ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық зерттеу техникалық университеті

Ж. Е. Егінбаев

ПОЛИГРАФИЯЛЫҚ ҮДЕРІСТЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2015

ӘОК 51. 001.
ББК

Е 29 Егінбаев Ж. Е. Полиграфиялық үдерістерді математикалық модельдеу: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰЗТУ, 2015. – 188 б.

Сурет 39. Кесте 4. Библиогр. – 29 аталым.

ISBN 978-601-228-735-6

Пікір жазғандар:

Жұмаділов Т. К. – хим. ғыл. док-ры, профессор, Ә. Б. Бектұров атындағы Химия институты физикалық химия зертханасының меңгерушісі;

Бегалиев И. Т. – «Полиграфкомбинат» ЖШС президенті, профессор;

Ғазизов О. Ғ. – Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰЗТУ Ә. Ж. Бүркітбаев атындағы Өнеркәсіптік инженерия институты полиграфия өндірісінің технологиясы мен машиналары кафедрасының магистрі, аға оқытушысы.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2015 жылғы басылым жоспары бойынша басылады.

Оқу құралында Полиграфиялық үдерістерді математикалық модельдеудің негізгі түсініктері, даму тарихы, сонымен қатар оның әдістері, әр түрлі нұсқалары және олардың іс жүзінде пайдалануы жайлы мәліметтер ұсынылған.

Бұл еңбек математикалық модельдеудің және онымен араласқан ғылыми-техникалық пәндер мамандарына, сондай-ақ соларға сай келетін мамандықтардың оқытушыларына және магистранттарына арналған.

5В072200 – «Полиграфия» мамандығы бойынша оқып жүрген бакалаврларға арналған, бұл сондай-ақ математикалық модельдеуді және модельдерді пайдаланып және жобалап жүрген инженер-техникалық жұмыскерлерге де пайдасын тигізуі әбден мүмкін.

ӘОК 51. 001. 57 : 655(075)
ББК

КІРІСПЕ

1. ПОЛИГРАФИЯЛЫҚ ҮДЕРІСТЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛДЕУДІҢ НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕРІ ЖӘНЕ АНЫҚТАМАЛАРЫ

Модельдеу, қайсыбір құбылыстарды, үдерістерді немесе зерзаттар жүйелерін олардың модельдерін тұрғызу және оқып білу жолымен зерттеу; сипаттамаларды анықтау немесе дәлдеу және қайта құрылымдалған зерзаттарды тұрғызудың тәсілдерін ұтымдылау үшін модельдерді қолдану. Моделдеу – тану теориясының негізгі дәрежесінің бірі: модельдеу идеясына теориялық (мұнда түрлі тектегі таңбалық, дерексіз модельдер пайдаланылады) та, сондай-ақ эксперименталдық та (нәрселік модельдерді пайдаланатын) кез келген ғылыми зерттеу әдісі маңызы бойынша негізделеді; қоршаған әлемді оқып білу әдістерінің бірі; қарастырылатын жүйенің қасиеттеріне ұқсас қасиеттерге ие материалдық немесе математикалық модельдің қызмет етуін тұрғызуды болжамдайды.

Модельдеу пайдаланылады:

– эксперимент жасау немесе сандық бағалау үшін, яғни жүйе параметрлерінің өзгеруі салдарларын немесе үлкен шығындармен немесе нақтылы тәуекелдермен шынайы жағдайларда байланысқан мұндай өзгерулерімен іске асатын оның жұмысының жағдайлары үшін;

– оқып білінетін жүйелерді қайта жөндеу немесе жетілдіру үшін;

– жүйелермен немесе шынайы қызметі әзірше жоқ, олардың жұмыстарының жағдайларымен таныстыру үшін;

– жаңа идеяларды, жүйені немесе әдісті тексеру немесе көрсету үшін.

Математикалық модельдеу, өзіне математикалық модельдерді тұрғызу мен зерттеу сияқты, есептеу алгоритмдерін және осы алгоритмдерді ЭЕМ-де іске асыратын бағдарламалар жасауды кіргізетін, қолданбалы математика облысына қатысы бойынша жиі қолданылатын аталым. Математикалық модельдеу деп зерзат қасиеттерін математикалық модельде оқып білу түсінідіріледі. Математикалық модельдеу сыналған физикалық экспериментке балама ретінде техниканың және шешілетін инженерлік есептердің күрделенуі мөлшері бойынша, кез келген жаңалықты енгізуде, жеткілікті тиімді және үнемдеу түрінде пайдалы жол ретінде, өндіріс тәжірибесіне барынша берігірек кіреді. Кең мағынада математикалық модельдеу дегеніміз, қызықтырушы зерзат тәртібі жайлы мағлұматтар алуды қамтамасыз ететін модельдің бастапқы физикалық параметрлері бойынша жасалған әрекет үдерісі. Оның мақсаты болатын үдеріс өтуінің оңтайлы шарттарын анықтау, оларды математикалық модель негізінде басқару және нәтижелерді зерзатқа (объектіге) тасымалдау.

Полиграфиядағы технологиялық үдерістерді модельдеу мәселелерімен шектелген іс жүзіндегі инженерлік қызметте, сөз, макродеңгейден және метадеңгейден ерекшеленіп, модельдер таңбалы техникалық зерзаттарды немесе жалпы басқармалық пен үнемді-әлеуметтік құрылымдарды қамтыған кездегі, микродеңгей деп аталатын модельдеу жайлы, жүре алады.

Микродеңгейде модельдеу кезінде фазалық айнымалылар бірнеше тәуелсіз айнымалылар функциялары ретінде бейнеленеді, бұларға кеңістіктік координаттар мен уақыт жатады және де кеңістік те, уақыт та үзікдіксіз ретінде қарастырылады.

Макродеңгейде дискреттік кеңістік сияқты орталар жайлы көрсетілім пайдаланылады. Мұндай дискреттеу (үзіктеу) таралғаннан шоғырланған модельдерге ауысуды білдіреді. Бұл деңгейдің элементтері болатын, микродеңгейде ішкі жүйелер немесе шектік бірліктер (мысалы, резисторлар, радиоэлектрондық сызбанұсқалардағы транзисторлар, тіреуіштер, иінтіректер, төрт қырлы бөренелер, станиналар – берік табандар, механикалық құрылғылардағы біліктер) ретінде қарастырылған зерзаттар.

Зерзаттарды қарастырудың ең биік деңгейі жиі мета- немесе ақпараттық деңгей, ал модельдері – ақпараттық деп аталады. Жүйенің *метадеңгейінде* – бұл құрылғылар және кешендер. Мысалы, ақпараттық пен есептеу жүйелері қызмет етуі, уақыттың дискреттік моменттерінде өтетін және элементтер күйлерінің өзгеруінде тұжырымдалатын, оқиғалар тізбегі ретінде қарастырылады.

Модельдеу деңгейлеріндегі қағидалық айырмашылық бөлінбейтін зерзаттың шамасымен анықталады, бұл шама жоғарырақ деңгейге ауысқан сайын табиғи түрде өсе түседі.

Теңдеуге кіретін кейбір параметрлер үлкен жорамалдармен қабылданылатындықтан, оларды технологиялық үдерістердің математикалық модельдеуінің нақты қойылған есебі үшін, белгісіздер ретінде қарастыруға болады. Оларды анықтау үшін пайдаланған жөн жанама ақпаратты: эксперименттi түрде алынуы әлдеқайда қарапайым теңдеулер шешімі жайлы мағлұматтар. Мұндай есептерді *кері* ретінде қарастыруға болады. Тікелей модельдеу есептерінен ерекшеленіп кері есептер «түзетілусіз» (математикалық мағынада) сыныбына жатады, бөліктікте кіру берілулерінің қателіктеріне қатысты тұрақсыз. Алайда қазіргі математика оларды шешетін құралдарға ие, бұл математикалық эксперименттердің мүмкіндіктерін едәуір кеңейтеді.

Математикалық модельдеу бойынша жұмыстарды орындау өндірістік ұжымдарды жоғары деңгейлі есептеу техникасымен жеткілікті жабдықтауды және оның тоқтаусыз жұмысын қамтамасыздандыруды болжамдайды.

Математикалық модельдеудің негізгі түсінігі болатын математикалық модель. *Математикалық модель* деп, математикалық нышан көмегімен өрнектелген, сыртқы әлемнің қандай да бір құбылысын және үдерісін жуықтап сипаттау аталады. Математикалық модель шынайы қойылған эксперименттен ерекшеленіп, үш негізгі аспектімен байланысқан артықшылықтар қатарына ие. Біріншіден, бұл физикалық экспериментті қоюға және өткізуге қажет материалдық қорларды үнемдеу; екіншіден, әдеттен тыс, тіптен онан да шығып кететін жағдайлардағы жүйе қабылданылуы мүмкінділігі; үшіншіден, қысыңқы мерзімде (мысалы, сағатпен өлшенген градустердің ондық үлестерінен төменіректегі зерттеу) ұзақ (күндер, апталар, айлар, жылдар) технологиялық циклдары бар жүйелердің жұмыс істеу қабілеттілігін бағалау. Қарастырылған тар мәселе үшін түр бойынша математикалық модель өзімен, қалыптасқан шектері және бастапқы шарттары бар қоршаған ортада зерзат тәртібін сипаттайтын, бөліктік туындылардағы дифференциалдық теңдеулер жүйесін көрсетеді. Маңыздырақ болатын математикалық модельдің толықтығы және оның өнімділігі.

Математикалық модельді қалыптастыру, технологтың (конструктордың) осы кезеңде жүргізуі кезінде, технологтың (конструктордың) және математиктің біріккен жұмысының өнімі болуы керек; мұндайдың болуы технологиялық үдерістерді модельдеу бойынша қолданбалы есептердің басым көпшілігі оңтайландырылғандығымен байланысты, мәселені қоюшы (технолог немесе конструктор) зерзаттың берілген санын анықтайтын айнымалылардың технологиялық параметрлерінің жиынтығын көрсетуі, сондай-ақ қойылған мәселенің (мысалы, соңғы өнімнің ауқымдары, шектік күштер және кесу жылдамдығы) өндірісте іске асырылуымен байланысқан міндетті шектеулерді қалыптастыруы керек.

Жасанды біліктілік, адамның біліктілік қызметінің кейбір жақтарын – қисындық, аналитикалық ойлауын модельдейтін кибернетикалық жүйелерін шартты түрде белгілеу. «Жасанды біліктілік» аталымы 1954 жылы енгізілді, ал 1964 жылы DENDRAL (күрделі органикалық қосылыстар құрамын анықтауға арналған эксперттік жүйе) жүйесінің алғашқы болжамы пайда болды, мұны алғашқы эксперттік жүйенің бірі деп санау қабылданған. Өнімдік жүйені кері тізбекті қорытындысы бар Турбо Паскаль (Паскаль тілінің басқа кең тараған болжамдары: Apple 1.1 немесе UCSD Pascal және Стандарттық Паскаль) тілінде жасау аз емес маңызды рөл атқарды.

Эксперттік жүйелер. Әрбір бағдарламашы меншікті эксперттік жүйелерін жасауды қалайды. Эксперттік жүйелер жасанды біліктілік жүйелер бөлігін және де оның ең маңызды бөлігін құрайды. Эксперттік жүйелерді, әдетте, білім негізін құрастыратын, білім жинақтау негізінде нәрселік аймақтағы мәселелерді шешуде сараптаушы-адам әсерін модельдейтін ЭЕМ бағдарламасы ретінде анықтайды. Барлық эксперттік жүйелердің өзіне қосатын үш негізгі элементі бар: білім негізі, шығу машинасы және тұтынушы интерфейсі. *Білім негізі* құрамында осы мезетте берілген зат туралы не белгілі болса сол жайлы ақпарат болады. Білім негізі деректерден және ережелерден тұрады. Білім негізінің деректері осы сәтте нәрселік облыс жайлы не белгілі болса соны сипаттайды. Ережелер осы деректер арасындағы ахуалдық, мағыналық, себептік немесе үлгілі іс боларлық өзара байланыстарды анықтайды. *Шығу машинасы* не белгісізге дейін не белгілі соны қолдануды қамтамасыз етеді. *Тұтынушының интерфейсі* жүйе мен тұтынушы арасындағы өзара әрекеттестікті қабілеттендіреді. Тұтастай алғанда эксперттік жүйелер сараптау білімін және оларды қолдана алуды модельдейді. Эксперттік жүйелер тұтасымен адамдық сараптамаға тәуелді. Әрбір эксперттік жүйені, эмпирикалық нәтижелер негізінде бекітуді талап ететін эксперимент ретінде қарастыру жөн.

Жобалау, болжамдалатын немесе мүмкін болатын зерзаттың, күйдің түп нұсқасының, бейне үлгісінің – жобасын жасау үдерісі; бұл іздеулер, зерттеулер, жаңа бұйымдарды жасау немесе тапсырылған талаптарды қанағаттандыратын жаңа үдерістерді іске асыру үшін барлық қажет құжаттауды алу мақсатына ие есептеулер мен құрастырулар бойынша жұмыстар кешені. Дәстүрлі түрлермен (архитектуралы-құрылыстық, машиналы-техникалық және басқа) қатар, еңбек үдерістерінің, ұйымдардың, экологиялық, әлеуметтік, инженерлі-психологиялық, генетикалық және басқа да адами-машиналық жүйелерді жобалаудың өзіндік бағыттары қалыптаса бастады.

Жобалау – бұл шығармашылық үдеріс, маманнан техника мен технологияның заманауи күйін, олардың дамуын кеңінен білуді, инженерлі-техникалық қамтамасыздандырумен кешендікте өндірістік үдерісті қарастыра алуын талап етеді.

Полиграфия (грек сөзі polygraphia, сөзбе-сөз – көпсуреттеу), 1) техника саласы, баспа өнімдері – кітаптар, газеттер және соған ұқсастарды өндіруге арналған техникалық құралдар жиынтығы. Полиграфиядағы негізгі өндірістік үдерістер: баспа үлгілерін даярлау, меншікті түрде басу және басылған өнімді әрлеу. 2) полиграфиялық өнеркәсіппен мағыналас (баспа өнімін даярлайды).

Полиграфиялық өндірістің өнімін іс жүзінде барлық ел пайдаланады. Осыдан полиграфиялық өндіріс бұйымдарының ерекше әлеуметті-саяси рөлі шығады. Баспа өнімдері тез ілгерілеуші радиохабар, телекөрсетілім және электрондық ақпараттық жүйелермен қатар қоғамдық сана мен адамдар дүние тануын қалыптастырудың негізгі құралдарының, сондай-ақ білім жинау мен сақтаудың бірі болып қала береді.

Әдебиеттер: 1–7

Бақылау сұрақтары:

1. «Модельдеу» түсінігінің маңыз-мәні.
2. «Математикалық модельдеу» түсінігінің маңыз-мәні.
3. «Математикалық модель» түсінігінің маңыз-мәні.
4. Жасанды біліктілік және эксперттік жүйелер.
5. Жобалау және полиграфия.

2. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ ПОЛИГРАФИЯЛЫҚ ҮДЕРІСТЕРДІ ОҢТАЙЛАНДЫРУ МӘСЕЛЕЛЕРІН ШЕШУДІҢ НЕГІЗГІ ӘДІСІ

2.1. Математикалық модельдеудің кезеңдері

Математикалық модельдеуге енетін өзара байланысқан үш кезең: 1) оқып білінетін зерзаттың математикалық сипатталуын құрастыру; 2) математикалық сипаттау теңдеулері шешімінің әдісін таңдау және оны модельдеуші бағдарлама түрінде іске асыру; 3) модельдің зерзатқа сәйкестігін (парапарлығын) қалыптастыру.

Математикалық сипаттауды құрастыру кезеңінде алдын ала негізгі құбылыстар мен зерзаттағы элементтер бөлектелінеді және содан кейін олардың арасындағы байланыстар анықталады. Әрі қарай, әрбір бөлектелген элемент пен оның қызмет етуін көрсететін құбылыс үшін теңдеу (немесе теңдеулер жүйесі) жазылады. Бұдан басқа, математикалық сипаттауға түрлі бөлектелген құбылыстар арасындағы байланыс теңдеулері енгізіледі. Математикалық сипаттау үдерістен тәуелділікте алгебралық, дифференциалдық, интегралдық және интеграл-дифференциалдық теңдеулер түрінде көрсетіле алады.

Модельделінетін бағдарламаны шешу және жасау әдісін таңдау кезеңі деп, барлардан ең тиімдірек (тиімділік дегеніміз алудың жылдамдығы және шешімнің дәлдігі) шешуді таңдау және оны алдымен шешімнің алгоритмі түрінде, содан кейін ЭЕМ-де есептеуге жарайтын түрде іске асыру түсіндіріледі.

Физикалық көрсетілімдер негізінде тұрғызылған модельделінетін үдерістің қасиеттерін дұрыс сапалы және санды түрде сипаттауы керек, яғни ол модельденуші үдеріске парапарлы болуы тиіс. Математикалық модельдің шынайы үдеріске парапарлығын тексеру үшін үдеріс жүруіндегі зерзаттағы өлшемдердің нәтижесін ұқсастық жағдайлардағы модель болжамдарының нәтижелерімен салыстыру керек.

Модель парапарлығын қалыптастыру кезеңі модель жасау кезінде орындалатын кезең тізбектілігінің тұжырымдаушысы болады. 2.1-суретте математикалық модель жасаудың жалпы сызбанұсқасы бейнеленген.

Математикалық модельді тұрғызу кезінде шынайы құбылыс ықшамдалады, сызбанұсқаланады және алынған сызбанұсқа қайсыбір математикалық құралғы көмегімен құбылыстар күрделілігінен тәуелділікте сипатталады.

Қарастырылушы үдерістің сипаттық ерекшеліктерін модельде ескерілудің дұрыстығынан зерттеу нәтижелері мен модельдеудің алынған нәтижелерінің құндылығы тәуелді.

Модельде үдеріске ықпал ететін барлық ең маңыздырақ себепкерлік шарттар ескерілуі тиіс және ол, сонымен бірге, ескерілуі тек математикалық талдауды күрделілендіретін майда, болмашы себепкерлік шарттар жиынтығымен үйіп тастау болмауы керек және зерттеуді де қолайсыздандырады, жалпы іске асырмайды.

2.1-сурет

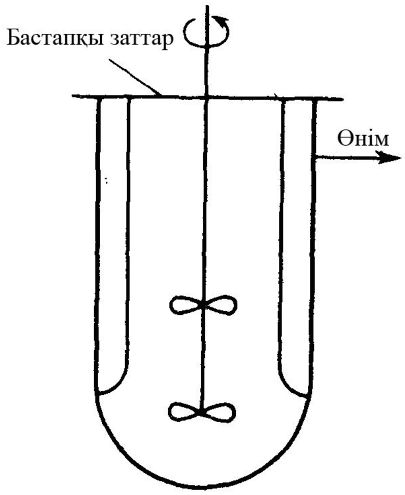
Математикалық модельдеу әдісі, жеткілікті дәл математикалық модель сипаттауы бар, үдерістердің қасиеттерін оқып білуде қолданылады. Математикалық сипаттау толықтығы дәрежесіне тәуелділікте бөліктелуі мүмкін екі шектік жағдай болады: а) модельделінуші үдерістің барлық негізгі жақтарын сипаттайтын теңдеулердің толық жүйесі және осы теңдеулер параметрлерінің барлық сан мәндері белгілі; б) үдерістің толық математикалық сипаттауы қатыспайды. Осы екінші жағдай кибернетикалық есептерді шешуге тән, мұндай есептерде зерзат туралы толық емес ақпарат болған кезде және оған әсер ететін ауытқуларды басқаратын үдерістермен іс жүргізіледі. Зерттелуші құбылыстар жайлы жеткілікті ақпарат қатыспағанда оларды оқып білу қарапайымырақ модельдерді тұрғызудан, негізгі (сапалы) арнайы зерттелетін үдерісті бүлдірмейтіндей етіліп, басталады.

2.2. Математикалық модельдердің негізгі түрлері

Үдерісті нақты іске асыруға және оны құралғылық жабдықтауға тәуелділікте химия-технологиялық үдерістердің барлық көптүрлілігін уақыттық пен кеңістіктік белгілерден шығара отырып, төрт сыныпқа бөледі: уақыт өтуімен айнымалы (тұрақты емес) үдерістер, және уақытпен өзгермейтін (тұрақты) үдерістер; жүрісінде параметрлері кеңістікте өзгеретін үдерістер, және параметрлерінің кеңістіктік өзгеруінсіз үдерістер. Өйткені математикалық модельдер сәйкес келетін зерзаттардың бейнелеуі болатынан, оларға да сондай сыныптар тән, атап айтқанда: 1) уақыт өтуімен өзгермейтін модельдер – *статикалық модельдер;* 2) уақыт өтуімен ауысатын модельдер – *динамикалық модельдер;* 3) кеңістікте өзгермейтін модельдер – *шоғырланған және маңыз-мәнді параметрлері бар модельдер;* 4) кеңістікте өзгеретін модельдер – *таралған параметрлері бар модельдер.* Модельдердің саналған сыныптарын қарастырамыз.

Шоғырланған параметрлері бар модельдер. Модельдердің осы сыныбы үшін айнымалылардың кеңістіктегі тұрақтылығы тән. Математикалық сипаттау тұрақсыз үдерістер үшін алгебралық теңдеуді не бірінші реттегі дифференциалдық теңдеуді енгізеді. Модельдердің осы сыныбымен сипатталатын зерзатқа мысал бола алатын, ағынның идеалдық (толық) араласуы бар құралғы. Мұндағы араластырғыштың жылдамдығында, концентрация құралғының барлық нүктелерінде бірдей болады (2.2-сурет).

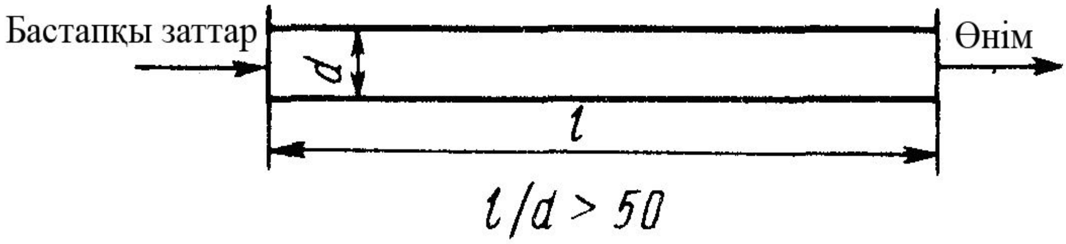
Таралған параметрлері бар модельдер. Егер үдерістің негізгі айнымалылары уақытта да, кеңістікте де өзгерсе, немесе көрсетілген өзгерістер тек кеңістікте ғана өтсе, онда мұндай өзгерістерді сипаттайтын модельдер таралған параметрлері бар модельдер деп аталады. Олардың математикалық сипаттауы әдетте бөліктік туындылардағы дифференциалдық теңдеуді, не бір кеңістіктік айнымалысы бар тұрақты үдерістер жағдайындағы жайбар дифференциалдық теңдеулерді енгізеді.



2.2-сурет. Идеалдық араласу моделін іске асыратын құралғы сызбанұсқасының мысалы

k параметрлерге (немесе еркіндік дәрежелеріне) ие жиынтық k – өлшемдік көптүрлілік (сондай-ақ – кеңістік деп те айтады), сондай-ақ көпөлшемдік көптүрлілік деп аталады. Күйлер көптүрлілігі – фазалық күй. Мұндай модельдермен сипатталатын үдеріске мысал қызметін атқаратын, ұзындықтың үлкен диаметрге қатынасы және реагенттер қозғалысының едәуір жылдамдығы бар, түтікшелі құралғы (2.3-сурет).

Статикалық модельдер. Статикалық модельдер стационарлық жағдайлардағы, яғни үдерістің параметрлері уақыт өтуімен өзгермеген кездегі зерзат жұмысын көрсетеді. Сәйкестелініп статикалық модельдердегі математикалық сипаттау уақытты айнымалы ретінде енгізбейді және алгебралық теңдеулерден не таралған параметрлері бар зерзаттар жағдайында дифференциалдық теңдеулерден тұрады. Статикалық модельмен сипатталатын зерзатқа мысал қызметін атқаратын, жұмыстың қалыптасқан режімінде көлемі V толық ығысу құралғысы, мұнда A мен B реагенттері беріледі υ_A, υ_B $(\upsilon_A + \upsilon_B = \upsilon)$ мөлшерінде және P реакция өнімі алып кетіледі.



2.3-сурет. Идеалдық ығыстыру моделін іске асыратын құралғы сызбанұсқасының мысалы

Құралғының математикалық сипаттауы материалдық теңгерімнің мынадай теңдеуін енгізеді (жеңілдету үшін жылулық теңгерім қарастырылмайды):

$$\upsilon\,(C_{A_0} - C_A) = VkC_AC_B,\ \upsilon\,(C_{B_0} - C_B) = VkC_AC_в. \qquad (2.1)$$

Мұндағы k – реакция жылдамдығының константасы.

Динамикалық модельдер. Динамикалық модель уақыт өтуімен зерзат өзгеруін көрсетеді. Мұндай модельдердің математикалық сипаттауы міндетті түрде уақыт бойынша туындыны енгізеді. Жиі зерзаттың динамикалық моделі, кіру мен шығу айнымалыларды байланыстыратын, берілістік функциялар түрінде тұрғызылады (берілістік функциялар түрінде динамикалық модельдердің көрсетілімі әсіресе зерзатты басқару мақсаттары үшін қолайлы). Динамикалық модель мысалы қызметін атқара алатын жоғарыда қарастырылған толық ығысу құралғысы, бірақта бұл қалыптаспаған режімде жұмыс істейді. Бұл жағдайда құралғының математикалық сипаттауы материалдық теңгерімнің келесі теңдеулерін енгізеді:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{\upsilon}{V}(C_{A_0} - C_A) - kC_A C_B, \tag{2.2}$$

$$\frac{dC_B}{dt} = \frac{\upsilon}{V}(C_{B_0} - C_B) - kC_A C_B. \tag{2.3}$$

Сондай-ақ бастапқы шарттар

$t = \mathbf{0}$ кезінде $C_A = C_{AQ}$, $C_B = C_{Bo}$. (2.4)

Жобаланушы зерзаттың бейнелейтін қасиеттерінің сипаты бойынша математикалық модельдер функционалдыққа және құрылымдыққа бөлінеді. *Функционалдық модельдер* зерзат қызмет етуі үдерістерін көрсетеді. Олар бәрінен жиі теңдеулер жүйелерінің түріне иеленеді. Бейнеленілетін құбылыстардың физикалық табиғатынан тәуелділікте функционалдық модельдердің арасынан жылулық, электрлік, оптикалық, гидравликалық, электрмеханикалық, газдыдинамикалық, кинематикалық және басқа модельдер ажыратылады. *Құрылымдық модельдер* зерзаттың тек құрылымдық (бөліктікте, геометриялық) қасиеттерін бейнелейді. Бұл модельдер матрицалар, графтар, векторлар тізімдері түрін иелене алады және кеңістіктегі элементтердің өзара орналасуын өрнектей алады.

Модельдегі бейнелеуші айнымалылардың сипаты бойынша ажыратылатын модельдер фазалық және себепкерлік шарттық. *Фазалық модельдер* – модельдер, мұнда фазалық айнымалылар бейнелейді. Егер зерттеу нәрсесі – зерзаттың қызмет ету үдерістері, яғни модельдердегі айнымалылар уақыт функциясы ретінде қарастырылса, онда фазалық модельдерді *имитациялық модельдер* деп атайды. *Себепкерлік шарт моделі* – модель түрі $F(Q, Y) = 0$ айқын түрде $Y = F(Q)$, мұндағы Q – сыртқы параметрлер векторы;
Y – зерзаттың шығу параметрлерінің векторы.

Ішіндегі ізделінуші айнымалылар айқын түрде белгілі шамалар арқылы өрнектелген модельдер *аналитикалық модельдер* деп аталады. Олардан ерекшелініліп *алгоритмдік модельдерде* ізделінуші шамалардың мәндерін есептеу теңдеулер жүйелерін шешудің қажеттілігімен байланысқан.

Құбылыстар зерзатында өтетіндердің маңыз-мәнін бейнелейтін, математикалық модель математикалық сипаттау теудеулерінің жүйесі болады, бұл жүйе үшін моделденуші бағдарлама түрінде іске асқан алгоритм шешімі анықталған. Осы анықтамаға сай математикалық модель оның жинақталып қарастырылуы керек үш аспектісі: мағыналық, аналитикалық және есептеулік.

Мағыналық аспект өзімен моделделуші зерзаттың табиғатын физикалық сипаттауды көрсетеді.

Аналитикалық аспект, зерзатта өтетін құбылыстарды және олардың арасындағы функционалдық байланыстарды көрсететін теңдеулердің біршама жүйесі түріндегі үдерістің математикалық суреттеуі болады.

Соңында, есептеулік аспект – бағдарламалау тілдерінің бірінде модельдеуші бағдарлама ретінде жүзеге асырылған, математикалық суреттеу теңдеулері жүйесін шешудің әдісі мен алгоритмі.

2.3. Зерзат табиғатының физикалық сипатталуы

Кез келген математикалық модель тұрғызылуын модельдеу зерзатын физикалық сипаттаудан бастайды. Және де моделдеу зерзатында өтетін «элементарлық» үдерістерді бөлектейді, бұлар модельдегі бейнелеуге жатады, сөйтіп олар сипатталуы кезінде қабылданылатын негізгі жорамалдарды қалыптастырады. Өз кезегінде, ескерілетін «элементарлық» үдерістер тізімі, математикалық модельге енгізілетін, зерзатттарды сипаттаушы құбылыстар жиынтығын анықтайды. Берілген жағдайда «элементарлық» үдеріс деп, құбылыстардың, мысалы массаауыстыруға, жылуберілісіне және тағы басқаларға жататын физика-химиялық үдеріс түсіндіріледі. Мұнда белгіленіп өтуге жөн болатын, «элементарлық» үдерістер аталуы берілген үдерістердің қарапайымырақ және күрделі емес теңдеулермен сипатталады деуді мүлдем білдірмейді. Солай, массаайырбас осы уақытқа дейін толығымен аяқталуға алыс тұтас теория нәрсесі болады. Бұл аталым мұндай үдерістердің химия-технологиялық үдерістің бәрінің көбірек күрделілеу құрастырушылары ғана екенін білдіреді.

Әдетте химиялық технология зерзаттарын математикалық модельдеу кезінде назарға қабылданатын мынадай «элементарлық» үдерістер: 1) фазалар ағындарының қозғалысы; 2) фазалар арасындағы массаайырбас; 3) жылуберілісі; 4) агрегаттық күй өзгерісі (булану, конденсациялау, еріту және т.б.); 5) химиялық түрлендірулер.

Модельдегі «элементарлық» үдерістердің математикалық сипаттауының толықтығы барлық химия-технологиялық үдерістегі олардың рөліне, оқып білінуі дәрежесіне, зерзаттағы «элементарлық» үдерістердің өзара байланысының тереңдігіне және жалпы сипаттаудың қалаулы дәлдігіне тәуелді. «Элементарлық» үдерістердің өзара байланысы өте күрделі болуы мүмкін. Сондықтан іс жүзінде байланыстар сипатына қатысты жиі түрлі болжамдар жасалынады, бұл модельге жеткілікті оқып білінбеген заңдылықтарды енгізу қажеттігін жасамауға, яғни сипаттауды артық күрделендіруге жол бермеуге мүмкіндік береді.

Мысалы, қоспалар ректификациясы үдерісін физикалық сипаттау кезінде бөліктелінетін мынадай «элементарлық» үдерістер: 1) сұйықтық пен мұнарадағы бу ағындарының гидродинамикасы; 2) сұйықтық пен бу арасындағы массаайырбас; 3) сұйық пен бу арасындағы жылуберілісі; 4) сұйықтықтың булануы және бу конденсациясы. Барлық көрсетілген «элементарлық» үдерістер не табақшада, не мұнаралар қондырмалық және өзара тіке байланысқан. Бұл үдерістердің толық сипатталуы өзімен төтенше күрделі теңдеулер жүйесін көрсетеді. Навье–Стокс теңдеуі көмегімен табақшадағы (не қондырмадағы) сұйық ағыны гидравликасын сипаттаудың өзі ғана өзімен өте есептеулік күрделілікті мәселені көрсетеді. Сұйық пен бу ағындары арасындағы массаайырбасты толық сипаттау мәселесін шешудің де күрделілігі аз емес. Солармен бірге бұл мәселелер теңдеулердің тұтас жүйесі ретіндегімен бірге шешілуі керек. Осыдан шығатыны, ақылмен ықшамдайтын жорамалдарсыз бұлардан өте алмайсыз. Сондықтан әдетте бу мен сұйықтық ағындары қозғалысы қатысты идеалданған көрсетілім (бу толық ығыстыру режімінде қозғалады, ал сұйықтық толығымен табақшада толығымен араласады) қабылданады, ал массаберілісті көп жағдайларда жартылайэмпирикалық әдістермен анықталатын бөлектеулердің тиімді баспалдақтары арықылы өрнектейді, не оны бөлектеудің әрбір баспалдағында тепе-теңдікке жетуге болады деп санап, жалпы қарастырмайды.

Кейде модельдеудің физикалық сипаттауы математикалық модельдеу нәтижесінде қалыптасатынын атап өткен жөн. Солай, математикалық модельдеу зерзатта өтетін үдерістер механизмдері жайлы біршама гипотезаларды тексеру үшін қолданылады. Бұл үшін модель құрамына, қайсыбір физикалық болжамның дұрыстығы жайлы келесі модельдеу нәтижесі бойынша сөз етуге болатын, зерттелуші арақатынас енгізіледі. Мысалы, каталиттік химиялық түрлендіру механизмдері көптеген жағдайда зерттеушілерге белгісіз. Математикалық модельге химиялық реакция өтуінің қайсыбір механизмін бере отырып және модельдеу нәтижелерін эксперименталдықпен салыстыра отырып, шынайы механизмге ең жақынды табуға болады.

Әдебиеттер: 2[7-12], 7 [313-316]

Бақылау сұрақтары:

1. Математикалық модельдеудің үш өзара байланысқан кезеңдерін атаңыз.
2. Үдеріске тәуелділіктегі математикалық сипаттау қандай теңдеулер жүйесі түрінде көрсетіле алады?
3. Табақшадағы сұйық ағыны гидродинамикасын Навье–Стокс теңдеуі көмегімен сипаттау өзімен нені көрсетеді?
4. Математикалық модельдеудің кезеңдері.
5. Математикалық модельдердің негізгі түрлері.
6. Зерзат табиғатының физикалық сипатталуы.

3. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУДІҢ МАҚСАТТАРЫ ЖӘНЕ МӘСЕЛЕЛЕРІ

3.1. Модельдеу қағидалары және модельдерді тұрғызу

Модельмен жұмыс істеу жеткілікті түрде күрделі. Модельдердің екі түрі ажыратылады: эксперименталдық талдау негізінде жасалынатын эмпирикалық модель және аксиомалар қатарына тұрғызылған табиғи-ғылымдық пен техникалық заңдылықтардан бастау алып орындалатын үдерісті есептеу кезіндегі аксиоматикалық модель.

Модельдер соңғы нәтижелерімен ажыратылады. Жобалы-конструкторлық модельдеудің шығуы болатын аспаптар мен құрылғылар, ал функционалдық модельдердің шығуы – үдерістер сызбанұсқалары, теңдеу жүйелері, ақпараттық ағындар және соған ұқсастар.

Модельдеудің мақсаты – жобаланушы технологиялық үдерісті оңтайлы ұйымдастыруға тұжырымдалатынан бастау ала отырып, модельдеудің өзін екі кезеңде орындаған жөн. Технологиялық модельдеу кезеңінде ең маңызды тәуелділіктерге сапалы сипаттау беріледі, ал математикалық модельдеу кезеңінде бұл тәуелділіктер сандық түрде бағаланады.

Сапалы модельдеудің алғы шарты болатын модельделуші үдерісті талдау –кибернетикалық мағынадағы жүйелік талдау. Оның мақсаты үдерістің шынайы сипаттамаларын анықтаудан тұрады. Мұнда өндірістің сыртқы әлеммен байланысы зерттелуі, яғни басқаша айтқанда, макроталдау орындалуы керек. Бірмезгілде ішкіөндірістік байланыстар, яғни өндірісті ұйымдастыру (оның құрылымы) және технологиялық үдеріс (функционалдық байланыстар) зерттеледі. Бұл микроталдау нәрсесін құрайды. Аналитикалық зерттеулер жүргізілген соң қадамнан кейінгі қадаммен мынадай тізбектілікте модельді қалыптастыруды бастайды: мақсат қойылуы; оны шешудің, мақсатты (оңтайлау критерийін) және есепті шешуде жиналған шектеулерді анықтау жолымен, бағыттарын іріктеу; модельдің екікезеңдік зерттемесі; шешудің алгоритмін жасау (есептеулер тізбектілігі); модель бойынша есептеулер жүргізу; модельдеу нәтижелерінің тәжірибелік мағлұматтарға сәйкес келуін тексеру; оны анықтау мақсатымен модельді реттеу.

3.1-кестеде біршама стандарттық математикалық модельдер келтірілген, бұлардың артықшылығы болатындар: мақсатты дәл қалыптастыру; берілген мақсаттар мен критерийлер кезінде бір мәнді нәтиже алу; тұтасымен мақсатты ең жақсы қабылдауды қамтамасыздандыру және модельмен сипатталатын үдерістердің өзара ықпалын ескеру; қисындық және математикалық тұжырымдар көмегімен іргелі білімдер алу; үдерістің оңтайлы нұсқаларын табу; түрлі әсер ететін себепкерлік шарттар болуы кезінде шешімдерді нұсқалық талқылау; алынған шешімнің оңтайлығын дәлелдеу және соған ұқсастар.

3.1-кесте

Стандарттық математикалық модельдер

Модель сипаттамасы	Модель белгіленуі	Шешудің аналитикалық әдістері
Детерминирленген	Өндірісті жоспарлау моделі	Матрицалық есептеулер
	Оңтайландыру модельдері – сызықтық – сызықтық емес	Симплекстік әдіс, модифицирленген дистрибутивтік әдіс, Фогель жуықтауының әдісі, градиенттер әдісі
	Орналастыру модельдері	Венгерлік әдіс
	Торлық модельдер	Дағдарыстық жол әдісі, потенциалдар әдісі
	Кесте теориясының модельдері	Қиыстырулық әдістер
	Қорларды басқару модельдері	Дифференциалдық санау, динамикалық оңтайландыру
	Орын толтыру модельдері	Дифференциалдық санау

	Шешім қабылдау модельдері	Динамикалық оңтайландыру
Стохастикалық	Оңтайландыру модельдері Бұқаралық қызмет ету модельдері Торлық модельдер Қорларды басқару модельдері Орын толтыру модельдері Түйісулік модельдер	Ықтималдық әдістер Ықтималдық әдістер ПЕРТ бағдарламасы бойынша торды оңтайландыру Ықтималдық әдістер, математикалық статистика әдістері Ықтималдық әдістер, математикалық статистика әдістері Ойындар теориясы

3.2. Модельдеу кезіндегі қате көздері және бастапқы ақпаратқа талаптар

Модель – бұл шынайы зерзат жайлы ықшамдалған көрсетілім болғандықтан, модельдеу кезінде алынған ақпарат тасымалданғанда, шынайы зерзатта сипаттық қателер пайда бола алады, мұның санында болатындарды белгілейміз, бұлар мыналар:

1) елеулі тәуелділіктерді ескермеу. Мысалы, көліктік мәселеде, егер тасымалдау үшін көліктің әртүрлі түрі қолданылса, оңтайлылау критерийі ретінде маршрут (бағыт) ұзындығын пайдалануға болмайды;

2) функционалдық тәуелділіктердің дәл емес немесе сенімсіз көрсетілімі. Егер, мысалы, бірінші түрдегі өнім, екінші түрдегі өнімнен екі есе көп даярлануы керек болса, онда дұрыс жазылған математикалық қалыптасудың ие болатын түрі $x_1 = 2x_2$, мұндағы x_1 – бірінші түрдегі өнім саны, ал x_2 – екінші түрдегі өнім саны;

3) анық емес ақпаратты пайдалану. Оған жататындар: дәл емес бастапқы ақпарат, ақпарат берілісінің қателері, аралық есептеулердегі есептеулік қателер және соған ұқсастар.

Сондықтан бастапқы ақпаратқа талаптар қатары ұсынылады: соңғы нәтижеге ықпал ететін барлық себепкерлік шарттар қажеттілігінше өлшеу жолымен дәл анықталуы керек. Маңызды емес себепкерлік шарттар ақырында жойылуы мүмкін, мысалы, корреляциялық талдауда; жобалаудың ақпараттық негізін орташа шамалар құрайды. Олар бірдей жағдайларда және кездейсоқ түрде таңдап алғанда орындалған бірлі-жарым өлшеулердің көп санынан анықталуы керек; ақпаратты, әсіресе бастапқысын жинау және алдын ала өңдеу – басқарудың бірінші кезектегі мәселесі, өйткені қолданыста бар үдеріс жайлы ақпарат негізінде жаңа үдеріс жобаланады.

Бұдан шығатыны сол, бастапқы ақпарат жүйелі қателіктерді (қателіктер теориясы тұрғысынан) құрамында ұстамауы керек, осы сөздің жалпы қабылданылған мағынасында ешқандай жалпы бағаларды алып жүрмеуі керек, шындыққа жатпайтын болмауы керек. Осы ақпараттық негізде соншалықты модель дұрыс болады, оның ішінде бастапқы ақпарат қаншалықты дұрыс қолданылғанына байланысты.

Модельдеу қателіктерімен, бастапқы ақпаратты жинау және өңдеумен шешімдер моделі бойынша есептеулер нәтижесінде алынатын дұрыстық анықталады. Модельдерді бағалау кезінде мынадай жағдайларды ескерген жөн: әрбір модельдің құрамында бағалануы керек ықшамдар болады; модель бойынша есептеулердің нәтижесі қисынды тұрғызулардан шыққан жалған қорытынды. Оны шынайы үдеріске тасымалдау келісімділік дәрежесіне, модель мен шынайы үдеріс түрлерінің бірдейлігіне тәуелді; детерминирленген модельдер (балама – стохастикалық модельдер) сенімді мағлұматтардан бастау алады, бұл шынайы жоба үшін талап етілмейді, бірақ моделдеу үшін сенімді (ықтималдық мағынада) мағлұматтарды пайдалану әлдеқайда жеңіл; статикалық модельдерде (балама – динамикалық модельдер) үдерістің уақытпен өтуі ескерілмейді.

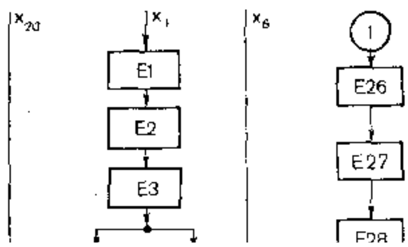
3.3. Жобалық шешімдерді оңтайландырудың мүмкіндіктері

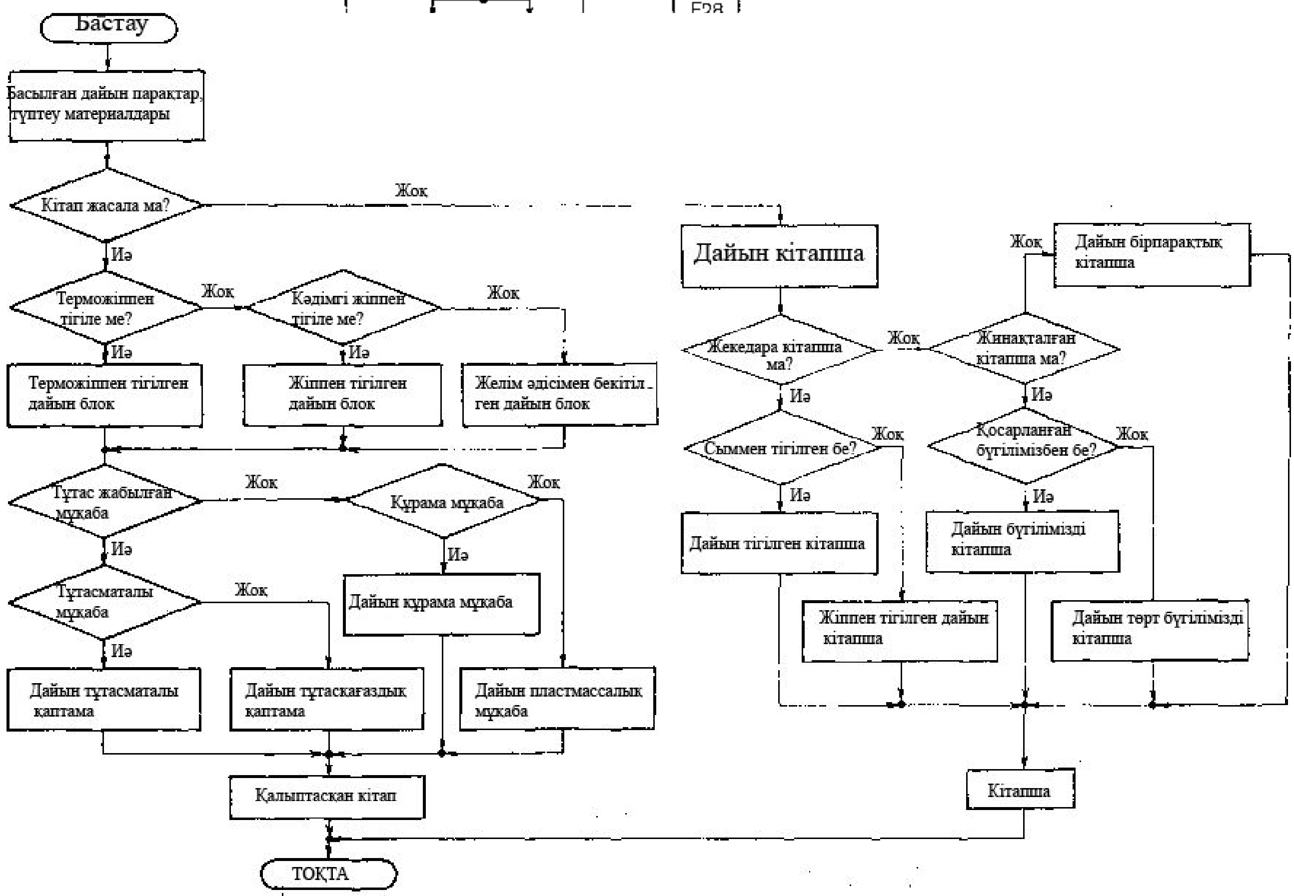
Кез келген жобалау үдерісінде, мейлі ол жаңа құрылыс, кеңею немесе қайта құру болсын, әртүрлі шешімдер қабылдауға тура келеді. Мұндай шешімдер бола алатындар: өндірістің ұтымды технологиясын таңдау; технологиялық нұсқаларды салыстыру; ғимараттарды және жабдықтарды орналастыру; жабдықтар, қоймалар және соған ұқсастарды ұтымды өзара орналастыру; оңтайлы жүк ағындары; жабдықтарды ұтымды жүктеу; жоспарланған қуаттарды пайдалану; өндірілетін өнім көлемі; жобаланатын үдерістердің үнемділігі; жобалауды жоспарлау және соған ұқсастар.

Төменде қолда бар мөлшерлеу негізінде өнім даярлаудың технологиялық нұсқаларын түрлі көзқарас тұрғысынан бағалауға мүмкіндік беретін модель қарастырылады. Әдістемелік себептер бойынша технологиялық үдерістің талданылатын бөлігі – басылған өнімдерді өңдеу. Қандайда бір шектеулерсіз осыған ұқсас тәсілмен технологиялық үдерістің басқа кезеңдерінің моделін қалыптастыруға болады: терім теру, фотоқалыпқа келтіру, қалып немесе басылым даярлау.

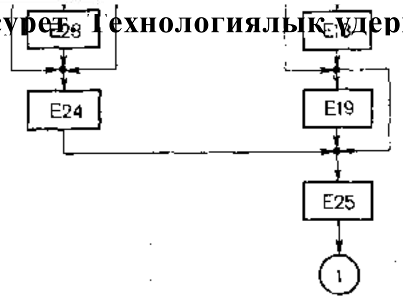
Полиграфиялық өндірістің өндірістік бағдарламасының құрылымы, кәсіпорынның арнайы жасалуына қарамастан, әлі де барынша әртүрлі. Бұдан шығатыны сол, полиграфиялық кәсіпорындағы кешендік технологиялық үдеріс, түрлі өнімдерді шығару мүмкіндігі қамтамасыз етілетіндей болып құрылуы керек.

Тұтасымен технологиялық үдеріс нәтижесіне оның жекеленген құрастырушылары ықпал етеді, өйткені үдеріс ішіне түрлі жәрдемдер біріктіріле алады. Әрі қарай мазмұндау үшін басталатын жері болатын, кітаптар мен шағын кітапшалар даярлауды сипаттайтын, 3.1-суретте көрсетілген алгоритм. Технологиялық үдерістің бұл кезеңінің нәтижесі болатын қатты мұқабадағы кітаптар (тұтасматалық, пластмассалық және соған ұқсас мұқабалар, термажіптермен, жіптермен, тігінсіз бұғаттар-блоктор бекітулері) және шағын (толықтырулары мен де шағын қалыптастыру қарастырылмайды). кітапшалар іріктеп алулары бар, және кітапшалардың өзін технологиясы





3.1-сурет. Технологиялық үдерісті қалыптастыру алгоритмі



3.2-суретте қатты мұқабалардағы кітаптар даярлаудың жалпыланған техно- логиялық сызбанұсқасы көрсетілген. Көптеген полиграфиялық кәсіпорындарда қазір пайдаланатын үдеріс толығымен көрсетілген. Және де тәптіштеп тексеру майда жәрдемдерге дейін жеткізілмеген (Е20–...Е24

3.2-сурет. Кітаптар даярлаудың технологиялық үдерісінің блок-сызбанұсқасы:
x_1 – басылған парақтар; x_6 – басылған және бүктемеленген парақтар; x_{20} – түптеу материалы; y_{30} – буып-түйілген кітаптар. Е1 – парақтар есеп-қисабы; Е2 – түйісіп қалу; Е3 – өнімнің кесілуі; Е4 – термажіптерсіз бүркемелеу; Е5 – термажіптермен бүктемелеу; Е6 – іріктеп алуға дәптерлерді дайындау; Е7 – дәптерлерді іріктеп алу; Е8 – дәкедегі тігін; Е9 – дәкесіз тігін; Е10 – түпжиекті фрезерлеп кесу; Е11 – тігілген жерді желімдеу; Е12 – түпжиекті желімдеу; Е13 – кептіру; Е14 – кесінді; ЕI5 – түпжиекті дөңгелектеу; ЕI6 – кесіндіні бояу; 17 – беттерді белгілеуге арналған таспалақ ендірме; Е18 – өрме жапсыру; Е19 – түпжиектік материалды желімдеу; Е20 – түптеу материалын кесу; Е21 – мұқаба қаптамасын даярлау; Е22 – қаптамаға өрнек салу; Е23 – өрнек салудан кейін тазалау; Е24 – қаптамаларды бүгу; Е25 – блокты қаптамаға кірістіру; Е26 – бұғат жаншуы; Е27 – жол-жол бедерді сомдау; Е28 – бақылау; Е29 – супермұқабаға орау; ЕЗО – буып-түю.

