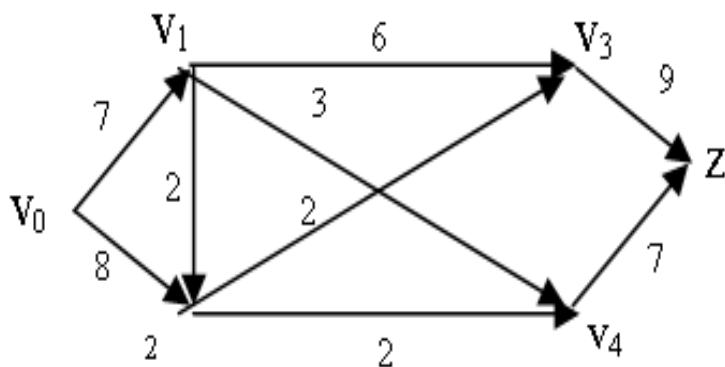
$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e), \text{ если } e \notin \mu \\ \varphi(e) + 1, \text{ если } e \in \mu \text{ и имеет знак "+"} \\ \varphi(e) - 1, \text{ если } e \in \mu \text{ и имеет знак "-"} \end{cases}$$

4-пунктке көш. Соңы.

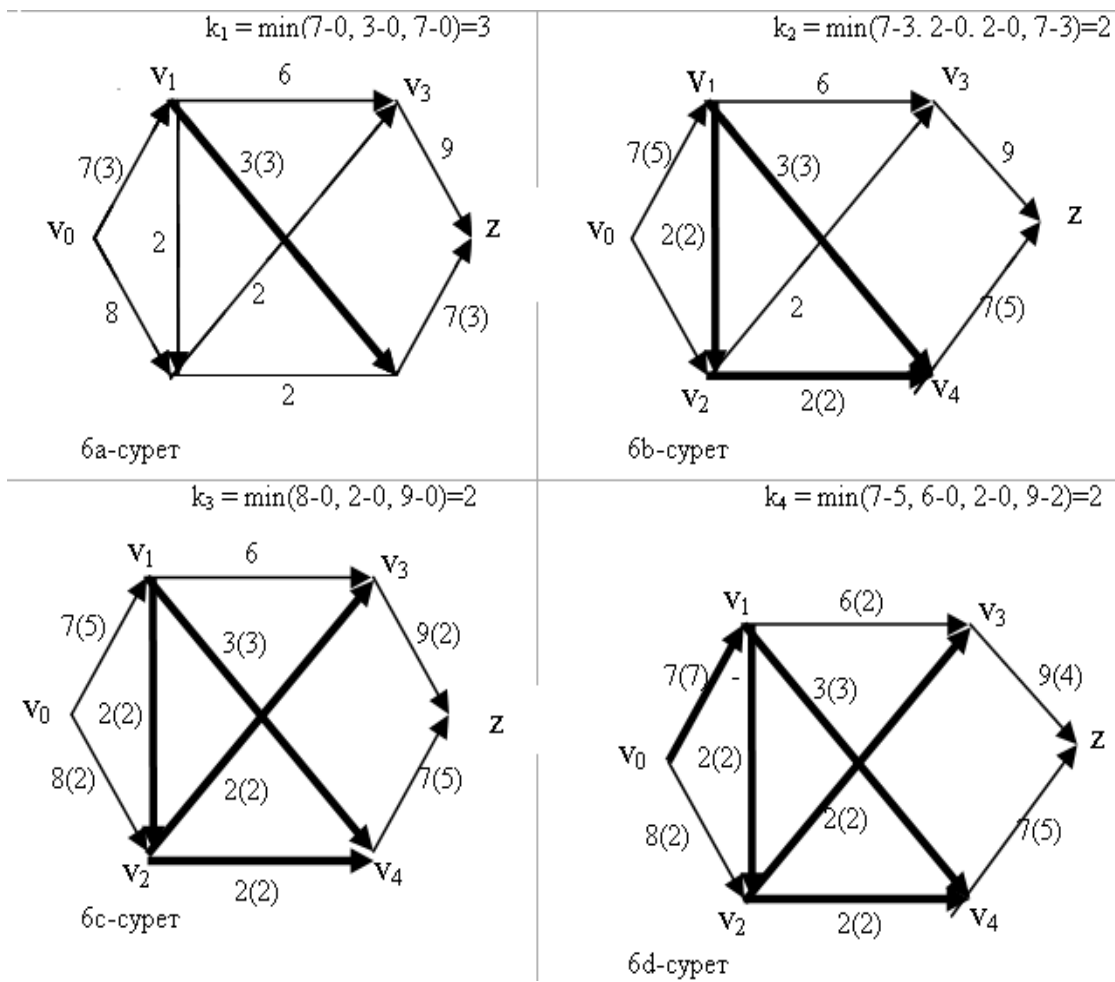
Енді сипатталған алгоритммен құрылған ағынның ең үлкен екендігін көрсетейік.  $A$  арқылы желінің белгіленбеген төбелер жиынын белгілейміз.  $V_0 \notin A, z \in A$  болғандықтан  $A$  жиыны  $E_{\bar{A}}$  желісінің қимасын анықтайды. Әрбір  $e \in E_{\bar{A}}$  доғасы таңбаланған төбені таңбаланбаған  $V \in A$  төбесімен қосады.  $V$  төбесі  $\varphi((u, v)) = c((u, v)), u \in A$  шартында таңбаланбай қалуы мүмкін. Екінші жағынан  $A(e \in E_{+A})$  шығатын әрбір доғада  $\varphi(e) = 0$  теңдігі орындалады, сондықтан