қаптамаларын даярлау). Басқа жағынан, қандай өндіріс үшін үлкен нақтылау қажет болатынын болжауға болады. Төменде екі нұсқаны да қарастырамыз. Блок-сызбанұсқада түрлі технологиялық үдерістер көрсетілген. E_1 сызбанұсқасы элементтерінің (жәрдемдерінің) кірулері x_1 нышандарымен белгіленген (материалдар, жартылай дайын өнімдер); шығулары – y_1 (жартылай дайын өнімдер, дайын өнім, жәрдемдерге шығындар). Ықшамдау мақсатымен Е14 үшжақты кесу жәрдеміне дейінгі кітаптар блоктарын даярлауды қарастырамыз.

Қағидалы түрде даярлаудың екі технологиясы бар:
1) өңдеуге бүктеленбеген парақтар x_1 және кейбір жағдайларда рулондық машиналармен бүктемеленген дәптерлер;
2) өңдеуге тек бүктемеленген дәптерлер (x_6) түседі.

Бірінші технология бойынша өнімді технологиялық өңдеудің мүмкін нұсқалары мынадай:

1.1. Термажіптерсіз бүктемелеу, дәкедегі тігін
El — E2 — E3 — E4 — E6 — E7 — E8 — E11 — E13 — E14.

1.2. Термажіптерсіз бүктемелеу, дәкесіз тігін
El — E2 — E3 — E4 — E6 — E7 — E9 — Ell — E12 — E13 – E14.

1.3. Термажіптерсіз бүктемелеу, тігінсіз бекіту
El — E2 — E3 — E4 — E6 — E7 — E10 — Ell —E12 — E13 — E14.

1.4. Термажіптермен тігіні бар бүктемелеу
El — E2 — E3 —E5 — E6 — E7 — Ell — E12 — E13 — E14.

Ескерту. Термажіптермен ротациондық бүктемелеудің әлі де жоқ болуынан, тек бүктемеленбеген парақтар ғана қолданылады.

Екінші технология бойынша басылған өнімдерді өңдеудің сол нұсқалары бар, бірақ олардың бәрі E6 жәрдемінен басталады:

2.1. Термажіптерсіз бүркемелеу, дәкедегі тігін

2.2. Термажіптерсіз бүркемелеу, дәкедегі тігінсіз

2.3. Термажіптерсіз бүркемелеу, тігінсіз бекіту.

Егер технологиялық үдерісті 3.2-суреттте көрсетілгендегіден қатаңырақ көрсету талап етілсе, онда жаймаланған қисындық сызбанұсқа тұрғызылады.

Егер енді осы қисынды сызбанұсқалар жалпыланса және дайын өнімді алғанша кітаптарды даярлаудың барлық үдерісі қарастырылса, онда шағын кітапшалы-түптеулік өндірістің кезеңінде өтетін, 3.3-суретте көрсетілген, P_b үдеріс картинасы алынады.

ЭЕМ үшін жасалынған бағдарлама болуы кезінде x_1 мен x_6 кіру параметрлерін беру жеткілікті болады. Үдерістің кіру шамаларын, мысалы, өңдеуге жататын басылған парақтар санын бере отырып, және әрбір жеке үдеріс үшін берілістік қызметті, мысалы, 1000 парақты кесуге шығынды енгізе отырып, оны басып шығарудың түрлі нұсқалары бойынша шығындарды анықтауға мүмкіндік беретін бағдарламаны алуға болады. Шығынның орнына құнын, кірісін, барлық жұмысшы жәрдемдерге уақыт шығынын қоюға болады.

Әрі қарай көрсетілетініндей, бір бағдарлама мысалында, полиграфиялық өндірістің жекеленген үдерістері немесе топтық үдерістері бойынша, стандарттық бағдарламалар бойынша ұтымды орындалады. Бұл үшін алғы шарт болатындар: технологиялық үдерістердің элементтерге, яғни жекеленген жәрдемдерге мүшеленуі, және мөлшерлеу құндары өздік құны, бір жұмысшы жәрдемге уақыт шығыны түрінде берілістік қызметті анықтау.

Бағдарламалау арқасында есептеуге мүмкін болатындар: шұғыл-күнтізбелік жоспарлаудың негізін көрсететін жекеленген кезеңдерге және толығымен алғандағы барлық өндірістік үдерістерге шығындар; жекеленген цехтардағы және тұтасымен кәсіпорын бойынша өндірістік құнды; жекеленген үдерістерге, үдерістер топтарына және соған ұйқастарға уақыт шығыны.

E14 жәрдемімен бітетін технологиялық үдерістердің жеті нұсқасы үшін, қисындық сызбанұсқа түрі:

(1.1.) $x_1y_1y_2y_3y_4y_6y_7y_8y_{11}y_{13}y_{14}$;
(1.2.) $x_1y_1y_2y_3y_4y_6y_7y_9y_{11}y_{12}y_{13}y_{14}$;
(1.3.) $x_1y_1y_2y_3y_4y_6y_7y_{10}y_{11}y_{12}y_{13}y_{14}$;
(1.4.) $x_1y_1y_2y_3y_5y_6y_7y_{11}y_{12}y_{13}y_{14}$;
(2.1.) $x_6y_6y_7\ y_8y_{11}y_{13}y_{14}$;
(2.2.) $x_6y_6y_7y_8y_{11}y_{12}y_{13}y_{14}$;
(2.3.) $x_6y_6y_7y_{10}y_{11}y_{12}y_{13}y_{14}$.

$$
\begin{aligned}
P_b = [(&x_1\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \vee x_6)\ \ y_6\ y_7\ y_8\ y_{11} \vee \\
&\vee(x_1\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \vee x_6)\ \ y_6\ y_7\ y_9\, y_{11}\ y_{12} \vee \\
&\vee(x_1\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \vee x_6)\ \ y_6\ y_7\ y_{10}\, y_{11}\ y_{12} \vee \\
&\vee x_1\ y_1\ y_2\ y_3\ y_5\ y_6\ y_7\ y_{11}\ y_{12}]\ y_{13}\ y_{14} \Lambda \\
&\Lambda\ (y_{15}\ y_{16}\ y_{17}\ y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{16}\ y_{17}\ y_{18}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{15}\ y_{16}\ y_{17}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{16}\ y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{15}\ y_{17}\ y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{16}\ y_{17}\ y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{15}\ y_{16}\ y_{17}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{16}\ y_{18}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{16}\ y_{19}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{15}\ y_{17}\ y_{18}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{17}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{16}\ y_{17}\ y_{18}\ y_{25} \vee y_{16}\ y_{17}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{16}\ y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{17}\ y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{16}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{17}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{15}\ y_{18}\ y_{25} \vee y_{15}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{16}\ y_{17}\ y_{25} \vee y_{16}\ y_{18}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{16}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{17}\ y_{18}\ y_{25} \vee y_{17}\ y_{19}\ y_{25} \vee y_{18}\ y_{19}\ y_{25} \vee \\
&\vee y_{15}\ y_{25} \vee y_{16}\ y_{25} \vee y_{17}\ y_{25} \vee y_{18}\ y_{25} \vee y_{19}\ y_{25} \vee y_{25})\ \Lambda \\
&\Lambda y_{25}\ y_{27}\ y_{28}\,(y_{29}\ y_{30} \vee y_{30})\ \Lambda \\
&\Lambda x_{20}\ y_{20}\ y_{21}\,(y_{22}\ y_{23}\ y_{24} \vee y_{22}\ y_{24} \vee y_{24}).
\end{aligned}
$$

3.3-сурет. Кітаптар даярлаудың технологиялық үдерісінің жалпыланған қисындық сызбанұсқасы: V – қисындық нышан немесе Λ

Егер кейбір жәрдем E_i үдеріске қатыспаса, онда ол үшін $k\ [i]$ нөлге тең. Мысалы, пластмассалық мұқабаларды даярлау кезінде кейіптеу (штриховка) (E_{27}) жүргізілмейді, яғни, $k[27] = 0$. Егер бірнеше жәрдемдер E_i, E_{i+1} және E_{i+2} үзіксіз желіге біріккен болса, онда $k[i] > 0$, $k[i+1] = 0$, $k[i+2] = 0$ қабылданады.

Көмекші мағлұматтар ретінде бағдарламаға кіретіндер:

$x\ [i]$ — E_i технологиялық жәрдемі үшін кіру;
$y\ [i]$ — E_i жәрдемі бойынша толық шығындар;
sl...s6 — технологиялық үдеріс жәрдемінің тобы бойынша шығындар;
ml...m7 — мұнда сондай;
ml0...ml2 — мұнда сондай;
z — мұнда ml 0 – дағыдай

$$\underline{a} = \underline{e} = \|\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ \|$$

$$\underline{c} = \underline{F} = \|\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\ \|$$

$$\underline{d} = \underline{g} = \|\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\ \|$$

Нәтижесінде ашып басулар алынады келесі мағлұматтармен.

Бағдарлама (3.4-сурет) келесі мәселелерді шешеді: үдеріс (жүйе) бойынша кіру ақпаратын, жекеленген элементтер бойынша кіру ақпаратына қайта есептеу; бір жұмыс орнына жататын шығынды есептеу; басылымға есептеу нәтижелерін қорытуы бар бірнеше жұмысшы орындар бойынша шығындарды есептеу. Есептеу үшін белгілі болуы тиіс:

Нышан	Белгілеу	Өлшем бірлігі
x_1 : = x1	Басылған парақтар саны	1000 парақ
x_6 : = x6	Бүктемеленген дәптерлер саны	1000 дәптер
k [i]	Осы жәрдем бойынша өлшем білігіндегі (есептеу бірілігіндегі) E_i жәрдеміне шығындар, яғни	
	k [1] … k [3]	1000 парақ
	k [4] … k [6]	1000 дәптер
	k [7] h = 1 кезінде	1000 дана кітап
	h > 1 кезінде	1000 парақ іріктейтін машина соққысы
	(h әрі қарай қараңыз)	
	k [8] … k [19]	1000 дана кітап
	k [20] … k [24]	1000 қаптама
	k [25] … k [30]	1000 дана кітап
b	Бұғаттағы дәптерлер саны	
h	Бір мезгілде жинап алынатын бұғаттар саны	
υ	Күрделі дәптерлердің меншікті салмағы, 0 < υ < 1	
ω	Бір басылған парақтан алынатын дәптерлер саны	

(1) Ашып басу 1.

Кітап бұғатын (үшжақты кесікті қоса отырып) даярлауға шығындар, болады мыналар кезінде

*m*1 – кітап блогын парақтық және рулондық ротациондық машиналарда немесе тек парақтық машиналарда дәкеде жіптер тігінімен басылған парақтардан қалыптастыруда;

*m*2 – мұнда сондай, *m*1 дегідей, бірақ дәкедегі тігінсіз;

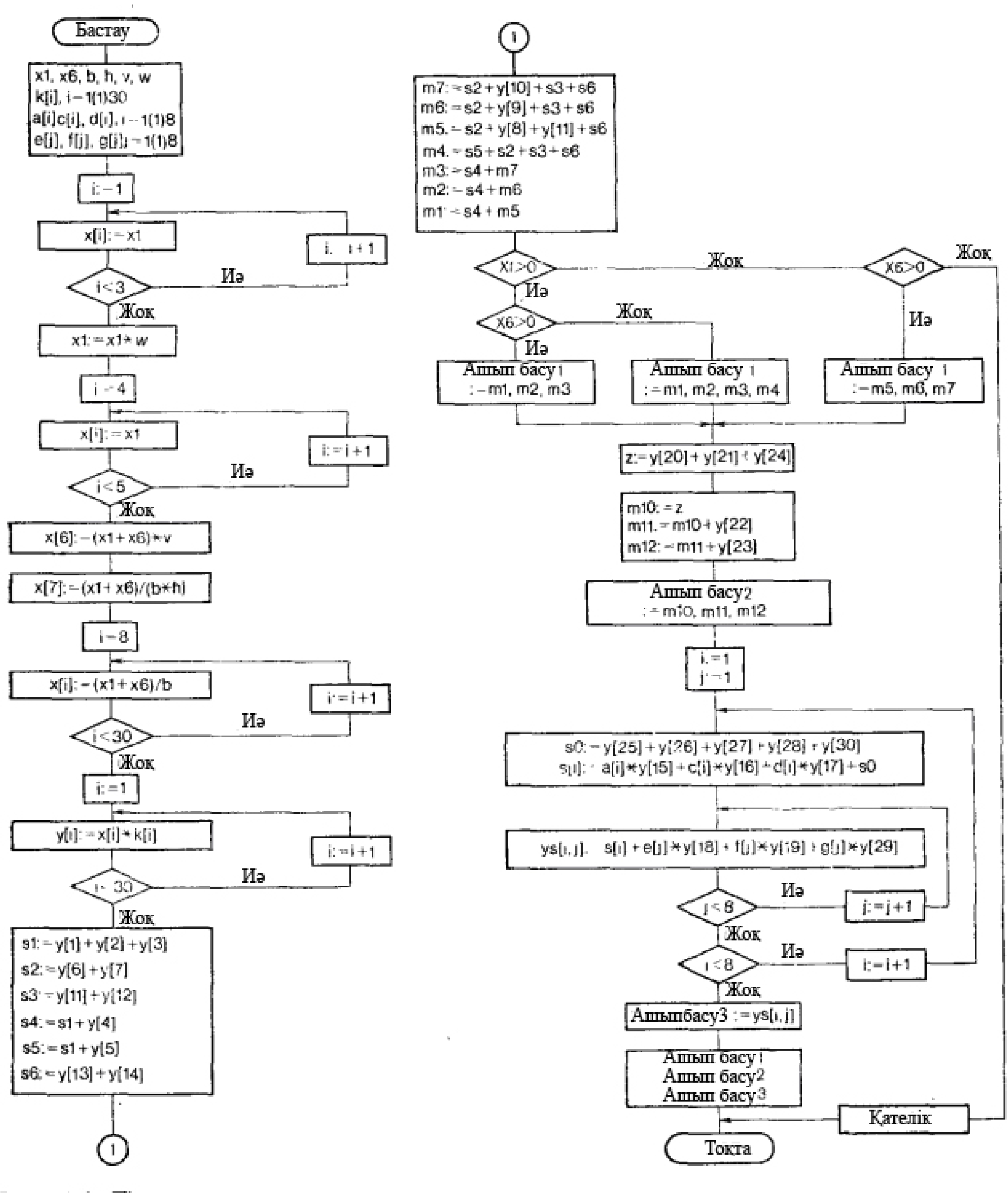
*m*3 – мұнда сондай , *m*1 дегідей, бірақ тігінсіз бекіту кезінде;

*m*4 – кітап бұғатын термажіптермен тігінделген тек парақтық машиналарда қалыптастыруда;

*m*5 – рулондық машиналарда дәкедегі жіптер тігілуімен бүктемеленген дәптерлерден кітап бұғаттарын қалыптастыру;

*m*6 – мұнда сондай, *m*5 дегідей, бірақ дәкедегі тігінсіз;

*m*7 – мұнда сондай, *m*5 дегідей, бірақ тігінсіз бекіту кезінде.



3.4-сурет.
Кітаптар даярлау үдерісі үшін бағдарлама

(2) Ашып басу 2.

Мұқабалық қаптамаларды даярлауға шығындар, атап айтқанда:
$m10$ – өңдеусіз мұқабалық қаптамалар;
$m11$ – бояулық өрнек салынған мұқабалық қаптамалар;
$m12$ – өрнек салынған жұқалтыры (фольгасы) бар мұқабалық қаптамалар.

(3) Ашып басу 3.

Кесуден соң блоктар өңделуі жәрдемдерін орындауға, мұқабалық қаптамаларына блоктарды енгізуге және әрі қарай – технологияның түрлі нұсқалары кезінде кітаптарды буып-түюге дейінгі шығындар, мысалы, кесіндіні бояуға және таспалы-белгілемесі жоқ, супермұқабасы бар өрмені жапсыруға.

Ашып басулардың құрамында тікелей сұранысқа жататын негізгі материалдардың құны жайлы мәліметтер болмайды.

Әдебиет: 1 [37–48]
Бақылау сұрақтары:
1. Модельдеу қағидалары және модельдерді тұрғызу.
2. Модельдеу кезіндегі қателер көздері және бастапқы ақпаратқа талаптар.
3. Жобалық шешімдерді оңтайландырудың мүмкіндіктері.

4. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРДІ ЖІКТЕУ

4.1. Жіктеуге түрлі жақындаулар

Математикалық модельдер белгілер қатары бойынша жіктеледі.

Доминанттық белгі, кейде басым болуды берілген түрлермен жасалған органикалық массамен, немесе ерекше санмен өрнектейді. *Доминанта* (латын сөзі dominans, ілік септеуде *dominantis* – үстемдік ету, басым түсу), басым түсетін ой, негізгі белгі немесе бірдеменің маңызды құрамдық бөлігі.

Жобаланатын зерзаттың бейнелейтін қасиеттерінің сипаты бойынша модельдерді функционалдыққа және құрылымдыққа бөледі.

4.2. Функционалдық және құрылымдық модельдер

Әдетте математикалық модельде қасиеттерін зерттеу мақсатында маңызды модельденетін зерзаттың құрылымы (құрылысы) және осы зерзаттың құрауыштарының өзара байланысы бейнеленеді; осындай модель *құрылымдық* деп аталады. Егер де модель тек зерзаттың қалай функциялануын ғана бейнелесе, мысалы, ол сыртқы әсерге қалай әсер ететінін бейнелесе, онда ол *функционалдық*, немесе көрнекі түрде, *қара жәшік* деп аталады. Құрамаланған тұрпаттағы модельдер де бола алады.

Функционалдық модельдер зерзат қызмет етуі үдерістерін бейнелейді. Бұл модельдер бәрінен жиі теңдеулер жүйелерінің түріне ие. Бейнеленетін құбылыстардың физикалық табиғатына тәуелділікте функционалдық модельдер ажыратылады: жылулық, электрлік, газодинамикалық, кинематикалық және басқа да модельдер.

Құрылымдық модельдер, зерзаттың тек құрылымдық (бөліктікте геометриялық) қасиеттерін бейнелейді. Бұл модельдер матрицалар, графтар, векторлар түрінде бола алады және кеңістіктегі элементтердің өзара орналасуын өрнектейді. Олар элементтер арасындағы тікелей байланыстар болуын арналар, өткізгіш сымдар, құбырлар және соған ұқсастар түрінде сипаттай алады. Құрылымдық модельдер әдетте, зерзаттағы физикалық үдерістердің ерекшеліктерінен абстракциялап (дерексіздеп) отырып, құрылымдық синтездеу мәселесін қоюға және шешуге болатындай жағдайларда қолданылады, мысалы конструкторлық құжаттауды жабдықтау кезінде.

Ішкі жүйелерге түрлі жақындаулары. Негізгі функционалдық жүктемені ішкі жүйенің технологиялық бөлігі көтереді, бірақ осы бөлік қызмет істеуі үшін қалған ішкі жүйелер өте қажет. Ішкі жүйелердің элементтері, берілген сипаттамамен қызмет ететіндей параметрлерге ие болуы керек, мысалы берілген жылдамдықпен, дәлдікпен, сезгіштікпен және т. б. Жүйенің барлық элементтері қатаң өзара байланыста болады.

Декомпозиция рөлі. «Декомпозиция» сөзі гуманитарлық деңгейде біршама бүтіндерді бөліктерге ыдырату сияқты түсіндіріледі, бұл осы құрамдас бөліктерді әрі қарай біріккен тұтастыққа, яғни бастапқы зерзатқа қосылысуын болжамдайды. Дәл баламалы, егер сөз дәл декомпозиция жайлы жүрсе, және жуықталып баламалы, егер сөз жуықталған декомпозиция жайлы жүрсе.

Күрделі басқарылатын үдерістердің декомпозициясы ерекше мәнге ие. Күрделі техникалық, әлеуметті-үнемдік, биологиялық үдерістермен басқарудың барлық шынайы жүйелері, үдеріске әсерлерді басқаруды тағайындау мәселелерінің біршама иерархиялық декомпозициясына негізделген: әрбір ұжым шешім қабылдау мүмкіндігіне ие басқару жүйесіне, көптеген жағдайларда жеткілікті анық сызылған мәселелер шеңберімен, өзінікін басқарады.

«*Қара жәшік*», басым түрде жүйелі техникада жүйелерді белгілеу үшін қолданылатын, аталым, ол жүйелердің құрылымы мен ішкі үдерістері белгісіз немесе өте күрделі; мұндай жүйелерді оқып білу белгілі (берілген) кіретін ықпалдарға (дабылдарға) олардың реакцияларын зерттеуге негізделген.

Құрылымдық пен функционалдық модельдер арасындағы байланыс. Зерзаттардың құрылымдық пен функционалдық қасиеттері тығыз өзара байланыста болатындығынан, көптеген жобалық орындаудың реті зерзаттың құрылымының да, физикалық немесе функционалдық модельдердегі сипатының да ерекшеліктерін бейнелейтін модельдерді талап етеді, осы себептен де оларды АЖЖ (автоматтандырылған жобалау жүйесі)-дағы модельдердің негізгі тұрпатына жатқызу жөн.

4.3. Үзіктік және үзіксіздік модельдер

Белгілі ретінде, шамалар екі тұрпатта бола алады – *үзіктік (қисындық)*, яғни бір-бірінен «ажырап кеткен» мәндерді қабылдайтын, табиғи нөмірлеуді рұқсат ететін (қисындық қатынастар көмегімен), және *үзіксіз*, біршама аралықтан барлық мәндерді қабылдайтын (айнымалылардың үздіксіздігі кезінде). Сондай-ақ араласқан жағдай да болуы мүмкін, мысалы, шама қандайда бір аралықта өзінің мәндерін дискреттік ретінде, ал басқасында үзіксіз ретінде жүргізетін болса. (Бұл анықтаулар жеткілікті толық емес). *Үзіктік (дискреттік) модель* табиғи нөмірлеуді рұқсат ететін, бір-бірінен «ажырап кеткен» мәндерді қабылдайды. Дискреттілік (латын сөзі *discretus* – бөлінген, үзікті), үзіктілік; үздіксіздікке қарсы қойылады.

Осыған ұқсас мағыналық та, математикалық та модельдер – не дискреттік, не үзіксіз, не араласқан болады. Бұл тұрпаттар арасында қағидалы бөгет жоқ және модельді анықтауда немесе түрін өзгерткенде үзіктік картина үзіксіз және кері бола алады; математикалық есепті шешу үдерісінде де солай өтілуі мүмкін. Сонымен, көптеген есептерде математикалық модельді құрастыру кезінде, сондай-ақ оны зерттейтін әдісті таңдау кезінде «үзіктіктің» де, сондай-ақ «үзіксіздік» құралғылардың да, бастапқы картина сипатына тәуелсіз, қолданылуы мүмкіндігін ескеру керек (мысалы, үзіктік модельдерге қосындыларды, ал үзіксіздер үшін туындыларды және интегралдарды пайдалану тән).

Шектік ауысулар: модельдер континуализациясы мен үзіктелуі.

Шектік ауысуларға жататын *континуализация* (латын сөзі «континуум» *continuum* – үзіксіз) немесе *баттастырып жағу.*

Дистрибутивтілік (латын сөзі *distributivus* – таратушы), дистрибутивтік (таратушы) заң, $(a + b + \ldots + c)n = an + bn + \ldots + cn$ формуласымен өрнектелетін қосу мен көбейту қасиеттері.

Дистрибутивтік талдау, лингвистикалық зерттеудің әдісі, мұнда тілдік бірліктерді жіктеу мен оларды оқып білу басым түрде оларды сөз ағынында дистрибуциялау негізінде жүргізіледі. Дескриптивтік лингвистика өкілдерімен жасалынған.

4.4. Динамикалық және статикалық модельдер

Статикалық және *динамикалық (эволюциялық)* модельдер ажыратылады; екінші тұрпаттағы модельдер үшін зерттелетін нәрсе болатын уақытпен қарастырылушы зерзаттың өзгеруі. Аралық орынды квазистатикалық, стационарлық және квазистационарлық модельдер алады.

Үзіксіз динамикалық модельдер. Үзіксіз модельдер біршама аралықтан барлық мәндерді қабылдайды. Динамикалық модельдер үшін зерттеу нәрсесі болатын қарастырылушы зерзаттың уақытпен өзгеруі.

Квазистатикалық жуықтау. Квазистатикалық модельде, зерзат өзгеруі, әрбір мезеттегі жағдайды қарастырған кезде бірінші жуықтауда зерзатты статикалық (тұрпайы айтқанда, инерциялық күштерді ескермеу) деп, ал уақытты қосымша параметр деп санауға болатындай, баяу өтеді.

Статикалық модель. Статистика – таңдайтын сипаттама. Уақыт ішінде өзгермейтін модельдер – статикалық модельдер. Стационарлық модельде үдерістер өтеді деп саналады, ал зерттелуші зерзат уақыт өзгеруімен өзгермейді деп; қарапайымырақ мысал – тұрақты тогы бар электр тізбегі. Қалыптасқан үдеріс деп әдетте стационарлық немесе периодтық үдеріс аталады; ауысулық үдеріс деп бір статикалық күйден немесе қалыптасқан үдерістен басқасына ауысқан үдерісті айтады.

4.5. Детерминирленген және стохастикалық модельдер

Математикалық модельге қойыла алатын кездейсоқ құрауыштар – кездейсоқ скалярлы немесе векторлы шамалар, кездейсоқ тізбектіліктер немесе функциялар, кездейсоқ құрылымдар және соған ұқсастар, статистикалық заңдарды қанағаттандыратындар. Мұндай модельдер *ықтималдық* немесе *стохастикалық* деп аталады, ал *детерминирленген* (латын сөзі «детермино» – анықтаймын; детерминант – латын сөзі *determinans* – анықтаушы, бұл анықтағыш сөзіне балама) модельдер құрамында мұндай құрауыштар болмайды. Кездейсоқ шамалар арасында әдетте бір шаманың өзгеруімен басқасының таралуы ауысатындай байланыс болады. Мұндай байланыс *стохастикалық* деп аталады. Ықтималдық модельдер ықтималдықтар теориясы әдістерінің көмектерімен оқып білінеді. Ықтималдық модельдерді тұрғызу кезінде кездейсоқ құрауыштардың ықтималдық сипаттамаларының көзіне елеулі назар аудару керек.

4.6. Сызықтық және сызықты еместік модельдер.

Бір шаманың екіншісінен сызықтық тәуелділігі – бұл олардың өсімшелерінің пропорционалдығы, яғни $y = ax + b$ түріндегі тәуелділік, осыдан алатынымыз $\Delta y = a\Delta x$ (Δ – өсімшенің әдеттегі белгіленуі); осыған ұқсас, шаманың екі басқасынан сызықтық тәуелділігі – бұл $z = ax + by + c$ түріндегі тәуелділік, осыдан $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y,$ және т. б. Физикалық шамалар арасындағы типтік сызықтық тәуелділіктер – Гук заңы (ұзару созылу күшіне пропорционал), Ом заңы, жылулық кеңею заңы және т. б.

Сызықтық модель түсінігі, әрбір кіруге біршама шығу сәйкес келетін, түрлендіргіштер ретінде қарастырылатын зерзаттар модельдері үшін қолданылады. Кіруге және шығуға есеп берудің басталуы, нөлдік кіруге нөлдік шығу жауап беретінімен, таңдалынады деп санаймыз. Сонда модель *сызықтық аталады*, мұнда суперпозиция (қабаттасу, қосылысу) қағидасы орындалады, яғни кірулер қосылысқан кезде шығулар да қосылады, ал кіруді кез келген санға көбейткен кезде шығу да сол санға көбейтіледі. Егер бұл қағида орындалмаса, модель *сызықты еместік* деп аталады. Сызықтық модельдер әдетте сызықтық біртекті емес теңдеулермен – алгебралық, дифференциалдық және т.б. сипатталады, бұларда біртекті емес мүше кіруге, ал шешілім шығуға жауап береді.

Матрицалық Грин функциялары әдісі. Грин функциясы, функция аналитикалық көрсетіліммен байланысқан функция, сондай-ақ математикалық физиканың қарапайым дифференциалдық теңдеулеріне арналған шеттік есептерді шешуде де қолданылады. Бұл функцияның бөлікті жағдайын, потенциал теориясы бойынша өзінің зерттеуіне алғаш енгізген Джордж Грин болатын, осы есім құрметіне, осы аталым аталған (1828 жыл). Грин функция тудыратындардан шығаратын көздерден өріс таралуын сипаттайды (сондықтан да мұны таралу функциясы деп те атайды).

Сызықтықтың пайдасы айтарлықтай үлкен болады, мысалы, сызықтық емес арақатынастарды сызықтыққа, сызықтық емес модельдерді сызықтыққа, яғни арақатынастарды, модельдерді және тағы басқаларды *линеаризациялау* (сызықты ету) өте кең тараған. Мұндай сызықты ету әдетте екі жағдайда жүргізіледі: не егер, қарастырылатын диапазондардағы айнымалылар өзеруінің сызықтықтан ауытқуының үлкен емес және маңызды емес екенін (мысалы, Гук заңындағыдай) эксперимент көрсетеді, не егер, бұл диапазондар аз болса және аздықтың жоғары реттегі мүшелері лақтырылады да айнымалылардың өсімшелері олардың дифференциалдарына айырбасталады. Екінші жағдайда сондай-ақ сызықтық интерполирлеу де қолданылады.

Қағидалы түрде сызықты еместік зерзаттар (соның санында құбылыстар да бар) бар екенін есте ұстау қажет, бұлар үшін сызықтық модельдерді қолдану картинаның өрескел бұрмалануын келтіреді. Бұл бәрінен бұрын әсер етуі масштабының өзгерісі нәтиженің сапалы өзгерісін келтіретін жүйелер. Типтік мысал қызметін атқара алатын құрғақ жылытылуы бар механикалық жүйелер, бұлар үшін аз күш қозғалыс тудырмайды, ал үлкені – тудырады; жалпы айтқанда, осыған тектес кез келген бөгеттердің болуы – бұл типтік сызықты еместік эффект. Елеулі сызықты еместік болатын, сондай-ақ, параметрлерге тәуелді, қозғалыс типінің – басқаларына және соған ұқсастарға өзгергені кездегі, зерзаттың дағдарыстық күйіне жақынын зерттеу жайлы мәселе. Мұндай жағдайлардың бәрінде сызықты еместік талдаудың әдістерін пайдалану керек, бұларды арнайы әдебиеттен табуға болады.

Әдебиеттер: 7, 9, 10

Бақылау сұрақтары:

1. Доминанттық белгі.
2. Декомпозиция.
3. Функционалдық, құрылымдық, үзіктік және үзіксіздік модельдер.
4. Шектік ауысулар: континуализация және модельдер дискретизациясы.
5. Динамикалық және статикалық модельдер.
6. Квазистатикалық жуықтау.
7. Детерминирленген және стохастикалық модельдер.
8. Сызықтық және сызықты еместік модельдер.

5. ЗЕРЗАТТЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СИПАТТАЛУЫ,

МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ ТЕХНОЛОГИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРДІ ТҰРҒЫЗУ

5.1. Зерзаттың математикалық сипатталуын құрастыру

Математикалық сипаттауды құрастыру кезінде жалпы қабылдау болатын блоктық қағида. Осы қағидаға сай, математикалық сипаттау құрастырудың алдында модельдеу зерзатында өтетін жекеленген «элементарлық» үдерістерге талдау жүргізіледі. Және де осындай үдерістің әрқайсысын оқып білу бойынша эксперименттер, модельдеу зерзатын кәдеге асыру жағдайларына барынша жақындайтын жағдайларда, жүргізіледі.

Алдымен математикалық сипаттаудың негізгі құрылымы ретінде үдерістің гидродинамикалық модель зерттеледі. Әрі қарай химиялық реакциялардың кинетикасын, табылған модельдің гидродинамикалық жағдайлары ескерілген масса- мен жылуберілісі үдерістері зерделенеді және осы үдерістердің әрқайсысының математикалық сипаттауы құрастырылады. Берілген жағдайда тұжырымдайтын кезең болатын модельдеу зерзатының математикалық сипаттауы теңдеулерінің тұтас жүйесіне барлық зерттелген «элементарлық» үдерістер (блоктар-бұғаттар) сипаттауларын біріктіру. Математикалық сипаттау тұрғызудың блоктық қағидасының құндылығы болатын сол, құралғылық жабдықтаудың соңғы нұсқасы әлі белгісіз кезде, зерзатты жобалау кезеңіне оны қолдануға болатындығы.

Итерациялық және сапалық әдістер бар. *Итерация* (латын сөзі *iteratio* – қайталау), қайсыбір математикалық жәрдем қолдануды қайталау.

Итерациялық әдістер (латын сөзі «итерацио» – қайталау), мұндай әдістердің әрқайсысында біршама біртұтастық есептеулік атқару тәртібі қайта-қайта қайталанады, және де жүргізілген есептеу нәтижесі әрбір ретте келесі есептеудің негізіне кіреді (салынады).

Сапалық әдістер көмегімен шешілім қасиеттерін оқып білу оны тұрғызбай-ақ, берілген теңдеуді талдау жолымен жүргізіледі

Математикалық сипаттау құрастырылуының әдістері. Көрсетілген әдістерге жататындар: аналитикалық, эксперименталдық және эксперименталды-аналитикалық.

Математикалық сипаттау құрастырылуының *аналитикалық әдістері* деп, әдетте, зерттелуші зерзатта өтетін, физикалық пен химиялық үдерістерді теориялық талдау негізінде, сондай-ақ құралғының берілген құрылыстық параметрлері мен өңделуші заттардың сипаттамалары негізінде статика мен динамика теңдеулерін қорыту. Осы теңдеулерді қорыту кезінде зат пен энергия сақталуының іргелі заңдары, сондай-ақ масса мен жылу тасымалы үдерістерінің, химиялық түрлендірулердің кинетикалық заңдары қолданылады.

Аналитикалық әдістер көмегімен математикалық сипаттау құрастырылуы үшін зерзатта қандайда бір эксперименттерді жүргізу талап етілмейді, сондықтан мұндай әдістер, физика-химиялық үдерістері жеткілікті жақсы зерттелінген зерзаттарды қайта жобалауда статикалық пен динамикалық сипаттамаларды табу үшін жарайды.

Құрастырылған теңдеулердің параметрлері (коэффициенттері) функционалды түрде химия-технологиялық құралғының ауқымдарын анықтайтындарға (диаметрге, ұзындыққа және т.б.), өңделетін заттардың қасиеттеріне және физика-химиялық үдерістердің өтуін сипаттайтын шамаларға (реакциялар жылдамдығының константтарына, диффузия коэффициенттеріне және басқаларға) тәуелді. Теңдеулердің кейбір параметрлері есептеу жолымен анықталына алады, басқалары бұрын орындалған зерттеулердің нәтижелері бойынша ұқсастыру қағидасы көмегімен табылады.

Математикалық сипаттау құрастырылуының аналитикалық әдістерінің кемшіліктеріне зерзаттың жеткілікті толық сипатталуы кезінде алынатын теңдеулер жүйесі шешілімінің күрделілігін жатқызуға болады.

Математикалық сипаттау құрастырылуының эксперименталдық әдісі тар, «жұмысшы» диапазондағы зерзаттардың кіру мен шығу айнымалылары өзгеруін (мысалы, жекеленген технологиялық параметрлерінің автоматтық тұрақтандырылуы жүйесін құрастыру кезінде) басқару және зерттеу үшін қолданылады. Бұл әдістер бәрінен жиі сызықтылық жайлы жорамалға және зерзат параметрлерінің шоғырлануына негізделеді. Осы жорамалдарды қабылдау байқалушы үдерістерді алгебралық немесе тұрақты коэффициенттері бар сызықтық дифференциалдық теңдеулермен салыстырмалы түрде жай сипаттауға мүмкіндік береді. Математикалық сипаттау құрастыруына эксперименталдық жақындауы кезінде тікелей зерттелетін зерзатта тәжірибелерді қою әрқашан талап етіледі.

Эксперименталдық әдістердің жетістігі болатын параметрлер өзгеруінің тар диапазонында зерзат қасиеттерін жеткілікті дәл сипаттау кезінде алынатын математикалық сипаттаудың қарапайымдылығы. Эксперименталдық әдістердің негізгі кемшілігі – теңдеуге кіретін сандық параметрлер мен зерзаттың құрылыстық сипаттамалары, үдерістің режімдік параметрлері, заттардың физика-химиялық қасиеттері арасында функционалдық байланысты қалыптастырудың мүмкін еместігі. Бұдан басқа, эксперименталдық әдіспен алынған математикалық сипаттауды басқа біртұрпатты зерзаттарға таратуға болмайды.

Математикалық сипаттау құрастырылуының аналитикалық пен эксперименталдық әдістерінде «күшті» және «әлсіз» жақтардың болуы *қиыстырылған эксперименталды-аналитикалық әдіс* жасалуы қажеттігін әкелді. Мұның маңыз-мәні мынада, сипаттау теңдеулерін аналитикалық түрде құрастыру, эксперименталдық зерттеулерді жүргізу және олардың нәтижелері бойынша теңдеулер параметрлерін табу. Осыған ұқсас математикалық сипаттауды алуға жақындау кезінде эксперименталдық пен аналитикалық әдістердің көптеген жағымды қасиеттері сақталады.

Математикалық сипаттаудың құрамы. Жалған түрде математикалық сипаттау өзімен үдерістің түрлі айнымаларын теңдеулердің тұтас жүйесіне байланыстыратын тәуелділіктердің жиынтығын көрсетеді. Осы арақатынастардың арасында жалпы физикалық заңдарын (мысалы, масса мен энергия сақталуы заңдары) бейнелейтін теңдеулер, «элементарлық» үдерістерді (мысалы, химиялық түрлендірулер) сипаттайтын теңдеулер, үдерістің айнымалыларына шектеулер және тағы басқалар бола алады. Бұдан басқа, математикалық сипаттау құрамына сондай-ақ теориялық пішіні белгісіз немесе тым күрделі, үдерістің әртүрлі параметрлері арасындағы түрлі эмпирикалық пен жартылай эмпирикалық тәуелділіктер кіреді.

Бөліктікте, моделделуші зерзат жайлы теориялық мәліметтер қатыспаған немесе тым шектелген көлемде болған кезде, тіпті оны сипаттайтын арақатынастардың шамамен алынған түрлері белгісіз кезде, математикалық сипаттаудың теңдеулері өзімен зерзаттың әсер етуші (математикалық сипаттау құрастырушысының эксперименталдық әдісі) статистикалық тексеруі нәтижесінде алынған эмпирикалық тәуелділіктердің шығу мен кіру айнымалыларын байланыстыратын жүйені көрсетеді. Бұл модельдер әдетте зерзаттың кіру мен шығу айнымалылары арасында керітартпалық арақатынастар түрін иеленеді, және, әлбетте, моделдеу зерзатының физикалық маңыз-мәнін бейнелемейді, бұл оларды қолдануда алынатын нәтижелердің жалпылануын қиындатады.

Керітартпалық арақатынастарға негізделген модельдерден өзгешеленіп, сипаттау құрастыруының аналитикалық әдісіне негізделген математикалық модельдер үдерістің негізгі заңдылықтарын бейнелейді және сапалы түрде оны, модельдің жеткіліксіз дәл параметрлері болғанымен де, дұрысырақ сипаттайды. Сондықтан олардың көмегімен накты сыныпқа жататын моделдеудің зерзаттарының жалпы қасиеттерін оқып білуге болады. Моделделуші зерзаттың физикалық табиғаты негізінде жасалған математикалық сипаттау құрамында теңдеулердің мынадай топтарын бөлектеуге болады:

1. *Ағындар қозғалысының гидродинамикалық құрылымын ескеріп жазылған, масса мен энергия сақталуының теңдеулері.* Теңдеулердің берілген тобы температураның, концентрациялардың ағындарындағы таралуды және олармен байланысқан қасиеттерді сипаттайды. Материалдық теңгерімнің жалпыланған теңдеуінің түрі

Заттың келісі – Заттың шығыны = Заттың жинақталуы. (5.1)

Заттың келісі мен щығыны арасындағы айырым қарастырылушы зерзаттағы оның мөлшерінің өзгеруіне тең. Стационарлық режімде кему де, жинақталу да өте алмайды. Бұл жағдайда (5.1) теңдеуі материалдық теңгерім теңдеуі түріне ауысады

Заттың келісі = Заттың шығыны. (5.2)

(5.1), (5.2) теңдеулері үдеріске қатысатын жекеленген әрбір затқа да, сондай-ақ заттардың барлық жиынтығына да қолданылады.

Жылу теңгерімінің жалпыланған теңдеуінің түрі

Жылу келісі – Заттың шығыны = Жылу жинақталуы (5.3)

немесе стационарлық шарттар үшін

Жылуы келісі = Жылу шығыны. (5.4)

(5.3), (5.4) шарттарында жұмысты ескеру жөн, бірақ та көптеген үдерістерде энергетикалық эффектілер жылулық болатындығынан, энергия сақталынуы теңдеулерін құрастыру кезінде көрсетілген шарттарды пайдалануға болады.

2. *Ағындардың шоғырланған элементтері үшін элементарлық үдерістердің теңдеулері.* Бұл топқа жататын масса- және жылуайырбас, химиялық реакциялар және басқа үдерістерінің сипаттауы.

3. *Үдерістің түрлі параметрлері арасындағы теориялық, жартылай эмпирикалық немесе эмпирикалық арақатынастар.* Солай, мысалы, массаберілісі коэффициентінің фазалар ағындары жылдамдықтарынан тәуелділігі, қоспа жылусыйымдылығының құрамнан тәуелділігі және тағы басқалар.

4. *Үдеріс параметрлеріне шектеулер.* Мысалы, бөлектеудің кез келген баспалдағындағы көпқұрауыштық қоспалардың ректификациясын үдерісін модельдеу кезінде, барлық құрауыштар концентрацияларының қосындысы 1-ге тең шарты, орындалуы керек. Бұдан басқа, кез келген құрауыштың концентрациясы 0-ден 1-ге дейінгі аралықта болуы керек.

Барлық математикалық модельдер үшін жалпы болатыны сол, математикалық сипаттауға қосылатын теңдеулер саны, модельдеу нәтижесінде табылатын айнымалылардың санына тең болуы керек.

Химия-технологиялық математикалық сипаттауда кездесетін, теңдеулердің қысқаша негізгі сыныптарын қарастырамыз. Моделдеудің түрлі зерзаттарының қасиеттерін сипаттау үшін әдетте қолданылатындар: алгебралық пен трансценденттік теңдеулер, әдеттегі дифференциалдық теңдеулер, бөліктік туындылардағы дифференциалдық теңдеулер және интегралдық теңдеулер. Соңғы тұрпат – интегралдық теңдеулер – салыстырмалы түрде химиялық технологияның зерзаттарын математикалық модельдеу мәселелерінде сирек кездеседі.

Алгебралық теңдеулерге әдетте шоғырланған параметрлері бар зерзаттар жұмысының стационарлық режімдерін математикалық сипаттау ептелінеді (мысалы, толық ығысудың реакторы). Бұдан басқа, осы тұрпаттың теңдеулері түрлі параметрлер арасындағы стационарлық байланыстарды өрнектеу үшін күрделілірек зерзаттарды сипаттау кезінде қолданылады. Алгебралық теңдеулер түрінде математикалық сипаттаулар күрделілігі теңдеулер санына және оларға кіретін функцияларға едәуір тәуелді болғанымен қарапайымырақ.

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер әдетте шоғырланған параметрлері бар зерзаттар жұмысының стационарлық емес режімдерін математикалық сипаттау үшін (мысалы, толық ығысудың реакторы динамикасын сипаттау үшін), сондай-ақ бір кеңістіктік координаты бойынша таралған параметрлері бар зерзаттардың стационарлық режімдері үшін қолданылады. Бірінші жағдайда тәуелсіз айнымалы – уақыт, ал екіншіде – кеңістіктік координат. Математикалық сипаттаулардың жалпылығын және тіпті теңбе-теңдігін атап өткен жөн, бұл қасиет кейде әртүрлі зерзаттардың математикалық модельдеріне тән. Мұндағы сөз толық ығысудың оқтын-оқтын әрекеттегі құралғыларының стационарлық емес модельдері және идеалдық ығыстыру құралғыларының стационарлық модельдері жайлы болып тұр. Ие болатынымыз бірінші жағдайда ($A + B \xrightarrow{k} P$ реакциясы үшін):

$$\frac{dC_A}{dt} + kC_A C_B = 0,\ \frac{dC_B}{dt} + kC_A C_B = 0,\ C_A = C_A^0, C_A = C_B^0,\ \text{t} = 0 \text{ кезінде}, \qquad (5.5)$$

ал екінші жағдайда

$$\upsilon\frac{dC_A}{dx} + skC_A C_B = 0,\ \upsilon\frac{dC_B}{dx} + kC_A C_B = 0,\ C_A = C_A^{BX}, C_B = C_B^{BX},\ x = 0 \text{ кезінде}, \qquad (5.6)$$

мұндағы s – реактордың көлденең қимасы; υ – көлемдік шығын; C_A^0, C_B^0, C_A^{BX}, C_B^{BX} – сәйкестелініп A мен B заттарының бастапқы және кірулік концентрациялары.

Көрінетіні, (5.5), (5.6) теңдеулерінің жүйелері коэффициенттерінің дәлдігіне дейін сәйкес келеді. Мұндағы математикалық сипаттаудың теңбе-теңдігі, екі жағдайда да оңтайлы шарттарды іс жүзінде іске асыру елеулі түрде бір-бірінен ерекшелене алатын болса да, оңтайлы шешімдердің теңбе-теңдігі жайлы тұжырым жасауға мүмкіндік береді.

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер шешімінің күрделілігі жағдайлар қатарымен анықталады. Біріншіден, ол теңдеу реті өсуімен өседі (немесе, іс жүзінде бұған балама болады жүйедегі дифференциалдық теңдеулер саны өскенінде, өйткені m-ші реттегі теңдеуді бірінші реттегі теңдеулерден тұратын жүйеге әрқашан түрлендіруге болады).

Шешілім күрделілігіне теңдеулердің сызықтығы да немесе сызықтығы еместігі де ықпал етеді. Сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулер әлдеқайда оңай шешіледі; олар үшін арнайы әдістер қатары жасалған, мысыалы операциондық санау. Тұрақты коэффициенттері бар сызықтық дифференциалдық теңдеулер жай аналитикалық шешімдермен шешіледі. Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйелерін шешу – мәселе, мұны шешуге аналогтық есептеу машиналары жақсы ыңғайланған.

Сызықтық еместік шешуді кенет күрделендіреді, және, ережедегідей, бұл жағдайда сандық әдістерді қолдану талап етіледі.

Дифференциалдық теңдеулер жүйелерін шешу кезінде, жүйе матрицасының меншікті мәндері едәуір шашырауы ішінде болатын жүйенің «қатаң» қасиетімен жиі соқтығып қалуға тура келеді, бұл шешудің әдеттегі әдістерін пайдалануға мүмкіндік бермейді. Мұндай жағдайларда арнайы жасалған алгоритмдерді пайдалану қажет.

Құрамында қарапайым дифференциалдық теңдеулер бар математикалық сипаттаудың маңызды ерекшелігі болатын бастапқы шарттар берудің қажеттілігі.

Бөліктік туындылардағы дифференциалдық теңдеулер таралған параметрлері бар зерзаттар динамикасын немесе бірнеше координаттар бойынша таралған параметрлері бар зерзаттардың стационарлық режімдерін математикалық сипаттау үшін қолданылады. Көрсетілген теңдеулер үшін зерзат динамикасын сипаттау кезінде бастапқы шарттармен қатар, жалпы жағдайда уақыт функциясы болатын, шекаралық шарттарды да беру керек. Бөліктік туындылардағы теңдеулермен сипатталатын зерзаттардың стационарлық режімдері үшін тек шекаралық шарттар беріледі. Бөліктік туындылардағы теңдеулері бар есептер, ережедегідей, үлкенірек күрделіліктерімен өзгешеленеді және көптеген жағдайларда әрбір нақты есепті шешу тиянақты жұмысты талап етеді.

Теңдеулердің осы сыныбымен сипаттауға мысал болатын, стационарлық емес шарттарда жұмыс істейтін, идеалдық ығыстырудың құралғысы, мұнда өтетін реакция $A + B \xrightarrow{k} P$. Осы жағдайда алынатын теңдеулер жүйесі:

$$\frac{\partial C_A}{dt} + \upsilon \frac{\partial C_A}{\partial x} kC_A C_B = 0, \qquad \frac{\partial C_B}{dt} + \upsilon \frac{\partial C_B}{\partial x} kC_A C_B = 0, \tag{5.7}$$

келесі бастапқы және шектік шарттары бар:

$$C_A = C_{A_H}(x), C_B = C_{B_H}(x), \text{ t = 0 кезінде}, \tag{5.8}$$

$$C_A = C_{A\,ГР}(t), C_B = C_{B\,ГР}(t), \text{ t = 0 кезінде}. \tag{5.9}$$

Мұндағы υ – көлемдік шығын; s – көлденең қима.

Дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын зерзаттарды зерттеу, кейде өзімен едәуір қиын есептеу мәселесін көрсетеді. Сондықтан жағдайлар қатарында зерзатты дифференциалдық теңдеулермен математикалық сипаттаудың орнына, соңғы-айырымдық теңдеулердің жүйесімен оның сипатталуы қолданылады, осы үшін таратылған параметрлері бар үзіксіз зерзат шоғырланған параметрлері бар дискреттік ретінде қарастырылады, әйтсе де ұялы құрылымы болуы тиіс. Жалған математикалық түрде үзіксіз зерзатты дискреттікпен ауыстыру дифференциалдық теңдеулерді айырымдық арақатынастармен ауыстыруға баламалы. Және де әдеттегі дифференциалдық теңдеулермен сиптталатын зерзаттар үшін, математикалық сипаттауды соңғы-айырымдық теңдеулер жүйесі түрінде көрсетеді. Бөліктік туындылардағы дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үдерістер үшін, нәтиже болатын дифференциалды-айырымдық теңдеулер жүйесі, бұлардың әрқайсысы, өз кезегімен, соңғы-айырымдық теңдеулердің жүйесімен көрсетіле алады. Осыған ұқсас математикалық сипаттаудың теңдеулер жүйесін түрлендіру кезінде, табиғи түрде, қателік пайда болады, бұл қателікті модельдеу нәтижелерін бағалау кезінде ескеру қажет.

Солармен қатар, өзінің табиғаты бойынша ұялы құрылымға ие зерзаттар қатары бар. Типтік мысалға қызмет ететіндер секцияланған реакторлар, табақшалық мұнаралар және т.б. Сондықтан ұялы модельдер дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын зерзаттар үшін аппроксимацияның ыңғайлы түрі болып қала салмай, сондай-ақ толық нақтылы өзіндік мәнге де ие болады.

Стационарлық емес зерзаттарды жалпы математикалық сипаттауды, уақыт ағымымен үдеріс айнымалылары өзгеруін бейнелейтін, дифференциалдық теңдеулер (қарапайым немесе жеке туындылық) жиынтығы түрінде көрсетеді. Әрбір айнымалыны t_i релаксация уақытымен сипаттауға болады, оның ағымында айнымалы, қалған айнымалылардың тұрақ мәндері кезінде оның өзгерісінің толық диапазонынан нақты үлеске өзгереді. Мұндағы зерзаттың барлық айнымалыларын екі топқа бөлуге болады делік, олардың бірі үшін $t_i \leq t^I$, ал екіншісі үшін $t_i \geq t^{II}$, және, бұдан басқа, арақатынас $t_i << t^{II}$ әділ, соңғысы бірінші топ айнымалылары релаксациясының уақыты екінші топ айнымалалары релаксациясының уақытынан әлдеқайда кіші екенін білдіреді. Сонда қателіктің біршама дәрежесімен, әлдеқайда кіші релаксация уақытына ие бірінші топ айнымалыларын инерциясыз деп қабылдауға болады, және математикалық сипаттау теңдеулеріндегі уақыт бойынша көрсетілген айнымалылардан туындыларды нөлге тең деп санайды. Осындай амал көмегімен, кейде дифференциалдық теңдеулер бөлігін соңғылықтармен ауыстырып стационарлық емес математикалық модельді едәуір ықшамдаудың қисыны келеді.

Іштеріндегі, уақыт өтуімен релаксацияның аз уақыты бар айнымалылардың өзгеруін сипаттайтын стационарлы емес дифференциалдық теңдеулері стационарлы теңдеулермен ауыстырылған, математикалық модельдерді, *квазистационарлық емес* деп атауға болады. Іс жүзінде қолданылушы стационарлы емес модельдер, шын мәнісінде әдетте квазистационарлы емес болады, әйтсе де, мұнда қатаң айтқанда, ішкі айнымалылар қатарының квазистационарлығын негіздеу қажет.

Айтылғанды ескеріп математикалық модельді мынадай түрде жіктеуге болады:

– кеңістіктік белгілер бойынша – шоғырланған параметрлері бар модельдер; ұялық модельдер; таратылған параметрлері бар модельдер;

– уақыттық белгілер бойынша – стационарлық модельдер; квазистационарлық емес модельдер; стационарлық емес модельдер.

Математикалық модельге маңыздырақ талап болатын қасиеттерінің таңдалған жүйелеріне қатысты зерделенуші шынайы зерзатына оның *парапарлығы* (дұрыс сәйкес келуі). Парапарлық талабына және біршама орынды дәлдігі бар осы қасиеттердің дұрыс сандық сипатталуы кіреді. Осыған сәйкестілікте сәйкестелініп *сандық* немесе *сапалық* модельдер жайлы айтылады. Сандық парапарлықтың орнына сондай-ақ *модель дәлдігі* жайлы да айтылады.

5.2. Шешу әдісін таңдау және оны шешу алгоритмі мен модельдейтін бағдарлама түрінде іске асыру

Математикалық сипаттауды құрастырудан және қажеттілік жағдайында сәйкес келетін бастапқы мен шекаралық шарттар қойылуынан кейін шешу әдісін таңдау, алгоритм жасау және математикалық сипаттау теңдеулері жүйесі шешімінің бағдарламасын құрастыру қажет.

Қарапайымырақ жағдайларда, математикалық сипаттау теңдеулері жүйесінің аналитикалық шешімі мүмкін кезде, модельдеуші алгоритмді және бағдарламаны арнайы жасаудың қажеттігі болмайды, өйткені барлық ақпарат сәйкес келетін аналитикалық шешімдерден алынады. Математикалық сипаттау өзімен шектік пен дифференциалдық теңдеулер жүйесін көрсеткен кезде, шешімнің тиімді алгоритмі тұрғызылуы мүмкіндігінен математикалық модельдің іс жүзінде қолданылуы едәуір тәуелді болады.

Математикалық сипаттау теңдеулері жүйесін шешудің әдісін таңдау кезінде әдетте шешудің ең үлкен тездігін, шынайылыққа шешім алгоритмінің сенімді ұқсастығын және ЭЕМ-нің ең кіші жадысын алуды қамтамасыздандыратын талаптарды басшылыққа алады. Және де шешімнің берілген дәлдігі қамтамасыз етілуі керек.

Шешу әдісі таңдалынған соң шешілімдерді қамтамасыз ететін есептеулік пен қисындық әсерлердің тізбектілігі құрастырылады, яғни есеп шешімінің алгоритмі құрастырылады. Алгоритм жазудың пішіміне және мазмұнына негізгі талаптар болатын оның көрнекілігі, ықшамдығы және өрнектілігі. Математикалық модельдеу тәжірибесінде ең үлкен таралым алған алгоритм жазудың графиктік тәсілі (сызбанұсқалар блогы) және қадамдар тізбектілігі түрінде алгоритм жазу.

Алгоритм жазудың графиктік тәсілі алгоритмнің жекеленген элементтерін графиктік нышандармен, ал барлық алгоритмді – сызбанұсқалар блогы түрінде көрсетуге негізделген. Графиктік нышандар ішіндегі сызбанұсқалар бұғатына сөз түрінде немесе нышанды-өндірілетін әсерлер түрінде жазылады. Сызбанұсқалар блогы түрінде алгоритмді көрсетудің басқа тәсілдерге қарағанда көрнекілігі әлдеқайда артығырақ. Осы уақытта алгоритм өте күрделі немесе добал болса, онда графиктік бейнелеу тым шатасады және көрнекілікке ие болмауы мүмкін. Бұл жағдайларда қадамдар тізбектілігі түріндегі алгоритмінің жай жазылуы қолданылады. Алгоритмін бөлшектеу дәрежесі оның күрделілігіне, ЭЕМ-нің математикалық қамсыздандырылуына және стандарттық алгоритмдерінің пайдалану дәрежесіне тәуелді. Егер, мысалы, бағдарламада кітапханалық қосалқы бағдарлама қолданылса, онда оны бөлшектеудің қажеті жоқ, оның параметрлері ғана көрсетілгені жеткілікті.

Мысал ретінде идеалдық ығыстыру құралғысын есептеу алгоритмін қарастырамыз, мұнда өтетін реакция $B + A \xrightarrow{k}$ P.

Жұмыстың стационарлық режиміндегі математикалық сипаттаудың түрі:

$$\frac{\upsilon}{s}\cdot\frac{dC_A}{dx} = -kC_AC_B, \tag{5.10}$$

$$\frac{\upsilon}{s}\cdot\frac{dC_B}{dx} = -kC_AC_B, \tag{5.11}$$

$$x = 0 \text{ кезінде } C_A = C_A^0\ ,\ C_B = C_B^0. \tag{5.12}$$

Реакция изотермалық жағдайларда өтеді деп санаймыз. Сонда қарапайым дифференциалдық теңдеулер (3.10), (3.11) жүйесі Эйлер әдісі көмегімен шешіле алады. Осы тұрғыдан оны мынадай түрге келтіреміз

$$\frac{dC_A}{dx} = -\frac{s}{\upsilon}kC_AC_B = f_1(C_A, C_B),\quad \frac{dC_B}{dx} = -\frac{s}{\upsilon}kC_AC_B = f_2(C_A, C_B). \tag{5.13}$$

Эйлер әдісіне сай, C_A мен C_B ізделінуші концентрацияларының анықталатын формулалары

$$C_A = C_A^0 + \Delta x f_1\,(C_A, C_B), \tag{5.14}$$

$$C_B = C_B^0 + \Delta x f_2\,(C_A, C_B). \tag{5.15}$$

(5.13) теңдеуі жүйесі шешімінің графикалық алгоритмі (сызбанұсқалар блогы) 5.1-суретте көрсетілген.

Қадамдық түрде өрнектелген сол алгоритмнің түрі:

1. Берілетіндер C_A^0, C_B^0, Δx, k, s, υ, ℓ.

2. Табылатындар $x = x + \Delta x$.

3. Интегралдауды аяқтау шарты тексеріледі ($x > \ell$). Егер ол орындалған болса, онда нәтижелер қорытындылады да 7-ші пунктке өту жүреді.

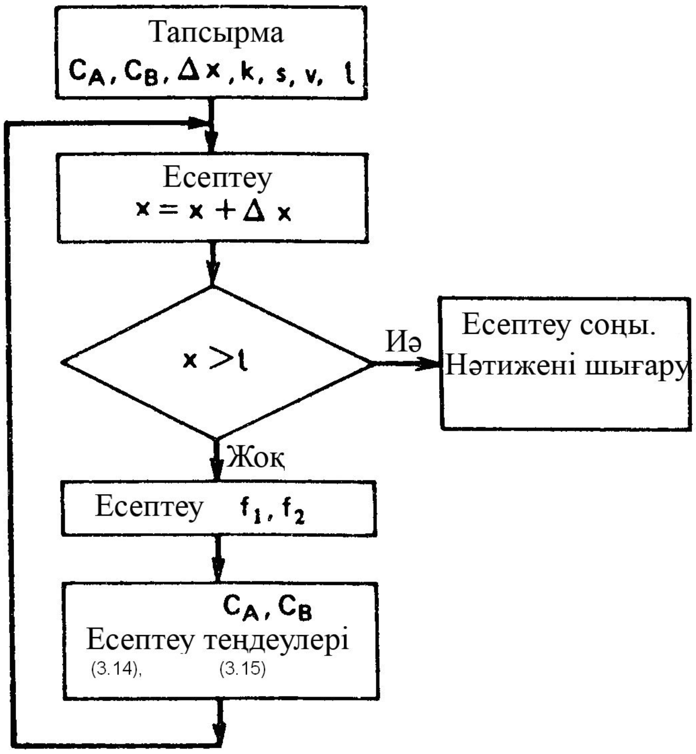
4. Оң жағындағылар есептелінеді f_1 (C_A, C_B), f_2 (C_A, C_B).

5. Жаңа концентрациялар C_A мен C_B анықталынады.

6. 2-ші пунктке өтеді.

7. Есептеу аяқталады.

Әрі қарай алгоритм негізінде жоғары деңгей тілдерінің бірінде бағдарлама жазылады. Бағдарлама жазу кезінде оның ықшамды болуына ұмтылу қажет, содан да атқару реті және қызмет етудің атқару реті кең қолданылады, өйткені берілген жағдайда қайталанылатын есептеулік әсерлер бағдарламада бір рет жазылатын болады. Бағдарламаны құрастыру кезінде талап етілетін ЭЕМ-нің ең аз жадысына ұмтылған маңызды. Есептеудің қисынды аяқталған бөлігін жекеленген атқару реті (қосалқы бағдарламалар) түрінде жазып алған орынды. Осы жағдайда олар кітапханаға енгізіледі және түрлі есептеулерде қолданылады. Бағдарламаны құрастыру кезінде кітапханаларда бар стандарттық қосалқы бағдарламаларды пайдалануға болады, өйткені бұл бағдарлама жасау бойынша жұмысты елеулі түрде ықшамдай алады. Әсіресе бұл қолданбалы бағдарламалар пакеттерінде кеңінен көрсетілген математикалық әдістерге жатады.



5.1-сурет. Идеалдық ығыстыру реакторының есептеу алгоритмінің блок-сызбанұсқасы

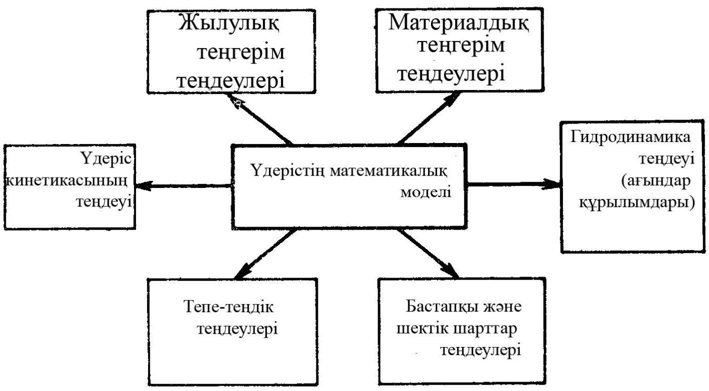
Бағдарламалау кезеңі әдетте бағдарлама сипаттауын құрастырумен аяқталады, мұнда барлық айнымалылар мен сәйкес келетін идентификаторлар, кіру мен шығу айнымалылары, ақпаратты кіргізу мен шығару реті көрсетіледі.

5.3. Математикалық модельдер тұрғызудың бұғаттық қағидасы

Математикалық модельдерді тұрғызу кезінде блоктық қағида кең қолданылады, мұның маңыз-мәні мынада, бұл қарастырылған үдерістің қайсыбір жағын бейнелейтін жекеленген қисынды аяқталған бұғаттардан тұратын модель. Мұндай бола алатын масса-берілісі кинетикасының бұғаты, гидродинамика бұғаты, фазалық тепе-теңдік бұғаты және тағы басқалар. Модельдер тұрғызудың бұғаттық қағидасы мүмкіндік береді: а) математикалық модель тұрғызудың жалпы мәселесін жекеленген қосалқы мәселелерге бөлуге және сонысымен оның шешімін ықшамдайды; ә) жасалған бұғаттарды басқа модельдерге пайдалануға; б) жаңартуға және қалғандарына тиіспей жекеленген бұғаттарды жаңаларымен ауыстыруға.

Үдерістің математикалық моделін ішкі жүйелер (блоктар-бұғаттар) жиынтығы түрінде көрсету жалпы математикалық сипаттауды жекеленген бұғаттардың математикалық сипаттаулардың жиынтығы ретінде көрсетуге мүмкіндік береді. Математикалық модельдің жалпы құрылымы 5.2-суретте бейнеленген түрді иелене алады.

Өз кезегінде жүйелік жақындауға негізделген, математикалық модельдер тұрғызудың бұғаттық қағидасын пайдалану, көптеген жағдайларда үдерістерді масштабтау мәселесін де қағидалы түрде шешуге мүмкіндік береді. Математикалық моделдеу тұрғысынан масштабтық ауысу, үдерістің құралғылық безендірілуін сипаттайтын геометриялық ауқымдар өзгеруі кезіндегі математикалық модель деформациясының өзіндей. Математикалық модельдер тұрғызудың бұғаттық қағидасын пайдалану кезінде геометриялық ауқымдардың үдеріс қасиеттеріне ықпалы тек бір ішкі жүйеде (бұғатта) – «гидродинамика» блогында ғана бейнеленеді. Сондықтан осы блокты жеткілікті сапалық және сандық қатынаста жеткілікті түзетілген математикалық сипаттаудың болуы кезінде, масштабтық ауысуды іске асыру мүмкіндігі болады.



5.2-сурет. Математикалық сипаттау үдерісінің көрсетілімі.

Қағидалы түрде математикалық модельдің әрбір блогы математикалық сипаттау бөлшектелуінің түрлі баспалдақтарын иелене алады. Модельдің барлық бұғаттарының кіру мен шығу айнымалыларының өзара сәйкестікте болуы ғана маңызды, бұл үдерістің математикалық модельдері теңдеулерінің тұйықталған жүйесін тұтастай алуға мүмкіндік береді. Бұғаттардың ішкі айнымалыларының құрамына қатысты, мұнда таңдаудың жеткілікті үлкен еркіндігі бар. Идеал жағдайда әрбір бұғаттағы математикалық сипаттау параметрлері тек заттардың физика-химиялық қасиеттері ғана болатын теңдеулерді қосуы керек. Алайда жекеленген бұғаттардың мұндай іргелі сипаттауын жекеленген құбылыстардың жеткіліксіз зерттелуі кезінде көптеген жағдайларда қазіргі кезде іске асыру мүмкін болмай жүр. Бұл, ережедегідей, бұғаттың математикалық сипаттауының тұтастай төтенше күрделіленуімен байланысқан, бұл одан басқа, нақтылы есептеу қиындықтарын шақыра алады. Сондықтан бұғаттық қағиданы әрбір бұғаттың математикалық сипаттауында қайсыбір деңгейде іс жүзінде қолдану кезінде оны бөлшектеуде эмпирикалық арақатынастарды пайдалануға тура келеді.

5.4. Техникалық алға басудағы және тану үдерісіндегі математикалық модельдеудің рөлі

Қазіргі ғылымды математикалық модельдеудің кең қолдануысыз көзге елестету мүмкін емес. Бұл әдістеменің маңыз-мәні бастапқы зерзатты оның «үлгісімен» – математикалық модельмен – ауыстырудан және компьютерлерде іске асатын есептеулік алгоритмдер көмегімен әрі қарай оқып білуден тұрады. Танудың, конструирлеудің, жобалаудың осы «үшінші әдісі» теорияның да, сондай-ақ эксперименттің де көптеген құндылықтарын өзіне үлестіреді. Зерзаттың (құбылыстың, үдерістің) өзімен емес, оның моделімен жұмыс істеу ауыртпақсыз, салыстырмалы тез және елеулі шығынсыз кез келген есті жағдайлардағы оның қасиеттерін және тәртібін зерттеу (теория артықшылығын) мүмкіндігін береді. Сол уақытта зерзаттардың модельдерімен жасалған есептеулік (компьютерлік, сылтауратулық, имитациондық) эксперименттер заманауи есептеулік әдістердің, информатиканың және техникалық саймандардың қуатына сүйене отырып, таза теориялық жақындаумен жетуге болмайтын, жеткілікті толықтықта, зерзаттарды егжей-тегжейлі және терең оқып білуге (эксперимент артықшылығы) мүмкіндік береді. Техникалық жасау және оларды басқарудан бастап, күрделі үнемдік пен әлеуметтік үдерістерді талдауға дейінгі барлық жаңа сфераларды қамти отырып, математикалық модельдеу әдістемесінің қарқынды дамуына таңырқамасқа шара жоқ.

Математикалық модельдеудің элементтері дәл ғылымдар бастауынан бастап пайдаланылды, кейбір есептеулер әдісі Ньютон және Эйлер сияқты ғылымның көрнекті кемеңгерлері есімін мадақтап алып жүреді, ал «алгоритм» сөзі ортағасырлық араб білімпазы әл-Хорезми есімінен шыққан. Бұл әдістеменің екінші «тууы» XX ғасырдың 40-жылдарының соңына – 50-жылдарының бас жағына келді және кем дегенде екі себеппен қалыптасты. Олардың біріншісі – ЭЕМ (компьютерлер) пайда болуы, қазіргі өлшемдер бойынша қарапайым болғанымен, ғалымдарды көлемі бойынша зор ескішілдік есептеу жұмысынан құтқарды. Екіншісі – теңдессіз әлеуметтік сұраныс – дәстүрлі әдістермен іске асырылуы мүмкін емес зымыранды-ядролық қалқан жасау бойынша ТМД мен АҚШ ұлттық бағдарламаларын орындау. Математикалық модельдеу бұл мәселені орындап шықты: ядролық жарылыстар және зымырандар мен серіктер ұшырылуы математикалық модельдер көмегімен ЭЕМ қойнауында алдын ала «іске асырылды» және содан кейін ғана тәжірибеде жүзеге асырылды. Бұл табыс әдістеменің әрі қарайғы жетісітігін анықтады, мұны қолданбай дамыған елдердегі бірде-бір ірі масштабтық технологиялық, экологиялық немесе үнемдік жоба енді шындап қарастырылмайды (айтылған дұрыс кейбір әлеуметті-саяси жобаларға қатысы бойынша да).

Қазір математикалық модельдеу, ақпараттық қоғам деп аталатын құрылымға «қыстырыла отырып», өз дамуының үшінші қағидалы түрде маңызды кезеңіне кіреді. Ақпаратты өңдеу, беру және сақтау құралдарының әсер ететін жақсаруы адамдық әрекетшіліктің түрлі сфераларының күрделіленуіндегі және өзара өтуіндегі әлемдік бетбұрыстарына жауап береді. Ақпараттық «қорларға» ие болмай барынша іріленетін шешімдер және әлемдік бірлестік алдында тұрған әртүрлірек мәселелер жайлы ойлауға да болмайды. Алайда ақпарат өзінше болғанымен талдау мен болжам үшін, шешімдер қабылдау және олардың орындалуын бақылау үшін аз дүние береді. Ақпараттық «шикізаттың» дайын «өнімге», яғни нақты білуге өңдеудің сенімді тәсілдері керек. Математикалық модельдеу әдістемесінің тарихының сендіретіні: ол, қоғамды ақпараттаудың тұтас үдерісінің ақпараттық технологиясының ақыл-ойлық ядросы бола алады және болуы керек.

Заманауи ғылыммен оқып білінетін техникалық, экологиялық, үнемдік және басқа да жүйелер әдеттегі теориялық әдістермен (қажет толықтықта және дәлдікте) зерттеуге берілмейді. Оларға жасалған тіке табиғи таза эксперимент қымбат, жиі не қауіпті, не жәй мүмкін емес, өйткені бұл жүйелердің көпшілігі «жалғыз дана» ғана болады. Олармен қатынаста қателер мен қате есептеулер бағасы жете алмастай жоғары. Сондықтан математикалық (кеңірек – ақпараттық) моделдеу ғылыми-техникалық үдерістің болмай қалмайтын құраушысы.

5.5. Зерттелетін жүйенің маңыз-мәнділік моделі

Математика шынайы зерзатқа тікелей емес, математикалық модельге қолданылады.

Шынайы зерзаттан бізді қызықтыратын және қандайда бір ғылым тілінде оның қайсыбір қасиеттерін қалыптастырамыз, басқаша айтқанда *механикалық*, не *физикалық*, не *биологиялық*, не *әлеуметтік* және соған ұқсас зерзаттар *моделін* тұрғызамыз; мұндай модельді маңыз-мәнділік дейді. Айқын көрінгені, тұрғызудың маңыздырақ кезеңі немесе математикалық модельді таңдау – бұл мүмкіндігі бойынша модельденетін зерзат жайлы анығырақ көрсетілім алу және жалған емес талқылауларға сүйенген оның маңыз-мәнділік моделін анықтау. Бұл кезеңге уақыт пен әрекеттерді аяуға болмайды, оған едәуір мөлшерде барлық зерттеу жетістігі тәуелді. Математикалық мәселені шешуге елеулі еңбек жұмсау аз болған жоқ, істің бұл жағына жеткіліксіз назар аударудан бекерге шығынданудың тиімділігі аз болып шықты.

Бұл кезең, әдетте құрауыштарының қасиеттеріне және олардың өзара әрекеттестігі сипатына зерттеу өткізу үшін маңызды зерттелуші зерзаттың құрылымын анықтауда қорытынды шығарады.

Жұмысшы гипотезалар, модель постулаттары. Маңыз-мәнділік модельді тұрғызу кезінде сәйкес келетін *гипотезалар* (айтылады сондай-ақ – *модель постулаттары* деп) да қалыптасады. Модельді елеулі ықшамдаушы әдістердің бірі, мәселе шешудің күтілетін қасиеттеріне жататын және оны зерттеу үдерісінде ұсынылатын *жұмысшы гипотезаларды ұсыну*. Мұндай гипотезалар, мысалы, ізделуші тәуелділіктің құрылымына жата алады, және егер олар математикалық мәселердің, есті ұқсастар мен басқа да ұтымды дәлелдердің, тәжірибелердің және дұрыс ойлаудың шынайы байымдауына сүйенсе, онда шешуші бола алады. Басқа жағынан бұл гипотезалар негізделмеген қорытындылар мүмкіндігін аша алады. Сондықтан жұмысшы гипотезаларды қолдану айқын түрде ұғынылуы керек, ал оларды қосудың себептеріне және әрі қарай негізделуіне байсалды назар аударылуы қажет.

Бұдан басқа, қандайда бір ғылымға модельді қосу, осы ғылымда қалыптасқан заңдар мен небір бекітулер қолданылуы мүмкіндігін береді. Табиғи түрде, мазмұндық модельді тұрғызу кезінде зерттелетін шынайы зерзаттың түрлі тектегі идеалды еместеріне, дұрыс еместеріне (әрине, бұл идеалды еместердің өздері зерттеу бұйымы болмауы керек) алаңдаймыз, оның ықшамдалған сызбанұсқалық сипаттауына өтеміз.

Мазмұндық модель негізінде сәйкес келетін теңдеулерді жазып аламыз немесе оны басқаша жалған математикалық тілге өткіземіз және сонысымен математикалық модельге өтеміз; модель тұрғызудың бірінші кезеңі осыған саяды. Ол маңызды түрде мәселе қоюдың қалыпты емес талқылануына және қарастырылған аймақтағы қажет жіктеуге сүйенеді.

Екінші кезең математикалық моделін оқып білуден құрылады, жәйлап айтқанда – алынған математикалық мәселені шешуден тұрады. Осы шешімнің әдісін таңдаймыз және оны іске асырамыз; бұған барлық қажет есептеулерді, соның ішінде ЭЕМ-дегілер де бар жүргізу кіреді. Бұл оқып білу математика жақтауында жүргізіледі, бірақ та мұнда бір маңызды ерекшелік бар. Математикалық модельдің барлық элементтері (бөліктікте, барлық қатысатын шамалар) сәйкес келетін шынайы элементтердің таңбалары сияқты болады.

Үшінші кезең – математикалық модель зерттеуі нәтижесінде түсіндіру (байымдау) кезеңі. Бұған басқа белгілі деректермен, бөліктікте эксперименталдық берілулермен және тағы басқалармен салыстыру нәтижесіне негізделген модель дұрыстығын (айтылатындай, *верификация* – латын сөздері *verus* «верус» – шынайы және *facio* «фацио» – жасаймын; яғни парапарлықты айқындау) бақылау кіреді.

Сипатталған кезеңдер өзара тығыз байланысқан, және оларды мүшелеу біршама дәрежеге дейін жасанды болады. Математикалық модель әдетте математикалық есеп шешудің болжамдалатын әдісіне бейімделуімен тұрғызылады.

Модельді елеулі ықшамдаушы әдістердің бірі болатын есеп шешудің күтілетін қасиеттеріне жататын және оны зерттеудің үдерісінде ұсынылатын *жұмыс істейтін гипотезаларды* ұсыну.

Маңызы аз емес орынға ие *жүйелілітехника* (үлкен жүйелер техникасы), күрделі жүйелерді жобалауды, жасауды, сынауды және кәдеге асыруды қамтитын ғылыми бағыт.

Зерттелетін жүйені талдау. Берілген зерзаттың қасиеттерін зерттеулер – бұл *талдау мәселелері*. Үдерістердің «тірі емес» табиғатында өтетін талдау кезінде жекеленген үдерістер арасындағы өзара байланыстарды ескеру маңызды қиындықтарды шақырмайды. Әлеуметті-үнемдік құбылыстар мен үдерістер талдауы кезінде басқа жағдай орын алады. Өзінің ішкі табиғаты бойынша әртүрлі үдерістер үлкен емес сипаттық уақыттардың өзінде-ақ маңызды түрде өзара байланысқан болып шығады. Бұл жағдайды ұғыну *жүйелік талдау*, *жүйелілік жақындау* түсініктері пайда болуын келтірді.

«Жүйе» – функционалды түрде өзара байланысқан шынайы немесе абстрактылы (дерексіз түсінігі бар) элементтердің жиынтығы. Жүйелер физикалық (шынайы машиналар) немесе абстрактылық (сызбанұсқалар, сандық модельдер, сызбалар және т. б.) бола алады.

Яғни параметрлердің кез келген аз өзгеруінде қарастырылушы зерзат шынында өзгереді.

Жүйелілік жақындау құраушылар мен себеп шарттардың көптеген санын, сондай-ақ берілген жүйені түзетін олардың өзара байланыстарын бір мезгілде анықтау және айқындау мақсатымен зерзатты жобалау талдауға және синтезге негізделген. Жүйелілік жақындаудың сайманы болатын жүйелік талдау.

Жүйелік талдау – мұндай зерттеу әдісінде, әрбір техникалық шешілімді басқа шешілімдермен тығыз байланыста қарастырған жөн. Және де талдау әр элементке жүргізіледі. Оның басты мәселесі – арнайы байланыстарды зерттеу және олардың заңдылықтарын анықтау.

Жүйелік талдау үшін қажет:

– жобалау зерзатын параметрлік сипаттау;

– зерттелуші зерзаттың құрылымдық сипатталуы;

– функционалдық сипаттау.

Жүйелік талдау – бұл зерттеулердің өте терең және кең шеңбері және де есептің тұрпаты мен жобалау кезеңіне тәуелділікте түрлі әдістермен: қисындық пен математикалық шешіледі. Жүйелілік талдауды ұйымдастыру мақсатымен мәселелер шешудің анықталған тізбектілігін қолдану орынды.

Маңыздылық модельдер және олардың иерархиясы. Күрделі жүйе (мұндай бола алатын полиграфиялық машиналар) ие иерархиялық құрылымға: элемент – ішкі жүйе – жүйе. Сәйкестеліініп машинаны жобалау да тұтасымен иерархиялық сипатқа ие. Жобалаудың иерархиялық қағидасы жобалау зерзаттарының иеархиясымен анықталады. Машина бірнеше ішкі жүйелерден тұрады. Жүйенің барлық элементтері қатаң өзара байланыстарда болады.

5.6. Математикалық модель, оның қасиеттері және математикалық модельдерге қойылатын талаптар

Қарастырылушылар мәселе үшін *математикалық модель* пішімі бойынша өзімен, қалыптасқан шеттік пен бастапқы шарттары бар қоршаған ортада зерзат тәртібін сипаттайтын, бөліктік туындылардағы дифференциалдық теңдеулер жүйесін көрсетеді. Есептеу машиналарының көмегімен шынайы технологиялық үдерістерді басқаруды автоматтандыру, үзіксіз өсетін көбінесе машиналар меншігіндегі мүмкіндіктеріне және сенімділігіне емес, технологиялық үдерісті немесе тұтасымен, немесе басым түсетін біреуімен, немесе бірнеше себепкерлік шарттармен теңестіруге (ұқсатуға) мүмкіндік беретін, шынайы өндірісі тұрғысынан сенімді жасалған модельдердің болуына тәуелді. Көптеген математикалық модельдерді (динамикалық теңдеулерді) іске асырудың қиыншылығы күйдің сәйкес келетін теңдеулерінің қатыспауымен байланысқан, ал олар бар болған кезде, осындай теңдеулердегі нақты коэффициенттер үшін физикалық константтардың қажет мәндерінің қатыспауымен байланысқан.

Математикалық модельдерге дәлдік, үнемдік және жан-жақтылық талаптары қойылады. *Математикалық модельдің дәлдігі* – модель көмегімен зерзат параметрлерінің болжамдалған мәндерінің осы параметрлердің шынайы мәндерімен сәйкес келуі дәрежесін бейнелейтін қасиет. *Математикалық модельдердің үнемділігі* бәрінен бұрын машиналық уақыттың шығындарымен бағаланады. Математикалық модель үнемділігінің көрсеткіші қызметін сондай-ақ онда қолданылатын ішкі параметрлер саны да атқара алады. Мұндай параметрлер неғұрлым көп болса, соғұрлым жәрдемдік жады да көп болады, сонан да параметрлердің сандық мәндері және олардың шашылуы жайлы мәліметтер алу үшін көп күш салу талап етіледі. Жоғары дәлдіктің, жан-жақтылықтың үлкен дәрежесі бір жағынан, және жоғары үнемділік – екінші жағынан, қарама-қайшылықты. Модельде үдерістердің түрлі заңдылықтары бөлшектелінген сайын, модельдің дәліректілігі мен жан-жақтылығы арта түседі, және де есептеулердің талап етілетін көлемі мен пайдаланылатын параметрлерінің саны көбейеді.

Математикалық модельдеу технологиясының негізгі кезеңдері. Математикалық модельдеу үш *негізгі кезеңді* орындауды білдіреді:

– зерзаттың математикалық моделін қалыптастыру, бұл барлармен немесе болжамдалатын эксперименталдық мағлұматтармен салыстыруға келетіндей болуы керек, бұған бастапқы ақпараттың жеткіліксізі кезінде мұндай модельді тұрғызу әдістерін жасау қосылады;

– математикалық мәселеге сай келетін шешімдер әдісін жасау және оларды ЭЕМ үшін бағдарламаларда іске асыру;

– қабылданылған модель шеңберінде математикалық экспериментті (ЭЕМ дегі есептеулер топтамасы), сондай-ақ келесі өңдеуді және оның нәтижелерін кері байланыстармен талдауды өткізу.

Мазмұндық модельді қалыптастыру. Модельделінетін үдеріс әдетте нақтылы нышандар пішімінде жазылады, сондықтан мұндай жазу жайлы *қалыптасқан* модель жайлы сияқты айтады. Қалыптасқан модельдер арасынан жалған қисын заңдары (сызбанұсқаларды модельдеу) бойынша тұрғызылған қисындық модельдер және математикалық (дұрысырақ үнемді-математикалық) модельдер (мысалы, орналастыру моделі, көліктік мәселе) ажыратылады.

5.7. Зерттемелеудің тізбектілігі және жүйе модельдерінің машиналық іске асырылуы

Шынайы құбылыстарды математикалық әдістермен оқып білу – жалпы заңдылықтарға бағынатын тану үдерісі түрінің бірі. Кейбір шынайы үдерістің математикалық моделі – бұл осы үдерістің сипаттамалары арасында қалыптасқан байланыстар, қатынастар, тәуелділіктер жиынтығы.

Математикалық модельге қатысатын барлық шамаларды, *ішкіге* және *сыртқыға* бөлу қолайлы. Модельдің ішкі шамалары – бұл модельдің байланыстары күшін анықтауға жататын үдерісті сипаттайтын шамалар. Модельдің сыртқы шамалары – бұл берілген модельдің шеңберінде белгілі болып саналатын шамалар. Модель *тұйықталған* болады, егер оған қатысатын шамалар ішкіге және сыртқыға бөлінген болса, барлық ішкі шамалар берілген болса, онда модельдің арақатынастарын пайдаланып, барлық ішкі шамаларды есептеуге болады.

Модельдеу жайты екі кезеңнен тұрады: бірінші кезең қарастырылушы үдерісті сипаттайтын шамаларды таңдауға тұжырым жасайды; екінші кезең: – олардың арасындағы арақатынастарды жазады. Әрине, бұл екі кезең бір-бірімен үзілмейтіндей байланысқан және модельдеудің тұтас үдерісінің екі бөлінбейтін жақтары болады.

Модельдерді алгоритмдеу және оның машиналық іске асырылуы. Математикалық сипаттау құрастырылған соң және қажеттілігі жағдайында сәйкес келетін бастапқы мен шекаралық жағдайлар қойылғанынан кейін шешу әдісін таңдау қажет, *алгоритм* жасалынады және математикалық сипаттау теңдеулерінің жүйесін шешудің бағдарламасы құрастырылады.

Модельдеу нәтижелерін алу, түсіндірмелеу және модельдеу нәтижелерін құжаттау. Солай, егер зерттелуші зерзаттың қайсыбір элементі бұқаралық өндірістің бұйымы болса және бізді қызықтыратын қасиеттерге олардың номиналдық мәндерінен параметрлердің ауытқулары көрінерліктей әсер етсе, онда бұл параметрлер жиі кездейсоқ шамалар деп саналады.

Кездейсоқ функциялар айқындалады, мысалы, қандайда бір ғимаратқа жел әсерін, шуыл реңіндегі дыбыстарды, кедір-бұдырлы беттерді, сұйықтықтың турбуленттік қозғалыстарын және тағы басқаларды қарастырған кезде.

Ықтималдық модельдерді ықтималдықтар теориясы әдістерінің көмегімен оқып біледі. Өкінішке орай, жеткілікті жиі кездесетіндер, мысалы, кездейсоқ құрауыштардың (математикалық күтулер және кездейсоқ шамалар дисперсиясы, әсіресе, соңғылардың таралу заңдары, сондай-ақ кездейсоқ функциялардың ұқсас сипаттамалары) ықтималдық сипаттамалары өте биік емес дәлдікпен белгілі немесе мүлдем белгісіз болып шығады, яғни модель өнімділік талабын қанағаттандырмайды. Осындай сипаттамаларды анықтауға математикалық статистиканың әдістері бағытталған, бірақ бұл әдістерді тиімді пайдаланудың қисыны өне бойы бола бермейді. Сондықтан ықтималдық модельдерді тұрғызу кезінде мұндай сипаттамаларға едәуір назар бөлу керек. Егер олар қажет дәлдікпен анықтауға көнбесе, бастапқы мағлұматтарды білудегі кемшіліктерге қатысты тұрақтырақ модельді іздеуге болады. Мысалы, кейде қарастырылушы параметрлердің ең үлкен ауытқулары бойынша зерттеу және есептеу жүргізіледі.

Мысал келтіреміз. x – Коши есебінің шешімі

$$\frac{dx}{dt} + a(t;\omega) = 0 \qquad (0 \le t < \infty), \qquad x(0) = 1,$$

мұндағы a – кездейсоқ функция (бұл ω айнымалысы, ықтималдықтар теориясында қабылданылғандай, элементарлық нәтижеге ие). Сонда және $x = x$ (t; ω) – кездейсоқ функция, мұның сипаттамасы a рактеристик функциясының сипаттамаларына елеулі түрде тәуелді. Бірақ a функциясының сипаттамаларын жете білу мүмкіндігі жоқ болсын, тек әрқашан $1 \le a \le 2$ екені белгілі. Сонда, шеткі мүмкін мәндерді қоя отырып, шешудің кепілді бағасын аламыз: $e^{-2t} \le x \le e^{-t}$; осыдан, мысалы, $t < \infty$ кезінде экспоненциалдық жылдықпен x (t; ω) $\to 0$ шығады.

Математикалық есепті шеше отырып, оны талдау керек, оның шынайы мағынасы ұғынылып, қорытынды шығарылады – математикалық модель зерттелуі нәтижесіндегі *интерпретация* (түсіндіру) осы.

МемСтандарт ЕСКД 2.103–68 құжаттардың жасалуы кезеңдерін жарнамалайды және олардың мазмұнын анықтайды. МемСтандартқа сай жобалық зерттемелердің іске асырылуының тізбектілігі: техникалық тапсырма (ТТ); техникалық ұсыныс (ТҰ); нобайлық (эскиздік) жоба; техникалық жоба (Техн.Ж); жұмыс істейтін құжаттау.

Бұл құжаттардың жиынтығы болатын *жобалық құжаттау*, бұл өзіне жобаланатын зерзаттың құрамы мен құрылысын анықтайтын, графиктік пен мәтіндік құжаттарды енгізеді, бұл оны жасауға немесе даярлауға, бақылауға, қабылдауға, кәдеге асыруға және жөндеуге қажет.

ТТ – барлық инженерлік зерттемелерге бастапқы құжат. ТТ ғылыми зерттеулер, осы аймақтағы ғылыми жорамалдаулар және сұраныс берушінің бастапқы талаптары негізінде жасалады.

ТҰ – алдын ала қарастырылған жағдайда техникалық тапсырмамен жасалынады. Оны жобалау зерзатына қосымшаланған немесе дәлдіктелген, техникалық тапсырмада көрсетіле алмайтын, талаптарды айқындау мақсатымен жасайды, өйткені ол алдын ала конструкторлық зерттемені және шешімдердің түрлі нұсқалардың талдауын талап етеді. ТҰ-ға кіретін келесі құжаттар: жалпы түрінің сызбасы, техникалық ұсыныстың мәлімет тізімі, түсініктеме хаты. Бұдан басқа, техникалық ұсынысқа МемСтандартқа сай конструкторлық құжаттар да кіреді.

Нобайлық жоба, МемСтандарт 2.119–735, – бұйым жұмысының құрылымы және қағидасы жайлы толық көрсетілімді беретін, құрамында қағидалы конструкторлық шешілімдер, сондай-ақ жасалынатын жабдықтың тағайындалуын анықтайтын берілулері, негізгі параметрлері және сыртқы көрсеткіштерінің көлемдері болады.

Техн. Ж – жобаланатын жабдықтың құрылымы жайлы толық көрсетілімді беретін соңғы техникалық шешілімдер құрамында бар, конструкторлық құжаттардың жиынтығы және жұмыс істейтін құжаттау жасауға арналған әуелгі берілулер (МемСтандарт ЕСКД 2.120–73). Жұмыстарының және құжаттарының негізгі мазмұны, нобайлық жобаны жасаудағыдай, алайда талқылауы мен бағалауы едәуір тереңірек.

Техникалық жоба тәжірибелік үлгінің, қондырғылық топтамалардың, қалыптасқан топтамалық өндірістің жұмысшы құжаттарын жасауға негіз болады.

Жұмыс істейтін құжаттау жалпы қабылданылған тәжірибеге сай, даярлау және зауытта сынаулар нәтижесі бойынша конструкторлық құжаттар жиынтығын реттеу жолымен жасалынады.

5.8. Жүйелерді модельдеу және бағдарламалау тілдері

Модельдеу жүйелер теориясын негізге алған үдерістерді жобалайтын әдістердің бірі. Модель – шынайы зерзат жайлы ықшамдалған көрсетілім, осы зерзаттың ең маңызды сапасын және өзара байланысын бейнелейді. Модельмен жұмыс жеткілікті түрде күрделі. Алдымен, модельденуші зерзат (технологиялық үдеріс) жайлы мағлұматтарға негізделіп отырып, бастапқы модель жасалынады, зерзатты дәлірек сипаттай алатындай етіліп, содан кейін ол жақсартылады. Мұнда жүйелер теориясынан белгілі аналогтар әдісі пайдаланылады және модельдер бойынша эксперименталдық есептерді жүргізеді.

Сапалы модельдеудің алғы шарты болатын модельденуші үдерісті талдау –кибернетикалық мағынада жүйелік талдау. Оның мақсаты – үдерістің объективтік сипаттамаларын анықтаудан тұрады. Мұнда өндірістің сыртқы әлеммен байланысы зерттелуі тиіс, яғни басқаша айтқанда, макроталдау орындалады. Бір уақытта ішкі өндірістік байланыстар, яғни өндірісті ұйымдастыру (оның құрылымы) мен технологиялық үдеріс (функционалдық байланыстар) зерттеледі. Бұл микроталдау затын құрайды. Аналитикалық зерттеулер өткізілгенінен кейін қадамнан кейінгі қадаммен модель қалыптасылуы басталады мынадай тізбектілікте: мәселе қойылуы; мақсатты анықтау жолымен оның бағытын (оңтайландыру критерийін) және мәселені шешуге қойылатын шектеулерді таңдау; модельдің екі кезеңдік жасалуы; шешу алгоритмін жасау (есептеулер тізбектілігі); модель бойынша есептеулер өткізу; модельдеу нәтижелерінің тәжірибелік мағлұматтарға сәйкес келуін тексеру; дәлдігін тексеру мақсатымен модельді реттеу.

Имитациялық модельдеу тілдеріне салыстырмалы талдау. Имитациялық модельдеу көмегімен модельдің қаншалықты парапарлығын бағалауға, басқарудың қайсыбір нұсқасында үдеріс қалай ағатынын түсінуге болады, оны басқарудың «парасаттылығына» қатысты кепілдемені қалыптастыру, басқару сапасының және тағы басқалардың критерийлерін қалыптастыруға тырысу. Машиналық имитация жүйелік талдаудың маңыздырақ сайманы бола бастады. Ол өнеркәсіпте, үнемдеуде, көлікте, қызмет ету мәселелерінде кеңірек қолданыс тапты.

Өзінің ішкі табиғаты бойынша әртүрлі үдерістер шағын сипаттық уақыттарда елеулі түрде өзара байланысқан болып шықты. Көптеген тәжірибелік керектіктер жеткілікті үлкен уақыттарда әлеуметті-үнемдік үдерістерді қарастыруды келтіреді. Бұл жағдайды ұғыну жүйелік талдау түсінігінің пайда болуын келтірді.

Кез келген ғылымда әрқашан шындықтың модельдік, жуықталған сипаттауымен боламыз, бұл сипаттау оның қайсыбір ерекшеліктерін нақты дәлдікпен ғана бейнелейді. Бұл модельдік сипаттаулар қандайда бір тілді пайдаланады. Егер біз математика тілін пайдалансақ, онда математикалық модельдер жайлы айтамыз. Бұл тілдің тамаша ерекшелігі болатыны сол, ол модельді талдау үшін, яғни оның ішіне шифрланып тасталған ақпарат кодталуын және қазіргі математикалық құралғының барлық қуатын ашуды пайдалануға мүмкіндік береді.

Бағдарламалау тілі, берілулерді (ақпаратты) және оларды сандық есептеу машиналарына (СЕМ) өңдеудің алгоритмін (бағдарламасын) суреттеуге арналған жалған тіл. Бағдарламалау тіліне мысалдар: алгол, кобол, фортран, ПЛ-1 және басқалар.

Модельдеу тілін іске асыруға мысалдар. Бірінші мысалда ең қарпайымырақ модельдердің бірі халық саны өсімін қарастырамыз. Бірнеше ондаған жылдар ретіндегі уақыт ағымында, бірнеше миллион адам ретіндегі халық санымен кейбір аймақта жылдар бойынша, халық саны өзгеруін күні бұрын болжауды талап етудің қандайда бір іс жүзінде қажеттілігін жорамалдаймыз. Осындай іс жүзіндегі қажеттіктерді көзге елестету қиын емес. Мысалы, халық шаруашылығы дамуын ұзақ мерзімге жоспарлау кезінде берілген аймақтың еңбек қорларын және қоректену өнімдеріндегі оның қажеттігін және тағы басқаларды білу қажет. Жыл ішіндегі халық өсімі отбасыларындағы балалардың орташа санына тәуелді және жыл ішінде бірнеше пайыздардан аса алмайды.

Зерттелуші үдерісте уақыт бойынша орташалаудың сипаттық масштабын шектейтін себепкерлік шарттардың бірі, яғни сан мәндерін жәрдемдейтін табиғи дәлдік болатын бар өлшеу техникасы. Модель тұрғызуды тудырған тәжірибелік керектіктер, бар өлшеу техникасының мүмкіндіктері, уақыт бойынша орталандырудың сипаттық параметрі, модельдің шамаларын жәрдемдеуге керек дәлдік, модельдің уақыттық қадамы – осы жағдайлардың бәрі өзара байланысқан және өзара келісімге келтірілген.

Моделдеу бағдарламаларының пакеттері. Егер белгілі мақсатқа арналған функция сызықтық болса, барлық теңдеулер мен теңсіздіктер сияқты олардың байланыстырушы аргументтері тең, сонда біз *сызықтық бағдарламалау* [математикалық бағдарламалау бөлімдерінің бірі, мұндағы зерттелетін функция сызықты (1-ші дәрежелі) және ол сызықтық теңдеулермен, теңсіздіктермен берілген жиынтықтарда берілген] мәселесін иеленеміз. ЭЕМ үшін стандарттық бағдарламалар бар, бұлар мақсатты функциясы бірнеше жүздеген аргументтерді иеленгеніндегі есептерді де шешуге мүмкіндік береді. Мысалы, *симплекс-әдіс* – сызықтық бағдарламалау есептерін шешудің кең тараған тәсілдерінің бірі, мұны қалыптастыру мақсатты функцияны, шектеулерді және теріс емес айнымалылардың шартын өзіне қосады (техника-үнемдік есеп үшін). Симплекс – n өлшеулердің берілген санынан құрылған қарапайым дөңес көпжақтылық. Сондай-ақ есеп шешімінің белгілі алгоритмі сызықтық *бүтінсандық бағдарламалау*, яғни оның мақсатты функциясының аргументтері өзінің мағынасы бойынша тек бүтін санды мәндерді ғана қабылдай алатын мәселелер. Үзіктік уақыты бар есеп шешіиі үшін *динамикалық бағдармалау әдісі* қолданылады.

Әдебиет: 2[12-23], 7, 11

Бақылау сұрақтары:

1. Зерзаттың математикалық сипатталуын құрастыру.
2. Шешу әдісін таңдау және оны шешу алгоритмі мен модельдейтін бағдарлама түрінде іске асыру.
3. Математикалық модельдер тұрғызудың блоктық қағидасы.
4. Техникалық алға басудағы және тану үдерісіндегі математикалық модельдеудің рөлі.
5. Зерттелетін жүйенің маңыз-мәнділік моделі және оның иерархиясы.
6. Зерттелетін жүйені талдау.
7. Жұмысшы гипотезалар, модель постулаттары.
8. Математикалық модель, оның қасиеттері және математикалық модельдерге қойылатын талаптар.
9. Математикалық модельдеу технологиясының негізгі кезеңдері.
10. Маңыз-мәнділік модельді формалдау.
11. Зерттемелеудің тізбектілігі және жүйелер модельдерінің машиналық іске асырылуы.
12. Модельдерді алгоритмдеу және оның машиналық іске асырылуы.
13. Модельдеу нәтижелерін алу, түсіндірмелеу және құжаттау.