$$\varphi_z = \sum_{e \in E_{\bar{A}}} \varphi(e) - \sum_{e \in E_{+A}} \varphi(e) = \sum_{e \in E_{\bar{A}}} c(e) = c(E_{\bar{A}})$$

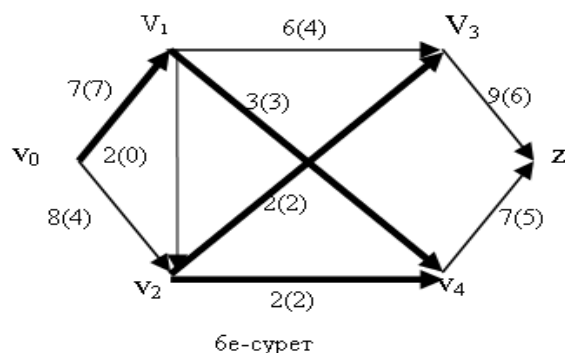
өрнегі орындалады. Ендеше теореманың салдары бойынша  $\varphi_z$  ең үлкен ағын болып табылады. Мысал. 2-суретте өрнектелген транспорт желісінің ең үлкен ағыны анықтау керек. Әр доғада жазылған сандар осы доғаның өткізу қабілетін білдіреді. Жолдың басы  $v_0$  төбесін соңы  $z$ -пен қосатын барлық жолды тізіп шығайық:  $\mu_1=(v_0, v_1, v_4, z)$ ;  $\mu_2=(v_0, v_1, v_2, v_4, z)$ ;  $\mu_3=(v_0, v_2, v_3, z)$ ;  $\mu_4=(v_0, v_1, v_3, z)$ ;  $\mu_5=(v_0, v_1, v_2, v_3, z)$ ;  $\mu_6=(v_0, v_2, v_4, z)$ . Желідегі алғашқы ағынды 0 деп алып, оны әр жолдың ең болмаса қаныққан бір доғасы болғанға дейін біртіндеп көбейтеміз. Ол үшін әр жолдан доғалардың өткізу қабілеті мен осы доғалардағы ағынның ең кіші айырымын анықтаймыз және бүкіл жолдағы ағынды осы шамаға арттырамыз. Бұл процесс ба, бб, бс, бd суреттерде көрсетілген, доғаларда әрқайсысының өткізу қабілетімен бірге жақша ішінде осы доғаның ағыны көрсетілген. бd суреттегі құрылған ағын толық және ол  $\varphi_z = 9$  (ба – бd) суреттерде қаныққан доғалар жуан сызықтармен бейнеленіп тұр).