14. Жүйелерді модельдеу және бағдарламалаудың тілдері.
15. Имитациялық модельдеу тілдеріне салыстырмалы талдау.
16. Модельдеу тілін іске асыруға мысалдар.
17. Модельдеу бағдармаларының пакеттері.

6. ПАРАМЕТРЛЕРДІҢ ТЕҢЕСТІРІЛУІ ЖӘНЕ МОДЕЛЬДЕРДІҢ ПАРАПАРЛЫҒЫН БАСҚАРУ

Зерзаттың математикалық сипаттауын теңестіру үдерістің парапар математикалық моделін тұрғызудағы негізгі кезең болады және содан да өзімен химия-технологиялық үдерістердің математикалық модельделуінің орталық мәселелерінің бірін көрсетеді. Белгілеп өткендей, мұндай үдерістердің көпшілігі өзімен кеңістікте және уақытта таралған көпфазалы көпқұрауыштық ортаны көрсетеді. Бұл үдерістердің маңызды ерекшелігі болатын, масса- және жылутасымалы үдерістеріне, құралғы ішіндегі гидродинамикалық жағдайдың стохастикалық ерекшеліктерінің қабаттасуымен, анықталатын олардың детерминирленген-стохастикалық табиғаты. Осының нәтижесі ретінде, математикалық модельдердің параметрлері өндіріс өтуінің стохастикалық ерекшеліктерін бейнелейді және статистикалық әдістермен анықталады.

Қазіргі уақытта математикалық модельдердің параметрлері бойынша сызықтықтарды бағалау теориясы молырақ жасалған. Алайда химия-технологиялық үдерістер модельдерінің көпшілігі параметрлер бойынша сызықтық емес, бұл олардың теңестірілуі мәселесін шешкен кезде едәуір қиындықтарды тудырады. Сондықтан сызықтық емес модельдерді теңестіру жиі не жуықталған бағалар көмегімен, не химия-технологиялық үдерістің бастапқы моделін линеаризациялау жолымен жүргізіледі. Бұл тарауда теңестірілудің сызықтық та, сызықтық еместік те математикалық модельдерінің әдістері қарастырылады.

Теңестіру мәселесі белгісіз параметрлермен бағалануымен қатар химия-технологиялық үдерістің айнымалы күйінің моделі бойынша есептелгенмен байқалатын (эксперименталдық) мәндермен салыстырылып түсіндіріледі, содан да бұл тарауда шынайы зерзаттың моделіне сәйкестіруді (парапарлауды) қалыптастыратын әдістер де қарастырылады.

6.1. Кездейсоқ үдерістің сандық сипаттамаларын статистикалық бағалау

Мәселенің келесі жалпы қойылымын қарастырамыз. Кейбір кездейсоқ экспериментте кездейсоқ шама X байқалса, мұның таралу функциясы Θ параметріне тәуелді. Параметрдің мәні белгісіз және анықтауды қажет етеді. Бұл үшін белгісіз параметр Θ-ге қатысты ақпарат көзі болатын байқалған ($x_1, x_2, ... x_n$) шаманың біршама көлемінің кездейсоқ іріктемесі алынады.

($x_1, x_2, ... x_n$) байқалуының тізбектілігін $f(x, \theta)$ таралуы тығыздығының бірдей функциясы бар n тәуелсіз кездейсоқ шамалар ретінде көрсетуге болады. Сонда іріктеме ($x_1, x_2, ... x_n$) n-өлшемдік кездейсоқ шаманың кездейсоқ шамасы болады, мұның таралу тығыздығының функциясы

$$f(x_1, x_2, ... x_n; \theta) = f(x_1; \theta)\, f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta), \qquad (6.1)$$

шынға ұқсастық функция деп аталады.

Тек байқау нәтижелеріне $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тәуелді функцияны *статистикалық (іріктеулік сипаттама)* деп атайды:

$$Q = \psi(x_1, x_2, ... x_n). \qquad (6.2)$$

Осыдан шығатыны, статистика өзімен шындыққа ұқсас функциямен, яғни, кездейсоқ шаманың таралу заңымен анықталатын, таралу заңының кездейсоқ шамасын көрсететіні.

Іріктеулік сипаттама таралуының заңдары. Іріктеулік сипаттама таралуы заңдарын қарастырудан бұрын, қосымша маңызды түсінік енгіземіз.

X шамасының *$m_x(t)$ сипаттамалық функциясы* деп t аргументін тәуелді e^{itx} кездейсоқ функциясын математикалық тосу деп атайды, яғни

$$m_x(t) = Me^{itx}, \qquad (6.3)$$

мұндағы t – еркін алынған шынайы сан.

Анықтамасына сай ықтималдық тығыздығы $f(x)$ бар, үзіксіз кездейсоқ шама дегеніміз

$$m_x(t)= \int_0^b e^{itx} f(x)dx, \qquad (6.4)$$

мұндағы (a, b) – кездейсоқ шама X-тың өзгеру интервалы.

Мысалы, *сплайн* – үзімді-полимиалдық функция, мұның үзіктерінің қабысуы нүктелерінде оның өзі және туындыларының нақты сандары үшін үзіксіздік жағдайлары қанағаттанады.

Енді іріктемелік сипаттамалардың дәл таралуын, яғни кез келген n кезінде дұрыс, $Q(x_1, x_2, ... x_n)$ статистикасының таралуы заңдарын қарастырамыз. $F(x)$ таралу функциясы бар, бірөлшемдік негізгі жиынтықтан көлемі n іріктеме бар деп болжаймыз және $Q(x_1, x_2, ... x_n)$ статистикасының таралу заңын анықтау талап етіледі. Бұл мәселе, бірдей $F(x)$ таралу функциясы бар, X_1, X_2, X_n тәуелсіз кездейсоқ шамалардың n-інен тұратын, $Q(x_1, x_2, ... x_n)$ функциясының таралуы заңын іздеп табуға тіреледі.

Теория жүзінде, егер Ғ пен Q функциялары берілген болса, онда әрқашанда бір шешімі болатыны дәлелденген. Алайда математикалық статистиканың қазіргі күйі кезінде қабылданылатын дәл шешімді алу салыстырмалы түрде тек сирек жағдайларда ғана мүмкін болады. Бөліктік жағдайда ғана, қалыпты негізгі жиынтықтан іріктеме болған кезде, жеткілікті толық нәтижелер алынды. Дәл осы жағдайды әрі қарай қарастырамыз.

Егер i = 1, 2, …, k үшін X_1, X_2, X_n – тәуелсіз, мөлшерленген қалыпты таралған кездейсоқ шамалар $N(0, 1)$, яғни $MX_i = 0$ және $DX_i = 1$ болса, онда кездейсоқ шама

$$U^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \qquad (6.5)$$

k еркін дәрежелері бар χ^2 таралымды иеленеді, мұндағы k – (6.5) өрнегіндегі тәуелсіз қосылғыштар санын сипаттайтын χ^2 таралымының жалғыз параметрі.

χ^2 таралымы ықтималдықтары тығыздығының түрі

$$f(u^2) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})}(u^2)^{k/2-1}e^{u^2/2}, \qquad (6.6)$$

мұндағы $\Gamma(\frac{k}{2})$ – гамма-функция, мұны анықтайтын тепе-теңдік

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\text{, бұл } z > 0 \text{ үшін.} \qquad (6.7)$$

Белгілейтініміз, U^2 кездейсоқ шамасының математикалық сипаттауы k еркін дәрежелер санына, ал дисперсия – еркін дәрежелердің екі еселенген санына тең екені, яғни

$$MU^2 = k,\ DU^2 = 2k. \qquad (6.8)$$

χ^2-таралымына ие статистиканы қарастырамыз. Таралудың берілген заңымен іріктемелік дисперсияның таралуы тығыз байланысқан $S^2 = S^2(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Егер қалыпты таралған басшы жиынтықтың математикалық сипаттауы белгілі ($MX = \mu$) болса, онда іріктемелік дисперсия S_*^2 мына өрнекпен анықталады

$$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2. \qquad (6.9)$$

Сонда статистика

$$\chi_*^2 = \frac{nS_*^2}{\sigma^2} \qquad (6.10)$$

n еркін дәрежелері бар χ^2-таралымды иеленетін болады. Шынында, (6.9)-ды (6.10)-ға енгізіп, аламыз

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i - \mu}{\sigma})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \qquad (6.11)$$

Іріктеу түзілуі шартынан шығатыны, $y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ – тәуелсіз мөлшерленген кездейсоқ шамалар N (O, 1). Сонда χ_*^2 кездейсоқ шамасының анықтамасына сай n еркін дәрежелері бар χ^2-таралымды иеленеді, анықтау талабы осы еді.

Егер кездейсоқ шаманың математикалық сипаттауы бұрынырақ белгісіз болса, онда іріктемелік дисперсия S^2 мына түрде анықталады

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (6.12)$$

мұндағы $\bar{x}$ — x_i кездейсоқ шамасының орташа арифметикалығы. Бұл жағдайдағы $n - 1$ еркін дәрежелері бар χ^2–таралымының ие болатын статистикасы

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}. \qquad (6.13)$$

Іс жүзінде кездейсоқ шаманың орташа шаршылық ауытқуы, ережедегідей, белгісіз. Осыған байланысты, σ-ға тәуелсіз, x орташаның таралуы заңын анықтайтын мәселе туындайды, мұны шеше алған ағылшындық статист Стьюдент. Стьюдент таралымы параметрлерді статистикалық бағалау теориясында және гипотезалардың статистикалық тексерілуінде өте кең қолданыс табады. Оның анықтамасын береміз.

Егер кездейсоқ шама Z мөлшерленген қалыпты таралымды N (0, 1) иеленсе, ал шама U^2 – k еркін дәрежелері бар χ^2 таралым, және де Z пен U өзара тәуелсіз болса, онда сөз болатын кездейсоқ шама

$$\text{T} = \frac{Z}{U}\sqrt{k} \qquad (6.14)$$

k еркін дәрежелері бар *Стьюдент таралымына (t-таралым)* ие.

Стьюдент таралымына ие кездейсоқ шаманың ықтималдықтарының тығыздығы, өрнектелетін формула

$$t_k(t) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{(\frac{t^2}{k}+1)\frac{k+1}{2}} \; . \qquad (6.15)$$

Стьюдент таралымына ие статистикаға мысалды қарастырамыз.

$N(\mu, \sigma)$ таралымының қалыпты заңы бар X басшы жиынтықтан көлемі n кездейсоқ іріктеме алынды делік. Сонда статистика

$$\text{T} = \frac{x-\mu}{S}\sqrt{n-1} \qquad (6.16)$$

n – 1 еркін дәрежелері бар Стьюдент таралымын иеленеді.

Қарастырылған таралымдармен қатар дисперсиондық талдауда F-таралымы маңызды рөл атқарады. Бұл таралымды екі іріктемелік дисперсиялық қатынасты ағылшындық статист Р. Фишер зерттеді. Бұған анықтама береміз.

Егер U_1^2 мен U_2^2 – сәйкестелген k_1 мен k_2 еркін дәрежелері бар χ^2 таралымына ие тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда сөз болатын кездейсоқ шама

$$F = \frac{U_1^2}{U_2^2}\frac{k_2}{k_1} \qquad (6.17)$$

k_1 мен k_2 еркін дәрежелері бар *Фишер таралымына (F-таралым)* ие, және де $U_1^2 \geq U_2^2$.

k_1 мен k_2 еркін дәрежелері бар F-таралымы ықтималдықтарының тығыздығы анықталатын тепе-теңдік

$$\varphi(f)=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot\frac{f^{\frac{k_1}{2}-1}}{(f+1)\frac{k_1+k_2}{2}}\quad (f>0). \tag{6.18}$$

Бұл асимметриялық таралым; оның ықтималдықтары тығыздығының графигі 6.1-суретте бейнеленген.

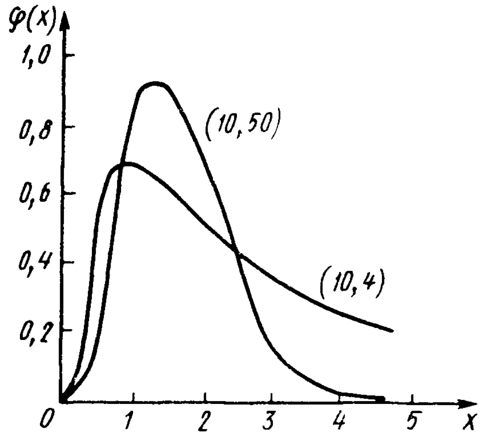
F-таралымының кестелері бар, бұлар a ықтималдықтарының түрлі мәндері үшін және f_{a} мәндерімен k_1 мен k_2 шамаларын үйлестіруге тұрғызылған, бұлар үшін дұрыс болатын тепе-теңдік $P\,(F>f_{\text{a}})=a$.

Іріктемелік дисперсияны қарастырамыз

$$\widehat{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \tag{6.19}$$

Көрсететініміз, егер $\widehat{S}_1^2$ мен $\widehat{S}_2^2$ – тең σ орташашаршылық ауытқулары бар X пен Y қалыпты басшы жиынтықтардан алынған екі тәуелсіз көлемдері n_1 мен n_2 іріктемелік дисперсиялар болса, онда статистика

$$F=\frac{\widehat{S}_1^2}{\widehat{S}_2^2} \tag{6.20}$$



6.1-сурет. Фишер таралымы (F-таралымы) тығыздығының сипаттық түрі, $\text{k}_1=10$, $\text{k}_2=50$ және $\text{k}_1=10$, $\text{k}_2=4$ еркін дәрежелері саны үшін

n_1-1 мен n_2-1 еркін дәрежелері бар Фишер таралымына ие, мұнда $\widehat{S}_1^2>\widehat{S}_2^2$.

(6.13)-ке сай іріктемелік сипаттамалар $\chi_1^2=\frac{(n_1-1)\widehat{S}_1^2}{\sigma^2}$ және $\chi_1^2=\frac{(n_2-1)\widehat{S}_2^2}{\sigma^2}$ сәйкестелінген n_1-1 мен n_2-1 еркін дәрежелері бар χ^2 таралымға ие. Іріктеме шарты бойынша χ_1^2 мен χ_2^2 тәуелді еместер. Сонда F-таралымының анықтамасына сай статистика

$$F=\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}\frac{n_2-1}{n_1-1}=\frac{\widehat{S}_1^2}{\widehat{S}_2^2} \tag{6.21}$$

F-таралымындағы еркін дәрежелер саны n_1-1 және n_2-1.

Параметрлерді статистикалық бағалаудың түрлері. $F(x,\ \theta)$ функционалдық түрі белгілі таралу заңымен X негізгі жиынтықтан $x_1,\ x_2,\ ....\ x_n$ іріктеме алынды деп, болжаймыз, мұның нәтижелері бойынша θ таралуының белгісіз параметрін (жеңілдік үшін – жалғыз ғана) бағалау талап етіледі. $\Theta_n^*(x_1,$

x_2, ... x_n) байқаулары нәтижелерінен функциялардың шексіз саны әрқашан болады, бұларды Θ параметрін бағалаушы ретінде ұсынуға болады. Сұрақ туындайды: Θ_n^* функциясы жақсы баға деп саналуы үшін, қандай қасиеттерді иеленуі керек? $F(x, \theta)$ таралуы заңымен x_1, x_2, ... x_n тәуелсіз кездейсоқ шамаларының әрқайсысын жүйенің байқалған мәндері ретінде x_1, x_2, ... x_n–ді қарастыра отырып, (x_1, x_2, ... x_n) кездейсоқ шамасына ие боламыз, мұның таралу заңы Θ параметріне тәуелді. Сондықтан бағалау ретінде оның жекеленген мәндерін емес, оның мәндерінің сынаулардың үлкен топтамасына таралуын, яғни бағалау таралуы заңын қарастырған жөн. $\theta_n^*(x_1, x_2, ... x_n)$ шамасының θ-ға жақын болуы үшін, Θ-ға қатысты θ_n^* кездейсоқ шамасының шашырауы мүмкіндігіше аз болуы талап етілетіні айқын көрінеді. Сонымен, ең үздік баға ең кіші мүмкін дисперсияны иеленуі керек. Бұл, бағалауға негізгі талап.

Статистикалық бағалау теориясы бағалаудың екі негізгі түрін қарастырады: нүктелік және интервалдық.

Нүктелік бағалау деп $\theta_n^*(x_1, x_2, ... x_n)$ байқалуы нәтижелерінің біршама функциясы аталады, мұның берілген жағдайлардағы мәніне негізгі жиынтықтың Θ параметрінің мәніне барынша жақынырақ мән қабылданады.

Алайда үлкен емес көлемді іріктеуде нүктелік бағалау Θ_n^* параметрдің шынайы мәнінен едәуір ерекшелене алады, яғни добал қателерді келтіреді. Сондықтан аз іріктеме жағдайында интервалдық бағалау жиі қолданылады.

Интервалдық бағалау деп іріктеме нәтижесі бойынша анықталатын сандық интервал (Θ_1^*, Θ_2^*) аталады, бұған қатысты нақты, 1-ге жақын ықтималдықпен, ол негізгі жиынтықтың бағалайтын параметрінің сан мәнін құрамында ұстайды деп, бекітуге болады.

6.2. Модельдердің параметрлік теңестірілуі

Параметрлердің нүктелік бағалауын табу үшін ең кіші шаршылар және ең үлкен шындыққа ұқсас әдістерін қолдану. Эксперименталдық не эксперименталды-аналитикалық әдіс көмегімен тұрғызылған математикалық модельдер құрамында белгісіз константтар (параметрлер) болады, бұлардың сан мәндері эксперименталдық мағлұматтар бойынша анықталады. Егер қолданылатын модельдер ізделуші параметрлерге қатысты сызықтық болса, онда оларды бағалау мәселесі салыстырмалы түрде сызықтық кері кету талдауы әдістерімен, бөліктікте, ең кіші шаршылар әдісімен оңай шешіледі.

Ең кіші шаршылар әдісінде белгісіз параметрлерді бағалау келіспеушіліктер қосындыларының шаршыларын ең кішірейту көмегімен жүргізіледі. Мұндай жақындау көптеген маңызды жағдайларда оңтайландырудың маңызды қасиеттеріне ие бағалауларға әкеледі.

Кездейсоқтық шамалар арасында, әдетте, бір шаманың өзгеруімен басқасының таралуы да ауысатын байланыс та бола алады. Мұндай байланыс *стохастикалшық* деп аталады.

Бір баға берулік, яғни бір шығулық айнымалысы бар *модель*. Модельдердің белгісіз параметрлерін бағалау кезінде, Р. Фишер ұсынған, көптеген гипотезалар тексерілуінің орындау ретінің негізі және көптеген іріктемелер үшін сенімділік интервалдық бағалау болатын *максималдық шындыққа ұқсас* әдіс өте жиі қолданылады.

Максималдық шындыққа ұқсас әдісінің маңыз-мәні мынада, $\Theta_n = (\theta_l, \theta_2, \dots \theta_p)$ параметрлерін бағалау ретінде $\theta_l, \theta_2, \dots \theta_p$ мәндерін алады, бұларда f_n ең үлкен мүмкін мәнге жетеді. Өйткені $\ln f_n$ $\hat{\theta}$-ның және f_n-нің өзінің сол мәндерінде максимумға жетеді, сонда іс жүзінде $\ln f_n = L$ функциясын қолдану жиі ыңғайлы, бұл функцияны шындыққа ұқсастықтың логарифмдік функциясы деуге болады. $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_p$ мәндері $x_1, x_2, \dots. x_n$ іріктемесінің функциясы болады және *ең үлкен шынға ұқсастық бағалар* деп аталады.

Көпбаға беруші модельдер, яғни бірнеше шығулық айнымалылары бар модельдер үшін, $L^{(j)}(\vec{\theta}_j^*, \vec{\Psi})$ іріктемесінің шындыққа ұқсастық функциясы байқаудың тәуелсіз қалыпты таралған қателері кезінде өзінің аналитикалық түрін иеленеді.

Параметрлердің аралымдық бағалары. Максималдық шындыққа ұқсастық әдісімен алынған модельдердің ізделуші параметрлерін нүктелік бағалау жайлы айтамыз. Соңғылары, бірнеше асимптоттық қасиеттерге ие болғанымен де, анықталатын бағалаулардың дәлдігі жайлы және модельдің сызықтық еместігі әсіресе аз іріктемелердегі өлшемі жайлы маңызды қосымша ақпаратты қамтамасыз етпейді. Мұндай ақпарат сенімділік аймақтарының сипаттамалары құрамында болады. Қисық *асимптотасы* (грек сөзі *asymptotos* – сәйкес келмейтін) – шексіз тармағы бар қисық, осы тармақ шектеусіз жақындайтын түзу.

Таралу функциясының біршама параметрі (параметрлер жиынтығы) үшін сенімділік интервалы (сенімділік аймағы) дегеніміз өлшенген шамалар іріктемесінің жеткілікті статистикасымен анықталатын және параметрдің (шынайы» мәні шеткі өлшем бойынша, алдын ала берілген α мәніне тең екенін мағыналайтын ықтималдық қасиетке ие параметрлік кеңістіктегі интервал (аймақ). α шамасын сенімділік деңгейі деп атайды.

6.3. Модельдер парапарлығын тексеру

Модельдер парапарлығының критерийлері. Зерзаттың математикалық моделі қабылданған жорамалдардағы оның анықталған тек аналогы ғана болады. Сондықтан модельде және зерзатта алынған айнымалылардың мәндері өзгеше болады. Мұнда шынайы зерзат моделіне (парапарлықты қалыптастыру моделіне) жақындау мәселесі пайда болады. Тексеруге және парапарлықты қалыптастыруға кірісерден бұрын, модель мен зерзат сәйкестелуі жайлы тұжырым жасауға мүмкіндік беретін критерийлерді тудыру қажет. Олар басым түрде дисперсиондық талдау мен қалдықтарды талдау әдістеріне негізделеді.

Модельдердің дисперсиондық талдауы қалдықтар шамаларын $e_u^{(j)}(\vec{\theta}_j) = y_u^{(j)} - f^{(j)}(\vec{x}_u, \vec{\theta}_j)$ өлшеу қатесін сипаттайтын $\in_u$ шамаларымен салыстыру үшін қолданады. Мұндай салыстыруды пайдалана отырып, зерттеуші модельдің жалпы парапалығын да, сондай-ақ модельден мәні онша емес мүшелерді лақтыру көмегімен оны әрі қарай ықшамдайтын тәсілдерді де қалыптастыруға қабілетті. Бұл үшін қосындылар шаршылары есептеледі

$$SS(1) = \sum_{u=1}^{n} y_u^2 \text{ және } SS(2) = \sum_{u=1}^{n} \eta_u^{(y)2} = \sum_{u=1}^{n} f_u^{(j)2}, \qquad (6.22)$$

бұлар сәйкестелген түрде эксперименталдық мәліметтердің шашылуын және модель бойынша баға берушінің есептелген мәндері шашылуын сипаттайды. $e_u^{(j)} = y_u - f_u^{(j)}$ айырымдары *қалдықтар* аталып, өзімен эксперименталдық мағлұматтарды дәл сипаттауға қабілетсіздігінің өлшемін көрсетеді. Айқын көрінетіні, егер сыналушы модель шынайы болса, онда қалдықтар шынында өлшеулердің іс жүзіндегі эксперименталдық қатенің бағасы. Сондықтан эксперименттің нәтижелеріне модельдің сәйкестелмеуінің жалпы өлшемі SS(3) мына түрде көрсетіледі

$$SS(3) = \sum_{u=1}^{n} (y_u - f_u^{(j)})^2. \qquad (6.23)$$

Статистикада шама SS(1) – *жалпы қосынды шаршылары* деп аталады; SS(2) – *кері кетумен қалыптасқан, қосынды шаршылары*, және SS(3) – *қалдықтық қосынды шаршылары*.

Фишер критерийі көмегімен бір баға берулік модельдердің парапарлығын бағалау. Бір баға берудің модельдері жағдайында парапарлық Фишер критерийі (*F*-критерийі) көмегімен тексеріле алады. Бұл үшін табылатын қатынас

$$F = \frac{S^2_{парап}}{S^2_{кайтаөн}}, \qquad (6.24)$$

мұндағы $S^2_{парап}$, $S^2_{кайтаөн}$ – сәйкестелініп парапарлық дисперсиясы және қайта өндіру дисперсиясы аталады, бұлар мыналар ретінде анықталады

$$S^2_{парап} = \frac{SS(5)}{f_{парап}} = \frac{SS(3) - SS(4)}{f_{парап}}, \qquad (6.25)$$

$$S^2_{кайтаөн} = \frac{SS(4)}{f_{кайтаөн}}. \qquad (6.26)$$

Парапарлық дисперсияның еркін дәрежесі санының құрайтыны

$$f_{парап} = n - p_j, \qquad (6.27)$$

Егер қайтаөндіру дисперсиясы тәжірибелердің жекеленген топтамасында анықталса (p_j – j-ші модельдің қалыптасылатын параметрлерінің саны), онда

$$f_{парап} = n - p_j - q(\tilde{n} - 1), \qquad (6.28)$$

мұнда, q эксперимент өткізудің түрлі жағдайларының әрбірінде $\tilde{n}$ қайталанатын тәжірибелер жүргізіледі.

$\tilde{n}$ қайталанатын эксперименттерден жекеленген топтама өткізген жағдайдағы қайтаөндіру дисперсиясы еркіндігі дәрежелерінің саны

$$f_{кайтаөн} = \tilde{n} - 1, \qquad (6.29)$$

ал q–дың әрқайсысында $\tilde{n}$ тәжірибелері экспериментінің түрлі шарттары орындалады, ол тең

$$f_{қайтаөн} = q(\tilde{n} - 1). \qquad (6.30)$$

Орташа мәнге қатысты модельді бағалау. Қатарлас тәжірибелер және қайта өндіру дисперсиясы қатыспаған кезде, модель сапасын, $S^2_{парап}$ пен дисперсияны орташаға қатысты салыстырып, бағалауға болады

$$S^2_{орт} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}, \text{мұндағы } \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i . \qquad (6.31)$$

Бұған Фишер критерийі пайдаланылады және құрастырылатын қатынас

$$F = \frac{S^2_{орт}(f_1)}{S^2_{парап}(f_2)}, \qquad (6.32)$$

бұл модель бойынша алынған нәтижеге қатысты шашырау, байқалатын y айнымалының орташа мәніне қатысты шашыраумен салыстырғанда қаншалықты азаятынын көрсетеді.

χ^2–критерийі мен ω^2–критерийі көмегімен таралу заңы жайлы гипотезаны тексеру. Егер қайсыбір шама (эксперименттен алынған) таралуының іріктемелік заңы және негізгі жиынтықтың (модельмен анықталатын) таралу заңы орын алса, онда экспериментке модельдің парапарлығын ұсынылған таралу заңы жайлы гипотезаны тексеру жолымен қалыптастыруға болады. Тексеру, қарастырылушы іріктемеде байқалатын ауытқулар таралуы гипотезадағы қатемен емес, кездейсоқ себептермен шақырылады, мағыналайтын ықтималдықпен анықталатын критерийлер көмегімен іске асырылады. Егер бұл ықтималдық үлкен болса, онда таралудың гипотетикалық заңынан ауытқуды кездейсоқ деп мойындау жөн және модельмен анықталушы ұсынылған «таралу заңы» жайлы гипотеза бекерге шығарылмайды деп санау керек. Статистикалық гипотезаларды тексеру критерийі ретінде Пирсон критерийі (χ^2-критерийі) жиі қолданылады.

Модельдің жеке құрастырушыларының маңыздылығын талдау. Таралу мөлшерленуін талдау кезінде қалдық пайда болуының мөлшерленген жиіліктері таралуының гистограммасы, оның сан мәндерінен тәуелділікте тұрғызылады. *Гистограмма* (бағаналық диаграмма), сандық белгісі бойынша қайсыбір шаманың статистикалық таралуының графиктік бейнеленуі түрлерінің бірі; – өзімен бір түзуге тұрғызылған, араласқан тікбұрыш жиынтығын көрсетеді.

Қалдықта кездейсоқ емес құрауыштардың қатыспауын талдауды, баға берушілердің алдын ала айтылған мәндерінен графиктік тәуелділікте қалдықты тұрғызу және оқып білу көмегімен жүргізеді, бұл модельдің эксперименталдық мағлұматтармен сәйкестелуін қалыптастыруға мүмкіндік береді.

Модель бойынша баға берушілердің есептелген мәндерінен қалдықтардың графиктік тәуелділіктерін талдау, сондай-ақ өлшеулер қателіктері сипаттамаларына қатысты бастапқы статистикалық жіберілулер қатарын сақтау жайлы, бөліктікте эксперименттеудің таңдалған аймағында қайта өндіру дисперсиясының тұрақты жағдайына қатысты сақтау жайлы қосымша ақпарат алуға мүмкіндік береді.

Көп баға беруші модельдердің парапарлығын анықтау. Көп баға беруші модельдердің парапарлығын анықтаудың орындау реті әлдеқайда күрделі және көлемі бойынша едәуір эксперименталдық ақпарат қолдануды талап етеді, өйткені мұнда бір баға беруші жағдайға қарама-қарсылықта екі дисперсияның теңдігі жайлы емес, екі нұсқаулас Σ_1 мен Σ матрицалардың теңдігі жайлы гипотезаны тексеру талап етіледі.

Әдебиет: 2[23–57]

Бақылау сұрақтары:

1. Кездейсоқ үдерістердің сандық сипаттамаларын статистикалық бағалау.
2. Ішінаралық сипаттамалардың таралу заңдары.
3. Модельдердің параметрлік теңестірілуі.
4. Параметрлердің интервалдық бағалары.
5. Модельдер парапарлығын тексеру және оның критерийлері
6. Орташа мәнге қатысты модельді бағалау.
7. χ^2–критерий мен ω^2–критерий көмегімен таралу заңы жайлы гипотезаны тексеру.
8. Модельдің жекеленген құрастырушыларының маңыздылығын талдау. Көп баға беруші модельдердің парапарлығын анықтау.

7. ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ ЗЕРТТЕУДІҢ САПАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ ЖӘНЕ ҚАРАПАЙЫМЫРАҚ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕСТІК ЗЕРЗАТТАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІ

Пуанкаре (Жюль Анри, 1854–1912, француз математик, физик және философ, 19-жүзжылдықтың соңында) екідифференциалдық теңдеу жүйесінің жағдайы үшін жалпы түрде сапалы зерттеу мәселесін қойды

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y). \tag{7.1}$$

Екінші тектегі динамикалық жүйелердің сапалық теориясы, яғни екі дербестік дифференциалдық теңдеу жүйесін (7.1) (x, y) жазықтығында қарастырады. Екінші реттегі динамикалық жүйелер жағдайы табиғи түрде бірінші ең қарапайым болып көрінеді, оны оқып білу оның өзіне де, күрделірек жағдайларға үш, төрт және тағы басқа n дербестік дифференциалдық теңдеулерге өтуде де қажет. Бұдан басқа, (7.1) түріндегі жүйелер қосымшалар үшін өзіндік қызығуды сақтайды, өйткені физика мен техниканың түрлі аймағындағы құбылыстар мен мәселелер парасатты ойластырылулар кезінде осы түрдегі жүйелермен сипаттала алады.

Үш және одан да көп дифференциалдық теңдеулер санының жүйелері үшін өлшеусіз күрделірек картина жасалады. Мұндай динамикалық жүйелердің сапалы теориясы осы уақытқа дейін, соңғы қырық жылдан астам уақыт ағымында қарқынды дамығанымен де мәліметтер қоры әлі де жеткілікті емес.

Сапалы зерттеу мәселесі табиғи түрде дербестік динамикалық жүйелер ғана емес, сондай-ақ дербестік емес динамикалық жүйелердің кең сыныптары үшін де қойыла алады. Дербестік емес динамикалық жүйелер жағдайында бұл мәселе өзінің арнайылығына ие болғанымен, ол өзінің мазмұны мен әдістері (нүктелік бейнелеу әдісі) бойынша дербестік динамикалық жүйелердің сапалы зерттелуі мәселесімен, бөліктікте, екінші реттегі динамикалық жүйелердің сапалы теориясымен органикалық байланысқан.

7.1. Күйлер кеңістігіндегі жүйе траекторияларының сапалық (топологиялық) құрылымы

Өзіндегі *жазықтықтың топологиялық бейнесі* (немесе кейбір жазықтықтар жиынтығының басқасына немесе сол жазықтықтың жиынтығына) деп өзара бірмәнді және өзара бейнелеу атанады. Аймақтарды немесе траекториялар жиынтығын траекторияға ұсақтаудың топологиялық (сапалық) қасиеті немесе траекторияға бөліктеудің *топологиялық инварианты* деп, бар мүмкін болатын бірдейлендіретін бейнелендіру кезінде инвариантты болып қала беретін қасиет пен шама аталады. Тепе-теңдік күй траекторияның қасиеті, «тепе-теңдік күй болу» немесе «тұйықталған болып» тұйықталған траекторияның қасиеті болатын, *топологиялық қасиеттер*. Топологиялық қасиеттер болатын, мысалы, сондай-ақ тұйықталған траекториялар болған кезде олардың өзара орналасуы, тұйықталған траекториялармен тоқтаусыз толтырылған айналымдық аймақтардың болуы (қатыспауы), тоғыс (фокус), торап және басқа типтегі тепе-теңдік күйлердің нақты саны болуы.

Динамикалық жүйенің *сапалы зерттеуі* оның топологиялық қасиеттерін және топологиялық инварианттарын (мысалы, тепе-теңдік күйлерінің саны мен сипаты, шектік циклдердің саны мен өзара орналасуы және с. ұ.) қалыптастырудан тұрады.

Динамикалық жүйенің толық сапалы зерттеуі болатын топологиялық құрылымның, осы жүйемен анықталған траекторияға ұсақталуын қалыптастыру (траекторияға ұсақтаудың сызбанұсқасы түсінігі басқа аталымда – динамикалық жүйе сызбанұсқасы).

Жазықтықтағы дербестік динамикалық жүйе. Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің мына түрін қарастырамыз

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \tag{7.2}$$

мұндағы $P\,(x,\, y)$ мен $Q\,(x,\, y)$ – үзіксіз функциялар, евклидтік жазықтықтың (x, y – декарттық координаттар) кейбір G аймағында анықталады және бұл аймақта біріншіден төмен емес ретке дейінгі үзіксіз бөліктік туындылар бар. Аймақ шектелген де, шектелмеген де бола алады. Бөліктікте, G облысы ($x,\ y$) жазықтығының барлығымен үйлесе алады.

(7.2) түріндегі жүйелер екі белгісіз функциясы бар дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің бөліктік жағдайы болады: тәуелсіз айнымалы t олардың оң жақ бөлігіне айқын кірмейді. Оң жақ бөлігінің құрамында айқын тәуелсіз айнымалы болмайтын дифференциалдық теңдеулер жүйелері *дербестік* деп аталады. Дифференциалдық теңдеулердің дербестік жүйелері сондай-ақ *динамикалық жүйелер* деп те аталады.

(7.2) жүйесін *жазықтықтағы динамикалық жүйе* немесе *жазық аймақтағы* деп атайтын боламыз. Сондай-ақ *динамикалық жүйе берілген* немесе *G аймағында анықталған* деп айтатын боламыз.

Тепе-теңдік күйі төңірегінің сапалық құрылымы. Векторлық өрістің негізгі нүктесінің өзі жеке траектория бола алады. Мұндай траектория *тепе-теңдік күйі* (басқа терминологияда «тепе-теңдік қалпы» немесе «тыныштық нүктесі») аталады. Қасиеттерге ие аймақты *шоғырланған топологиялық құрылым аймағы (немесе төңірегі)* деп атаймыз. Егер тепе-теңдік күйі болатын нүктеде шоғырланған топологиялық құрылым бар болса, онда оны *тепе-теңдік күйдің топологиялық құрылымы* деп атайтын боламыз.

Шектік траекториялар, тұрақты және тұрақсыз циклдер.

Болсын делік

$$x = \varphi(t), \qquad y = \Psi(t) \qquad (7.3)$$

– (7.1) жүйесінің қайсыбір шешімі. Нүктелер жиынтығы *M* (φ (t), ψ (t)), мұндағы t ішінде (7.3) шешімі анықталған барлық мәнді қабылдайды, бұл берілген шешімге сай келетін *траектория*, сондай-ақ (7.1) динамикалық жүйемен берілген векторлық өріс траекториясы немесе берілген динамикалық жүйенің жай траекториясы (сондай-ақ кейде фазалық траектория деп те) деп аталады.

(7.3) теңдеулері, траекторияның параметрлік теңдеулері болатыны айқын. Керісінше, егер қайсыбір траектория берілсе, онда оның сәйкес келетін шешімін *берілген траекторияға сәйкес келетін шешім* деп атаймыз.

Оқшауланған тұйықталған траектория, яғни ішіндегі кейбір төңіректе өзінен басқа тұйықталған траеториялар жоқ, тұйықталған траектория, *шектік цикл* деп аталады.

Егер L_0 шектік циклі L_0-ден тысы және іші төңірегіндегі нүктелер арқылы өтетін барлық траекториялар $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) кезінде L_0-ден ерекшеленіп шектік циклге ұмтылса, онда L_0 *тұрақты* (сәйкестелініп *тұрақсыз*) *шектік цикл* деп аталады.

Егер L_0 шектік циклі L_0-ден тыс (ішінде) жататын нүктеге жеткілікті жақын өтетін барлық траекториялар $t \to +\infty$ кезінде L_0-ге ұмтылады, ал $t \to -\infty$ кезінде ішінде (тыс) жатса, онда L_0 *жартылайтұрақты шектік цикл* деп аталады.

Әсіресе қолданбалы есептерде жиі түрде тұрақсыз болатын әр түрлі цикл «тұрақсыз» атанады, яғни мәтінде келтірілген мағынада тұрақсыз да, сондай-ақ жартылай тұрақсыз да болады.

7.2. Бифуркациялар. Добал жүйе түсінігі

Қағидалы түрде сызықтық емес зерзаттар (осының санында құбылыстар да кіреді) бар, бұлар үшін сызықтық модельдерді қолдану картинаның добал бұрмалануын келтіреді. Бұл әсер етуінің масштабын өзгерту нәтиженің сапалы өзгеруін келтіретін жүйелер. Типтік мысалы қызметін құрғақ үйкелісі бар механикалық жүйелер атқарады, бұлар үшін аз күш қозғалыс тудырмайды, ал үлкен күштер – тудырады; жалпы алғанда, ұқсас тектегі кез келген бөгеттер болуы – бұл типтік сызықты емес. Елеулі сызықтық болатын, сондай-ақ, параметрлерге тәуелді, қозғалыс типінің – басқаларына және соған ұқсастарға өзгергені кездегі, зерзаттың дағдарыстық күйіне жақынын зерттеу жайлы мәселе. Мұндай жағдайлардың бәрінде сызықтық емес талдаудың әдістерін пайдалану керек, бұларды арнайы әдебиеттен табуға болады.

Біршама мәндер арқылы параметрдің ауысуы кезінде зерзат қасиеттерінің сапалы өзгеруі осы зерзаттың *бифуркациясы* деп аталады. Бифуркация (латын сөзі *bifurcus* – қосарлау), қосарлау, айырлап бөлу немесе тарамдау; (медицинада), түтікшелік мүшені (ыдысты немесе кеңірдек тарамын) бірдей бұрыштармен әр жаққа кететін екі бірдей дәл белгілеу үшін қолданылатын өлшеуішке бөлу.

Егер математикалық модель добал, төменгі парапарлыққа ие немесе бастапқы берілулердің дәлдігі қанағаттанғысыз болса, онда ешқандай шешімнің дәлдігін арттыру, күрделі математикалық әдістерін және есептеу құралдарын қатыстыру соңғы нәтижені жеткілікті сенімді ете алмайды.

Фазалық портреттердің топологиялық инварианттылығы. *Фазалық портрет* – фазалық жазықтықтағы барлық траекториялардың жиынтығы. *Траектория*, қозғалыс үдерісінде бөлшектің суреттеп өтетін сызығы. Фазалық траекторияның үш негізгі түрі бар: тыныштық нүктесі, айналымдар және периодты емес траекториялар. *Тыныштық нүктесі* қарастырылушы шынайы жүйенің тепе-теңдік күйіне жауап береді. *Айналым (цикл)* (сондай-ақ – периодты траектория, тұйықталған траектория деп те айтады) жүйенің тұрақты емес периодтық шешіміне жауап береді, ол шынайы жүйедегі периодты үдерісті сипаттайды. *Периодты емес траекториялар* – қалғандардың бәрі. Траекторияны қорғайтын фазалық портрет бейнелеудің топологиялық инварианты болады. Бұл бекітудің дұрыстығын, мына жайт қалыптастырады, мұндай бейнелеулерде тепе-теңдік күйі тепе-теңдік күйіне, ал оның секторы аттас секторға өтеді.

Мысалдар. Тоқтаусыз еркін тербелетін маятниктің теңдеуіне ауқымсыз уақытқа ауысудан кейін түр беруге болады (қараңыз

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{ml^2}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{a}{l}\omega^2\sin\varphi\cos\omega t \qquad (7.4)$$

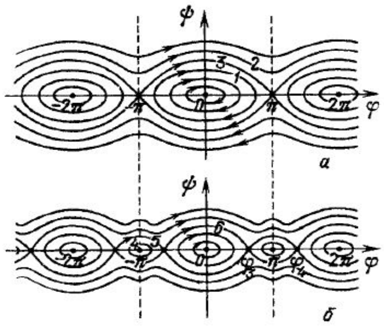
мұндағы k – топсадағы үйкеліс коэффициенті; *m* – масса; *l* – ұзындық; φ – маятниктің тіктен ауытқу бұрышы; *t* – уақыт; ω – айнымалы, элементарлық бастау мағынасына ие; *a* – кездейсоқ шама; g – жер тартуы күшінің үдеуі)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin\varphi = 0.$$

(7.4) түріндегі теңдеулер жүйесіне ауысу үшін, dφ/dt–ты ψ әрпімен белгілейміз; сонда алынатын жүйе

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Psi, \qquad \frac{d\Psi}{dt} = -\sin\varphi. \qquad (7.5)$$

Сәйкес келетін фазалық портрет 7.1 *а* – суретінде келтірілген. Ол периоды 2π φ бойынша периодты болады, сонан да екі штрихталған сызықтың арасындағы картинамен шектелу жеткілікті, мұндағы сызықтар бірдейлендірілген деп саналады, яғни осы жолақты түтікке орағандай болады. Басқа сөздермен айтқанда, фазалық көптүрлілік қызметін жазықтық емес, цилиндрлік бет атқарады. Бұл бетте жүйе екі тыныштық нүктесіне ие: (0, 0), төменгі қалпына жауап беретін, және (π, 0), маятниктің жоғарғы қалпына жауап беретін. *1* типтегі траекториялар – циклдер, маятниктің төменгі, тұрақты тепе-теңдігіне қатысты либрациондық қозғалыстарына (яғни тербелістеріне) жауап береді. *2* типтегі траекториялар периодты емес (егер олар толық жазықтықта қарастырылса), оларға маятниктің ротациондық қозғалыстар жауап береді, яғни ол шексіз өсетін φ фазалық бұрышы бар ілгек нүктесі айналасында айналады.



7.1-сурет

3 санымен белгіленген траектория қызықты: сәйкес келетін режім либрациондық қозғалысты ротациондықтан бөледі және тепе-теңдіктің жоғарғы қалпына $t \to \pm\infty$ маятниктің асимптоттық ұмтылысынан тұрады. Мұндай режім, айқын түрде, тұрақсыз.

Екінші мысал ретінде жиі тербелетін ілгек нүктесі бар тоқталусыз еркін тербелетін маятниктің орташаланған теңдеуін қарастырамыз. Бірінші реттегі теңдеулер жүйесіне ауысудан кейін және ауқымсыз уақыт енгізген соң бұл жүйеге берілетін түр

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Psi, \qquad \frac{d\Psi}{dt} = -(1 + k\cos\varphi)\sin\varphi, \tag{7.6}$$

мұндағы $k = a^2\omega^2/(2\lg) = const > 0$. Әзірге k < 1, бұл жүйенің фазалық портреті, шамамен, (7.5) дегідей. Бірақ k өсе отырып, k = 1 ($\frac{a^2\omega^2}{2l^2} > \frac{g}{l}$ шартына қараңыз, яғни $\omega > \frac{\sqrt{2\lg}}{a}$, (7.7)) мәні арқылы өткен кезде, бұрынғы тұрақсыз тыныштық нүктесі (π, 0) тұрақты болады және одан екі жаңа пайда болған тұрақсыз тыныштық күй (φ_3, 0) мен (φ_4, 0) бөлінеді. Сәйкес келетін фазалық портрет 7.1 *б* – суретінде келтірілген. Көретініміз сол, *4* типіндегі траекториялар пайда болды, бұларға оның жоғарғы қалпына қатысты маятниктің либрациондық қозғалысы жауап береді. *3* типтегі траектория жоғалды, оның орнына *5* пен *6* сандарымен белгіленген траекториялар пайда болды, бұларға маятниктің бір тұрақсыз қалпынан басқасына асимптоттық ауысуы сай келеді.

ҚАРАПАЙЫМЫРАҚ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕСТІК ЗЕРЗАТТАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІ

Сызықты еместіктің шығу тегін талқылаймыз және оқып біленетін зерзаттар тәртібінде анықталатын оның салдарларын қарастырамыз. Оларды талдау үшін сандық әдістер қолданылуының болмай қалмайтынын паш етіп көрсетеміз.

7.3. Сызықты еместіктің пайда болуы

Сызықтық модельдер суперпозиция қағидасына бағынады. Бұл жағдайда бөліктік шешімін тауып және оларды қосындылап, ережедегідей, жалпы шешімін де тұрғызудың ыңғайы келеді.

Сызықты еместік модельдер үшін суперпозиция қағидасы қолданылмайды, және жалпы шешімді тек сирек жағдайларда ғана табуға болады. Сызықты еместік теңдеулердің жекеленген бөліктік шешімдері жалпылау жағдайдағы зерзат тәртібі сипатын бейнелемеуі мүмкін.

Көптеген себептер сызықты еместіктің көздері бола алады. Табиғаттың іргелі заңдары – тартылыс заңы және Кулон заңы – алдымен сызықты еместік (массалар мен зарядтар арасындағы әрекеттестік күштері шаршылық тәуелділікте), және сондықтан оларға негізделген модельдер, жалпы айтқанда, сондай сызықты емес. Модельдердің сызықты еместігіне өз үлесін қосатындар құбылыстың күрделірек геометриясы, түрлі сыртқы әсерлер және әрине, күйінің өзгеруі кезіндегі зерзаттың өзіндегі әрекеттестік сипатының өзгеруі (таралымдар модельдеріндегі қаныығу эффектісі, серіппенің алмасатын қатаңдығы).

Маңыз-мәнділіктегі шынайы құбылыстарға тек сызықты еместік модельдер жауап береді, ал сызықтықтар зерзатты сипаттайтын шамалардың шамалы ғана өзгеруін сипаттау кезінде ғана дұрыс болады.

7.4. Таралымның сызықты еместік моделіндегі үш режім

Мальтус моделінен және модельден ажыратып, туып көбею коэффициентін N(t) таралым санынан, яғни $\alpha = \alpha(N)$-нен тәуелді деп санаймыз. Әлсіреу коэффициенті β да, сондай-ақ N-нен тәуелді. Таралым динамикасының теңдеуі

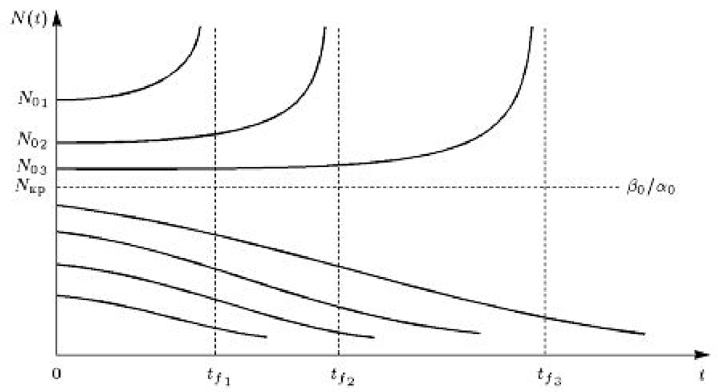
$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N))N \tag{7.7}$$

бұл күйінің өзгеруі кезіндегі таралым ішіндегі әрекеттестік сипаттамаларының өзгеруінен сызықты емес.

Анықтық үшін β (N) = β_0 = const, α (N) = α_0N деп аламыз, яғни туып көбею халық санына пропорционалды (мысалы, өйткені таралым мүшелері оның өсіміне қызығады). Сондағы (7.7) теңдеуінің өзгергендегі түрі

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \qquad (7.8)$$

шаршылық сызықты еместігі (сондай-ақ біршама химиялық реакцияларға да тән) бар. Түрлі бастапқы сандар $N(0) = N_0$ кезіндегі $N(t)$ функциясының тәртібін қарастырамыз (7.2-сурет).



7.2-сурет

а) $N_0 < N_{даг} = P_0/a_0$ кезінде уақыт өтуімен халық саны $t \to \infty$ кезінде нөлге ұмтылып, бірқалыпты азаяды. Шешімі t-ны $-t$-ға ауыстырылғандағы формуламен (кері қисынды қисық;) беріледі.

б) $N_0 = N_{даг}$–тың дағдарыстық мәндері кезінде таралым саны уақытқа тәуелді емес

в) $N_0 > N_{кр}$ кезінде шешілім сипаты қағидалы түрде а) мен б) жағдайларымен салыстырғанда өзгереді: уақыт өтуімен сан өседі, және де соншалықты тез, шеттік $t = t_f$ уақыты кезінде шексіздікке айналады. N_0 үлкейген сайын t_f шамасы азаяды.

(7.8) теңдеуінің сызықтық еместігі, тіпті қарапайымырақ модельде де, үлкен эффектілердің әртүрлілігін тудырады: уақытпен сан өзгеруінің үш мүмкін режимін; б) режимінің тұрақсыздығы – аз ауытқулар кезінде а) немесе в) аймағында шешілім $N_{даг} = \beta_0/\alpha_0$ сызығынан алыстайды; $N(t)$ функциясының бастапқы берілген N_0-ге күшті сезгіштігін; соңында, $N_0 > N_{даг}$ кезінде шеттік уақыт ішінде таралым санының апатты өсімі.

Байқайтынымыз сол, соңғы қасиет бөліктік нәтиже емес, кез келген модельдердің мынадай түрлері үшін

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \quad t > 0, \quad N(0) > 0, \quad F(N) > 0$$

орын алады, егер үлкен N кезінде функция F(N) бірінші дәрежелі N-нен тезірек өседі, дәлірек, егер $F(N)$ үшін

$$\int_{N(0)}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty$$

критерийі дұрыс болса, бұл теңдеу тікелей интегралдаудан алынады.

7.5. Тербелістер үдерісіне күшті сызықты еместіктің ықпалы

Тербелістер теңдеуі

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k(r)r\,, \qquad (7.9)$$

мұндағы k(r) > 0 функциясы серіппе қатаңдығын сипаттайды, – салыстырмалы түрде көп емес сызықтық емес теңдеулердің бірі, бұл үшін жалпы шешімді жазуға болады. Жылдамдық шамасын $\upsilon = dr/dt$ енгізе отырып, (7.9)-ды қайта жаламыз мына түрде

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k(r)r, \qquad \frac{dr}{dt} = \upsilon\,;$$

бұл теңдеулерден біріншісін екіншісіне бөліп, бірінші реттегі сызықты еместік теңдеуді аламыз

$$m\frac{d\upsilon}{dr} = -\frac{k(r)r}{\upsilon}. \qquad (7.10)$$

(7.10)-дағы айнымалыларды бөлектей отырып:

$$m\upsilon dv = -k(r)r\,dr,$$

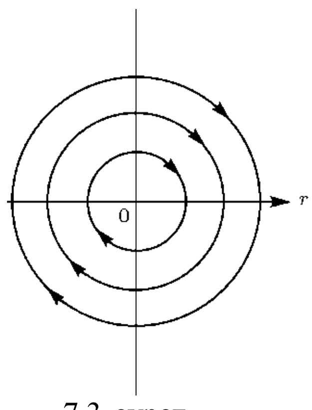
және соңғы теңдеуді екі мәрте интегралдап, табамыз

$$\upsilon^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -2\int k'(r')r'dr' + C, \qquad k'(r) = \frac{k(r)}{m},$$

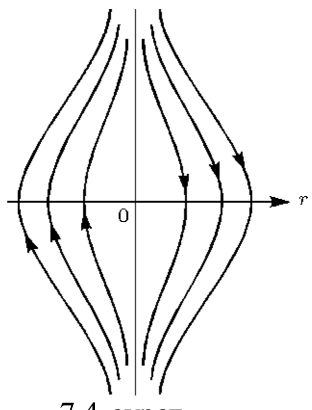
$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{C - 2\int k'(r')dr'}, \quad t = \pm\int_0^r dr\left(\sqrt{C - 2\int k'(r')r'dr'}\right)^{-1} + C_1, \qquad (7.11)$$

мұнда айқын емес түрде жазылған (7.11) жалпы шешіміндегі C, C_1 константтарын, бастапқы мағлұматтарды біле отырып анықтауға болады.

Сызықтық жағдайда ($k(r) = k_0$) (7.9) теңдеуінің интегралдық қисықтары өзімен радиустары жүйенің бастапқы энергиясымен анықталатын, орталығы координат бастауына орналасқан концентрлі шеңберлерді көрсетеді, бұл шеңберлер бойымен «қозғалыс», уақыт ішіндегі оқтын-оқтын тербелістердің үдерісін сипаттайды (7.3-сурет).



7.3-сурет



7.4-сурет

Енді күшті сызықты еместік жүйені қарастырамыз, мұнда серіппе өзін «асқынжұмсақ» ретінде жүргізеді, мысалы, $k(r) = 1/(r^2 + \alpha)$, $\alpha > 0$. Шектік жағдайда $\alpha = 0$ (7.9) теңдеуінің қабылдайтын түрі

$$m\frac{d\upsilon}{dr} = -\frac{1}{\upsilon r},$$

және де оның шешімі қағидалы түрде (7.9) шешімен өзгешеленеді (7.4-суретке қараңыз), мұнда энергия сақталмайды және $r \to \pm 0$ кезінде шексіз өседі. Сызықты еместік әлсіреген кезде тербеліс үдерісі жайбар сипатты қабылдайды.

Осциллятор (латын сөзі *oscillo* – тербелемін), тербелетін жүйе.

7.6. Сандық әдістер жайлы

Мұнда қарастырылған мысалдар жеткілікті, сызықты еместік зерзаттарды модельдеу үшін, сандық әдістерді қолданбауға болмайтынын куәландырады, мұның себебі таза теориялық жақындаулардың айқын жетіспейтіндігі және бұл зерзаттарды сипаттайтын шамалар тәртібінің күрделілігі мен әртүрлілігі. Солай бола тұрса да, бұл тұжырым, құрамында белгісіз шамалардың, тәуелсіз айнымалылардың, параметрлердің көп саны бар және күрделі кеңістіктік құрылымы бар сызықтық модельдер үшін де дұрыс. Сәйкес келетін сандық модельдерді тұрғызу үшін, бастапқы модельдерді жасау кезінде жасалатын әдістер, жақындаулар және айлалар кеңінен қолданылады, және де терең оқып білуді талап ететін өзінің арнайы мәселелері пайда болады.

Соңғы бекітуді қарапайым мысалмен түсіндіреміз.

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N = \gamma N, \quad t > 0, \quad N(0) = N_0$$

теңдеулері үшін (α – β) > О–ді анықтау үшін, келесі сандық жүйені ұсыну толығымен қисынды (t осін $r = t_{i+i} - t_i$, i = 0, 1, 2, ... шамаларының тең кесінділеріне бөлеміз; $t_0 = 0$ және туындыны шектік айырымға ауыстырамыз):

$$\frac{N_{i+1} - N_i}{\tau} = \gamma N_i, \quad i = 0, 1, ...; \quad N(t_0) = N_0. \qquad (7.12)$$

(7.12)- ден аламыз

$$N_{i+i} = (\tau\gamma + 1)N_i,$$

мұны шешудің беретіні

$$N_i = (1 + \tau\gamma)N_0, \;\; N_2 = (1 + \tau\gamma)^2 N_0, \;\; N_i = (1 + \tau\gamma)^i N_0 = (1 + \tau\gamma)^{t/\tau} N_0,$$

яғни $t \to \infty$ кезіндегі (5.6) шешімі ізделушіден қанша болса да күшті ажыратыла алады. Яғни, қажет дәлдікті алу үшін, T интегралдау кесіндісін шамасына тәуелділікте, τ қадамын керекті түрде таңдаймыз.

Әдебиеттер: 10 [124–126], 12 [2, 15–17, 119, 124], 8[53–58]

Бақылау сұрақтары:

1. Күйлер кеңістігіндегі жүйе траекторияларының сапалық (топологиялық) құрылымы.
2. Жазықтықтағы дербестік динамикалық жүйе.
3. Тепе-теңдік күйі төңірегіндегі сапалық құрылым.
4. Шектік траекториялар, тұрақты және тұрақсыз циклдер.
5. Бифуркациялар. Добал жүйе түсінігі.
6. Фазалық портреттердің топологиялық инварианттылығы. Мысалдар.

7. Сызықтық еместіктің пайда болуы.
8. Таралымның сызықтық емес моделіндегі үш режім.
9. Тербелістер үдерісіне күшті сызықтық еместіктің ықпалы.
10. Сандық әдістер.

8. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРДІ ЗЕРТТЕУ ҰҚСАСТЫҚ ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНУ

Симметриялық қасиеттеріне негізделген математикалық модельдерді ықшамдау тәсілдеріне сипаттама береміз. Өздік ұқсастық (автомодельдік) құбылыстар сипатталуын келтіреміз. Сызықты еместік параболалық пен гиперболалық теңдеулер үшін біршама автомодельдік үдерістерді зерттейміз.

8.1. Өлшемділіктерді талдау және модельдерді топтық талдау

Табиғи, технологиялық, көптеген үнемдік пен әлеуметтік зерзаттардың іргелі қасиеттерінің бірі – симметрия (ұқсастық, қайталанғыштық, қайта өндіру) – олардың математикалық модельдерінде өзінің бейнеленуін табады. Оқып білінетін құбылыстағы симметрияның қайсыбір түрінің болуы, оны симметриялық ұқсастығы азырақпен салыстырғанда зерзаттың үлкен қарапайымдылығын білдіреді. Осыған математикалық модельдерді ықшамдау әдістерін, сондай-ақ оларды талдаудың ықшамдау әдістерін кеңінен қолдану негізделеді. Олар модельді құрастырушы теңдеулер жүйесі ретін төмендетуден, ізделуші шамалар тәуелді болатын айнымалы сандарды, немесе үдерістерді анықтайтын тұрақты параметрлерді төмендетуден, және тағы басқалардан (солай, осы ауыспалыларға қатысты үш ауыспалылы функцияның симметриясы үшсатылы зымыран жылдамдығының мүмкін ең үлкен мәнін табуға мүмкіндік берді) тұрады.

Симметрия қасиеттерін пайдалануға типтік жақындау – модельге кіретін шамалардың өлшемділіктерін талдау. Зерзаттар сипаттамаларының бөлігі тікелей (механикалық, физикалық, үнемдік және т. б.) мағынасы бар, қайсыбір бірліктермен өлшенеді. Мысалы, граммдармен өлшенетін масса, Кельвин градустарымен өлшенетін температура, теңгелермен есептелетін жалпы ұлттық өнім. Мұндай шамалар *бір сарынды* аталады, олардың сандық мәні өлшем бірлігін таңдауға тәуелді. Олардың арасынан тәуелсіз (негізгі) өлшемділігі бар, немесе *ауқымы тәуелсіз* шамалар бөлектенеді. Мысалы, егер механикалық құбылыстарды сипаттау үшін СГС (сантиметр, грамм, секунд) бірлігінің жүйесі қолданған болса, онда x ұзындықтың, m массаның және t уақыттың өлшемділіктері тәуелсіз және бірі басқасымен өрнектелмейді. Олардан ерекшеленіп, негізгі шамалардың өлшемділігі арқылы, $E = \mathrm{m}\upsilon^2/2$ кинетикалық энергияның өлшемділігі *өлшемділік формуласы* деп аталатын формула $[E]=[m][x]^2[t]^{-2}$ = г · см^2 · с$^{-2}$ бойынша анықталады (мұндағы $\upsilon = dx/dt$, $[f]$ нышаны арқылы f шамасының өлшемділігі белгіленеді). Мұндай шамалар *ауқымды тәуелді* аталады. Құбылыстар мен үдерістер сондай-ақ ауқымсыз шамалармен де сипаттала алатынын еске саламыз, айталық, сутасымал қатпар ұзындығының оның кеңдігіне қатынасымен, формуладағы жылуөткізгіштік коэффициенттің температурадан тәуелділігін беретін дәреже көрсеткішімен, жылдық банкілік пайызбен және соған ұқсастармен.

Өлшем бірліктері жүйелерін әртүрлі таңдауға болады, зерзатты (табиғат заңдарынан немесе басқа да байыптардан алынған) сипаттайтын шамалар арасындағы байланыстар, өлшем бірліктері өзгерген кезде де өзгермеуі тиіс. Мысалы, Ньютонның екінші заңы $F = ma$ (F – күш, a – үдеу) ӨЖ жүйесінде, СГС жүйесіндегідей дәлдікпен жазылады. Өлшем бірліктері өзгеруіне қатысы бойынша құбылыстар мен үдерістер инварианттылығы өзінің іске асырылуын П-теоремасы деп аталғанның ішінен табады.

n + 1 ауқымдық шамалары a, a_1, …, a_n арасында функционалдық байланыс

$$a = F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \qquad (8.1)$$

бар делік, мұндағы a_1, …, a_k шамаларында тәуелсіз өлшемділік бар, және де бұл байланыс өлшем бірліктері жүйелерін таңдаудан тәуелсіз делік (а шамасы ізделуші, ал қалғандары берілуші).

Сонда байланыс (8.1) *жазыла алады мына түрде*

$$\Pi = F\,(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{\Pi_1 \ldots, \Pi_{n-k}}_{n-k}), \qquad (8.2)$$

яғни өзімен n + 1 бір сарынды шамалардан a, a_1, …, a_n ауқымсыз қиыстыруды беретін $n + 1 - k$ мен Π, Π_1,..., Π_{n-k} *шамалары арасындағы арақатынастар түрінде.*

Және де мұнда Π, Π_1,..., Π_{n-k} шамалары a, a_1, …, a_n-мен мынадай қарапайым арақатынастармен байланысады

$$a = \Pi\, a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k},$$

$$a_{k+1} = \Pi_1 a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_k^{l_k},$$
$$\tag{8.3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = \Pi_{n-k} a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}.$$

Мұндағы m_1, ..., m_k, l_1, ..., l_k дәреже көрсеткіштері; p_1, ..., p_k сондайлар, бұлар ауқымы тәуелді шамалар a, a_{k+1}, …, a_n үшін өлшемділіктердің сәйкес келетін формулаларында, мысалы $[a] = [a_1]^{m_1} [a_2]^{m_2} \ldots [a_k]^{m_k}$ формуласында болады.

П-теоремасын дәлелдеу өлшем бірліктеріне қатысты (8.1) байланысының инварианттылығына негізделген. Бәрінен бұрын, оларды кез келген ауқымды түрде тәуелсіз a_i, i = 1, ..., k шаманы $a_i = \overline{a_i}\, a_i$ түрінде көрсетуге болатынынан, (8.1) арақатынасын өлшем бірліксіздендіруді жүргіземіз. Мұндағы өлшем бірліксіз коэффициент $\overline{a_i}$ – бірліктердің қолданылушы жүйесіндегі a_i шамасының сандық мәні, ал α_i қоса көбейткіш a_i-дің өлшем бірлігіне ие және өлшем масштабын сипаттайды (ондаған немесе жүздеген фунттар, жүздеген немесе мыңдаған градустер, теңгелердің миллиондары немесе миллиардтары және т. б.). Өлшем бірліксіз көбейткіштердің сандық мәндерінің ауқымы тәуелді a, a_{k+1}, …, a_n шамалары үшін a_i, i = 1, …, k *масштабтық көбейткіштерді* пайдаланумен есептелетін ережесі

$$\overline{a} = \frac{a}{\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}}, \qquad \overline{a}_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \ldots a_k^{l_k}}, \qquad \overline{a}_n = \frac{a_n}{\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}},$$

олардың әрбірі үшін өлшем бірліктердің формулаларынан тікелей шығады. (8.1) арақатынасын, болжам бойынша өлшем бірліктерінен тәуелсіз a, a_1, …, a_n шамаларының (яғни $\overline{a}$, $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_n}$ өлшем бірліксіз шамалар арасындағы байланыс) сандық мәндері арасындағы байланыс сияқты түсіндіруге болады. Сонымен, α_i масштабтық көбейткіштердің кез келген жиынтығы үшін дұрыс

$$\overline{a} = F(\overline{a}_1, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a}_k, \overline{a}_{k+1}, \ldots, \overline{a}_n),$$

немесе

$$\frac{a}{\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}} = F\left(\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{a_k}{\alpha_k}, \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \ldots \alpha_k^{l_k}}, \ldots, \frac{a_n}{\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k}}\right).$$

Енді $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, ..., $\alpha_k = a_k$ делік. Басқаша айтқанда, өлшем бірліктердің алынған жүйесінде масштабтық көбейткіштерді $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_k}$ шамаларын тепе-теңдік түрде бірге теңестіретіндей етіп таңдаймыз. Сонда соңғы арақатынастан (8.2) мен (8.3) формулалары дереу шығады.

П-теоремасын қолдану зерзатты сипаттауға қатысатын шамалар санын төмендетеді, және де П, Π_1, ..., Π_{n-k} мен a_1, ..., a_k арқылы ізделуші a шамасын (және a_{k+1}, ..., a_n шамаларын) көрсетудің айқын тәсілін береді. Ол (8.1) функционалдық тәуелділігінің нақты түріне «талғаусыз» қарайды, тек F функциясының жеткілікті жатықтығын талап етеді.

Бөлектікте, егер $n = k$ болса, онда, (8.2)-ден бірден шығатыны, П = const, және

$$a = \text{const} \cdot a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k},$$

яғни шешу үшін берілетін параметрлер арқылы қарапайым өрнек алынады (*a*-ның дәл мәнін білу үшін, константты анықтауға тура келеді). Былай болсын, мысалы, маятниктің шағын тербелістерінің периоды T оның бастапқы ауытқуынан және жылдамдықтан тәуелсіз екені белгілі, тек оның l ұзындығымен, m массасымен және g еркін түсу үдеуімен анықталады. Функционалдық байланыс $T = T(l, m, g)$ төрт ауқымдық шамадан тұрады, оның үшеуінің тәуелсіз өлшем бірлігі бар. Осындайлар ретінде T, l мен m таңдалынады, сонда g-ның өлшембірлігі үшін иеленетініміз $[g] = [l][T]^{-2}$, немесе $[T] = [l]^{1/2}[g]^{-1/2}$, осыдан

$$\mathrm{T} = \mathrm{const}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Өлшем бірліксіз көбейткішке дейінгі дәлдікпен осы формула маятник тербелістері теңдеулерінің шешімінен алынатынмен сәйкес келеді (жол-жөнекей түсінілетіні, олардың периодының m-нен тәуелді болмайтыны).

Байқайтынымыз, зерзатты сипаттайтын өлшем бірліксіз параметрлердің, өлшем бірліктердің түрлерін өзгерткен кезде өзгермейтіні және сондықтан П-теоремасында көрінбейді.

Өлшем бірліксіздендірудің (*масштабтаудың*) орындалу реті әрқашан математикалық модельдерді оқып білу кезінде пайдалы, өйткені зерзат жайлы маңызды алдын ала ақпаратты бере алады. Мысалы, мәселені масштабтау нәтижесінде айқындалғаны, оны шешу іс жүзінде төрт емес, тек бір ғана параметрмен анықталатыны.

П-теоремасы көмегімен алынатын $\Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ өлшем бірліксіз шамаларды *ұқсастық параметрлері* (*критерийлері*) деп атауға болады, мына мағынада, өзінің масштабтары бойынша әртүрлі, бірақ маңыз-мәні бойынша құбылыстар мен үдерістер өздерін $\Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ параметрлерінің берілген жиынтығы кезінде сапалы түрде бірдей жүргізетіндігі (және олардың өзгеруі кезінде бірдей өзгереді).

Өлшем бірліктердің жүйесіне қатысы бойынша модельдердің инварианттылығы – олардың симметрияларының жалпыламалау қасиеттерінің жеке жағдайы. Модельдердің ұқсастығын пайдаланатын, ең жақсырақ жасалған және қолданылатын жақындау дифференциалдық теңдеулер зерттелуінің *инвариантты-топтық әдісі* деп аталғанға негізделген. Шынында, өзімен көптеген құбылыстардың математикалық модельдерінің құрамдық бөлігін көрсететін, дифференциалдық теңдеулердің көпшілігі, оларға кіретін тәуелсіз айнымалылардың және ізделуші функциялардың біршама түрленулері кезінде, өзгермейтін (*инварианттық*) болып қала береді.

Мысалы, жылу берілісі теңдеуі

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\chi\cdot \mathrm{grad}\,T) \qquad (8.4)$$

$t' = t + t_0$ уақыт «ығысуына» және де, егер де c мен χ функциялары $\vec{r}$ ден тәуелсіз болса, $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}_0$ координаттары «ығысуына» инвариантты. Кездейсоқ жағдайда $c = c_0$, $\chi = \chi_0 T^{\sigma}$, яғни жылу берілісі коэффициентінің температурадан дәрежелік тәуелділігі кезінде, (8.4) «созу–қысу» түрлендірулерінде өзінің түрін ауыстырмайды: $t' = \alpha t$, $\vec{r}\,' = \beta\vec{r}$, $T' = \gamma T$ (α, β, γ сандары біршама байланыстарға бағынуы керек).

Ұқсас қасиеттерді, идеал политропты газға арналған газдық динамиканың бір өлшемдік теңдеуі, оңай көрсетеді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\partial \upsilon}{\partial m}, \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(pp^{-\gamma}) = 0, \tag{8.5}$$

бұлар массалық координаттарда жазылған.

Жоғарыда қарастырылған айнымалылардың түрлендірілуі, түрі, олардың қиыстырулары және жалпыламалау нүктелік түрлендірулер, немесе Ли түрлендірулері деп аталатын сыныпқа жатады (шамалардан туындылар түрленбейді). Олар сондай-ақ біршама қосымша шарттарды қанағаттандырады (өзімен топты көрсетеді). Сонда Ли тобына жол беретін, дифференциалдық теңдеу ықшамдалына алады: не оның реті төмендейді, не ізделуші функцияларды анықтайтын тәуелсіз айнымалылардың санын азайтады. Топтық талдаудың мақсаттарының бірі – берілген теңдеумен немесе теңдеулер жүйесімен жол беретін және теңдеулердің инварианттық шешімдері деп аталатын, түрлендірулердің барлық топтарын анықтау. Математикалық модельдер зерттеуі көзқарасы тұрғысынан маңызды болатын, бәрінен бұрын, топтық талдаудың күрделі және үйілген орындалу реті емес, нақтылы теңдеуге қолдануға болатын оның ақырғы қорытындылары (көптеген негізге алынған математикалық модельдер үшін бұл нәтижелер алынған).

Маңызды жеке мысал ретінде бірөлшемдік жағдайдағы $c = 1$, $\chi = \chi(T)$ кезіндегі (8.4) теңдеуінің топтық талдауы қорытындысын келтіреміз (8.1-кесте). Кестенің сол жақ бағанасындағы нөмірлер түрлі топтық түрлендірулерге жауап береді, ал оның торшаларына $\chi(T)$ функциясының түрлі түрлері (өзгешеліктері) үшін оларға сай келетін инварианттық шешімдер келтірілген. Нышан « кесте жолының сол жағында тұратын өрнек қайталануын, сызықша – инварианттық шешімдердің қатыспауын білдіреді. ξ арқылы инвариант – берілген түрлендіруде өзгермейтін қиыстыру белгіленген.

$T(x,t)$ инварианттық шешімін (8.4) бірөлшемдік теңдеуге қойған кезде $f(\xi)$ функциясына қатысты қарапайым дифференциалдық теңдеу (сондай-ақ түрлендіру инварианты) алынады. Мұны зерттеу жеке туындылардағы бастапқы теңдеуден гөрі әлдеқайда оңай. Әрі қарай, егер $f(\xi)$ қасиеттері белгілі болса, $f(\xi)$ арқылы жазып алу және оның қасиеттерін оқып білу қиындық тудырмайды.

8.1-кесте

$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\chi)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ теңдеуінің топтық жіктелуі

№	$\chi(T)$ еркінше	$\chi(T) = e^{T}$	$\chi(T) = T^{\sigma}$ ($\sigma \neq -4/3$)
1	$T = f(\xi)$, $\xi = x$	«	«
2	$T = f(\xi)$, $\xi = t$	«	«
3	$T = f(\xi)$, $\xi = x - t$	«	«
4	$T = f(\xi)$, $\xi = x^2/t$	«	«

5	–	$T=\frac{1}{\alpha}\ell nx+f(\xi)$, $\xi=tx^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}$; $T=\ell nt+f(\xi)$, $\xi=x(\alpha=0$	T=t$^{1/(2\alpha)}f(\xi)$, $\varepsilon=xt^{\beta},\beta=-(\alpha+\sigma/2)/(2\alpha)$; $T=t^{-1/\sigma}f(\xi)$, $\xi=x(\alpha=-\sigma/2)$
6	–	$T=x+f(\xi)$, $\xi=te^{x}$	$T=e^{t}f(\xi)$, $\xi=xe^{-\sigma t/2}$
7	–	$T=2t+f(\xi)$, $\xi=xe^{-t}$	$T=e^{x}f(\xi)$, $\xi=te^{\sigma x}$

Нөмірлері 1-4 топтық түрлендірулер негізгі, өйткені оларға еркін арнайы $\chi(T)$ функциялары кезінде жол беріледі. Жағдай 1 – стационарлық шешім (t бойынша ығысуға қатысты инварианттылық (4)), 2 – кеңістік бойынша тұрақты шешім (x бойынша ығысуға инварианттылық), 3 – жүгірмелі толқын түріндегі шешім (t мен x бойынша бір мезгілдік ығысуға инварианттылық), 4 – x=0 нүктесіндегі $T(x, t)$ функциясының тұрақты мәні бар шешім ($t' = \alpha^2 t$, $x' = \alpha x$, $T'(x', t') = T(x, t)$ түріндегі түрлендірулерге инварианттылық).

Негізгі топты (топшалар деп аталатын) кеңейту $\chi(T)$ функциясының $\chi(T)$ = e^{T} , $\chi(T)$ = T^{σ}-ларын анықтау кезінде өтеді. Солай, бесінші топшаның шешімдері үшін ξ шамасы созу-қысу түрлендіруіне инвариантты, бұл осы жағдайда бастапқы теңдеуге жол береді (түсіндіреміз: шешім 4 еркін функция $\chi(T)$ үшін созу-қысу түрлендірулерінің іс жүзіндегі жеке жағдайына жауап береді, ал $\chi(T)$ = T^{σ} үшін оларға бөлектейтін айнымалылардағы шешімдер жауап береді). 6 мен 7 топшалары үшін шешімдер ығысу мен созу-қысу түрлендірулерінен туындайды.

Байқайтынымыз: 8.1-кестесіндегі барлық инварианттық шешімдер басқа түсініктерден (өлшембірліктер теориясынан, шектік ауысулармен, шешімді ойлап табумен және оны (8.4) теңдеуіне тікелей қоюмен) топтық талдауға дейіннен бұрын алынған. Алайда бұл берілген әдістің жақсы жағын, тым болмаса екі себептің күшімен, төмендете алмайды. Ол негізгі топты түрлендіру жайлы қатаң да жеткілікті және де осы топты кеңейтетін арнайы теңдеулерге (модельдерге) жауап береді ((8.4) теңдеуіндегі басқа өзгешеліктер $\chi(T)$ бұрынырақ белгілі, айталық, $\chi(T)$ = $ln(1 + T)$ түрі негізгі шешімдерге қосымшаларды жібермейді). Бұдан басқа, теңдеулер симметриясының қасиеттері әр түрлі және кенеттен бола алады. Мысалы, 8.1-кестесінде сипатталмаған жағдай χ = T^{σ}, σ = –4/3 үшін, (8.4) теңдеу, өзімен математикалық модельдер ықшамдалуының жүйелі тәсілін көрсететін, топтық талдау көмегімен ғана анықталатын, жаңалығы жоқ емес түрлендірулердің үлкен санына ие.

Сондай-ақ астын сызатынымыз, бұл әдіс, сондай сияқты, яғни алғашқы зерзат моделінің бөлігі ғана қасиетіндей (басқа кіру берілулерінсіз, мысалы шектік шарттарсыз) дифференциалдық теңдеу қасиеттерін зерттейді.

Сондықтан оның негізінде алынатын қайсыбір инварианттық шешімдердің, нақты құбылысты сипаттау үшін жарамдылығы қосымша зерттелуі керек. Топтық талдаудан ерекше, өлшем бірліктер теориясына (оны, өлшем бірліктердің созу-қысуына келтіретін топтық симметрияның жеке жағдайы қолданылуы ретінде қарастыруға болады) және одан шығатын П-теоремасына барлық оның толықтығындағы модельмен әрекет жасайды.

8.2. Автомодельдік (өздік ұқсастық) үдерістер

Дифференциалдық теңдеулердің инварианттық шешімдері арасынан *өздік ұқсастық*, немесе *автомодельдік* (бұл аталымның мағынасы төменде түсінікті болады) шешімдерінің маңызды сыныбы бөлектеледі. Оларға қабылдануға жататындар кең пайдаланылатын жүгіргі толқындар тұрпатындағы шешімдер (8.1-кестесінен жағдай 4, $\chi = T^{\sigma}$ үшін), дәрежелік автомодельдік шешімдер (жағдай 5) және экспоненциальдік автомодельдік шешімдер (жағдайлар 6, 7).

Математикалық модельдерді зерттеу үшін автомодельдік шешімдерді тұрғызудың және талдаудың пайдалы екеніне сенеміз. Бірінші мысал ретінде қарастыратынымыз (8.5) теңдеулері жүйесіне арналған жүгіргі толқындар тұрпатындағы шешімдер. Олардың ізделінетін түрі

$$\rho(m, t) = \sigma(\xi) = \rho(m - Dt),$$
$$\upsilon(m, t) = \upsilon(\xi) = \upsilon(m - Dt),$$
$$p(m, t) = p(\xi) = p(m - Dt),$$

мұндағы $D > 0$ – біршама тұрақты. Бұл өрнектерді (8.5)-ке қоя отырып, біркелкілік үшін үшінші теңдеуді энергияның дивергенттік теңдеуімен ауыстырып, жүйенің жеке туындылық теңдеулерінің орнына үш әдеттегі дифференциалдық теңдеуді аламыз

$$D\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\rho} + \frac{d\upsilon}{d\xi} = 0, \qquad -D\frac{d\upsilon}{d\xi} + \frac{dp}{d\xi} = 0, \qquad -D\frac{d}{d\xi}\left(\varepsilon + \frac{\upsilon^2}{2}\right) + \frac{d}{d\xi}(p\upsilon) = 0,$$

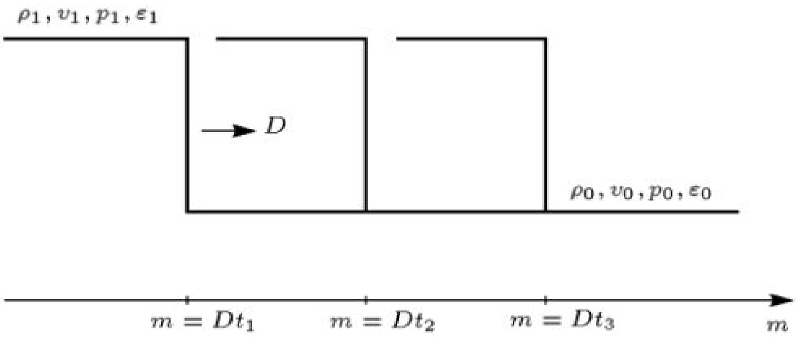
мұндағы $\varepsilon(\xi) = \varepsilon(m - Dt)$ – газдың ішкі энергиясы ($\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$). Олардың $\xi_0 > \xi_1$ еркін шектерде интегралдай отырып, ішінде үш интеграл сақталатын ағымдарға жауап беретін, жүгіргі толқын екеніне сенеміз:

$$D\frac{1}{\rho} + \upsilon = C_{\rho}, \qquad -D\upsilon + p = C_p, \qquad D\varepsilon + D\frac{\upsilon^2}{2} - p\upsilon = C_{\varepsilon}. \tag{8.6}$$

Үзіксіз ағымдар жағдайында (8.6) интегралдары бір шешімді – барлық ξ кезінде ρ, υ, p, ε мәндері тұрақты, береді.

Егер, өзінде «градиенттік қирау» болуынан газдық динамика теңдеулері *үзілулік шешімдерге* жол бере алатынын ескерсек, тривиалды емес нәтиже алынады. $\rho(\xi)$, $\upsilon(\xi)$, p(ξ) функцияларының үзілуі $\xi = 0$ нүктесінде орналассын делік. $\xi > 0$, $\xi < 0$ аймақтарында, яғни оның оң жағында да және сол жағында да тұрақты екені және де ρ_0, υ_0, p_0 және ρ_0, υ_0, p_0 шамаларының жиынтығымен сипатталатыны айқын (8.1-суретке қараңыз, мұнда шешім t_1, t_2, t_3; $t_1 < t_2 < t_3$ уақыт моменттеріндегі m координаттарының функциясы сияқты бейнеленген).

Газдинамикалық параметрлер секірісі еркін емес. Мұны жоғарыда жазылған интегралдарды талдай отырып көрсетеміз (сондай-ақ үзілу ағымдары үшін де дұрыс).



8.1-сурет

Автомодельдік шешіммен сипатталатын үзілу D тұрақты жылдамдығымен газ массасы бойынша қозғалады. Массалық жылдамдықтың өзгермеуі үзілудің бір жағынан «ағып кіретін» $I_\rho = D$ зат ағынының оның екінші жағынан «ағып шығатыныкімен» теңесуін қамтамасыз етеді. Бұл физикалық талаптың бұзылуы, ол арқылы өтуі кезіндегі заттардың қайсыбір мөлшерінің пайда болуын немесе жойылуын білдірген болар еді. Массаның «ағып кіретін» ағыны анықтамасы бойынша $I_\rho = D = \rho_0\,(u - \upsilon_0)$-ға тең, ал «ағып шығатыны» $I_{\rho_1} = D = \rho_1\,(u - \upsilon_1)$, мұндағы u – үзіліс қозғалысының эйлерлік жылдамдығы, және де $u - \upsilon_0 > 0$ мен $u - \upsilon_1 > 0$. $I_\rho = I_{\rho_0} = I_{\rho_1}$ теңдіктерінен шығатыны, бірінші интеграл (8.6) өзімен $u = u$ тепе-теңдігін көрсететіні.

Екінші интеграл (8.6)-ға назар аударамыз, оны 0 мен 1 индекстері бар шамалар үшін жазамыз:

$$C_{p_0} = p_0 + \rho_0 (u - \upsilon_0)^2 - I_\rho u \equiv I_{p_0} - I_\rho u\,,$$
$$C_{p_1} = p_1 + \rho_1 (u - \upsilon_1)^2 - I_\rho u \equiv I_{p_1} - I_\rho u\,.$$

Бұл теңдіктерде көрінетін I_{p_0}, I_{p_1} шамаларының маңыз-мәні – үзілудің оң жағынан да және сол жағынан да $I_\text{р}$ импульсінің ағындары. $C_\text{р} = C_{з_0} = C_{з_1}$ болғандығынан, олар да тең: $I_p = I_{p_0} = I_{p_1}$. Басқа жағдайда үзілуінің шексіз жұқа беті арқылы өтуі кезінде зат бөлшектері импульс (қозғалыс мөлшері) өсімшесін алған болар еді, бұлай болуы оларда әсер ететін шексіз үлкен күштер болуынан ғана мүмкін.

Соңында, үшінші интеграл (8.6) күрделі емес есептеуден соң үзілудің екі жағы бойынша мына түрде жазылады

$$C_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_0} - u\left(I_{p_0} + I_{\rho_0}\frac{u}{2}\right), \qquad C_{\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_1} - u\left(I_{p_1} - I_{\rho_1}\frac{u}{2}\right),$$

мұндағы $I_\varepsilon = \rho(u-\upsilon)\varepsilon + \rho(u-\upsilon)(u-\upsilon^2)/2 + p(u-\upsilon)$ – энергия ағыны. Жүгіргі толқындағы шама C_ε тұрақты және жоғарыда қалыптасқандырылған I_ρ, $I_\text{р}$ шамалары тұрақты болғанынан, сондай-ақ I_ε энергия ағыны да тұрақты, бұл $I_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_1}$ теңдігі болатынын білдіреді. Үзілуге «ағып кіретін» энергия, одан «ағып шығатын» энергияға тең (қарсы жақ оның ішінде шексіз қарқындылық энергиясы көздерінің бар екендігін білдіреді).

(8.6) интегралдарын талдаудан шығатын нәтижелерді ескере отырып, газдыдинамикалық параметрлер үзілуі беті арқылы өткен кездегі масса, импульс және энергия ағындарының үзіксіздігі жайлы тұжырымға келеміз:

$$I_{\rho_0} = I_{\rho_1}, \qquad I_{p_0} = I_{p_1}, \qquad I_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_1}.$$

Бұл тұжырымның $D = 0$ (*түйісулік үзілу*) жағдайында да дұрыс екенін байқаймыз.

Массасы бойынша қозғалатын үзілу газы (*соққы толқыны*) үшін қалыптасқан теңдіктерден D белгілі жылдамдығы кезінде *Гюгонио шартын* – секіріске дейінгі және кейінгі шамалар арасындағы бірмәндік байланысты табу қиын емес. Бұл шартты сондай-ақ соққылық толқынның екі жағы бойынша ағындарды тікелей есептеу көмегімен де алуға болады. Алайда жүгіргі толқын тұрпатындағы автомодельдік шешімдер олардың қасиеттерінің күшімен тұтас орталар модельдерінің көп саны үшін автоматты түрде Гюгонио шартын алуға мүмкіндік береді, жекелікте секіріс шексіз жұқа қабатта өтпеген жағдайда, мұнда зат ішінде болатын шашыраған үдерістер әрқашан қатысуымен қалыптасқан кеңістіктік созыңқылық бар. Мұндағы жүгіргі толқынға арналған теңдеулер өтпелі қабат құрылымын да сипаттайды.

Газ қысымы, тығыздығы мен ішкі энергиясы соққылық толқынмен артқан уақытта қысу секірістері сияқты Гюгонио шарттары жол беретінін аңғарамыз, солай, жалған түрде және сирету секірістері. Соңғылар, алайда, тек ортада сәйкес келетін физикалық үдерістер болғанда, мысалы, химиялық реакциялардың арнайы түрі ортада болған кезде ғана, іске асуы мүмкін.

Тұрғызылған шешімнің өздік ұқсастығы, немесе автомодельдігі 8.1-суретінен жақсы көрінеді: ол заттың түрлі телімдерінде уақыттың түрлі моменттерінде өзгеріссіз қайта өндіріледі. Шешім жалпыланған мағынада түсіндіріледі, өйткені ол (8.5) дифференциалдық теңдеуімен тек үзіксіз ағым аймақтарында ғана қанағаттандырады. $-\infty < m < \infty$ аймағында қарастырылатын ол, өзімен газдық динамика теңдеулері үшін, Коши есептерінің *жалпыланған шешімдерінің* бірін көрсетеді. Егер де массалық координатамен белгіленген қайсыбір нүктеде, айталық, $m = 0$ нүктесінде, сай келетін шекаралық шарттар берілсе, онда оны $m > 0$ аймағындағы тұрақты параметрлері бар ортада тұрақты жылдамдықпен қозғалатын поршень жайлы есеп деп түсіндіруге болады.

Енді (8.4) теңдеуінің жеке жағдайы үшін дәрежелік автомодельдік шешімді оқып білеміз

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(k^0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{8.7}$$

бұл шектелмеген ортада ($-\infty < x < \infty$) тездік нүктелік көзден жылу таралуын сипаттайды. $x = 0$ нүктесінде $t = 0$ моментінде бөлінген жылу мөлшері Q_0.

Автомодельдік шешімді табу үшін П-теоремасын пайдаланамыз. Оның төрт анықтайтын параметрге x, t, k_0, Q_0, яғни $T = T(x, t, k_0, Q_0)$-ға тәуелді екені айқын. Берілген теңдік бес өлшем бірлікті шаманы байланыстырады, оның үшеуінде тәуелсіз өлшем бірліктер бар. Яғни, П-теоремасына сай, ол екі П, $П_1$ өлшембірліксіз шама арасындағы функционалдық тәуелділікке $П = F(П_1)$ түйістіреді.

Өлшем бірлікті шамалар ретінде Q_0, x, t таңдалды. Сонда k_0 үшін (8.7) теңдеуінен шығатын өлшем бірліктің формуласы $[k_0] = [Q_0]^{-\sigma}[x]^{\sigma-2}/\,[t]$. T үшін өлшембірлік формуласы $[T] = [Q_0]/\,[x]$ алынатын шарт

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx\,, \qquad t \ge 0\,,$$

бұл жылу көздерісіз және ағынысыз шектелмеген ортада басиапқыда бөлінген энергияны сақтауды білдіреді. П-теоремасынан және өлшем бірлік формуласынан алатынымыз

$$П = T(x,\,t)xQ_0^{-1}, \quad П_1 = k_0 t x^{-(2+\sigma)}Q_0^{\sigma}$$

және, $П = F(П_1)$ байланысын ескеріп,

$$T(x,\,t)xQ_0^{-1} = F(k_0 t x^{-(2+\sigma)}Q_0^{\sigma}).$$

Соңғы теңдікті $\xi = П_1^{-1/(\sigma+2)}$ белгілеуін енгізіп, 7.3-кестесінде қабылданған түрде қайта жазамыз:

$$T(x,\,t) = Q_0\,x^{-1}F(П_1) = Q_0\,x^{-1}\Phi(\xi) = Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}}k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}}t^{-\frac{1}{2+\sigma}}\xi\Phi(\xi),$$

немесе, $\xi\Phi(\xi)$-ді $f(\xi)$ арқылы белгілей отырып,

$$T(x,\,t) = Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}}k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}}t^{-\frac{1}{2+\sigma}}f(\xi), \qquad \xi = Q_0^{-\frac{\sigma}{2+\sigma}}k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}}t^{-\frac{1}{2+\sigma}}x. \tag{8.8}$$

Өлшем бірліксіз инвариант ξ автомодельдік айнымалы деп, функция $f(\xi)$ – температурының *өлшем бірліксіз функциясы* (өкілі) деп, (8.8)-дегі $f(\xi)$ алдындағы өлшем бірлікті көбейткіш – масштабтық көбейткіш деп аталады. *Тіркелген автомодельдік күй* деп, $\xi = \xi_0$ тіркелген автомодельдік координатқа сай келетін күй аталады.

Өлшем бірліктер талдауы есептің толық шешімін таппастан, үдеріс жайлы құнды алдын ала ақпарат алу мүмкіндігін береді. Солай, $\xi = \xi_0$ нүктесіндегі шешім уақытымен өзгеру қарқыны, жекелікте $\xi = 0$ нүктесінде, тек масштабтық көбейткішпен ғана анықталады. Сондықтан координат басталуында $x = 0$ $(\xi = 0)$ температура бұрыннан белгілі заң бойынша төмендейді

$$x(\xi_0) \sim t^{-\frac{1}{2+\sigma}}f(0).$$

Сондай-ақ $\xi = \xi_0$ күйі үшін x координатысының уақытпен өсу жылдамдығы да бұрыннан белгілі:

$$T(0,t) \sim t^{-\frac{1}{2+\sigma}}\varepsilon_0.$$

Егер $T(0,\,t)$ қыздырылған аймақтың сипаттаушы температурасына, ал $x(\varepsilon_0)$ – оның сипаттық ауқымына қабылданса, онда олардың көбейтіндісі $T(0,\,t)\cdot\,x(\varepsilon_0)$ уақыттан тәуелді болмайды, бұл орта құрамында болатын Q_0 жылу энергиясының тұрақтылығы шартымен үйлеседі.

(8.7)-ге (8.8)-ді енгізіп және дифференциалдау жүргізіп, $f(\xi)$-ге қатысты сызықты емес әдеттегі екінші реттегі дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\frac{f}{2+\sigma}+\xi\frac{f'}{2+\sigma}=-(f^{\sigma}f')'.$$

Оны мына түрге түрлендіреміз

$$\frac{1}{(2+\sigma)}(\varepsilon f)'+(f^{\sigma}f')'=0$$

және бір рет интегралдаймыз:

$$\frac{1}{(2+\sigma)}\varepsilon f+f^{\sigma}f'=C_1.$$

Мұндағы C_1 = 0, өйткені ε = 0 кезінде шешім шектелген (f (0) < ∞), жатық саналады және тұрғызылуы бойынша симметриялық, яғни f '(0) = 0 болады. C_1 = 0 кезінде соңғы теңдеудегі айнымалылар бөлектенеді және ол оңай интегралданады:

$$f(\xi)=\left[(\xi_{\Phi}-\xi^{2})\frac{\sigma}{2(2+\sigma)}\right]^{1/\sigma},\ |\xi|\le\xi_{\Phi}.$$

Алынған формула |ξ| > $\xi_{Ф}$ кезінде теріс мәндер беретіндігінен, бұл аймақта f(ξ) нөлге тең деп жорамалданады (|ξ| = $\xi_{Ф}$ нүктелерінде шешім тривиалдық (еш жаңалығы жоқ) шешіммен «тігіледі»). Шама |ξ| = $\xi_{Ф}(\sigma)$ > 0 ортадағы энергия тұрақтылығы шартының өлшем бірліксіз ұқсасының $\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi=1$ теңдеуінен анықталады

$$\varepsilon_{\Phi}=\left[\frac{(2+\sigma)^{\sigma+1}2^{1-\sigma}}{\sigma\pi^{\sigma/2}}\frac{\Gamma^{\sigma}(1/2+1/3)}{\Gamma^{\sigma}(1/\sigma)}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}},$$

мұндағы Г – гамма-функция.

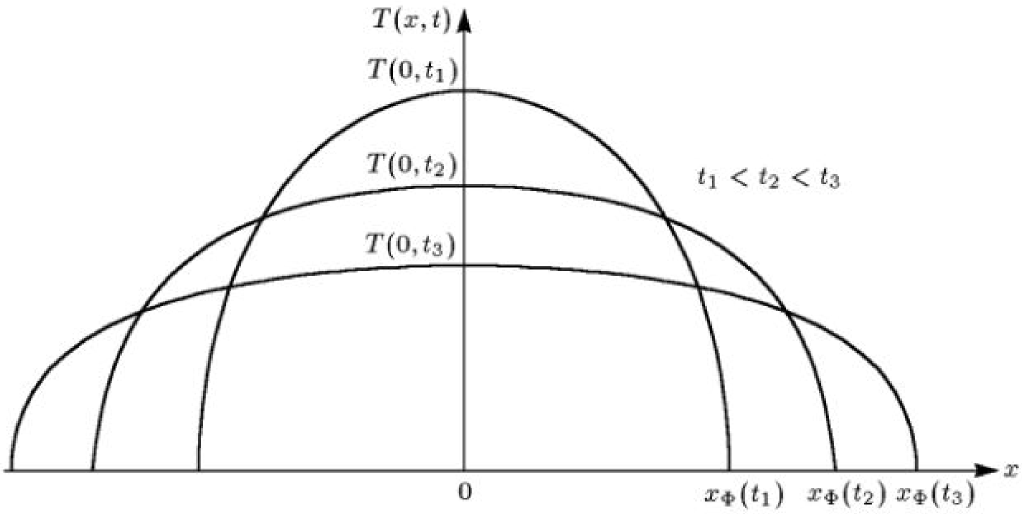
(8.8)-ді пайдалана отырып, сызықты еместік ортадағы жылудың тез нүктелік көзі жайлы есептеудің соңғы түріне келеміз:

$$T(x,\,t)=\begin{cases}Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}}k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}}t^{-\frac{1}{2+\sigma}}\left\{\left[1-\frac{x^2}{x_{\Phi}^2}\right]\frac{\xi_{\Phi}\sigma}{2(2+\sigma}\right\}^{1/\sigma}, & |x|\le x_{\Phi}(t),\\ 0, & |x|\rangle x_{\Phi}(t).\end{cases}\qquad(8.9)$$

Мұндағы $x_{Ф}(t)=\xi_{\Phi}(Q_0^{\sigma}k_0)^{1/(2+\sigma)}t^{1/(2+\sigma)}$.

Шешім (8.9) жалпыланылған, өйткені жеткілікті үлкен σ кезінде оның x пен t бойынша туындылары $|x|$ = $x_{Ф}(t)$ нүктелерінде жоқ болады және олардың ішінде нақты мағынада ол (8.7) теңдеуін қанағаттандырмайды. Алайда жылу ағыны үзіксіздігінің табиғи физикалық талабы $W(x,\,t)$ = $-k_0T^{\sigma}\partial T/\partial x$ $|x|$ = $x_{Ф}(t)$ нүктелерінде, орындалады (қарсы жақ бұл нүктелерде шексіз қарқындылық энергиясы көздерінің немесе ағымдарының бар екендігін білдіреді).

Жылу таралуы заттардың барлық жаңа және жаңа телімдерін қамтитын *толқындар* түрінде өтеді (8.2-сурет). Ол орта бойынша *шеттік жылдамдықпен* (σ = 0 жағдайы үшін) қозғалады. *Толқын майданы* – кеңістіктің суық бөлігінен қыздырылған бөлігін бөліктейтін нүкте, – тіркелген автомодельдік күйге де ξ = $\xi_{Ф}$, тіркелген физикалық күйге де Т($x_{Ф}(t)$, t) = 0 бір мезгілде жауап беретін $x_{Ф}(t)\sim t^{\frac{1}{2+\sigma}}$ заңы бойынша қозғалады.



8.2-сурет

(8.9) шешімінің өздік ұқсастығында алдыңғы мысалдағыдан гөрі біршама басқа геометриялық өрнек бар. 8.2-суретіндегі қисықтарды «автомодельдік өңделуінен» кейін бірге ($f(\xi)$ функциясына) – x, t аргументтерінің және $T(x, t)$ функциясының созу-қысу түрлендірулеріне сай келетінге орналастыруға болады.

Автомодельдік шешімдер сызықты еместік модельдер үшін зерзаттардың қайсыбір қасиеттерін ашатын маңызды жеке шешімдер ретінде ерекше рөл атқарады. Оларды оқып білу сызықты еместік құбылыстардың (соққы толқыны, жылу толқыны және т. б.) қарапайым тілінің өздік тегін өндіруді қабілеттендіреді. Алайда мұнымен олардың мәні шектеле қоймайды. Нақтылы жағдайларда жалған түрдегі автомодельдік үдерістердің үлкен сыныбы үшін олар *аралық асимптотикалар* қызметін атқарады. Заттың қайсыбір бөлігінде жылу энергиясының бөлінуі тездік те, нүктелік те бола алмайтыны, айқын. Осы қиыншылық жағдайға қарамастан оның ортада (мұндағы $k(T) = k_0T^\sigma$, $\sigma > 0$) таралуы, $t = 0$ моментінде жеткілікті суық, жеткілікті үлкен уақыт ағымы бойынша және $x_\Phi(t)$-ның жеткілікті үлкен мәндерінде жақсы дәлдікпен (8.9) шешімімен сипатталады. Тетіктер бастапқы кезеңде «ұмытылады» және де үдеріс өздік ұқсас режімге (аралық асимптотикаға) «шығады».