6-сурет



Құрылған ағынның ең үлкен болу шартын тексереміз. Ол үшін доғалар мен төбелерді таңбалаймыз, нәтижесінде  $z$  төбесі таңбаланған болып шығады (6d-сурет). Бұл 6d-суреттегі ағынның ең үлкен емес екендігін көрсетеді. "+" - белгісімен таңбаланған ағын шамасын көбейту, "-" - белгісімен таңбаланған ағын шамасын азайту бе- суретте көрсетілгендей шамасы  $\varphi_z = 11$  болатын ағынға әкеледі. Бұл ең үлкен ағын болады.



Бақылау сұрақтары:

1. Транспорт желісі дегеніміз не?
2. Транспорт желісінде қандай доға қаныққан доға деп аталады?
3. Транспорт желісінде қима деп нені айтады?
4. Қандай ағын толық деп аталады?
5. Ең үлкен ағын табудың Форд – Фалькерсон алгоритміне сипаттама беріңіз.

## Эдебиеттер тізімі

1. Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. - М.: Диалектика, 2019. - 960 с.
2. Баврин, И.И. Дискретная математика: Учебник и задачник для СПО / И.И. Баврин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 209 с.
3. Баврин, И.И. Дискретная математика для педагогических вузов: Учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И.И. Баврин. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 208 с.
4. Вороненко, А.А. Дискретная математика. Задачи и упр. с реш.: Учебно-методическое пособие / А.А. Вороненко, В.С. Федорова. - М.: Инфра-М, 2018. - 160 с.
5. Гашков, С.Б. Дискретная математика: Учебник и практикум для академического бакалавриата / С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 423 с.
6. Гусева, А.И. Дискретная математика. Сборник задач: Учебное пособие / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. - М.: Курс, 2017. - 720 с.
7. Гусева, А.И. Дискретная математика: Учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. - М.: Курс, 2017. - 320 с.
8. Гусева, А.И. Дискретная математика: Учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. - М.: Инфра-М, 2018. - 31 с.
9. Дмитриевский, В.Н. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: Учебное пособие / В.Н. Дмитриевский. - СПб.: Лань КПТ, 2016. - 368 с.
10. Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник / Я.М. Ерусалимский. - СПб.: Лань, 2018. - 476 с.
11. Зуев, Ю.А. Современная дискретная математика в задачах и решениях: От перечислительной комбинаторики до криптографии XXI века: Более 700 задач с решениями / Ю.А. Зуев. - М.: Ленанд, 2019. - 304 с.
12. Иванов, А.А. Дискретная математика для инженера: Учебник / А.А. Иванов, Г.И. Пронина, Н.Ю. Корягина. - СПб.: Лань П, 2016. - 400 с.
13. Кадырова, С.В. Дискретная математика: Учебное пособие / С.В. Кадырова, Е.А. Немцева, Г.Л. Тульчинский. - СПб.: Лань П, 2016. - 304 с.
14. Канцедал, С.А. Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. - М.: Форум, 2017. - 320 с.
15. Канцедал, С.А. Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. - М.: Форум, 2017. - 432 с.
16. Коростелёва, Л.А. Дискретная математика: Учебное пособие / Л.А. Коростелёва, А.Г. Коцаев. - СПб.: Лань, 2016. - 592 с.
17. Куликов, В.В. Дискретная математика: Учебное пособие / В.В. Куликов. - М.: Риор, 2018. - 448 с.
18. Папшев, С.В. Дискретная математика. Курс лекций для студентов естественнонаучных направлений подготовки: Учебное пособие / С.В. Папшев. - СПб.: Лань, 2019. - 192 с.