8.3. Сызықты еместік орталардағы ауытқулар таралуының түрлі режімдері

Егер сызықтық емес модель бай топтық қасиеттерге ие болса, онда жекеленген шешімдерді емес, әртүрлі тәртібі бар аралық асимптотиктердің жиынын алу мүмкіндігі пайда болады.

(8.7) теңдеуімен сипатталатын жылу таралуының түрлі режімдерін оқып білеміз. Үдеріс $t = t_0$ моментінде суық, $0 < x < \infty$ жартылай шектелген ортада қарастырылады:

$$T(x, t_0) = T_0(x) = \text{O}, \qquad 0 < x < \infty, \tag{8.10}$$

және сол жақ шекарамен қыздырылады, мұндағы $x = 0$ нүктесінде температура уақытпен мына заң бойынша өседі

$$T_0(0, t) = A_0(t_f - t)^n, \quad n < 0, \quad t_0 \le t < t_f < \infty. \qquad (8.11)$$

(8.7), (8.10), (8.11) есептері маңызға ие болады тек $t < t_f$ кезінде, өйткені $t = t_f$ шеттік моментінде шекаралық температура шексіздікке айналады. Ұқсас тұрпаттағы үдерістер *асқынуы бар режімдер* деп аталады және геометриялық зерзаттарды, олардың сызықты еместігін және тағы басқаларды тудыратын көптеген шынайы құбылыстардың математикалық дәріптеушілігі болады. Бұған жататындар, мысалы, сфералық соққы толқынының оның орталығына үйлесуі, ауа көпіршіктерінің сұйықтарға шапалақтасуы және басқа да кумуляцияның түрлері (геометриялық себепкерлік шарт). Басқа мысал: Жердегі халық санының $N(t)$ өсуі, $dN/dt = \alpha_0 N^2$ таралымдық модельден шығатын, бірнеше соңғы ғасырлар ағымындағы заңмен $N(t) = N_0/(t_f - t)$, $t_f =$ 2026 (жыл) жақсы сипатталады (күшті сызықты еместік).

(8.7), (8.10), (8.11) есептерінің шешімі x, t, k_0, A_0, t_0, t_f шамаларымен анықталатыны, айқын. Функционалдық байланыс $T = T(x, t, k_0, A_0, t_0, t_f)$ құрамында жеті параметр бар, мұның үшеуі өлшем бірлікті түрде тәуелсіз болады. t_0, t_f параметрлерінің «кедергі жасайтын» автомодельдігінен құтыламыз. $t_f = 0$ асқындыру моментін аламыз (жалпылықты шектеместен) және үдерісті $-\infty \le t < 0$ кезінде қарастыратын боламыз, яғни $t_f = -\infty$ (уақыт бұрынғысынша өседі, өткеннен болашаққа ағады). Осылайша қалыптасқан мәселе П-теоремасы бойынша, автомодельдік болады. (8.8) формуласын қорыту кезінде қолданылғанға ұқсас есептеулерді өткізіп, ізделуші автомодельдік шешім түрін аламыз:

$$T_0(0, t) = A_0(-t)^n f(\xi); \qquad \xi = k_0^{-1/2} A_0^{-\sigma/2} (-t)^{-\frac{1+n\sigma}{2}} x, \qquad \xi \ge 0. \qquad (8.12)$$

(8.7)-ге (8.12)-ні енгізу $f(\xi)$ үшін екінші реттегі әдеттегі дифференциалдық теңдеуді береді ((8.10), (8.11)-ден шығатын шеттік шарттары бар):

$$\frac{d}{d\xi}\left(f^{\sigma} \frac{df}{d\xi} \right) - \frac{1+n\sigma}{2} \xi \frac{df}{d\varepsilon} + nf = 0, \qquad f(\infty) = 0, \quad f(0) = 1. \qquad (8.13)$$

Теңдеу (8.13) өз кезегімен $\xi' = \alpha\xi$, $f' = \beta f$, $\beta = \alpha^{2/\sigma}$ ұқсастықтарының түрленуіне жол береді (созу-қысу) және сондықтан стандарттық әдістермен зерттелетін, бірінші реттегі теңдеуге алып барады. Талдау (8.13) есебінің шешімі, барлық $n < 0$, $\sigma > 0$ кезінде, жалғыз ғана және бірқалыпты болатынын көрсетеді.

Оның қасиеттері n (шекаралық температура өсуінің жылдамдығы) мен σ (ортаның сызықты еместігі) параметрлері арасындағы арақатынаспен анықталады. Дағдарыстық болатын мән $n = -1/\sigma$, мұнда (8.13) теңдеуіндегі екінші мүше түсіп қалады және ол айқын түрде интегралданады. Оны (8.12) көмегімен бастапқы айнымалыларда қайта жазып, алатынымыз

$$T_S(x, t) = \begin{cases} A_0(-t)^{-1/\sigma}\left(1 - \dfrac{x}{x_\Phi}\right)^{2/\sigma}, & x \le x_\Phi, \\ 0, & x > x_\Phi, \end{cases} \qquad (8.14)$$

мұндағы

$$x_{\Phi} = x_S \equiv \left(2k_0 A_0^{\sigma} \frac{\sigma+2}{\sigma} \right)^{1/2}. \qquad (8.15)$$

(8.13) шектік шарттарының біріншісі «мерзімінен бұрын» (яғни $x = x_{\Phi}(k_0, A_0, \sigma) < \infty$ кезінде) орындалады, майдандағы жылу ағыны нөлге тең ((8.9) шешіміндегідей). Шешім (8.14) жалпыланылған, өйткені оның $x = x_{\Phi}$ нүктесіндегі туындылары, σ жеткілікті үлкен кезде, бола алмайды.

$n < -1/\sigma$ кезінде қыздырылған мен суық заттың арасындағы шекарада да шарттар соңғы $\xi_{\Phi} = \xi_{\Phi}(n, \sigma) < \infty$ нүктеде орындалады (майдан координатының мәні нақты n, σ үшін сан түрінде табылады). Оның төңірегінде шешім реті асимптотикалық өрнекпен сипатталады, оның бірінші мүшесі – $f(\xi) \to 0$, $\xi \to \xi_{\Phi}$ жормалындағы (8.13)-тен алынатын ықшамдалған теңдеу шешімі:

$$f(\xi) = \begin{cases} \left(-\dfrac{1+n\sigma}{2} \sigma \xi_{\Phi} \right)^{1/\sigma} (\xi_{\Phi} - \varepsilon)^{1/\sigma} + \ldots, & \xi \le \xi_{\Phi}, \\ 0, & \xi > \xi_{\Phi}. \end{cases} \qquad (8.16)$$

Мұнда және әрі қарай көпнүктемен аздықтың жоғырақ реті белгіленген. (8.16)-дан көрінетіні, $n < -1/\sigma$ кезіндегі шешім (8.9)-дағыдай жатықтық ретімен жалпыланған ((8.14)-дегі жатықтық (8.9) бен (8.16)-дағыдан гөрі жоғары). Алайда майдан нүктесіндегі жылу ағыны, (8.9) бен (8.14)-дегідей, үзіксіз.

$n \le -1/\sigma$ жағдайынан ерекшеленіп, $n > -1/\sigma$ кезіндегі толқын майданындағы шарттар тек $\xi \to \infty$ кезінде ғана орындалады. Шешім – барлық $\xi \ge 0$ кезінде жатық функция, майдандағы оның асимптотикалық шешімі берілетін формула

$$f(\xi) = C\xi^{\frac{2n}{1+n\omega}} + C_1\xi^{\frac{2n-2}{1+n\sigma}} + \ldots, \quad 1 + n\sigma > 0, \qquad (8.17)$$

мұндағы $C = C(n, \sigma) > 0$ (сан түрінде табылады) және $C_1 = -C^{\sigma+1} + [2n\,(2n + n\sigma - 1)]/(1 + n\sigma)^2 < 0$.

Барлық n, σ үшін $\xi \to 0$ кезінде шешімнің иеленетін асимптотика

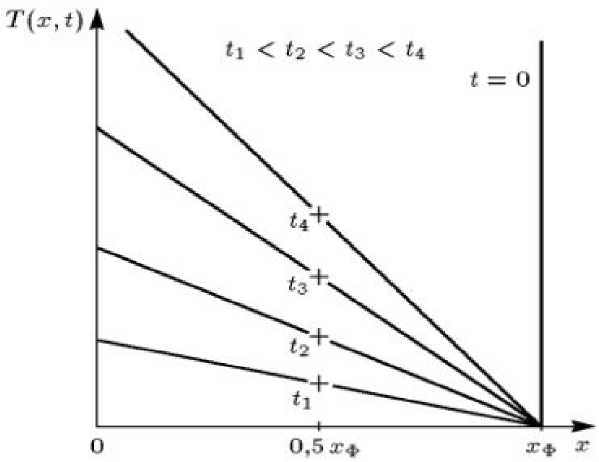
$$f(\xi) = 1 + f'(0)\xi + \ldots, \qquad f'(0) = \frac{df}{d\xi}(n,\sigma)\Big|_{\xi=0} < 0,$$

бұл орта шекарасындағы жылу ағынының оң және энергияның затқа түсетінін білдіреді.

$n = -1/\sigma$, $n < -1/\sigma$ және $n > -1/\sigma$ жағдайларын ажырата отырып, тұрғызылған шешімдердің физикалық қасиеттерін талдауға өтеміз.

1) $n = -1/\sigma$ кезінде жылулық толқынның майданы қозғалмалы емес. Қыздырылған аймақтың *тиімді ауқымы*, мысалы, *жартылай кеңдік*, яғни $x_{\text{тиім}}(t)$ нүктесі $T(x_{\text{тиім}}(t), t)/T(0, t) = ½$-мен бірдей, бұл да уақытпен өзгермейді. Бұл шешімнің автомодельдігі басқа шешімдер сияқты бөлектелінетін айнымаларда ($u(x, t) = U(t)\ V(x)$ түрлеріне ие), уақыттың түрлі моменттерінде, оның кеңістіктік кескіндерінің бірдейлігінде өрнектеледі. Кескіндер бұл жағдайда тек амплитуданың уақытпен U(t) өсуімен ғана ерекшеленеді. Осындай қасиетке Буссинеск реттелген режімі ие, бұл үшін амплитуда – уақытпен азаятын функция.

(8.14) шешімін тоқталған жылу тоқыны деп атауға болады (8.3-суретке қараңыз, мұнда $\sigma = 2$-ге ие орта үшін шешімнің кескіндері көрсетілген, крест таңбасымен жартылай кеңдік белгіленген). Бұл режимде $t \to 0$ кезінде затқа энергияның шексіз мөлшері түседі; температура және жылуөткізгіштік коэффициент барлық $0 \leq x < x_S$ кезінде шексіздікке ұмтылады.



8.3-сурет

Осыған қарамастан A_0 шекаралық режимнің қарқындылығымен және k_0 ортаның σ қасиеттерімен анықталатын $x = x_S$ координаттарымен жылу әрі қарай өтпейді. Шешім (8.14) жылу таралуы соңғы ауқымдар аймағында *шоғырланған* бола алатынын көрсетеді – *шоғырландыру аймақтары* (x_S – *шоғырлану тереңдігі*). Сондықтан энергияның кез келген мөлшерін оны заттың шектелмеген телімдерінде шоғырлану аймағынан асыра таратусыз шоғырлаудың қағидалық мүмкіндігі бар.

2) $n < -1/\sigma$ жағдайында қыздыру толқыны майданының координатасы $t \to 0$ кезінде шексіз үлкейеді:

$$x_Ф(t) = k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}} \xi_Ф \to \infty.$$

Осындай жағдай $x_{тиім}(t)$ толқынның жартылай кеңдігі және $\xi = \xi_0$ тіркелген автомодельдік күйі бар $x(t, \xi_0)$ барлық нүктелерінің координаттары үшін де орын алады.

Заттың $x = x_0 < \infty$ тіркелген нүктесінде шешімнің өзгеруін бақылаймыз. Оған жауап беретін автомодельдік координата $\xi(t, x_0)$, (8.12) формуласынан көрінетіндей, $t \to 0$ кезінде нөлге ұмтылады. (8.12)-нің бірінші формуласын аша отырып, $t \to 0$ кезінде аламыз

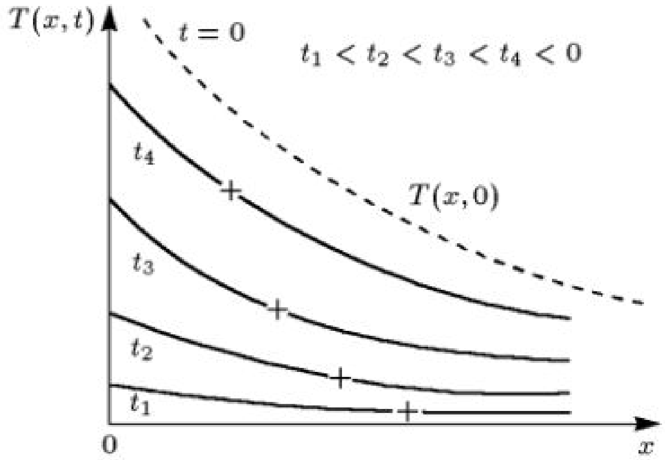
$$T(x_0, t) = A_0(-t)^n f(\xi(x_0, t)) - A_0(-t)^n f(0) = A_0(t)^n \to \infty.$$

Сонымен, асқыну мезетіне жақындау кезінде толқын барлық кеңістікті қамтиды, кез келген нүктедегі ортаның температурасы шексіз өседі, шоғырлану болмайды. Алайда шексіз параметрлерге $t \to \infty$ кезінде емес, соңғы уақытта ғана жетуге болады. Ортаның әсірежылдам қыздырылуы өтеді.

3) $n > -1/\sigma$ кезінде жылу таралуы мүлдем басқаша іске асады. (8.12) ден көрінетіні жартылай кеңдік уақыт өтуімен мына заң бойынша қысқаратыны

$$x_{\text{тиім}}(t) = k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}} \xi_{\text{тиім}} \to 0, \qquad t \to 0.$$

Шешім өзімен қыздырудың азаятын тиімді терендігі бар жылу толқынын көрсетеді. Уақыт ағымымен затқа түсетін энергия шекараға жақын аймақта шоғырланады (8.4-сурет). (8.17), (8.12)-ден шығатын жылу толқынының «майданы», $x = \infty$ нүктесінде болады ($x_{\text{тиім}} < \infty$ кезінде қыздырылған аймақ ауқымы уақыт өтуімен азаяр еді, бұл ортада энергия сіңірілуінсіз мүмкін емес).



8.4-сурет

Затттың тіркелген $x = x_0$ $(0 < x_0 < \infty)$ нүктесінде иеленетініміз $\xi(x_0, t) \to \infty$, $t \to 0$, яғни координата $\xi(x_0, t)$, алдыңғы жағдайдан ерекшеленіп, майдан координатына ұмтылады. (8.17) асимпотикасын және (8.12) формуласын пайдалана отырып, $t \to 0$ кезінде аламыз

$$T(x_0, t) \to C(k_0^{-n} A_0)^{\frac{1}{1+n\sigma}} x_0^{\frac{2n}{1+n\sigma}} + C_1(k_0^{1-n} A_0^{1-\sigma})^{\frac{1}{1+n\sigma}} x_0^{\frac{2n+2}{1+n\sigma}}(-t) + \ldots \qquad (8.18)$$

$x = 0$ нүктесінде температураның шектеусіз өсуіне қарамастан, барлық қалған ортада ол барлық $t \le t_f$ кезінде жоғарғы жағынан шектік қисықпен шектелген ((8.18)-дегі бірінші мүше; 8.4-суретіндегі – жіңішке сызықтық қисық). 3) жағдайында сондай-ақ жылу шоғырлануы $n = -1/\sigma$ кезіндегіден бөлек басқа режімде іске асады.

(8.7), (8.10), (8.11) мәселелерінің автомодельдік шешімдерін талдау қарапайым математикалық құралдары көмегімен жылу өткізетін ортада жылу таралуының үш қағидалы түрдегі әртүрлі режімдерін қалыптастыруға және олардың маңызды қасиеттері қатарын оқып білуге мүмкіндік берді. Олар негізінде $t \to 0$ кезіндегі энергияны ортаға жақындату жылдамдығымен және оның сызықты еместігі дәрежесімен анықталады. «Баяу» режімдер үшін ($n = -1/\sigma$, S-*режім*; $n > -1/\sigma$, LS-*режім*) жылу шоғырлануы орын алады, «шапшаң» қыздыру кезінде ($n < -1/\sigma$, HS-*режім*) бұл эффект болмайды.

Автомодельдік шешімдердің өз қасиеттері әртүрліліктерінің жиынтығымен квазисызықты параболалық теңдеулеріне келтіретін математикалық модельдер ғана емес, сондай-ақ және де газдық динамиканы алуға болады. Ауытқулар таралуының асқындыратын режімдерін қарапайым квазисызықты гиперболалық теңдеуін – Хопф теңдеуін оқып білеміз

$$\frac{\partial p}{\partial t} + k_0 p^{\sigma} \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \qquad (8.19)$$

бұл қысымға қатысты $p = p(m, t)$, $\sigma = (\gamma + 1)/(2\gamma) < 1$ жазылған.

Ол үшін $m > 0$ жартылай кеңістікті алатын газды қысатын, нөлдік бастапқы қысымы бар поршень жайлы есепті қарастырамыз:

$$p(m, t_0) = p_0(mt) = 0, \qquad 0 < m < \infty. \qquad (8.20)$$

Поршень $m = 0$ нүктесіне орналасқан, мұндағы қысым асқынуы бар режімде өседі:

$$p(0, t) = A_0(t_f - t)^n, \qquad n < 0, \quad t_0 \le t < t_f < \infty. \qquad (8.21)$$

(8.19)–(8.21) есептері автомодельді, егер мұның алдындағы жағдайға ұқсас $t_0 = -\infty$ (бұрынғыдағыдай, $t_f = 0$ жалпылығын шектеусіз аламыз) делініп болжамдалса. Осы шешімнің П-теоремасына сай иеленетін түрі

$$p(m, t) = A_0(-t)^n f(\xi), \qquad \xi = k_0^{-1/2} A_0^{-\sigma} (-t)^{-(1+n\sigma)} m, \ \xi \ge 0. \qquad (8.22)$$

(8.19), (8.22)-ден $f(\xi)$-ді анықтау үшін бірінші реттегі теңдеуді аламыз

$$\frac{df}{d\xi}(f^{\sigma} + (1 + n\sigma)\xi) - nf = 0, \qquad (8.23)$$

мұның бұрынырақ жазылған түрі

$$\frac{d\xi}{df} = \frac{f^{\sigma} + (1 + n\sigma)\xi}{nf},$$

ξ-ге қатысты сызықты түрде. Оның жалпы шешімі

$$\xi = f^{\sigma+1/n} - f^{\sigma}, \qquad (8.24)$$

бұл (8.21)-ден шығатын келесі $f(0) = 1$ шартын қанағаттандырады (сондай-ақ (8.24)-ты талдау кезінде (8.20)-дан шығатын $f(\infty) = 0$ шарты орындалуын қадағалау керек). Шешімдер қасиеттері n мен σ арасындағы арақатынастарға тәуелді.

1) $n = -1/\sigma$ кезінде (8.24), (8.22) ден бөлектейтін айнымалылардағы айқын шешімді аламыз (*қысудың тоқтаған толқыны* немесе газдинамикалық S-режім):

$$p_S(m,t) = \begin{cases} A_0(-t)^{-1/\sigma}\left(1 - \dfrac{m}{m_{\Phi}}\right)^{-1/\sigma}, & m \le m_{\Phi}, \\ 0, & m > m_{\Phi}, \end{cases} \qquad (8.25)$$

мұндағы $m_{\Phi} = m_S = k_0 A_0^{\sigma}$ – ауытқымаған заттан газ қозғалысына келгеннен бөлектейтін қысу толқыны майданының координатасы. Толқын майданы және оның жартылай кеңдігі уақыт ағымында тұрақты, қысым және қалған басқа газдинамикалық шамалар – жылдамдық, тығыздық және тағы басқалар – $t \to 0$ кезінде $0 \le m < m_S$ аймағында шектеусіз өсе түседі. Алайда $m > m_S$ кезінде газ қозғалмайды және барлық $t < 0$ кезінде (эйлерлік координаттарда бұл, шексіз жұқа қабатта, қалған басқа заттарға тиіспей, поршень өзіне тиіп тұратын m_S газдың соңғы массасын қысып тұратынын білдіреді) суық болып қала береді. Шешім (8.25) есеп параметрлерімен анықталатын m_S шектелген тереңдігіндегі *қысу шоғырлануы* эффектісін көрсетеді, яғни эффект, S-режіміндегі жылу шоғырлануына толығымен ұқсас.

2) Тура осындай толық ұқсастық $n > -1/\sigma$ (газдинамикалық LS-режім) жағдайында да бар. Шешім, (8.24)-тен көрінетіндей, ξ өсуімен бірқалыпты азаяды және $\xi = \infty$ кезінде ($f(\infty) = 0$ шарты орындалған) нөлге айналады. Қысу толқынының майданы $m = \infty$ нүктесіне орналасқан, оның жартылай кеңдігі

$$m_{эф}(t) = k_0 A_0^{\varpi} (-t)^{1+n\sigma} \xi_{эф}$$

$t \to 0$ кезінде ($\xi_{тиім} f(\xi_{тиім}) = ½$ -ні ескеріп (8.24) тен оңай табылады) нөлге дейін қысқарады. Газға поршеньмен жеткізілетін энергия, уақыт өтуімен кішірейетін шекараға жақын аймақта шоғырланады.

Кез келген $0 < m_0 < \infty$ үшін барымыз $\xi(m_0, t) \to \infty$, $t \to 0$. Сондықтан, (8.24)-ті $f(\xi)$-ге қатысты $\xi \to \infty$ кезінде шеше отырып:

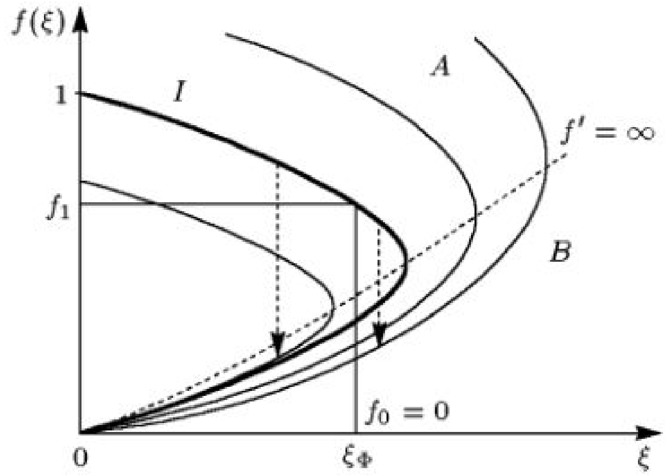
$$f(\xi) = \xi^{\frac{n}{1+n\sigma}} + n(1+n\sigma)^{-1} \xi^{\frac{n-1}{1+n\sigma}} + \ldots,$$

және (8.22) көмегімен бастапқы айнымалыларға өтіп, t $\to$ 0 кезінде, аламыз

$$p(m_0, t) \to \left(\frac{A_0}{k_0^n}\right) m_0^{\frac{n}{1+n\sigma}} + \frac{n}{1+n\sigma}\left(\frac{A_0^{\sigma+1}}{k_0^{n-1}}\right)^{\frac{1}{1+n\sigma}} m_0^{\frac{n-1}{1+n\sigma}}(-t) + \ldots$$

Шешім, $t = 0$ моментінде тек $m = 0$ шексіздікке айналып, төменде шектік қисыққа ұмтылады (алынған формуладағы бірінші мүше).

3) $n < -1/\sigma$ кезінде шешімді талдау үшін, 8.5-суретте көрсетілген (қалың сызықпен қисық I бөлінілген, бұл үшін $f(0) = 1$, үзікті жіңішке сызық – A мен B аймақтарына жазықтықты бөлетін шексіздіктің изоклині (изосызығы), (8.23) теңдеуінің интегралдық қисықтары өрісін қарастырамыз. Суреттен көрінетіні, $f(\infty) = 0$ талабына жауап беретін үзіксіз шешімдердің болмайтындығы, өйткені I қисығын $f' = \infty$ сызығынан тыс B аймағында жалғастыруға болмайды. Осы себептен де бағдар сызықшалармен бейнеленген, секірістер көмегімен алынатын үзілудің шешімдерін тұрғызуға болмайды. Сонымен, жалғыз мүмкіндік – абсцисса осіне түсетін I қисығы бар секіріс ауысуы және $\xi > \xi_ф$ кезіндегі жалғастыру, $\xi_ф$ – шешімі нөл секіріс координатасы ($f(\xi) = 0$ мәні (8.23) теңдеуін қанағаттандырады).



8.5-сурет

(8.19) теңдеуін шешу үшін, секірістегі шартты, (8.19)-ды дивергенттік түрде келтіріп, (8.5) теңдеуімен ұқсастыру бойынша, алуға болады

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(p)}{\partial m} = 0,$$

мұндағы $\varphi(p) = k_0 p^{\sigma+1}/(\sigma + 1)$, және бұл үшін жүгіргі толқынның $p(m, t) = p(m - Dt)$ тұрпатындағы үзілулік шешімі тұрғызылған. Функция p-ның үзілуге дейінгі және кейінгі мәндерін байланыстыратын арақатынас

$$D = \frac{\varphi(p_0) - \varphi(p_1)}{p_0 - p_1}.$$

Осыдан автомодельдік шешім (8.22) үшін алатынымыз

$$\overline{D} = -(1 + n\sigma)(\sigma + 1)\xi_{\Phi} = \frac{f_0^{\sigma+1} - f_1^{\sigma+1}}{f_0 - f_1},$$

мұндағы $\xi_ф$ – үзілудің автомодельдік координатасы, $\overline{D}$ – оның өлшем бірліксізденген жылдамдығы, мұны $D(t)$ лездік жылдамдықпен байланыстыратын арақатынас $D = (\sigma + 1)^{-1} k_0 A_0^{\sigma} (-t)^{n\sigma} \overline{D}$. Бізді қызықтыратын f_0=0 жағдайды f_1 мен $\xi_ф$ арасындағы байланыс

$$f_1 = [-(1 + n\sigma)\ (\sigma + 1)\ \xi_ф]^{1/\sigma},$$

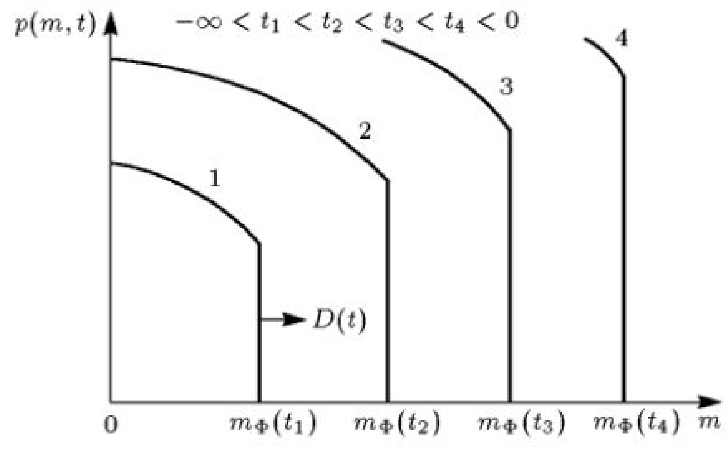
мұны қолдана отырып, нүкте (f_1, $\xi_ф$), $f\,' = \infty$ сызығынан жоғары жататынын, яғни ізделуші үзілу шешімінің шынында да болатынын айқындау қиын емес.

Шешім уақыттың түрлі моменттеріндегі m функциясы сияқты 8.6-суретте бейнеленген. Оның майданы $m_ф(t)$ және жартылай кеңдігігі $m_{тиім}$ мынадай заң бойынша шексіз өседі

$$m_ф(t) \sim m_{тиім}(t) \sim (-t)^{1+n\sigma} \to \infty,\ t \to 0.$$

Шекте ауытқу барлық кеңістікті қамтиды, шешім $t \to 0$ кезінде кез келген нүктеде $m_0 < \infty$ шексіздікке ұмтылады.

Сонымен, жылуөткізгіштік үдерістегідей, «баяу» режімдерде асқынумен ауытқу шоғырланған, «шапшаңдарда» – шоғырлану болмайды.



8.6-сурет

Теңдеу (8.19), үзіксіздік жайлы болжамда және ағым энтропиялығынан, (8.5) теңдеулерінен қорытылатынын байқаймыз (қарапайым толқын). $n \geq -1/\sigma$ жағдайында тұрғызылған шешімдер үзіксіз болғанынан, олар (8.5)-ті қанағаттандырады және тікелей газдинамикалық түсіндіруге ($n < -1/\sigma$ кезіндегі үзілудің шешімінен өзгешеленеді) жол береді.

МАКСИМУМ ҚАҒИДАСЫ ЖӘНЕ САЛЫСТЫРУ ТЕОРЕМАЛАРЫ

Үдерістің енгізілуші берілулерден үзіксіз тәуелділігі жайлы ұсынымды береміз. Салыстыру теоремалары мен автомодельдік шешімдер жиынтығы көмегімен сызықты еместік орталардағы режімдердің асқынумен тұйықталған жіктеуін тұрғызамыз. Автомодельдік әдісті талдап қорытуды қарастырамыз.

8.4. Тұжырымдама, біршама салдарлар

Қандай да бір әртүрлілікті болғанымен аралық асимптотиктердің жиынтығы жалпы жағдайда зерзаттың сипатын бере алмайды, өйткені оларды алу кезінде әрқашанда күшті ықшамдаулар жасалынады (қыздырылатын ортадағы температураның нөлдік бастапқы жағдайы, соққы толқынына дейінгі және кейінгі ағымдардың тұрақтылығы, шекарадағы шешім – уақыттың дәрежелік функциясы және т. б.). Жеткілікті толық картинаны математикалық модельдердің *тұрақтылығын* немесе *шешімдердің енгізілуші берілулерден үзіксіз тәуелділігін* пайдаланбай тұрғызу мүмкін емес. Мұнымен шешімдердің шеттегі шарттары, теңдеулер коэффициенттері және модельдердің басқа да сипаттамалары күшті емес өзгергені кезінде күшті емес түрде (біршама мағынада) өзгеруі түсініледі. Түрлі жағдайлар үшін математикалық түрде әртүрлі өрнектелетін тұрақтылық, модельдер түзетілуінің қажет шарттарының бірі болады, мұнысыз олардың парапарлығы жайлы зерттемеленетін зерзатқа сөз айтуға болмайды (нақты мағынада зерзаттың өзі де тұрақты деп жорамалданады). Тұрақты модельдер үшін жеке шешімдердің жиынтықтары өзіндік тектегі бағдарлар немесе барлық мүмкін шешімдердің көптігі арасынан шекаралар қызметін атқарады. Бұл әсіресе маңызды егер есеп сызықты емес болса және оның жалпы шешімін жекеліктерден құрастыруға болмайды.

Параболалық тұрпаттағы теңдеулерге қолданыста бұл қасиет *максимум қағидасы мен салыстыру теоремаларында* өзінің іске асуын табады. Сызықты еместік жылуөткізгіштігі үшін Коши есебін қарастырамыз:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad k(T) \succ 0, \qquad T > 0,$$
$$-\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{8.26}$$
$$T(x, 0) - T_0(x) \geq 0,\ -\infty < x < \infty.$$

М а к с и м у м   қ а ғ и д а с ы. *Шешім максимумы $T(x, t)$ (температураның) уақыттың кез келген мезетінде бастапқы берілулердің $T_0(x)$ (бастапқы температураның) максимумынан аса алмайды*:

$$\max_{t>0,\ -\infty < x < \infty} T(x, t) \leq \max_{-\infty < x < \infty} T_0(x). \tag{8.27}$$

Теңсіздік (8.2) айқын физикалық мағынаға ие. Температураның бастапқы таралуы максимумының уақыт ағымымен өсуіне еш мүмкіндік жоқ, өйткені

Фурье заңы бойынша жылу ағыны энергияны ортаның қыздырылған телімдерінен суығына қарай тасиды.

(8.26) теңдеуі үшін бірінші шеттік есебі жағдайында жартылай кеңістікте максимум қағидасы (8.28)-дегідей айқын мағынаға ие

$$\max \quad T(x,\ t) \ \leq \quad \max \begin{Bmatrix} \max T_0(x), & \max T(0,t) \\ 0 \leq x < \infty & t \geq 0 \end{Bmatrix} \qquad (8.28)$$

$t>0, -\infty < x < \infty$

мұндағы $T_0(x)$ – заттың бастапқы температурасы, $T(0,\ t)$ – оған шекарада берілетін температура.

Максимум қағидасынан с а л ы с т ы р у т е о р е м а с ы шығады. (8.27) Коши есебі үшін тұжырымдама келесі түрде көрінеді.

$T^{(1)}(x,\ t)$, $T(x,t)$, $T^{(2)}(x,\ t)$ – Коши есебінің шешімі делік, бұған сай келетін бастапқы берілулер $T_0^{(1)}(x)$, $T_0(x)$, $T_0^{(2)}(x)$. Сонда

барлық $-\infty < x < \infty$ үшін $T_0^{(1)}(x) \leq T_0(x) \leq T_0^{(2)}(x)$ болса,

онда

$$T_0^{(1)}(x,\ t) \leq T_0(x,\ t) \leq T_0^{(2)}(x,\ t) \text{ для всех } -\infty < x < \infty,\ t > 0. \qquad (8.29)$$

Басқа сөздермен, егер жылу өткізгіш материалдың екі бірдей үлгісі алынса мұның бірінің бастапқы температурасы, екіншісінің осындай нүктедегісінен аз болмаса, онда кез келген келесі уақыт мезетінде бұл қасиет сақталады. Бірінші шеттік есеп үшін жартылай кеңістіктегі салыстыру теоремасы шешімдерінің білдіретіні төмендегідей.

Мына теңсіздікті орындаудың

$$T_0^{(1)}(x) \leq T_0(x) \leq T_0^{(2)}(x), \quad 0 < x < \infty,$$
$$T^{(1)}(0,\ t) \leq T_0(0,\ t) \leq T^{(2)}(0,\ t), \qquad t > 0,$$

өзімен тартатын теңсіздігі

$$\text{барлық } \ x\ 0 \leq x < \infty,\ t > 0 \text{ үшін } T^{(1)}(x,\ t) \leq T(x,\ t) \leq T^{(2)}(x,\ t), \qquad (8.30)$$

мұндағы $T^{(1)}(x,\ t)$, $T(x,\ t)$, $T^{(2)}(x)$ – есептің шешімдері, бұлардың сай келетін шеттік шарттары $T^{(1)}(x)$, $T(x)$, $T^{(2)}(x)$ және $T^{(1)}(0,\ t)$, $T_0(0,\ t)$, $T^{(2)}(0,\ t)$.

Максимум қағидасы сияқты, салыстыру теоремасы да тікелей физикалық мағынаға ие: тіркелген зерзаттағы үлкенірек жылулық әрекет оның ішінде температураның үлкен өрісі қалыптасуын келтіреді.

Қалыптасқан бекітулердің ұқсастары жылуөткізгіштіктің басқа теориялары үшін орын алады. Қайсыбір есептердің жеке шешімдерін параболалық пен эллиптикалық тұрпаттардың теңдеулері үшін қолдана отырып, есептердің жалпылау шешімдерін бағалауға (жоғарыдан және төменнен шектеп), олардың тетіктерін білмей де жалпы сипатына қорытынды жасауға болады. Кірулік берілулерден шешімдердің үзіксіз тәуелділігі қайсыбір түрде гиперболалық теңдеулердің кең сыныптары үшін де (мысалы, 8.3-тақырыптағы (8.19) теңдеуі үшін ол, (8.26) теңдеуіне арналған теоремаларына ұқсас, салыстыру теоремаларымен өрнектеледі) қалыптасылды.

(8.29) теңсіздігінен және 8.3-тақырыптағы (8.9) шешімінің қасиеттерінен ауытқулар таралуының соңғы жылдамдығы шығады (8.26) Коши есебіндегі $k(T) = k_0 T^{\sigma}$, $\sigma > 0$ өрнегі бар (8.26) теңдеуі үшін, мұның өту шартында бастапқы таралатын температурасы $T_0(x)$ – финиттік функция, яғни $T_0(x) \equiv 0$, $|x| \geq R_0 < \infty$. T_m – функция $T_0(x)$-тің максималдық мәні делік. Сонда, 7-тақырыптағы (7.9) формуласындағы t_0 шамасына уақыт бойынша ығысу енгізе отырып, Q_0 мен t_0 тұрақтыларын жеткілікті үлкен етіп таңдап, $T_m \leq \overline{T}(R_0, 0)$ теңсіздігін қанағаттандыру қиын емес, бұдан шығатын теңсіздік $T_0(x) \leq \overline{T}_0(x, 0) \leq \overline{T}_0(x)$, $-\infty < x < \infty$, мұнда $\overline{T}(x, \mathrm{t})$ арқылы жылудың лездік нүктелік көзі жайлы есеп шешімі белгіленген. Ол (8.26) Коши жалпы есебінің бастапқы берілулер бойынша шешімін жоғарылатылған, (8.29) салыстыру теоремасынан $T(x, t) \leq \overline{T}(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ шығады. Сондықтан $t > 0$ уақыттың кез келген мезетінде шама $R(t)$ табылады, бұл барлық $|x| \geq R(t)$ үшін $T(x, t) \equiv 0$. Міне осы жылулық толқын майданы қозғалысының соңғы жылдамдығын білдіреді.

Жүгіргі толқын тұрпатындағы шешім қасиеттерінен және (8.30) теңсіздігінен ұқсас тұрғызулар жолымен жартылай кеңістіктегі бірінші шеттік есебі жағдайында жылу таралуының соңғы жылдамдығы (финиттік функция $T_0(x)$ кезінде) оңай анықталады. Яғни бұл эффектіде жеке емес жалпы сипат бар. Ол сызықты еместік жылуөткізгіштігінің (8.26) теңдеуінің ерекшеліктерімен байланысқан. Көптеген маңызды үдерістер үшін температура заттың біршама бөліктерінде іс жүзінде нөлге тең деп санала алады (мысалы, атмосферадағы күшті жарылыстың бастапқы кезеңінде температура оның аймағынан тыс жердегі жарылыспен қамтылған аймақтағы температурамен салыстырғанда мардымсыз аз). Жылуөткізгіштік коэффициенті жеткілікті күшті өсуі кезінде температураға тәуелді шама $k\ (T)$ осы аймақтарда іс жүзінде нөлге тең. (8.26) теңдеуінің оң бөлігін аша отырып:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k(T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_T^{'}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2,$$

Бұдан ішінде $T(x, t) = 0$ бар x, t нүктелерін көреміз, сонымен, $k(T(x, t)) = 0$, бұл бірінші реттегі теңдеуге құлдырады (қалған (8.26) аймақта – екінші реттегі параболалық теңдеу). Жылу таралуының соңғы жылдамдығының, нөлдік температуралық жағдайы бар ортадағы математикалық жасырын сыры осындай. Құлдырау нүктелеріндегі шешімді, жеке мысалдарда көрсетілгендей, жалпыланған мағынада түсінген жөн, қалған аймақта ол әдеттегі (классикалық) мағынада (8.26) теңдеуін қанағаттандырады.

Коши есебіндегі жылу шоғырлануы эффектісі бола алуын дәлелдеуді толығырақ қарастырамыз. Бекіту мыналардан құрылады: Коши есебінің шешімі $T(x, t)$ мына теңдеулер үшін

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad \sigma > 0, \quad t > \mathbf{t}_0, \ -\infty < x < \infty, \tag{8.31}$$

бастапқы функциясы

$$T(x, t_0) = \begin{cases} T_M\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, & |x| \leq x_0 \\ 0, & |x| > x_0, \end{cases} \tag{8.32}$$

шоғырланған $|x| \le x_0$ (бірінші бастаушы) аймақта $t_{шоғ}$ шоғырлану уақыты ағымында, кіші емес келесі өрнектегіден

$$t_{шог} = \frac{x_0^2\sigma}{2k_0(\sigma+2)T_M^\sigma}, \tag{8.33}$$

яғни $T(x, t) \equiv 0, |x| > x_0, t_0 \le t \le t_0 + t_\pi$.

(8.27) күшімен (8.31), (8.32) есептері шешімдерінің $T_m(t)$ максимумы барлық $t > t_0$ кезінде бастапқыдан аса алмайды:

$$T_m(t) = T_m(0, t) \le T_M,$$

және де есеп симметриясынан $T_m(t) = T_m(0, t)$ теңдігі шығады. $T(x, t)$ шешімін $T_+(x, t)$ арқылы белгілеп, $x > 0$ аймағында қарастырамыз. $T_+(x, t)$ функциясын айқын түрде $t > t_0$ кезінде, (8.31) теңдеуіне арналған бірінші шеттік есебінің шешімі ретінде, $x > 0$ аймағында (8.32)-ден $T_+(x, t_0)$ бастапқы шартымен және $T_+(0, t)$ шекарасында,

$$T_+(0, t) = T_m(t) = T(0, t) \le T_M$$

теңсіздігін қанағаттандыратын шартпен түсіндіруге болады. Тұрғызылуы бойынша функция $T_+(x, t_0)$ 8.3-тақырыптың (8.14), (8.15) шешімдеріндегідей (автомодельдік S-режім $T_S(x, t)$, мұндағы $A_0 = [x_0^2\sigma/(2k_0(\sigma+2))]^{1/\sigma}$, $x_S = x_0$), мұның алынған моменті $t_0 = -t_\pi = -x_0^2\sigma/(2k_0(\sigma+2)T_M^\sigma)$.

$t_0 \le t < 0$ кезінде $T_+(x, t)$ мен $T_S(x, t)$ салыстырылады ($t > t_0$ мезетінде алынған $T_+(x, t_0)$, $T_+(x, t)$ және $T_S(x, t)$ функцияларының өзара орналасуы, 8.7-суретте көрсетілген). Бастапқы берілулер екі жағдайда бірдей болады, ал $T_+(x, t)$ үшін шекаралық шарт $T_S(x, t)$-ке арналған шекаралық шартпен біртіндеп жоғарыланады:

$$T_+(0, t) \le T_M \le A_0(-t)^{-1/\sigma}, \quad t_0 \le t < 0.$$

8.7-сурет

(8.30) салыстыру теоремасынан және S-режімі қасиеттерінен алатынымыз

$$T_+(0, t) \equiv 0, \quad x > x_0, \quad t_0 \le t < 0.$$

Симметрия күшімен $T_-(x, t) = T_+(-x, t)$, мұндағы $T_+(-x, t)$ – бұл $x < 0$ аймағындағы $T(x, t)$ шешімі (8.7-суретке қараңыз). Осыны ескеріп жоғарыда қалыптасылған бекітуді түпкілікті аламыз

$$T(x, t) \equiv 0, \quad |x| \ge x_0, \quad t_0 \le t \le t_0 + t_\pi.$$

(8.29) салыстыру теоремасынан, (8.32) функциясымен жоғарыланатын (және сонымен майдандары сәйкес келетінге ие), температураның кез келген бастапқы таралуы шығады, сондай-ақ $|x| \leq x_0$ аймағында шоғырланған, ал шоғырлану уақыты төменнен (8.33) формуласы бойынша бағаланады. Сонымен, орын алатын жалпы сипаттағы тұжырым: ішінде жылуберілісі (8.31) теңдеуімен сипатталатын орта үшін, «инерттілікке ие» температура кескінін әрқашан көрсетуге болады. Бастапқы берілулер ретінде алынған мұндай кескіндердің майдандары зат бойымен қозғалысын бірден емес, біршама уақыт ағымы бойынан соң бастайды.

Жеткілікті күшті сіңірілуі бар ортада, барлық $t_0 \leq t \leq \infty$ кезінде қыздырылған аймақтың тұрақты шамасы шектелген жағдайларда, жылу бола алатынын атап өтеміз (бұл эффектінің физикалық мағынасы айқын көрінеді).

8.5. Асқынуы бар режімдерді жіктеу

Инерциялық тек жеткілікті «жайпақ» температуралық кескіндерге ғана тән; бұл (8.32) шоғырланған таралуын салыстырудан көрінеді, айталық, жылудың лездік нүктелік көзі жайлы есеп шешімін (формула (8.34) тақырып 8.3). Осыған ұқсас кескіндерді қалыптастыру тәсілдерінің бірі бола алатын шекаралық режімдерге сәйкес келетін жылу өткізетін ортаға әсер ету. Мысалы, 8.3-тақырыптың (8.14), (8.15) шешімдері жағдайында шекарадан түсетін энергия ортаның қасиеттерімен, заттағы уақыттың кез келген мезетінде (8.32) түріндегі инерциялық кескіндер қайта өндірілетіндей етіліп келісіледі (бұлардың шоғырлану уақыты, табиғи түрде, температура өсуімен азаяды).

8.3-тақырыбында оқып білінгенге сүйене отырып автомодельдік шешімдерге және салыстыру теоремасына, олардың сызықты еместік орталарға әсер етуі бойынша асқынуы бар шекаралық режімдердің жіктеуін береміз.

(8.31) үшін $x > 0$ жартылай кеңістігіндегі бірінші шеттік есепті қарастырамыз, мұның шекаралық шарты

$$T(0,\ t) \to \infty,\ t \to 0,\ t_0 \leq t < 0, \tag{8.34}$$

және, оңайлық үшін, нөлдік бастапқы берілумен

$$T(x,\ t_0) = T_0(x) = 0,\ \ x \geq 0. \tag{8.35}$$

Бұл жағдайдағы шоғырлану, Коши есебінен ерекшеленіп, (8.31), (8.34), (8.35) есептерінің $T(x,\ t)$ шешімі үшін $l \geq l^*$, $t_0 \leq t < 0$ кезінде $T(x,\ t) \equiv 0$ дұрыс болатындай ететін, $l^* < \infty$ тұрақтысы бар екенін білдіреді. Басқа сөздермен, қыздырудың барлық үдерістері ағымындағы жылулық ауытқулар l^* біршама соңғы тереңдігінен әрі қарай өтпейді (қарсы жағдайда шоғырлану қатыспайды).

(8.30) теоремасынан және автомодельдік S-режімі қасиеттерінен шығады, егер мына өрнектер болса

$$T(0,\ t) \leq A_0\ (-t)^{-1/\sigma}, \quad t_0 \leq t < 0,$$

сонда (8.31), (8.34), (8.35) есебінде $l^* = x_S$ тереңдігінде жылу шоғырлануы орын алады, ал оның шешімі $T_S(x, t)$ функциясымен жоғарыланады. Егер де (8.34) мына теңсіздікті қанағаттандырса

$$T(0, t) \le A_0(-t)^n, \quad -1/\sigma < n < 0, \quad t_0 \le t < 0, \qquad (8.36)$$

сондағы шешімнің шоғырланған тереңдігі

$$l^* \le \left(2k_0 A_0 (-t)^{1/\sigma+n} \frac{\sigma+2}{\sigma}\right)^{1/2}, \qquad (8.37)$$

және $0 \le x \le l^*$ кезінде бұған дұрыс келетін баға

$$T(x, t) \le C(n,\sigma)\left(k_0^{-n} A_0\right)^{\frac{1}{1+n\sigma}} x^{\frac{2n}{1+n\sigma}}, \ x \le l^*, \quad t_0 \le t < 0, \qquad (8.38)$$

автомодельдік LS-режім үшін, бұл 8.1 тақырыбындағы (8.18) шектік қисығы бола алатынынан шығады.

(8.36)-ның алдында болып өткен теңсіздік, жылуды шоғырландыруға келтіретін асқынуы бар шекаралық режімдердің сыныбын анықтайды; (8.36) теңсіздігін дәлелдейтін нәтиже: оны орындауда іске асатын LS-режім, $t \to 0$ кезінде температура тек $x = 0$ нүктесінде ғана шексіз өседі. Нөл еместік, бірақ $T_0(x)$ финиттік функциялары кезінде, (8.35)-те жоғарыда жасалған шоғырландыру жайлы екі бекіту де күшінде қала береді. Автомодельдік S- пен LS-режімдерінің шешімін жоғарылататын жеткілікті үлкен A_0 шамасын таңдап алу ғана қажет; (8.37), (8.38) нақтылы бағалаулары, табиғи түрде, өзгерістерге ұшырайды. Жалпы LS-режім үшін толқын майданы, автомодельдіктен ерекшеленіп, $x = \infty$ кезінде емес, соңғы нүктеде болатынын байқаймыз.

Шоғырландыру эффектісі шеттік есептерде зат қыздырылуы жылдамдығымен соншалықты байланыспаған. Бұған көз жеткізу үшін, (8.31), (8.34), (8.35) шешімдерін талдаймыз, мына жағдайда

$$T(0, t) \ge A_0(-t)^n, \quad n < -1/\sigma, \quad t_0 \le t < 0, \qquad (8.39)$$

Бәрінен бұрын, біршама t_* ($t_0 < t_* < 0$) мезетінде $T(x, t)$ шешімі $x = 0$ шекарасы төңірегінде нөл болмайды. Бұл үшін оны жүгіргі толқын тұрпатындағы $\overline{T}(x, t)$ шешімімен салыстырамыз

$$\overline{T}(x, t) = \begin{cases} \dfrac{D_\sigma}{k_0}[D(t-t_0)-x]^{1/\sigma}, & x \le D(t-t_0), \\ 0, & x > D(t-t_0), \end{cases} \qquad (8.40)$$

(8.31) теңдеуі үшін, мұнда $D = [A_0^\sigma(-t)^{n\sigma-1}k_0/\sigma]^{1/2}$. Тұрғызылуы бойынша $\overline{T}(x, t_0) \equiv 0$, ал тұрақтылық D, $\overline{T}(0, t) \le T(0, t) \le A_0(-t)^n$, $t_0 \le t < 0$ болатындай етіп, таңдалған. Яғни, $T(x, t) \le \overline{T}(x, t)$, $0 \le x < \infty$, $t_0 \le t < 0$ болады, (8.30) салыстыру теоремасы күшімен.

Енді 8.3-тақырыбындағы (8.12) шешіміне, оны $n < -1/\sigma$ (автомодельдік HS-режімі) кезінде $T_a(x, t)$ арқылы белгілеп, назар аударамыз. Оның ішінен, $t = t^*$ кезінде $t = t^*$ мезетінде алынған (8.30) функциясымен жоғарылатындай, яғни $T_a(x, t^*) \le \overline{T}(x, t^*)$, $x \ge 0$ де және осылайша етіп $T_a(x, t^*) \le T(x, t^*)$, $x \ge 0$ $A_{0a} \le A_0$ шамасын таңдаймыз. (8.39)-дан барлық $t > t^*$ үшін алатынымыз $T_a(0, t) \le T(0, t)$. Сонда (8.30) салыстыру теоремасынан барлық $x \ge 0$ пен $t \ge t^*$ үшін $T_a(x, t) \le T(x, t)$ теңсіздігін аламыз ($t \ge t^*$ кезінде автомодельдік HS-режімді зерттелуші шешіммен жоғарылату). $T_a(x, t) \to \infty$, $t \to 0$, $x \geq 0$ болғандығынан, $t \to 0$ кезінде кез келген $x \geq 0$ нүктеде $T(x, t) \to \infty$ болады.

(8.39) теңсіздігі орындалуына жылу шоғырлануы қатыспайды, $t \to 0$ кезінде қыздыру толқыны барлық затты қамтиды, температура оның кез келген нүктесінде шексіз өседі (бұл бекіту, егер $T(x, t_0) \not\equiv 0$ болса, тіптен дұрыс).

Бұл тұжырым сызықты еместік орталарда шекаралық режімдердің жіктелуін аяқтайды. «Баяу» S- пен LS-режімдерінің ($T(0, t) \leq A_0(-t)^{-1/\sigma}$ немесе $T(0, t) \leq A_0(-t)^n$, $-1/\sigma < n < 0$) затына әсер ету кезінде соңғы ауқымдар аймағында энергия шоғырланады, «жылдам» HS-режімдерде (8.39) шоғырлануға орын жоқ.

Картинаның толықтығы үшін, шоғырлану эффектісі $T(x, t_0) \equiv 0$, $x \geq 0$ талабынан (немесе (8.10) функциясы финиттілігінің талабынан) бас тартқан кезде де іске асырылатынын түсіндіреміз. Бұл жағдайда шоғырлануды жалпылау тиімді мағынада, $x = 0$ нүктесінде шешімнің шектеусіз өсуіне қарамастан, $T_0(x)$ еркінше шектелген функциясында, есептерінің шешімі $x \geq L^*$, $t \geq t_0$ кезінде $L^* < \infty$ тұрақты етілетіндей деп, түсінген жөн. Асқынуы бар шекаралық режімдердің жіктеуі температураның бастапқы таралуының сипатына тәуелді емес және бұрынғысындай болып қала береді. Бөліктікте, қарастырылушы үдерісте жылу толқынының майданы болады ма әлде болмайды ма, мұның мағынасы жоқ.

Осы бекітулерді көрнекілейтін мысал ретінде, (8.31) теңдеуі үшін есепті қарастырамыз, мұның шекаралық шарты

$$T(0, t) \leq A_S\ (-t)^{-1/\sigma}, \quad t_0 \leq t < 0, \tag{8.41}$$

мұның жауап беретін шешімі $T_S(x, t)$ – автомодельдік S-режімдегі, мұндағы бар температураның тұрақты бастапқы жағдайы

$$T(x, t_0) = T_0 = A_S\ (-t)^{-1/\sigma}. \tag{8.42}$$

Оның шешімі $T(x, t)$, айқын түрде $T_S(x, t)$-ті жоғыраландырады:

$$T_S(x, t) \leq T(x, t),\ x \geq 0,\ t_0 \leq t < 0.$$

Қос шешім үшін $x = 0$ нүктесінде температура бірдей, сонан да соңғы теңсіздіктен осы нүктеде туындыға келесі теңсіздік шығады:

$$-\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} \leq -\frac{\partial T_S}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad t_0 \leq t < 0,$$

ал одан шығатын теңсіздік шекарадағы жылу ағындары үшін

$$W(0,t) = -k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} \leq W_S(0,t) = -k(T_s)\frac{\partial T_S}{\partial x}\Big|_{x=0}, \tag{8.43}$$

$$t_0 \leq t < 0.$$

(8.43)-тің физикалық мағынасы мынада, басқалары тең жағдайларда әуелде көбірек қыздырылған орта шекарадан түсетін энергияны азырақ қыздырылғанмен салыстырғанда нашарлау «қабылдайды». (8.43)-ті ескеріп, x бойынша 0 ден ∞-ке дейін және t бойынша t_0 ден $t < 0$-ге дейін (8.31)-ді интегралдаймыз және (өйткені $W_S(\infty, t) = W(\infty, t) = 0$, $t_0 \leq t < 0$), осыдан алатынымыз

$$\int_0^{\infty}[T(x,t)-T_0]dx \le \int_0^{\infty}[T_S(x,t) - T_S(x,t_0)]dx,$$

немесе, интегралдау аймағын бөліктерге $x = 0$ ден $x = x_s$-ке дейін және $x = x_s$-тен до $x = \infty$-ге дейін бөле отырып және $T_S(x,\ t) \equiv 0$, $x \ge x_S$, $t \ge t_0$ екенін ескеріп, келетін теңсіздігіміз

$$\int_0^{x_S}[T(x,t)-T_0]dx + \int_{x_S}^{\infty}[T(x,t)-T_0]dx \le \int_0^{x_S}[T_S(x,t)-T_S(x,t_0)]dx.$$

$T(x,\ t) \ge T_0$, $x \ge 0$, $t \ \ge \ t_0$ болғандығынан, берілген теңсіздікті мына түрде қайта жазуға болады

$$0 \le \int_{x_S}^{\infty}[T(x,t)-T_0]dx \le \int_0^{x_S}[T_S(x,t)-T(x,t)]dx + \int_0^{x_S}[T_0 - T_S(x,t_0)]dx,$$

осыдан, $T(x,\ t) \ge T_S(x,\ t)$, $x \ge 0$, $t \ \ge \ t_0$ және $T_0 \ge T_S(x,\ t_0)$, $x \ge 0$ күшімен, барлық $x \ge x_S$, $t_0 \le t < 0$ кезіндегі $T(x,\ t)$ функциясының шектілігі шығады. Басқа сөздермен, (8.31), (8.41), (8.42) есебінде, температуралық жағдайдың қатыспауы кезіндегі шоғырлану тереңдігіне тең дәлдікпен, $L^* = x_S$ тереңдігінде жылудың *тиімді шоғырлануы* іске асады.

8.3-тақырыбындағы (8.19) гиперболалық теңдеуімен сипатталатын үдерістер үшін асқынуы бар режімдерді жіктеу, ұқсас әдістермен жүргізіледі және өте ұқсас нәтижелерге келтіреді: «баяу» шекаралық режімдерге әсер ету кезінде шоғырлану орын алады, ал «жылдам» режімдер жағдайында бұл эффекті болмайды.

8.6. «Автомодельдік әдісті» кеңейту

8.1, 8.2 тақырыптарында паш етіліп көрсетілген, автомодельдік немесе басқа да жеке шешімдердің кең сыныптарына негізделген және кірулік берілулерден үзіксіз тәуелділіктегі жақындау, түрлі жалпылауларға жол береді.

Жылудың шоғырлану эффектісі бірөлшемдік ғана емес, сондай-ақ көпөлшемдік геометрияда іске асырылатынын көрсетеміз, теңдеудің сәйкес келетін айқын шешімін тұрғызамыз

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_0 T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_0 T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial z}\right), \qquad (8.44)$$

$$t_0 \le t < 0,$$

бұлар $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ квадратында қарастырылады (мұнда, бұрынғыдағыдай, $T = T(x, y, z, t)$ – температура).

Бірөлшемдік S-режімі бар 8.3-тақырыптағы (8.14), (8.15)-терге ұқсастық бойынша бөлектелетін айнымалардағы (8.44)-тің жеке шешімін, яғни $T(x, y, z,$

$t) = U(t)\,f(x, y, z)$-ті іздейміз. Бұл өрнекті (8.44)-ке енгізу $U(t)$ үшін бірөлшемдік геометриядағыдай $U(t) = A_0\,(-t)^{-1/\sigma}$ формуласын береді.

$f(x, y, z)$ функциясы үшін күрделі эллиптикалық теңдеу алынады. Сондықтан шешімнің кеңістіктік бөлігі іс жүзінде бір аргументтен: $f(x, y, z) = f(\xi) = x + y + z$ тәуелді болатын қарапайым жағдаймен шектелеміз. Сонда $n = -1/\sigma$ кезінде $f(\xi)$ (8.38) 8.3-тегі (8.13) теңдеуіне бағынады, мұның шешімі белгісіз. Қорытындысында көпмөлшерлік S-режімге келеміз

$$T(x, y, z, t) = \begin{cases} A_0(-t)^{-1/\sigma}\left(1-\dfrac{x+y+z}{r_\Phi}\right)^{2/\sigma}, & x+y+z \le r_\Phi, \\ 0, & x+y+z > r_\Phi, \end{cases} \qquad (8.45)$$

мұндағы $r_ф = r_S \equiv (2k_0 A_0^{\sigma}(\sigma+2)/\sigma)^{1/2}$ бірөлшемдік шешімге арналған формула бойынша есептеледі. Шешім (8.45) үшөлшемдік жылуөткізгіштік ортаның асқынуы бар режімдегі қыздыруын сипаттайды, өйткені $t \to 0$ кезінде шекаралық температура $T(0, y, z, t)$, $T(x, 0, z, t)$, $T(x, y, 0, t)$ шексіздікке айналады ($\xi < r_s$ аймағында). Шешіммен де осы аймақта осылайша өтеді. Алайда $\xi > r_s$–тің қалған барлық кеңістігіндегі $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ квадрантының температурасы $t = 0$ мезетіне дейін нөлге тең. Шоғырлану аймағының ауқымы r_s (координат басталуынан жылу толқыны майданына дейінгі арақашықтық), алдындағыдай, k_0, σ орталары қасиеттеріне және A_0 шекаралық режімінің қарқындылығына тәуелді.

(8.44) теңдеуінің шешімдері үшін салыстыру теоремалары әділ болғандығынан, (8.45)-тен бірден, қарастырылушы көпөлшемдік аймақта жылу шоғырлануын келтіретін, шекаралық режімдердің сыныбы анықталады. Оларды әрі қарай жіктеу 8.4-те алынған нәтижелерге толығымен ұқсас.

Енді, *жуықталған автомодельдік шешімдер* түсінігін қарастыра отырып, автомодельдік шешімдерді кеңірек түсіндіруге назар аударамыз. Оны бәрінен оңай асқындаушысы бар режімде тұрақты жылуфизикалық қасиеттері бар орта қыздырылуы жайлы есеп мысалына енгізу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \infty,\ t_0 \le t < 0, \qquad (8.46)$$
$$T(0, t) \to \infty, \qquad t < 0.$$

$T(x, t_0) = 0$, $x \ge 0$–дің жалпылығы шектеусіз делік. (8.46) сызықты есебінің жалпы шешімі жақсы белгілі:

$$T(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k_0}} \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{4k_0(t-r)}\right)(t-\tau)^{-3/2}\,T(0,\tau)\,d\tau. \qquad (8.47)$$

(8.47) көмегімен (8.46) шешімдері жіктеуін, $T(0, t)$ түрден тәуелділікте, өткізу қиын емес. $\tau \to t$, $t \to 0$ кезінде астындағы өрнектегі бірінші көбейткіш нөлге ұмтылады, ал екінші мен үшінші шексіздікке ұмтылатынан, 8.5 те зерттелген жылу таралуыларының кез келгенінің бірі болуының мүмкіндігі көрінеді.

Солай, $T(0, t) = A_0 e^{-a_0/t}$ үшін, $a_0 > 0$ – шекаралық режімді сипаттайтын параметр, $t \to 0$ кезінде температура барлық $0 \le x \le x_S = 2\sqrt{k_0 a_0}$ нүктелерінде шексіз өседі, $x \geq x_S$ аймағындағы барлық $t \leq 0$ үшін шектелген. Сондай-ақ $x = x_S$ нүктесінің оң жағының құрамында болатын жылу энергиясы да шектелген:

$$\lim_{t\to 0}\int_x^{\infty} T(x',t)dx' < \infty, \qquad x > x_S, \qquad t \leq 0,$$

яғни (8.47) ден есептелетін $L^* = x_S = 2\sqrt{k_0 a_0}$ тереңдігі бар S-режімде жылудың тиімді шоғырлануы іске асады.

Жалпылау түрдегі шеттік шартты қарастырып

$$T(0, t) = A_0\exp(-a_0(-t)^n, \quad n < 0, \tag{8.48}$$

аламыз, мұнда $-1 < n < 0$ кезінде LS-режім, ал $n < -1$ үшін HS-режім іске асады.

(8.47) интегралын талдау үдерістің біршама маңызды тетіктік қасиеттерін бере алмайды. Мысалы, $x_{\text{тиім}}(t)$ жартылай кеңдігінің уақытпен өзгеруі заңдылығын алу үшін, іс жүзінде (8.47) интегралдық теңдеуін шешу керек. (8.46), (8.48) есептері, П-теоремасы көмегімен оңай көрсетуге болатындай, автомодельдік шешімдер тұрғызуға жол бермейді.

(8.46), (8.48)-ді түрлендіреміз келесі түрде: (8.48)-дің орнына $T(0, t) = A_0[\exp(-a_0(-t)^n) - 1]$, $n < 0$ түріндегі шекаралық шартты аламыз (константты қосу ыңғайлылық үшін жасалған және $t \to 0$ кезінде рөл ойнамайды және $V(x, t) = A_0\ln(T(x, t)/A_0 + 1)$ айырбасталуын жүргіземіз. Сонда $V(x, t)$ үшін алынатын есеп

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k_0\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{k_0}{A_0}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2, \qquad 0 < x < \infty, \qquad t_0 \leq t < 0,$$

$$V(0, t) = A_0 a_0(-t)^n, \qquad n < 0, \quad t_0 \leq t < 0, \tag{8.49}$$

$$V(x, t_0) = 0, \qquad 0 \leq x < \infty.$$

Шекаралық шарт (8.49) – уақыттың дәрежелік функциясы. Егер 8.3 тақырыбындағы ұқсастық бойынша, дәрежелік автомодельдік шешімге жақын түрде, (8.49) есебі шешімі ізделсе, онда мұндай шешім үшін $t < 0$ кезінде теңдеудің оң жағындағы бірінші мүше екіншісімен салыстырғанда мардымсыз аз болады және оны ескермеуге болады.

Қатаңырақ талдаудың көрсеткені, (8.49) есебі шешімінің шынында да $t \to 0$ кезінде қарапайымырақ шешімдерге жақын

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_0}{A_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \; 0 < x < \infty, \; -\infty < t < \mathrm{O},$$

$$u(0, t) = A_0 a_0(-t)^n, \qquad n < 0, \quad -\infty \leq t < 0, \tag{8.50}$$

$$u(x, -\infty) = 0.$$

(8.49)-дан ерекшеленіп (8.50) есебінің $u(x, t)$ шешімі – дәрежелік автомодельдік шешім, мұны талдау қиындық көрсетпейді. Функция $u(x, t)$, (8.49) есебі үшін жуықталған автомодельдік шешім болады, (8.46), (8.48) бастапқы есептері үшін де. Сипаттаудың салыстырмалы дәлдігі уақыт ағымымен жақсарады:

$$\left|1 - \frac{A_0}{T(x,t)}e^{u(x,t)/A_0}\right| \to 0, \qquad t < 0, \qquad x \geq 0.$$

$u(x,\ t)$ қасиеттерінен қыздыру толқынының $x_{\text{тиім}}(t)\ =\ (-t)^{(1-n)/2}\ln 2[k_0/(a_0(-n))]^{1/2}$ жартылай кеңдігі үшін заң шығады, бұл толқын барлық үш режімдерде де азаяды (сызықты еместік ортамен салыстырыңыз). Жуықталған автомодельдік шешімдерін тұрғызу мен талдау мүмкін екенін көреміз және параболалық тұрпаттағы теңдеулердің кең сыныбын оқып білуде пайдаланылады.

Автомодельдік әдістің тағы бір маңызды кеңеюі *шешімдерді салыстыру түсінігін жалпылауға* негізделген. Бұл жақындаудың маңыз-мәні 8.1, 8.2 тақырыптарындағыдай, тек түрлі шеттік шарттарға ғана емес, сондай-ақ түрлі теңдеулерге ((8.26) теңдеуі жағдайында – түрлі $k(T)$ функцияларға) жауап беретін есептерді салыстырулардан тұрады. Нақтылы мағынада сөз ортаның физикалық қасиеттерінің жылуы ауытқуларына қатысы бойынша жылуберілісі үдерісінің тұрақтылығы жайлы жүруде. Және де салыстыратын шешімдерді бірі ретінде жақсы зерттелген теңдеуді (мысалы, (8.31) немесе (8.46)) таңдауға және күрделірек теңдеулердің шешімдері үшін мазмұнды нетижелерді алуға болады.

Мұндай жақындаудың қарапайымдау нұсқасын (8.46) теңдеуі жағдайында паш етіп көрсетеміз. Екі шеттік есептің $T^{(1)}(x,\ t)$ мен $T^{(2)}(x,\ t)$ шешімдерін $x \ge 0$ жартылай кеңістігінде қарастырамыз:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} = k_0^{(1)}\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2}, \qquad x > 0, \qquad t > 0,\\
&T^{(1)}(0,\ t) = T_1^{(1)}(t), \qquad t > 0,\\
&T^{(1)}(x,\ 0) = T_0^{(1)}(x), \qquad t > 0;
\end{aligned} \tag{8.51}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} = k_0^{(2)}\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2}, \qquad x > 0, \qquad t > 0,\\
&T^{(2)}(0,\ t) = T_1^{(2)}(t), \qquad t > 0,\\
&T^{(2)}(x,\ 0) = T_0^{(2)}(x), \qquad t > 0.
\end{aligned} \tag{8.52}$$

$V(x,\ t) = T^{(2)}(x,\ t) - T^{(1)}(x,\ t)$ айырымы үшін (8.51), (8.52) ден келесі шеттік есепті аламыз:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t} = k_0^{(1)}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (k_0^{(2)} - k_0^{(1)})\frac{\partial T^{(2)}}{\partial x}, \qquad x > 0, \qquad t > 0,\\
&V(0,\ t) = T_1^{(2)}(t) - T_1^{(1)}(t), \qquad t > 0,\\
&V(x,\ 0) = V_0(x) = T_0^{(2)}(x) - T_0^{(1)}(x), \quad x \ge 0.
\end{aligned} \tag{8.53}$$

$T^{(1)}(x,\ t)$ шешімін $T^{(2)}(x,\ t)$ шешімімен жоғарылату талабы мынадай шеттік шартпен орындалсын делік:

$$\begin{aligned}
&T_1^{(1)}(t) \le T_1^{(2)}(t), \qquad t > 0,\\
&T_0^{(1)}(x) \le T_0^{(2)}(x), \qquad x \ge 0,
\end{aligned} \tag{8.54}$$

және жылуөткізгіштік коэффициенті бойынша:

$$k_0^{(1)} \le k_0^{(2)}. \tag{8.55}$$

$T^{(2)}(x,\ t)$ шешімі үшін дұрыс болсын делік

$$x \geq 0,\ t \geq 0 \text{ кезінде } \quad \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} \geq 0. \qquad (8.56)$$

$T^{(2)}(x,\ t)$ функциясының уақытпен азаймауының (8.56) қасиеті кез келген $x \geq 0$ нүктеде $T_1^{(2)}$ (t) шекаралық шартының t–сы бойынша азаймауымен ($T_0^{(2)}(x)$ $\equiv 0$ кезінде) қамтылады. Мұны, (8.52) теңдеуін t бойынша дифференциалдап, $Z^{(2)}(x,\ t) = \partial T^{(2)} / \partial t = -W^{(2)}(x,t)/k_0$ функциясы үшін, тексеруге, алынған есеп

$$\frac{\partial Z^{(2)}}{\partial t} = k_0^{(2)} \frac{\partial^2 Z^{(2)}}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$
$$Z^{(2)}(0,\ t) \geq 0, \quad t > 0, \qquad (8.57)$$
$$Z^{(2)}(\mathrm{x},\ 0) \equiv 0.$$

Көрсетілуі қиын емес оның шешімі, барлық $x \geq 0$, $t \geq 0$ кезінде теріс емес ($T_0^{(2)}(x) \not\equiv 0$ жағдайында (8.56) теңсіздігін орындау үшін және $\partial^2 T_0(x)/\partial x^2 \geq 0,\ x \geq 0$ шартын үстіне қосуға да жеткілікті).

(8.54)–(8.56) теңсіздіктерін орындау кезінде (8.53) есебінің $V(x,t)$ есебі үшін қалыптасатын есебі

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k_0^{(1)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad V(0,\ t) \geq 0, \quad t > 0, \qquad (8.58)$$
$$V(x) \geq 0, \quad x \geq 0,$$

(8.58) теңдеуінің оң жақ бөлігінде теріс шеттік шарттар және $f(x,t)$ теріс функция (жылу көздерімен) бар. Оның шешімі барлық $x \geq 0$ және $t \geq 0$ кезінде теріс емес. Осыдан барлық қарастырылушы аймақта $k_0^{(2)}$ коэффициенті бар (8.48) есебі шешімімен $k_0^{(1)}$ коэффициенті бар (8.47) есебін жоғарылату шығады:

$$T^{(1)}(x,\ t) \leq T^{(2)}(x,\ t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \qquad (8.59)$$

(8.26) теңдеуі жағдайында теңсіздік (8.59) дұрыстығын $[k^{(2)}(T)/\ k^{(1)}\ (T)]'_T \geq 0$, $T \geq 0$ түрдегі $k^{(1)}(T)$, $k^{(2)}(T)$ коэффициенттеріне (8.54)–(8.56)-ға қосымша талаптар қойылғанда көрсетеді.

Салыстыру теоремаларына ұқсастар көмегімен (жалпы түрдегі параболалық теңдеулер үшін де дұрыс) қалыптасады, мысалы, қағидалық түрде маңызды нәтиже: кез келген жылуфизикалық қасиеттері бар орта үшін әрқашан жылу шоғырлануын келтіретін шекаралық режімдер сыныбын және ортаға әсері кезінде шоғырлану қатыспайтын режімдер сыныбын көрсетуге болады. Сонымен, бұл эффект жалпы сипатты тасиды.

ОРТАШАЛАНДЫРУ ӘДІСІ

Шоғырланған құрылымдардың кеңістікті-уақыттық динамикасын оқып білу үшін қолданылатын, орташаландыру әдісі нұсқасын қарастырамыз. Орташаланған сипаттауға екі жақындауды қалыптастырамыз. Бұлардың көмегімен жылу өткізетін орталардағы жану режімдерін жіктеуді аламыз.

8.7. Сызықты еместік орталарда шоғырланған құрылымдар

7-, 8-ші тақырыптарда зерттелген ауытқулардың шоғырлану эффектісі, сәйкес келетін асқынуы бар шекаралық шешімдер түрінде берілген ортаға сыртқы әсер етушілер кезінде ғана емес, сондай-ақ оның меншікті сызықты еместік қасиеттері арқылы да көріне алады. Жеткілікті күшті сызықты еместік асқынуы бар режімдерді тудырады, бұлар өз кезегімен, құрылымдар – шамалардың біртекті еместіктерінің кеңістігінде, пайда болуының себебі қызметін атқарады.

Жылудың сызықты еместік көздері бар жылу өткізетін заттағы температура таралуының кеңістікті-уақыттық тәртібін оқып білеміз. Энергия жану, реакциялардың химиялық немесе басқа да түрлері өтуі, нәтижесінде бөлініп шығады. Орта шектелмеген (Коши есебі), жану үдерісі өлшемдік саналады. Мұны сипаттайтын теңдеу

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_0T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_0T^{\beta},$$

$$q_0>0,\ \beta>1,\ -\infty<x<\infty,\ t\le t_0, \qquad (8.60)$$

бастапқы функциясы

$$T(x,t_0)=T_0(xt),\quad -\infty<x<\infty. \qquad (8.61)$$

Заттың жылуфизикалық сипаттамалары (жылуөткізгіштік коэффициенті және энергияның күшті сызықты еместік ($\beta>1$) көзі q_0T^{β}) – жағдайлар қатарында шынайы тәуелділіктерді жақсы жақындастыратын температураның дәрежелік функциялары. Жану температураның бастапқы таралуымен $T_0(x)\not\equiv 0$ ынталандырылады (қарсы жағдайда зат суық болып қала берер еді).

Жанудың шоғырланған құрылымын (8.60), (8.61) есептері мысалында тұрғызамыз. Оның шешімін $T(x,t)=U(t)f(x)$ түріндегі бөлектелінетін айнымалыларда іздейтін боламыз. Сонда (8.60)-тан иеленетініміз

$$f\frac{dU}{dt}=U^{\sigma+1}\frac{d}{dx}\left(k_0f^{\sigma}\frac{df}{dx}\right)+U^{\beta}q_0f^{\beta},$$

Осыдан көрінетіні, айнымалылыр $\beta=\sigma+1$ жағдайында бөлінетіні және сонда

$$U^{-(\sigma+1)}\frac{dU}{dt}=\frac{1}{f}\frac{d}{dx}\left(k_0f^{\sigma}\frac{df}{dx}\right)+q_0f^{\sigma}=C, \qquad (8.62)$$

мұндағы $C>0$ (уақытпен температура өсуінің режімдері ізделеді). $U(t)$ үшін (8.62)-тен алынатын өрнек

$$U(t)=(C_1-\sigma Ct)^{-1/\sigma},\ C_1>0, \qquad (8.63)$$

бұл мағынаға тек $t<C_1/(\sigma C)$ кезінде ғана иеленеді және шексіздікке соңғы уақыт мезетінде айналады $C_1=\sigma Ct$. Сонымен, асқынуы бар режімде температура өседі. Әрі қарай шектелуі жоқ жалпылық $C=1/\sigma$ орналастырылады және $C_1=t_f$ болып белгіленіледі.

($f^{\sigma+1}=y$)-пен ауыстырып $f(x)$-ты табу үшін, (8.62)-ні әуелі теңдеуге түрлендіреміз

$$\frac{\sigma k_0}{\sigma+1}y''=y^{\frac{1}{\sigma+1}}-q_0\sigma y,$$

бұл сәйкес келетін сыртқы күші бар серіппедегі шарик тербелістері теңдеуінің түріне ие, сонан кейін y' = ω ауыстыруын бірінші реттегі теңдеуге пайдаланып аламыз

$$\frac{\sigma k_0}{\sigma+1}\frac{d\omega}{dy}=\frac{y^{\frac{1}{\sigma+1}}-q_0\sigma y}{\omega}.$$

Мұны интегралдау ω мен y арасындағы байланысты береді:

$$\frac{\sigma k_0}{\sigma+1}\frac{\omega^2}{2}=\frac{\sigma+1}{\sigma+2}y^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}-q_0\sigma\frac{y^2}{2}+C_2.$$

C_2 константасын анықтау үшін, сандық көбейткішке дейінгі дәлдікпен функция $\omega = y' = f^{\sigma} f'(\sigma + 1)$ өрнектегі кеңістіктік бөлікті көрсететінін ескереміз, мұндағы ағын өрнегі $W(x, t) = -k_0T^{\sigma}\cdot \partial T/\partial x=-k_0U^{\sigma+1}f^{\sigma}f'$. Жылу құрылымының майданында f температура да және жылу ағыны да нөлге айналуы керек. Яғни, $y = 0$ ($f = 0$) кезінде $\omega = 0$ және осыдан $C_2 = 0$. Соңғы теңдеудегі y пен ω-дан кері қарай f-ке өте отырып, квадратураны ($C_2 = 0$ кезінде) аламыз

$$dx=\pm\frac{(\sigma+1)\sigma k_0\,df}{f\sqrt{2\frac{\sigma+1}{\sigma+2}f^{-\sigma}-q_0\sigma}},$$

мұның интегралданатын айқын түрі:

$$f=A\cos^{2/\sigma}Bx,\ A=\left[q_0\frac{\sigma(\sigma+2)}{2(\sigma+1)}\right]^{-1/\sigma},\ B=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{q_0}{k_0(\sigma+1)}}. \qquad (8.64)$$

(8.63) пен (8.64)-ті біріктіре отырып, ізделінуші шешімның ақырғы түріне келеміз

$$T(x,t)=\begin{cases}[q_0(t_f-t)]^{-1/\sigma}\left\{\dfrac{2(\sigma+1}{\sigma(\sigma+2)}\cos^2\dfrac{\pi x}{L_T}\right\}^{1/\sigma}, & |x|\le\dfrac{L_T}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{L_T}{2},\end{cases} \qquad (8.65)$$

мұндағы $L_T = 2\pi\sqrt{k_0/q_0}\sqrt{(\sigma+1)/\sigma^2}$.

Шешім (8.65) қозғалмайтын майданы және өзгермейтін жартылай кеңдігі – сызықты еместік жылу өткізетін ортадағы жанудың автомодельдік S-режимі бар температураның бірқалыпты емес таралуын (құрылымды) сипаттайды. $t - t_f$ ($t \to -\infty$ кезінде температура нөлге айналады) кезінде құрылымдағы температураның шексіз өсуіне қарамастан, жану үдерісі, ауқымы заттың k_0, q_0, σ параметрлерімен анықталатын, $|x|\le L_T/2$ шеттік аймақта шоғырланған. Шоғырлану $|x|\le L_T/2$ аймағының шекараларынан тыста болатын ортаның телімдеріне ыстық құрылымның ықпалы қатыспайтынын білдіреді.

Сонымен, сызықты еместік ортаның жануы жылулық құрылымдардың бір-бірінен тәуелсіз кез келген саны түрінде іске аса алады (егер олардың максимумы L_T-дан үлкен арақашықтықпен бөлінген болса). Үдерістің күрделіленуінің, оның құрылымдарға ыдырауының себебі қарастырылған жүйенің *ашықтығында*, қоршаған ортамен энергия алмастыруында. Мұндай жүйелермен салыстыруда термодинамикалық түрде тұйықталған үдерістер құрылымдар пайда болуына жол бермейді. Шығу көздерісіз жылу өткізетін ортада, жылудың лездік нүктелік көздері жайлы есептер шешімі мен салыстыру теоремалары қасиеттерінен көрінетіндей, температураның таралуы $t \to \infty$ кезінде кеңістіктік түрде біртектік болады.

8.6-тақырыптағы асқынуы бар автомодельдік шекаралық режімдермен ұқсастық бойынша орта үшін жылу көздерінсіз сондай-ақ жанудың автомодельдік LS- пен HS-режімдерін тұрғызу мүмкіндігі бар. Олар мына түрде ізделінеді

$$T(x,t) = [q_0(t_f - t)]^{-\frac{1}{\beta-1}} f(\xi),$$
$$\xi = \frac{x}{k_0^{1/2} q_0^{m-1}(t_f - t)^m}, m = \frac{\beta - (\sigma+1)}{2(\beta-1)}, \tag{8.66}$$

және өзінің шекаралық ұқсас қасиеттерімен ұқсастарды иемденеді: LS-режімі жағдайында ($\beta > \sigma + 1$) шоғырланған құрылымның жартылай кеңдігі уақытпен қысқарады, ал температура жоғары жағынан шектік қисықпен шектелген барлық $t \le t_f$ кезінде HS-режімі жағдайында ($\beta < \sigma + 1$) шоғырлану болмайды.

Бірақ 8.6-, 8.7-ші тақырыптарда қолданылған сызбанұсқаларды дәлме-дәл қайталау, жылулық құрылымдарды оқып білу үшін, тым болмағанда екі себептің күшімен, қолайсыз. Жанудың автомодельдік LS- пен HS-режімдерінің болуы және қасиеттері 7-, 8-ші тақырыптардағыдан гөрі әлдеқайда жұқалау әдістермен анықталады (сәйкес келетін теңдеудің күрделілігінен). Бұдан басқа, автомодельдік шешімдерді және салыстыру теоремаларын талдау үшін тікелей қолдану жалпы жағдайда аяқталған нәтижелерді бермейді. Мысалы, $\beta = \sigma + 1$ кезінде температураның кез келген бастапқы ауытқуы, асқынуы бар режімде, дамитын болатынын тексеру салыстырмалы түрде қиын емес. Олардың шоғырлануын, осы жеке жағдайдың өзінде, дәлелдеу мүмкін емес.

Шынында, асқынуы бар шекаралы режімдерден ерекшеленіп, түрлі шешімдері әртүрлі және бұрынырақ белгілі емес асқыну моменттерін $t_f^{(1)} \neq t_f^{(2)}$ иелене алады (қалғандары тең жағдайларда, $t = t_0$ моментінде құрылымның амплитудасы үлкен болған сайын t_f кішірек болатыны (8.65) тен көрінеді). Сондықтан салыстырушы шешімдердің бірі басқасынан бұрын өзінің болуын тоқтады, және әрі қарай теңестіру маңызын жоғалтады (күрделірек салыстыру әдістерін пайдалану қажет).

8.8. Орташаландырудың түрлі тәсілдері

Жылулық құрылымдардың кеңістікті-уақыттық сипаттамаларын ықшамдап талдау үшін орташаландыру әдісін пайдаланамыз. Осы әдістің түрлі нұсқалары кеңістіктік бойынша да, уақыттық бойынша да шешім тәртібін нүктелік сипаттауды қабыл алмауға, қарпайымырақ модельдермен есептелінетін, біршама орташа сипаттық шамаларға өтуге негізделген.

Жылулық құрылымдарға қолдануда мұндай шамалар ретінде «амплитуда–жартылайкеңістік» немесе «амплитуда–майдан қалпы» жұптарын таңдауға болады.

Бұлардың біріншісін қарастырамыз. Финиттік, $x = 0$ нүктесінде максимумға ие және симметриялық функцияға жақын, $T_0(x)$ бастапқы функциясын санайтын боламыз. Сонда есептердің $T(x, t)$ шешімі де симметриялықтай болады. Жуықталған шешім автомодельдікке ұқсас ((8.66)-ға қараңыз) түрде ізделеді

$$T(x, t) = \psi(t)\theta(\xi), \qquad \xi = \frac{|x|}{\varphi(t)}, \tag{8.67}$$

мұндағы $\psi(t)$ мен $\varphi(t)$ – уақытқа тәуелді ізделуші амплитуда және құрылымның жартылай кеңдігі, $\theta(\xi)$ – біршама тіркелген финиттік бір қалыпты азаятын функция, және де $\theta(0) = 1$.

(8.67)-нің интегралдық теңдеулерді (сақталу заңдарын) қанағаттандыруын талап етеміз

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial T}{\partial t}dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx - \int_{-\infty}^{\infty}T^{\beta}dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial T}{\partial t}Tdx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right)Tdx - \int_{-\infty}^{\infty}T^{\beta+1}dx = 0.$$

Олардың біріншісі – энергия сақталуы заңы, екіншісі моменттік теңдеу $T(x, t)$-ға көбейтілген (8.60)-ты интегралдаудан шығады. Оңайлату үшін (8.60)-қа $k_0 = q_0 = 1$ енгізілген, бұл жалпылықты шектемейді, өйткені $t' = q_0 t$, $x' = x(q_0/k_0)^{1/2}$ ауыстыруын қолдануға баламалы. Екі соңғы теңдікті, $x = \pm\infty$ кезінде жылу ағыны $-T^{\sigma}\ \partial T/\partial x$ нөлге тең екенін ескеріп, бөліктер бойынша интегралдап, алатынымыз

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}Tdx = \int_{-\infty}^{\infty}T^{\beta}dx, \tag{8.68}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}T^{2}dx = -\int_{-\infty}^{\infty}T^{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^{2}dx + \int_{-\infty}^{\infty}T^{\beta+1}dx.$$

(8.68)-ге (8.67)-ні енгізудің $\psi(t)$, $\varphi(t)$ үшін беретін жүйесі:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[\Psi(t)\varphi(t)] = \nu_1\Psi^{\beta}(t)\varphi(t),\\ &\frac{d}{dt}[\psi^{2}(t)\varphi(t)] = -\nu_2\Psi^{\sigma+2}\varphi^{-2}(t) + \nu_3\Psi^{\beta+1}(t)\varphi(t),\end{aligned} \tag{8.69}$$

мұндағы ν_1, ν_2, ν_3 – оң тұрақтылар,

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\theta^{\beta}d\xi,\\ \nu_2 &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\theta^{\sigma}\left|\frac{d\theta}{d\xi}\right|^{2}d\xi \ \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}\theta^{2}d\xi,\\ \nu_3 &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\theta^{\beta+1}d\xi \ \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}\theta^{2}d\xi.\end{aligned} \tag{8.70}$$

Мұнда ν_1, ν_2, ν_3 өрнектері үшін $\theta(\xi)$ функциясының мағынасы бар екендігі болжамдалады.

(8.69) жүйесін туындыға қатысты шешу қиын емес:

$$\frac{d\Psi}{dt}=\frac{\Psi^{\sigma+1}}{\varphi^2}\left[(\nu_3-\nu_1)\Psi^{\beta-(\sigma+1)}\varphi^2-\nu_2\right],$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\Psi^{\sigma}}{\varphi}\left[(2\nu_1-\nu_3)\Psi^{\beta-(\sigma+1)}\varphi^2+\nu_2\right], t>t_0=0, \tag{8.71}$$

ал (8.71) ден – мына теңдеуге өтеміз

$$\frac{d\Psi}{d\varphi}=-\frac{\psi}{\varphi}\frac{a\Psi^{\beta-(\sigma+1)}\varphi^2-1}{b\Psi^{\beta-(\sigma+1)}\varphi^2-1},\quad \psi=0,\ \varphi>0, \tag{8.72}$$

мұндағы $a=(\nu_3-\nu_1)/\nu_2$, $b=(\nu_3-2\nu_1)/\nu_2$. $\nu_3>2\nu_1$ шарты орындалуын талап етеміз, яғни.

$$a>0,\quad b>0, \tag{8.73}$$

бұл (8.71) жүйесі асқынуы бар режімдерге жол беруі үшін қажет.

Солай, есептерді талдау бірінші реттегі қарапайым дифференциалдық теңдеуді оқып білуге келтірді. Осындай күшті ықшамдау «амплитуда–майдан қалпы» орташаландырылуы үшін алынады. Шешілім мынадай түрде ізделеді

$$T(x,t)=\Psi(t)\theta(\xi),\qquad \xi=\frac{|x|}{g(t)}, \tag{8.74}$$

мұндағы $\psi(t)>0$ – құрылым амплитудасы, ал $g(t)>0$ енді жартылай кеңдік емес, оның қозғалушы майданының қалпы. $\theta(\xi)$ функциясы, $\theta(\xi)>0$, $0<\xi<1$, және $\theta(\xi)=0$, $\xi\ge 1$, $\theta(0)=1$, $\theta'(0)=0$ болатындай етіліп, таңдалады. ψ мен g үшін бірінші интегралдық теңдеу ретінде энергияның сақталу заңын таңдаймыз және (8.69)-ға ұқсас алатынымыз

$$\frac{d}{dt}[\psi(t)g(t)]=\nu_1\psi^{\beta}g(t),\qquad t>0. \tag{8.75}$$

Қосымша теңдеуді қорыту үшін, g(t) – жылу толқынының майданы екенін пайдаланамыз және сондықтан $W(g(t),t)\equiv 0$, $T(g(t),t)\equiv 0$. Осы тепе-теңдіктердің екіншісін уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial T}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial T}{\partial t}\equiv 0,$$

(8.60)-ты пайдалана отырып және туындыларды шектер түрінде жаза отырып, келетініміз мына теңдік

$$\frac{dg}{dt}\lim_{|x|\to g^{-(t)}}\left[\frac{T(g(t),t)-T(x,t)}{g(t)-x}\right]=\lim_{|x|\to g^{-(t)}}\left[\frac{W(g(t),t)-W(x,t)}{g(t)-x}-T^{\beta}(x,t)\right].$$

Ол ықшамдалады, егер g(t) – майдан нүктесі және $T(g(t),t)=W(g(t),t)\equiv 0$ екені ескерілсе:

$$\frac{dg}{dt}\lim_{|x|\to g^{-(t)}}\frac{T(x,t)}{g(t)-x}=\lim_{|x|\to g^{-(t)}}\left[\frac{W(x,t)}{g(t)-x}+T^{\beta}(x,t)\right].$$

Майдан төңірегінде, болжам бойынша температура, инертті ортадағыдай, иеленеді келесі асимптоттық көрсетілімді: $T(x,\ t)\approx\left(g(t)-|x|\right)^{1/\sigma}$ (8-тақырыптағы қоғалатын майданы бар шешімге қараңыз, шығу көзі жоқ (8.60) теңдеуі үшін).

Сонда, соңғы теңдіктегі оң жақтан екінші мүше аз, мұны тексеру қиын емес, содан да ескермеуге болады (бұл майдандағы шешім құрылымына энергия көзінің аз ықпалы жайлы болжамды түсіндіреді). Осыдан алынатын формула

$$\frac{dg}{dt} = \lim_{T\to 0}\frac{W}{T} = -\lim_{T\to 0}\left(T^{\sigma-1}\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{8.76}$$

бұл толқын майданы қозғалысының *dg/dt* жылдамдығы үшін алынады. (8.76)-ға (8.74)-ті енгізудің беретіні

$$\frac{dg(t)}{dt} = \nu_4\frac{\psi^{\sigma}(t)}{g(t)}, \qquad t > 0, \tag{8.77}$$

мұндағы $\nu_4 = -(\theta^{\sigma})'(1)/\sigma > 0$.

(8.74)-ті ψ'(t)-ға қатысты шеше отырып, (8.75), (8.77)-ні мына түрде жазамыз

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu_1\psi^{\beta} - \nu_4\psi^{\sigma+1}g^{-2}, \qquad \frac{dg}{dt} = \nu_4\psi^{\sigma}g^{-1}, \tag{8.78}$$

ал сонан кейін өтеміз келесі теңдеуге

$$\frac{d\psi}{dg} = \frac{\psi}{g}\left[\mu\psi^{\beta-(\sigma+1)}g^2 - 1\right],\ g > 0,\ \mu = \frac{\nu_1}{\nu_4}. \tag{8.79}$$

Алдыңғы жағдайдағыдай, жылулық құрылымның орташа сипттамаларының өрістеуі бастапқыдағыдан гөрі әлдеқайда қарапайымырақ модельмен сипатталады.

8.9. Жылу өткізетін орта жануының режімдерін жіктеу

Бірінші орташаландыру тәсіліне сүйене отырып, есептерді талдауды β = σ + 1 жағдайынан бастаймыз. Теңдеу (8.73) қарапайым түрге ие:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\psi}{\varphi}\frac{a\varphi^2 - 1}{b\varphi^2 - 1}, \qquad \psi > 0, \qquad \varphi > 0, \tag{8.80}$$

және оңай интегралданады:

$$C_0 = \psi^{-1}\varphi^{-1}\left[1 - \frac{\nu_3 - 2\nu_1}{\nu_2}\varphi^2\right]^{-\frac{\nu_1}{2(\nu_3 - 2\nu_1)}},$$

мұндағы $C_0 \geq 0$ – тұрақты, φ(0), ψ(0) бастапқы мәндерімен анықталады. Жылулық құрылым өрлеуінің сипаты (8.80) теңдеуінің фазалық траекториялары ретінен көрнекі түрде көрінеді (9.1-сурет).

Қалың сызықпен көрсетілген траектория

$$\varphi \equiv \varphi_S = [\nu_2(\nu_3 - 2\nu_1)]^{1/2} = \frac{L_T}{2}, \tag{8.81}$$

бұл жанудың автомодельдік S-режіміне (8.65) жауап береді (осы – (8.80) теңдеуі шексіздігінің изоклинасы), үзіктелген жіңішке сызық – нөлдің изоклинасы $\varphi = a^{-1/2} < \varphi_S$. (8.81)-дің дұрыстығы шығады, (8.67)-дегі θ(ξ) функцияның (8.65)-мен сәйкестілігі табиғилықпен алынса, мына түрде

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \cos^{2/\sigma}\dfrac{\pi\xi}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & |\xi| \ge 1. \end{cases}$$

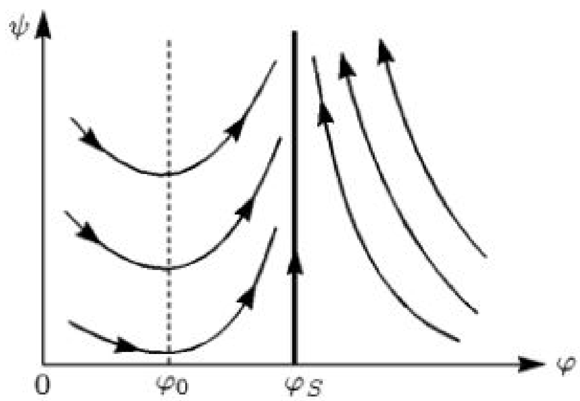
Сонда (8.65)-тен амплитуда мен жартылай кеңдік үшін алынатын арақатынас

$$\psi(t) = \left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} (t_f - t)^{-1/\sigma}, \qquad \varphi(t) = \frac{L_T}{2},$$

ал ν_1, ν_2, ν_3 коэффициенттері үшін (8.70) тең –

$$\nu_1 = \frac{\sigma+2}{2(\sigma+1)}, \qquad \nu_2 = \frac{\pi^2}{\sigma(\sigma+2)}, \qquad \nu_3 = \frac{\sigma+4}{\sigma+2}.$$

Бұл өрнектерді (8.80)-ге енгізу тепе-теңдікке келтіреді, яғни автомодельдік шешім орташаландыру әдісімен өте дәл сипатталады.



8.8-сурет

Автомодельдік емес шешімдерге қатысты болса, онда олардың бәрі, 8.8-суретінен көрінетіні, асқынуы бар режімде дамиды, олардың траекториялары автомодельдікке ұмтылады: $\varphi(t) \to \varphi_S$, $t \to t_f$. Осыдан шығады

$$\psi(t) \sim (\sigma\nu_1)^{-1/\sigma}(t_f - t)^{-1/\sigma}, \ t \to t_f, \qquad (8.82)$$

яғни, жану дамыған кезеңде автомодельдік заңмен өтеді. Бастапқы кезеңде ол жүре алады күрделірек түрде: φ_0-ден кіші жартылай кеңдігі бар $T_0(x)$ функциялары кезінде, құрылымдағы температура әуелде азаяды және өсе бастайды тек жартылай кеңістік дағдарыстық аукымға $\varphi = \varphi_0$ жеткенінен кейін ғана.

$\beta \neq \sigma + 1$ жағдайын (8.79) теңдеуінің көмегімен талдайтын боламыз. Оның $\beta \neq \sigma + 3$ кезіндегі жалпы шешімі

$$\left|\psi^{\beta-(\sigma+1)}g^2 - l_0\right|^{\frac{1}{\sigma+1-\beta}}\psi g = C_0, \qquad l_0 = \frac{1}{\mu}\frac{\beta-(\sigma+3)}{\beta-(\sigma+1)}, \qquad (8.83)$$

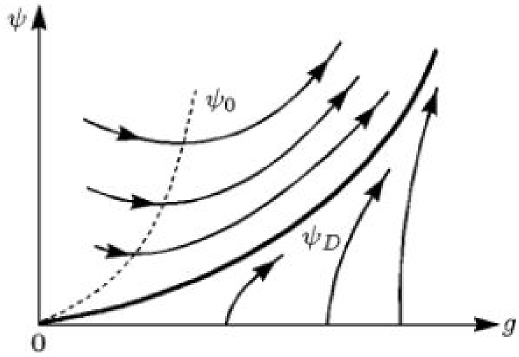
мұндағы $C_0 \ge 0$ бастапқы берілулермен анықталады, ал $\beta = \sigma + 3$ кезіндегі – шешімі

$$\psi^2 = [g^2(C_0 - 2\mu \ln g)]^{-1}, \ C_0 = \text{const} > 0. \qquad (8.84)$$

Теңдеудің интегралдық қисықтарының реті $\beta < \sigma + 1$, $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$, $\beta > \sigma + 3$ диапазондарында әртүрлі. $\beta < \sigma + 1$, $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$ жағдайларына сәйкес келетін 8.9, 9.3-суреттерінде көрсетілген, жіңішке үзікті сызықтармен нөлдік изоклина ψ_0, қалыңмен – ерекше траектория (сепаратриса)

$$\psi = \psi_D = l_0^{\frac{1}{\beta-(\sigma-1)}} g^{-\frac{2}{\beta-(\sigma+1)}}, \qquad (8.84)$$

бұл $\beta < \sigma + 1$ (және $\beta > \sigma + 3$) кезінде бола алады және жалпы шешімдегі C_0=0 мәніне жуап береді.

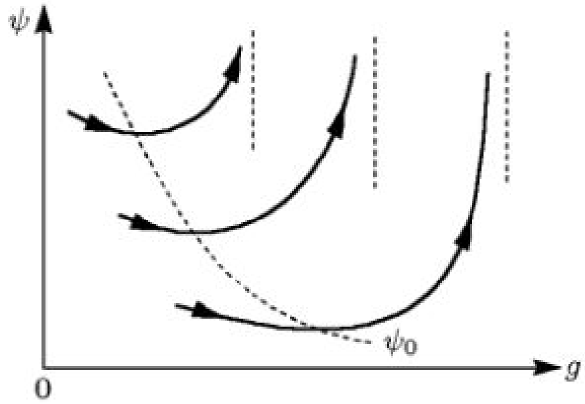


8.9-сурет

Орташа жылулық құрылымдардың ретін қарастырамыз. $\beta < \sigma + 1$ жағдайында (8.9-сурет) барлық траекториялар сепаратрисаға түйіседі (8.84), және құрылым, (8.77)-ден шығатыны, асимптоталық түрде автомодельдік режімге ұмтылады ((8.65)-ге қараңыз):

$$\psi(t) \sim (t_f - t)^{\frac{1}{\beta-1}}, \qquad g(t) \sim (t_f - t)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}, \qquad t \to t_f,$$

және $t \to t_f$ кезінде $g(t) \to \infty$, яғни жылу шоғырлануы HS-режіміне қатыспайды.



8.10-сурет

LS-режімінің жылулық құрылымының реті әртүрлірек ($\beta > \sigma + 1$). $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$ кезінде (8.10-сурет) кез келген траектория координатасы бар тік асимптотаны иеленеді.

$$g_* = C_0^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{\beta-(\sigma+3)}},$$

яғни $g(t) \to g_*$, $t \to t_f$, бұл жану шоғырлануының $|x| < g_*$ аймағында болатынын білдіреді. Құрылым амплитудасы автомодельдік заң бойынша өседі $\psi(t) \sim (t_f - t)^{\frac{1}{\beta-1}}$, $t \to t_f$ (орташаландырудың берілген тәсілі кезінде жартылай кеңдіктің реті, табиғи түрде сипатталмайды).

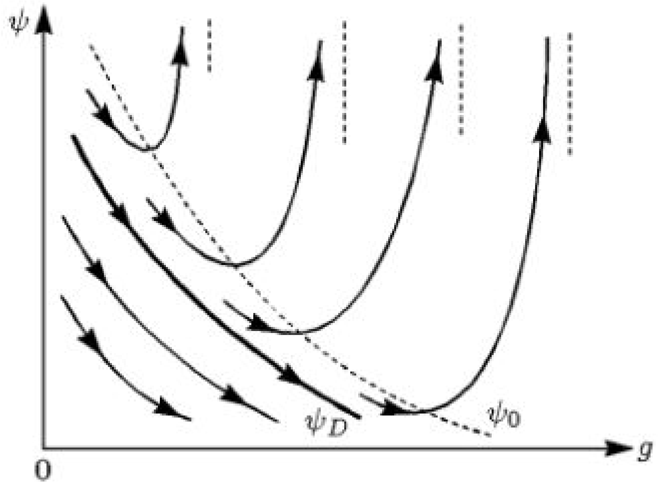
Асқынатын шоғырланған құрылымның дамуы жайлы тұжырым траекториялардың бөліктері үшін $\beta \geq \sigma + 3$ жағдайында да дұрыс, және де $\beta = \sigma + 3$ үшін (8.83)-тен алатынымыз $g_* = e^{C_0/(2\mu)}$. Алайда $\beta > \sigma + 3$ кезінде (8.11-сурет; ψ_D мен ψ_0 сызықтарының мағынасы, 8.9-суреттегідей) LS-режімнің фазалық жазықтығында, шешімдердің түрлі сыныптарын қағидалы түрде бөлетін, сепаратриса (8.84) болады. ψ_D сызығынан жоғары аймаққа жауап беретін, $T_0(x)$ бастапқы функциялар үшін асқынуы бар зерттелген режім дамиды. Егер де бастапқы ауытқу не үлкен емес амплитудаға, не үлкен емес ауқымға (ψ_D сызығынан төмен аймақ) ие болса, онда асқынуы бар режім дамымайды. Құрылымдағы температура ((8.82)-ге қараңыз) өрістейді мына заң бойынша

$$\psi(g) \sim F_0 g^{-1},\ F_0 = C_0 l_0^{-\frac{1}{\sigma+1-\beta}} > 0,\ g \to \infty.$$

Осыдан және (8.77)-ден асимптоттық бағалар алынады

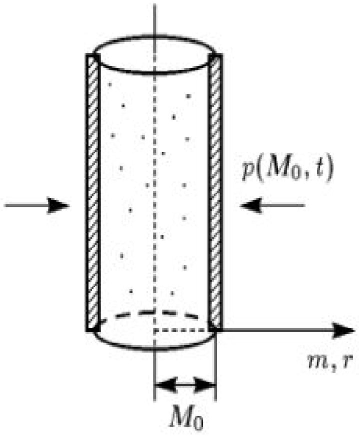
$$\psi(g) \sim t^{-\frac{1}{\sigma+2}},\ g(t) \sim t^{\frac{1}{\sigma+2}},\ t \to \infty.$$

Ұқсас тәртіп энергия бөлінусіз ортадағы автомодельдік шешімдерге тән, мысалы, 8-тақырыбындағы 8.2-дегі жылудың лездік нүктелік көзі жайлы есеп шешімі үшін. Солай, $\beta > \sigma + 3$ жағдайында жеткіліксіз күшті ынталандыру кезінде ортаның жану үдерісі сөнеді. HS-режімінде және асқынатын LS-режімінде (S-режімге ұқсас) $\varphi = \varphi_0$ құрылымның дағдарыстық ауқымы бар, бұларға жеткен кезде температура өсе бастайтынын, атап өтеміз.



8.11-сурет

Орташаландыру әдісі сызықты емес ортадағы жану құрылымдарының толық аяқталған жіктеуін алуға мүмкіндік берді. Олардың пайда болуы параболалық теңдеулермен сипатталатын үдерістердің арнайы қасиеті болмайтынын көрсетеміз. *Шоғырланған газдинамикалық құрылымдардың* қарапайым мысалын тұрғызамыз. Цилиндрлік поршеннің ішіне алынған $2M_0$ газдың ақырғы массасының үзіксіз (соққылық толқындарсыз) қысуын қарастырамыз (8.12-сурет).



8.12-сурет

Бірөлшемдік үдеріс сипатталатын теңдеулер жүйесі

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial m} r\upsilon, \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -r\frac{\partial p}{\partial m}, \quad p\rho^{-} = \varphi(m) \geq 0, \tag{8.85}$$

$$\frac{dr}{dt} = \upsilon, \qquad 0 < m < M_0\,, \qquad t_0 \leq t,$$

мұндағы: t – уақыт; m – массалық координата, симметрия осінен саналады және эйлерлік координатамен $dm = \rho r$ арақатынасымен байланысқан; ρ, υ, р – газдың ізделуші тығыздығы, жылдамдығы және қысымы; $\gamma > 1$ – адиабата көрсеткіші; φ – берілген энтропиялық функция. (8.85) жүйесін қозғалыс теңдеулерінен Эйлер түрінде алу қиын емес. Еске алатынымыз: (8.85)-тің алдыңғы екі теңдеуі – масса мен импульс сақталуының заңдары, үшіншісі – адиабаталықтың интегралы (соққы толқыны қатыспағанда газдың тіркелген бөлігінің энтропиясы уақытпен өзгермейді), төртіншісі – r мен υ арасындағы кинематикалық байланыс.

Жылулық S-режімдермен ұқсастық бойынша бөлектелетін айнымалылардағы (9.27) шешімін тұрғызамыз:

$$p(m, t) = p_1(t)\pi(m), \quad \upsilon(m, t) = u_1(t)\, u(m),$$
$$r(m, t) = r_1(t)R(m), \tag{8.86}$$
$$0 < m < M_0\,, \qquad t_0 \leq t < t_f,$$

Мұндағы уақыттық бөлікті (8.86) жалпылаудың елеулі шектелуісіз бірден дәрежелік функциялар түрінде аламыз

$$p = p^0(t_f - t)^n\pi(m), \quad \upsilon = u^0(t_f - t)^{n-1}\, u(m),$$
$$r = r^0(t_f - t)^{n}{}_2\, R(m), \tag{8.87}$$
$$0 < m < M_0\,, \qquad t_0 \leq t < t_f < \infty,$$

және айталық әрі қарай $p^0 = u^0 = r^0 = 1$ есептеулерін ықшамдау үшін.
Бұл өрнектерді (8.85)-ке енгізіп, аламыз

$$n = -2, \qquad n_1 = \frac{1-\gamma}{\gamma} < \mathrm{O}, \qquad n_2 = \frac{1}{\gamma} > 0. \tag{8.88}$$

Жазық жағдайдан ерекшелініп (8-тақырыптағы 8.3-тегі сәйкес келетін шешімге қараңыз), заңдағы n көрсеткіш қысым үшін γ-дан тәуелсіз. π, u, R–ді анықтау үшін қолданылатын жүйе

$$-\frac{2}{\gamma}\varphi(m)^{1/\gamma}\pi^{-1/\gamma}=\frac{d(Ru)}{dm}, \qquad \frac{1-\gamma}{\gamma}u=R\frac{d\pi}{dm}, \qquad u=-\frac{1}{\gamma}R,$$
$$0 < m < M_0,$$
бұл оңай шешіледі. Мысалы, $\pi(m)$ үшін кеңістітік кескінді беретін формула
$$\pi(m)=\pi(M_0)+\frac{(\gamma-1)(m-M_0)}{\gamma^2}, \qquad 0 < m < M_0, \qquad (8.89)$$
мұндағы $\pi(M_0)$ қысым үшін поршеньдегі заңнан анықталады. $u = -R/\gamma$ теңдеуі күшімен $r = 0$ цилиндрінің осіндегі ($m = 0$) газ жылдамдығы симметрияның $\upsilon(0,t)=0$ табиғи шартын қанағаттандыратынын, байқаймыз.

(8.87)–(8.89)-дан қысым үшін шешімнің ақырғы түрін табамыз:
$$p(m,t)=(t_f-t)^{-2}\left[\pi(M_0)+\frac{(\gamma-1)(m-M_0)}{\gamma^2}\right],$$
$$0 < m < M_0, \qquad t_0 \le t < t_f,$$

және ((8.85) үшінші теңдеуді ескеріп) тығыздық үшін:
$$p(m,t)=(t_f-t)^{-2/\gamma}\varphi(m)^{-1/\gamma}\left[\pi(M_0)+\frac{(\gamma-1)(m-M_0)}{\gamma^2}\right]^{1/\gamma},$$
$$0 < m < M_0, \qquad t_0 \le t < t_f.$$

Оңайлату үшін соңғы формуладағы $\pi(M_0) = \gamma - 1)\ M_0/\gamma^2$ делік және алатынымыз
$$p(m,t)=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\right)^{1/\gamma}(t_f-t)^{-2/\gamma}\left[\frac{m}{\varphi(m)}\right]^{1/\gamma}, \qquad (8.90)$$
$$0 < m < M_0, \qquad t_0 \le t < t_f,$$

(8.90) нан, функция $\rho(m, t)$-ның, $p(m, t)$ дан ерекшелініп, экстремумдарды иелене алатыны көрінеді. Орта телімінің қысу дәрежесі оның $\varphi(m)$ энтропиясымен және оның ішіндегі қысыммен анықталады. Энтропиясыздықтың арқасында қысымның бірқалыпты кескіні кезінде қысу толқынында қысымы аз аймақтарда үлкен тығыздыққа жетуге және газдинамикалық құрылымдарды (тұрғызылған мысалда кез келген күрделі құрылымдарды) алуға болады. Олар өзімен газдың тіркелген массасымен байланысқан асқынуы бар режімде өсетінін және тығыздықтың шоғырланған бірқалыпты еместігін көрсетеді.

ҮЗІКТІК МОДЕЛЬДЕРГЕ ӨТУ ЖАЙЛЫ

Сандық әдістерге қарапайым талаптар жайлы және айырымдық сызбанұсқалар теорияларының негізгі түсініктері жайлы ұсынымдарды береміз. Бастапқы модельдердің дискреттік ұқсастарын құрастыруға типтік жақындаудың біршамасын қарастырамыз, бұл олардың сандық зерттелуіне қолданылады.

8.10. Сандық модельдеудің қажеттігі, айырымдық сызбанұсқалардың қарапайым түсініктері

Қандай терең және әртүрлі болғанымен математикалық модельдердің сапалы талдау әдістерінің, олардың қолданылуының аймақтары тым шектелінген. Бұл – не қарапайым, басым түрде сызықты модельдер, не күрделілердің жекеленген сыныктары, мұның санында сызықты еместік модельдер бар. Модельдерді зерттеудің жалғыз жан-жақты тәсілі болатын, ақпаратттың заманауи есептеу техникасының құралдары көмегімен қойылған мәселенің жуықталған шешімін табу үшін, сандық әдістерді қолдану.

Компьютер «түсінуіне» жол беретін есептеу алгоритмі, яғни жәрдемдер тізбектілігі (арифметикалық, қисындық және т. б.), оларды орындау нәтижесінде табылатын шешім, өте қатаң және кейде қарама-қарсы талаптарды қанағаттандыруы тиіс. Оларға жататындар, бәрінен бұрын, парасаттық үшін берілген дәлдікпен және мүмкіндігінше әсерлердің ең кіші санын алу қажет, өйткені бір есептеудің уақыты минуттермен және тек біргейлік жағдайларда ғана – сағаттармен өлшенуі керек. Мұндағы өңделетін ақпараттың көлемдері машиналық жады сыйымдылығының мүмкіндіктерінен арта алмайды, есептеу үдерісінде компьютермен қабылданылмайтын өте үлкен (кіші) сандардың пайда болуына жол беруге болмайды, алгоритм құрылымы жеткілікті қарапайым болуы және есептеу жүйелері архитектурасын ескеру керек және т. б.

Тек осы талаптарға жауап беретін есептеу алгоритмдері, бастапқы модельдің жан-жақты сандық зерттелуін жүргізуге, оның талдауын түрлі жағдайлар кезінде өткізе отырып, зерттелуші зерзат жайлы жеткілікті ақпарат ала отырып, оны есептеу экспериментіне ұшыратуға мүмкіндік береді. Математикалық модельдеуді осылай түсіну, құбылыстардың сандық сипаттамаларын дәлдеуді, сондай-ақ олардың негізгі сапалық қасиеттерін оқып білуді білдіреді. Соңғысы бәрінен бұрын, тәртібі (реті) тіптен әртүрлі және күтпеген бола алатын сызықты еместік зерзаттар үшін маңызды.

Сандық модельдеудің мәселелері барынша қуатты және арзан компьютерлер пайда болуы өлшемі бойынша өз-өзінен алынып тасталмайтынына көңіл аударамыз. Бұл аз дегенде екі себеппен байланысқан: тәжірибемен де, мәселелер теориясымен де ұсынылатын күрделілікпен және зерзаттың жеткілікті толық зертелуі үшін есептеулік эксперименттер топтамаларының үлкен санын өткізу қажеттігімен.

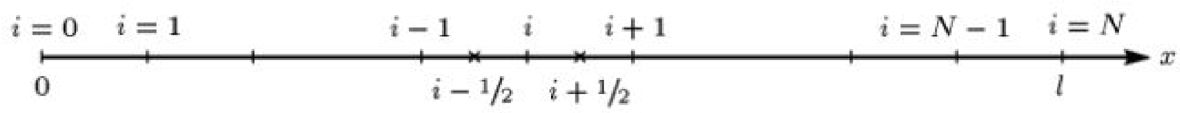
Сондықтан тиімді есептеу алгоритмдерін жасау әрқашан математикалық модельдеудің маңызды жолының бірі болып қала береді. Оларды құрастыру үшін, бастапқы математикалық модельдерді тұрғызу кезінде қолданылатын әдістер, идеялар және жақындаулар кеңінен пайдаланылады. Бұл байланыс дифференциалдық теңдеулерге әкелетін – модельдердің өте кең сыныбы мысалында жақсы бақыланады. Олар үшін есептеу алгоритмдерін жасау үдерісі екі бас кезеңнен тұрады: біріншісінде бастапқы модельдердің үзіктік ұқсастары тұрғызылады және оның қасиеттері зерттеледі, екіншісінде үзіктік теңдеулер сандық түрде шешіледі.

Әрі қарай негізгі назарды бірінші кезеңге аударамыз, алдымен ең қарапайым шеттік есепті мына кесіндіде қарастырамыз

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u_1, \qquad u(l) = u_2, \qquad (8.91)$$

мұнда және әрі қарай оның (сәйкес келетін мағынада түсінілетін) шешімі бар және жалғыз екені болжамдалады.

(8.91)-ден үзіктік модельге өту екі кезеңге бөлектеледі. $0 < x < l$ үзіксіз аймағын үзіктікке ауыстырамыз – N нүктелерінің ақырғы сандарының жиынтығы. Ең қарапайым тәсіл – $[0, l]$ кесіндісін $x_i = ih$, $h = l/N$, $0 \le i \le$ N ережесі бойынша біркелкі бөлу. Бұл нүктелердің жиынтығы $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, x = 1\}$, $\omega_h = \{x_i\}$, $i \ne 0$, N, өзімен (бірқалыпты) *қадамы h айырымдық торды* көрсетеді, x_i нүктелері – оның түйіндері (8.13-суретке қараңыз, мұнда сызықшалармен тордың негізгі түйіндері, ал айқыш сызықшалармен жартылай бүтін көрсеткіштері бар көмекші түйіндер $x_{i+½} = (x_{i+1} - x_i)/2$ белгіленген). (8.91)-де көрінетін барлық функциялар енді үзіксіз аргумент x-тың емес*,* үзіктік аргумент x_i–дің (торлық функциялар) функциялары ретінде қарастырылады, мысалы, шешімнің ұқсасы болып



8.13-сурет

$u(x)$, $0 \le x \le 1$, қызметі оның жуықталған шешімді $y(x_i)$, $0 \le i \le$ N жақындату.

Екінші кезеңде (8.91) дифференциалдық теңдеудің және кіруші берілулердің үзіктік ұқсастықтары тұрғызылады. Дифференциалдық оператордың үлкенірек үзіктілігі – сәйкес келетін шеттік айырымдармен туындыларды ауыстыру. Белгілеулер енгіземіз

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \qquad u_{\bar{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \qquad u_{\bar{x}x} = \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h} \qquad (8.92)$$

(8.92)-нің бірінші екі өрнегі – du/dx туындысының үзіктік жақындатуы, мұны алу үшін тек екі нүктедегі (екінүктелік үлгі) $u(x)$ функциясының мәндерін пайдалану жеткілікті. $u(x)$-ты Тейлор қатарына ыдырата отырып, мынадай болатынына сену қиын емес

$$\frac{du}{dx}(x) = u_x + O(h), \qquad \frac{du}{dx}(x) = u_{\bar{x}} + O(h),$$

$$\frac{du}{dx}\left(x + \frac{h}{2}\right) = u_x + O(h^2), \qquad \frac{du}{dx}\left(x - \frac{h}{2}\right) = u_{\bar{x}} + O(h^2).$$

Басқа сөздермен, du/dx тордың $x = x_I$ бүтін түйіндерінде *жақындатудың бірінші* ретіндегі (8.92) өрнектерімен жақындатылады, ал жартылай бүтін $x = x_{i+½}$, $x = x_{i-½}$ нүктелерінде (симметрия күшімен) – екінші реттегімен. *u* функциясының екінші туындысын ((8.92)-нің үшінші өрнегін) ауыстыру үшін, айқын түрде көрінетіні, үшнүктелік үлгі $x - h$, x, $x + h$ талап етіледі, және де

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = u_{\bar{x}x} + O(h^2) = - \ \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = u_{\bar{x}x} + O(h^2) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2),$$

яғни жақындату екінші ретке ие.

Кірулік берілулердің үзіктік жақындатуы қарастырылушы жағдайда қиындық көрсетпейді және дәл іске асады: $\varphi_i = f(x_i) = f_i$, $i = 0,...,N$; $y_0 = y(0) = u_1$, $y_N = y(l) = u_2$.

Осы пайымдарды біріктіре отырып, ω_h торының x_i түйіндеріндегі y_i жуықталған шешімінің N–1 белгісіз мәндерін табу үшін, (8.91)-ді айырымдық теңдеулердің N–1 жүйесімен ауыстырамыз:

$$y_{\bar{x}x} = -\varphi, \textit{немесе} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -\varphi_i, \qquad (8.93)$$
$$i = 1,2,...,N-1, y_0 = u_1, y_N = u_2$$

Шеттік шарттары бар жүйе (8.93) *айырымдық сызбанұсқа* деп аталады және (8.91) моделінің үзіктік ұқсасы қызметін атқарады. Мұның шешімі салыстырмалы түрде оңай (тақырып 10.2-ге қараңыз).

(8.91)–(8.93)-ті пайдалана отырып, айырымдық сызбанұсқалармен байланысқан элементар түсініктерді нақтылы көрсетеміз. Торлық функция $z_i = y_i — u_i$, $i = 1, ..., N$, яғни $x = x_i$ торының түйіндеріндегі дәл және жуықталған шешімдер арасындағы айырым, *қателік* деп аталады. Егер $z_i = O(h^a)$, $i = 1,..., N$; $a > 0$ болса, онда айырымдық сызбанұсқа (8.93), және $z_i \to 0$, $h \to 0$-дермен үйлеседі (a ретімен), барлық i үшін: y_i торы майдаланылған кезде дәл шешім мен (x) x_i түйіндерінде қанша болса сонша жақсы жақындайды. Түйіндер арасында ізделуші шешімді әдеттегі өзгерту көмегімен қажет кезде аяғына дейін анықтауға болады. Бұл жағдайда айырымдық сызбанұсқаны тұрғызу өз мақсатына жетеді.

(8.93) сызбанұсқаның ұқсастығын қалыптастыру үшін, қарастыратын торлық функция

$$\psi_i = u_i'' - u_{\bar{x}x}, \ i = 1, \ldots, N-1,$$

бұл *айырымдық дифференциалдық оператор жақындатуының қателігі*, немесе *жабысқақ еместік* деп аталады (мұнда штрихтармен x бойынша дифференциалдау белгіленген, $u'' = u''(x_i)$). Егер $\psi_i = O(h^\beta)$, $i = 1, \ldots, N-1$; $\beta > 0$ болса, онда орын алатын жақындату: үзіксіз оператор үзіктікке β ретімен жақындайды (мұнда, жоғарыда көрсетілгендей, $\beta = 2$), и $\psi_i \to 0$, $h \to 0$, $i = 1, \ldots, N-1$. Функция $f_i - \varphi_i$, $i = 0, \ldots, N$, – оң жақ бөліктегі жақындатудың қателігі (зерттелуші мысалда шеттік шарттар жақындатуының қателігі сияқты, ол тепе-теңдік түрде нөлге тең).

Тордың ішкі түйіндерінде (8.93)-тен $i = 1,..., N - 1$ (8.91) теңдеуін шегеріп, алатынымыз

$$y_{\bar{x}x_i} - u_i'' = -\varphi_i + f_i, \quad i = 1,..., N-1,$$

немесе, $z = y_i - u_i$, $\psi_i = u_i'' - u_{\bar{x}x}$, $\varphi_i - f_i$ теңдіктерін ескере отырып, нөлдік шеттік шарттары бар z_i қателігі үшін айырымдық теңдеулер жүйесіне келеміз:

$$z_{\bar{x}x} = \psi, \quad i = 1,..., N-1, \quad z(0) = z(N) = 0, \tag{8.94}$$

мұның оң жақ бөлігі – жақындатудың қателігі ψ.

Бұл қасиет бұрын енгізілген (8.93) сызбанұсқасының үйлесімі мен жақындатылуы түсініктері және оның тұрақтылығы арасындағы негізгі байланысты қалыптастыруға мүмкіндік берді. Соңғысымен түсінілетіні, кез келген жол берілетін φ, u_1, u_2 кірулік берілулер үшін, мынадай теңсіздіктің орындалатыны

$$\|y\| = \max_i |y_i| \le C\|\varphi\| = C \max_i |\varphi_i|, \; i = 0, ..., N, \tag{8.95}$$

мұндағы $C > 0$ – тұрақты, i-ден және h-тан тәуелсіз (осы жағдайда тұрақтылық оң жақ бөлік бойынша болады).

Сызбанұсқа (8.94) – (8.93)-тің жеке жағдайы. Сондықтан (8.95) орындалған жағдайда ол үшін жылдам алатынымыз

$$|z| \le C|\psi|, \text{ немесе } z_i = O(h^\beta) \to 0, \; h \to 0, \; i = 0, ..., N,$$

яғни (8.93) айырымдық сызбанұсқаның ($\psi = O(h^\beta)$) жақындатуы және (8.95) тұрақтылығы қасиеттерінен оның ұқсастығы шығады ($\alpha=\beta=2$ жақындатуының ретінікіндей ретпен).

Сапалы пайымдау көмегімен, қалыптасқан байланыс, жалпы айтқанда, айырымдық сызбанұсқалардың кез келген сыныптарына тарайтынын, түсіндіреміз. Біршама жалпы (дерексіз) есеп делік

$$\begin{aligned} &Lu = f(x), \quad x \in G, \quad x = \{x_1,...,x_n\}, \\ &u = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad \overline{G} = C \cup \Gamma, \end{aligned} \tag{8.96}$$

мұндағы L – сызықтық дифференциалдық оператор, $x \in G$ ашық аймағында әсер етеді (G аймағының $\overline{G} = G \cup \Gamma$ тұйықталу шекарасы – Γ), f мен μ – $x \in R^n$– дің берілген функциялары (оң жағы және ізделуші шешімнің мәні шекарада), жақындатылады біршама айырымдық сызбанұсқамен

$$\begin{aligned} &L_h y_h = -\varphi_h, \quad x \in \omega_h, \\ &y_h(\gamma_h) = \mu_h, \quad x \in \gamma_h, \quad \overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h, \end{aligned} \tag{8.97}$$

мұндағы $\overline{\omega}, \omega_h, \gamma_h$ – $\overline{G}$, G, Γ үшін айырымдық ұқсастар, L_h арқылы сәйкес келетін айырымдық оператор белгіленген, ал торлық функциялар y_h, φ_h, μ_h – дәл шешімнің және f, μ кірулік берілулердің ұқсастары.

Жоғарыда көрсетілгендей, енгізетініміз, қателік $z_h = y_h - u_h$, жабысқақ еместік $\psi_h = (Lu)_h - L_h u_h$ және де оң жақ бөліктің жақындатылуын және шеттік шарттарды дәл деп санай отырып, (8.96)-ны ескеріп алатынымыз

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h; \quad z_h = 0, \quad x \in \gamma_h. \tag{8.98}$$

(8.93) сызбанұсқасының жағдайына ұқсас, z үшін айырымдық есептің оң жақ бөлігі өзімен ψ жақындатуының қателігін көрсетеді. Егер сызбанұсқа (8.97) тұрақты болса, яғни $\|y_h\|_{(1)} \le C\|\varphi_h\|_{(2)}$ (мұндағы $\|\cdot\|_{(1)}$ және $\|\cdot\|_{(2)}$ нышандарымен біршама, жалпы айтқанда, y_h пен φ_h торлық функцияларының түрлі мөлшерлері белгіленген), сонда (8.98)-ден шығатыны

$$\|z_h\|_{(1)} \le C\|\varphi_h\|_{(2)}.$$

Осыдан көрінетіні, (8.97) сызбанұсқасының жақындатуы ($\|\psi_h\| \to 0$, $|h| \to 0$) мен тұрақтылығы оның үйлесімділігін ($\|z_h\| \to 0$, $|h| \to 0$) қамтамасыз ететіні. Мұндай бекітулер айырымдық сызбанұсқалармен жақындатылатын дифференциалдық теңдеулерге арналған басқа да есептерге, мұның санында сызықты еместіктерге де қатысы бойынша әділ болады (мұнда тұрақтылықты анықтау сәйкес келетін түрмен түрлендіріледі).

Сонымен, үзіктік модельдерге кем дегенде екі талап қойылады – бастапқы модельдің жақындатуы және тұрақтылық. Сонда айырымдық теңдеулердің жеткілікті дәл сандық шешімі (ережедегідей, олар өзімен N ретіндегі сызықтық және сызықтық еместік алгебралық теңдеулер жүйелерін көрсетеді, мұндағы N – тор түйіндерінің саны) кезінде және жеткілікті аз қадамдары кезінде жеткілікті дәл жуықталған шешім алынады. Көңіл аударатынымыз: түйіндер саны тым үлкен (ал оның қадамдары тым аз) бола алмайды, өйткені сандық шешімді жәрдемдер деп, яғни шынайы торларды пайдалана отырып табу қажет. Үзіктік модельдер тұрғызудың біршама тұрпаттық әдістерін қарастырамыз.

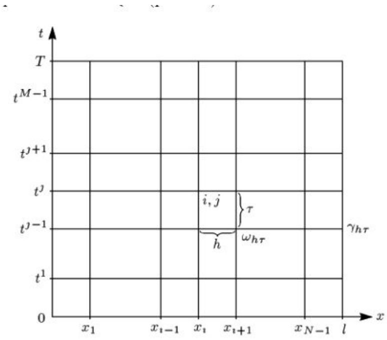
8.11. Тікелей жалған жақындату немесе жуықтату

Бұл, тарихи түрде бірінші, аталуынан шығатыны оңай түсіндірілетін әдіс қарапайым, айқын және сапасы жақсы үзіктік модельдерді жиі береді. Мұны, жылуөткізгіштік теңдеуі үшін $[0, l]$ кескінінде бірінші шеттік есептің айырымдық жақындатуын тұрғызып, көрсетеміз

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t \le T,\\
&u(0, t) = u_1(t), \quad u(0, l) = u_2(t), \quad 0 < t \le T, \qquad\qquad (8.99)\\
&u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l.
\end{aligned}$$

Шешім $u(x, t)$ бар деп жорамалданады және барлық $0 < t \le T$ кезінде $0 < x < l$ аймағында ізделінеді (8.14-сурет).

Есептеулік аймақты $N - 1$ тіктермен біркелкі және M көлденең сызықтармен бөлектей отырып, қарапайымырақ үзіктелуін таңдаймыз. Олардың қиылысу нүктелері өзара бір-бірімен және $[0, l]$, $[0, T]$, $[l, T]$ кескіндерімен $\overline{\omega}_{h\tau}$ тор түйіндерін береді. Мұндай тор *кеңістік бойынша қадамы* $h = l/N$, $x_i = ih$, $0 \le i \le N$, және *уақыт бойынша* $\tau = T/M$, $t^j = j\tau$, $0 \le j \le M$ *біркелкілік* деп; j индексі бірдей түйіндердің жиынтығы – *уақытша қабат деп* аталады (8.14-сурет). Шекаралық ($[0, l]$, $[0, T]$, $[l, T]$ кескіндеріне жататын) түйіндердегі $u(x, t)$ функция (8.99) шеттік шарттардан белгілі, және айқын көрінетін жақындатуы: $y_0^j = u_1(t^j)$, $y_N^j = u_2(t^j)$, $j = 0, 1,..., M$; $y_i^0 = u_0(x_i)$, $0 \le i \le N$.



8.14-сурет

y_i^j жуықталған шешімін $\overline{\omega}_{h\tau} = \omega_{h\tau} \cup \gamma_{h\tau}$ торының $\omega_{h\tau}$ ішкі түйіндерінің жиынтығынан табу қажет. Айырымдықты $\omega_{h\tau}$ торының (x_i, t^j) кез келген нүктесінде бірдей етіп жаза отыра, оның дифференциалдық операторының табиғи жақындатуын өткіземіз. Уақыт бойынша туындыны бірінші айырым: $\partial u / \partial t \approx (y_i^{j+1} - y_i^j)/\tau$ -мен ауыстырамыз. Оның ішінде екі уақыттық қабаттан айырымдық шешімнің мәндері көрінетінін ескеріп, x бойынша екінші туындыны, (j + 1)-ші және j-ші қабаттарда: $\partial^2 u / \partial x^2 \approx \sigma y_{\bar{x}x}^{j+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x}^j$, мұндағы $0 \le j \le 1$ алынған, өрнектер (8.10 тақырыбында алынған) қосындысымен ауыстырамыз. Қорытындысында (8.99)-дың орнына *салмақтары бар сызбанұсқаға* келеміз

$$
\begin{gathered}
\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}, \\
(x_i, y^j) \in \omega_{h\tau}, \\
y_0^j = u_1(0, t^j), \quad y_N^j = u_2(l, t^j), \quad j = 0, 1, ..., M; \\
y_i^0 = u_0(x_i), \quad 0 \le i \le N,
\end{gathered}
\tag{8.100}
$$

бұл өзімен (N – 1) M сызықты алгебралық теңдеулерді көрсетеді, y_i^j функцияларының соншама сан мәнін таба алады. (8.100) теңдеулерінің әрбірі, (i – 1, j + 1), (i, j + 1), (i + 1, j + 1), (i – 1, j), (i, j), (i + 1, j) индекстері бар түйіндерді пайдаланатын алты нүктелік үлгіде, $\sigma \ne 0$, 1 кезінде, жазылған. Оның жақындатуының қателігі жалпы жағдайда $O(\tau + h^2)$ шама, яғни уақыт бойынша бірінші реттегі және кеңістік бойынша екінші реттегі болады. $\sigma = ½$-і бар *симметриялы сызбанұсқа* үшін уақыт бойынша жақындатудың реті $O(\tau^2)$-ға дейін артады.

σ = 0, 1 кезінде (8.100)–ден қарапайымырақ таза *айқын* (σ = 0, төртнүктелік үлгі (i, j + l), (i – l, j), (i, j), (i + l, j)) және таза *айқын емес* (σ = 1, төртнүктелік үлгі (i – 1, j + 1), (i, j + 1), (i + l, j + l), (i, j)) сызбанұсқалар алынады.

σ = 0 кезінде (8.100) сызбанұсқасы теңдеулерінің әрбірінің құрамында бір ғана белгісіз шама y_i^{j+1} болады. Сондықтан оның шешімі, айқын формулалар бойынша j-ден (j + 1)-ші қабатқа, шекарадағы шешімнің белгілі мәндерін пайдаланып, өту кезінде, оңай табылады (j = 0 қабатында шешім бастапқы берілулерден белгілі).

Айқын емес сызбанұсқа жағдайында (және $\sigma \neq 0$-і бар барлық сызбанұсқаларда) айырымдық теңдеулер әрбір уақыттық қабаттағы есеп алынады. Үшнүктелік теңдеулер үшін ұқсас есептер

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1,..., N-1,$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2, \qquad (8.101)$$

мұндағы $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$, $i = 1,..., N-1$, $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$, $i = 1,..., N-1$ шарттарында; $|\chi_\alpha| \leq 1$, $\alpha = 1, 2$; $|\chi_1| + |\chi_2| < 2$ ((8.93) және (8.100) үшін бұл шарттар орындалған) айдау әдісімен салыстырмалы түрде оңай шешіледі. (8.101) шешімінде рекурренттік тәуелділіктің болуы мына түрде жорамалданады

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad (8.102)$$

оны (8.101)-ге енгізу α_{i+1} мен β_{i+1} коэффициентері үшін мынадай рекурренттік арақатынастарды береді

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1,..., N_1.$$

Бұлардан шеттік шарт көмегімен $i = 0$ кезінде тордың барлық түйіндеріндегі α_{i+1}, β_{i+1} табылады (тіке айдау). Әрі қарай, шарт көмегімен $i = N$ нүктесінде α_{i+1}, β_{i+1} белгілі болған кезде (8.102) формула бойынша y_N, y_{N-1}, …, y_1, y_0 мәндері есептеледі (кері айдау). Белгілейтініміз: (8.100) алгебралық жүйе шешімінің қарапайымдылығы оның матрицасының қарапайым (үшдиагональды) құрылымының қарапайымдылығымен қалыптасады.

8.10 тақырыбындағылардан гөрі біршама күрделірек пайымдаулармен, (8.100) сызбанұсқасының тұрақтылығы қалыптасылады, және де $\sigma = 0$ мен $\sigma=1$ жағдайлары арасында сапалы айырым бар. Таза айқын емес сызбанұсқа, h пен τ қадамдары арасындағы кез келген арақатынас кезінде, тұрақты (*шартсыз тұрақтылық*), сондай уақытта таза айқын сызбанұсқа сияқты орындалуы қажет теңсіздік $\tau \leq Ch_2$, $C > 0$ – біршама тұрақтылық (шартты тұрақтылық). Бұл талап (параболалық теңдеулермен туындайтын, айқын айырымдық сызбанұсқалар үшін типті) уақыт бойынша қадамға тым қатаң шектеулерді қондыра алады. Сондықтан, өзінің қарапайымдылығына қарамастан, айқын сызбанұсқалар бұл есептерді шешу үшін іс жүзінде қолданылмайды.

Ұқсас түрмен (8.99)-дан ерекшеленетін шеттік есептер және жалпылау параболалық теңдеулер үшін (8.100) тұрпатындағы айырымдық сызбанұсқалар тұрғызылады. Мысалы, сызықты еместік жылуөткізгіштіктің теңдеуі үшін

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

бірінші шеттік есептің айқын көрінетін жақындатуының бірі келесі түрде көрінеді:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}[k_{i+1/2}^j \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k_{i-1/2}^j \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h}],$$

$$(x_i, y^j) \in \omega_{h\tau},$$

$$y_0^j = u_1(0, t^j), \quad y_N^j = u_2(l, t^j), \quad j = 0, 1,..., M;$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \qquad 0 \le i \le N,$$

мұндағы $k_{i+1/2}^j$ мен $k_{i-1/2}^j$ – жартылай бүтін i + 1/2, i – ½ түйіндердегі жылуөткізгіштік коэффициентінің біршама жуықтаулары, бұлар оңайлату үшін j-ші қабатта алынған. Берілген ашық емес тұрақты сызбанұсқа, (8.100)-дағыдай, айдау әдісімен оңай шешіледі. Егер де жылуөткізгіштік коэффициенті (j + 1)-ші қабатта жақындатылса, онда ол сызықты еместік болады және *тізбектік жуықтаулардың* (*итерациондық орындау реттерінің*) сәйкес келетін әдістері көмегімен шешіледі.

Солай, тіке жақындату негізінде жағдайлар қатарында қажет сапаларға ие жайбар үзіктік модельдер алынады. Сондай уақыт ішінде оның жалған қолданылуы, өзінің болашақ үлгілерімен ешқандай ортақтығы жоқ бастапқы модельдерінің үзіктік ұқсастарын да келтіре алады. (8.99) теңдеуінің өте табиғи жақындатуын аламыз – айырымдық теңдеу

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}, \tag{8.103}$$

бұл $(i, j+1), (i+1, j), (i, j), (i-1, j), (i, j-1)$ беснүктелік үлгіде жазылған.

Сәйкес келетін шеттік шарттармен бірге ол, $O(\tau^2 + h^2)$ жақындатуы қателігіне ие, айқын формулалармен оңай шешілетін ((8.100) *екіқабаттық сызбанұсқадан ерекшеленіп*), үшқабаттық сызбанұсқаны түзеді. Алайда осы сызбанұсқа жарамсыз, өйткені кез келген h пен τ мәндерінде тұрақсыз (*абсолютті түрде тұрақсыз*). Оның шешімі шектелген шеттік шарттарда, $j \to \infty$ ($t \to \infty$) болған кезде, қанша болса сонша үлкен бола алады, бұл (8.99) теңдеуінің максимумы қағидасына қарама-қайшы келеді.

Мұны, (8.103) теңдеуінің шешімін нөлдік шекаралық шарттармен жеке шешімдердің (гармоникалардың) қосындысы ретінде көрсете отырып, түсіндіреміз, бұлардың әрбірінің ие болатын түрі $y_{(k)}(x, t) = T_{(k)}(t)\, X_{(k)}(x)$, k = 1, 2,..., N – 1 (айнымалылардың бөлектелуі). Сонда, $y_{(k)}(x, t)$-ты (8.103)-ке енгізіп және айнымалыларды бөлектеп, кез келген гармоника үшін алатынымыз

$$\frac{T_{(k)}^{j+1} - T_{(k)}^{j-1}}{2\tau T_{(k)}^j} = \frac{X_{i+1}^{(k)} - 2X_i^{(k)} + X_{i-1}^{(k)}}{h^2 X_i^{(k)}} = -\lambda_k, \tag{8.104}$$

мұндағы $\lambda_k = 4/(h^2) \cdot \sin(\pi kh/2) > 0$ – бөлектеу параметрі немесе нөмірі k гармоника үшін меншікті мән.

$y_{(k)}(x, t)$ шешімінің уақытша бөлігі, (8.104)-тен шығады да мына теңдеуге бағынады

$$T_{(k)}^{j+1} - T_{(k)}^j = -\alpha_k T_{(k)}^j, \qquad \alpha_k \tau \lambda_k > 0,$$

мұның жеке шешімінің түрі $T_{(k)}^{j+1} = q_k T_{(k)}^j$ (бұл байланыстан $T_{(k)}^{j+1} = q_k^{j+1} T_{(k)}^0$ шығады). Және де q_k шынайы түбірлері бар $q_k^2 + \alpha_k q_k - 1 = 0$ теңдеуін қанағаттандыруы керек, олардың бірі модуль бойынша кез келген α_k кезінде бір санынан үлкен. Осының күшімен j-дің жеткілікті үлкен мәндерінде (8.103) теңдеуінің жалпы шешіміне абсолюттік шамасы бойынша қанша болса сонша үлкен гармоникалар қатыса алады.

Ұқсас мысалдармен тікелей жалған жақындатудың олқылықтары таусылмайды. Күрделірек жағдайларда онымен туындайтын үзіксіздік модельдер үшін, бастапқы зерзаттарға тән іргелі қасиеттер де орындалмауы мүмкін.

Мұны, жылуөткізгіштіктің стационарлық теңдік үшін келесі есепті қарастырып, көрнекілейміз:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = 0, \qquad 0 < x < 1, k(x) \geq C_1 > 0,$$
$$u(0) = 1, u(1) = 0. \qquad (8.105)$$

Модель (8.105) – $k(x)$ жылуөткізгіштік коэффициенті үзілулік функция бола алатынынан басқа, жылуберілісі теориясындағы қарапайымырақтардың бірі (жылу өткізетін материал түрлі заттардан құрылады).

(8.105) дифференциалдық операторын ашамыз:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = k\frac{d^2k}{dx^2} + \frac{dk}{dx}\cdot\frac{du}{dx},$$

және алынған өрнек үшін бірінші көзқараста мүлдем табиғи айырбасты (біркелкі торды) пайдаланамыз

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx u_{\bar{x}x}, \qquad \frac{dk}{dx} \approx \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}, \qquad \frac{du}{dx} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

(8.105) шекаралық шарттарын ескеріп, алынатын айырымдық сызбанұсқа

$$k_i\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_i}{2h}\cdot\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, \qquad (8.106)$$
$$0 < i < N, y_0 = 1, y_N = 0,$$

бұл $O(h^2$ жақындату ретіне ие.

$k(x)$ – үзілулік кесекті-тұрақты функция делік:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1, \end{cases} \qquad (8.107)$$

мұндағы ξ – иррационалдық сан, $\xi = x_n + \theta h$, $x_n = nh$, $0 < \theta < 1$, $k_1 \neq k_2$.

(8.105) шешімі $k(x)$-тай функция кезінде, айқын түрде, сызықты түрде x-қа тәуелді, және де $u(x)$ функциясының қисаюы жылуөткізгіштік коэффициентінің түрлі мәндері бар аймақтарда әртүрлі. Жалғыз шешім $x = \xi$ нүктесіндегі ілесу шарттарынан, яғни $u^-(\xi) = u^+(\xi)$ температура үзіксіздігінен және $W^-(\xi) = W^+(\xi)$ ($W(x) = -k(x)\,du/dx$) жылу ағынынан анықталады:

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, 0 \leq x \leq \xi, \alpha_0 = \left(\chi + (1-\chi)\xi\right)^{-1}, \\ \beta_0(1-x), \xi \leq x \leq 1, \beta_0 = \chi\alpha_0, \chi = k_1/k_2. \end{cases} \qquad (8.108)$$

(8.106) теңдеуінің $i \neq$ n, $i \neq n + 1$ кезіндегі түрі $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+i} = 0$ екенін пайдалана отырып, (8.107) жағдайында (8.106) айырымдық есебінің шешімін табу қиын емес, яғни,

$$y_i = y(x_i) = \begin{cases} 1 - \alpha x_i, 0 \leq x \leq x_n, \\ \beta(1 - x_i), x_{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases} \qquad (8.109)$$

α, β коэффициенттері (8.106) теңдеулерінен $i = n$, $i = n + 1$ ($x_n = \xi - \theta h$, $x_{n+1} = \xi + (1-\theta)h$) нүктелерінде алынады:

$$\alpha = \frac{1}{\mu + (1-\mu)\xi + h(\lambda - \theta - (1-\theta)\mu)},$$

$$\mu = \frac{3+\chi}{5-\chi}, \qquad \lambda = \frac{5\chi - 1}{3\chi + 1}, \qquad \beta = \mu\alpha .$$

Бұл формулалардан көрінетіні, $h \to 0$ кезінде алынатын өрнек $\alpha \to \overline{\alpha}_0 = \left(\mu + (1-\mu)\xi\right)^{-1}$, $\beta \to \overline{\beta}_0 = \mu\alpha_0$. Сондықтан $h \to 0$ кезінде функция $\widetilde{y}\,(x,\,h)$ – шешім (8.109), бұл сызықтық интерполяция көмегімен тордың түйіндері арасында алдын ала анықталынады, – мұндағы шек

$$\overline{u}(x) = \lim_{h\to 0} \overline{y}(x,h) = \begin{cases} 1 - \overline{\alpha}_0 x, & 0 \le x \le \xi, \\ \overline{\beta}_0 (1-x), & \xi \le x \le 1. \end{cases} \qquad (8.110)$$

(8.110) мен (8.109) функциялары тек $\chi = 1$ ($k_1 = k_2$) жағдайында ғана үйлеседі. Яғни, айырымдық есептің шешімі $h \to 0$ кезіндегі) есеп шешіміне емес, мүлдем басқа функцияға: айырымдық сызбанұсқа (8.106)-ға ұмтылады да *шығындалады*.

Оның шығындалу себебі (8.110) шешімі талдауынан $x = \xi$ нүктесінде анықталады: мұндағы температура үзіксіз ($u^{-}(\xi) = u^{+}(\xi)$), ал жылу ағыны үзілуге ұшырайды ($W^{-}(\xi) \ne W^{+}(\xi)$. Сызбанұсқа (8.106) заттағы жылу (теңгерімі) сақталу заңын, яғни іргелі заңды бұзады, бұл заңның негізінде жылуберілісі моделінің барлығы алынады. Бұған ұқсас үзіктік модельдер *консервативтік емес* деп аталады, ережедегідей, бастапқы модельдерді зерттеу үшін пайдаланыла алмайды.

8.12. Интегрграл-интерполяциялық әдіс.

Келтірілген мысалдардан, үзіктік модельдерге өтуді таза жалған түрде іске асыруға болмайтыны, айқын көрінеді. Ол, бастапқы зерзаттардың модельдері ие болатын негізгі қасиеттердің мүмкіндігінше көбірек санын, күшінде қалдыруы керек.

(8.105) теңдеуіне қолданылуда бұл, оған жауап беретін айырымдық сызбанұсқа үшін энергия сақталуы заңының үзіктік ұқсастығы орындалуы қажеттігін білдіреді. Мұндай сызбанұсқаларды тұрғызуға кеңінен қолданылатын жақындау бұл заңды $x_{i-1} \le x < x_i$, $x_i = ih$, $i = 1,\ldots, N$ ұяшықтары үшін интегралдық түрде жазуға, айырымдық торды келесі алынатын интегралдармен жәнге туындыларды жуықталған айырымдық өрнектермен ауыстыруға (*интеграл-интерполяциялық әдіс*) негізделген.

Сіңірілусіз жылу өткізудің стационарлық үдерісі және $x_{i-1/2} \le x < x_{i+1/2}$ (жартылай бүтін индекстер таңданылған) кесіндісінде жылу теңгерімі теңдеуінің энергия бөліп шығаруы, оның шекараларындағы ағындар теңдігін білдіреді:

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} = 0, \qquad i = 1,\ldots, N-1. \qquad (8.111)$$

$W(x) = -k(x)\, du/dx$ теңдігін $x_{i-1/2} \le x \le x_i$ кесіндісінде интегралдаймыз:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx,$$

және, $x_{i-1/2} \le x \le x_i$ кезінде (жайбар интерполяция) $W(x) = \widetilde{W}_{i-1/2} =$ const деп болжап, алатынымыз

$$u_{i-1} - u_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

осыдан $\widetilde{W}_{i-1/2}$ үшін жуықталған мәннің берілетін формуласы

$$\widetilde{W}_{i-1/2} = a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \qquad a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

Мұны (8.111)-ге енгізіп, *консервативтік* (8.106-мен салыстырыңыз)) *айырымдық сызбанұсқаға* келеміз

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) = 0, \quad 1 \le i \le N_i - 1$$

(8.112)

$$a_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1} = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{k(x_i + sh)} \right]^{-1},$$

бұл үшін энергия сақталу заңы әрбір ұяшық үшін де, сондай-ақ барлық [0, 1] кесінді үшін де орындалған. Осылайша консервативтік үзіксіздік модельдер, күрделірек мұның санында жылуберілісінің сызықты еместік те және стационарлық емес үдерістері де тұрғызылады.

Интеграл-интерполяциондық пен оған ұқсас әдістердің қолданылуы модельдердің кең сыныптарына таралады. Ол, жекелікте, шешімі үзілулік болатын газдық динамика есептері үшін маңызды (8.11 тақырыбына қараңыз). Консервативтік айырымдық жақындатуды, дивергенттік түрде массалық координаттарда жазылған, газдың бірөлшемдік ағымының теңдеулері үшін тұрғызамыз:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon}{\partial m}, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{\upsilon^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial m}(p\upsilon), \qquad (8.113)$$

$$0 < t \le T, \qquad 0 < m < M_0.$$

Мұнда t – уақыт, m – массалық координата; $\eta = 1/p$ – меншікті көлем (ρ – тығыздық), υ – жылдамдық, p – қысым және $\varepsilon = \varepsilon(\eta, p)$ – газдың ішкі энергиясы.

Уақыты мен кеңістігі бойынша біркелкі қадамдары бар торды енгіземіз:

$$\overline{\omega}_h = \{m_i = ih, i = 0,1,\ldots,N; h = M_0 / N\},$$

$$\omega_\tau = \{t^j = j\tau, j = 0,1,\ldots,M; \tau = T/M\}, \; \overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \cup \omega_\tau.$$

Газдинамикалық шамалардың торлық ұқсастарын оңайлату үшін υ функциясын тордың бүтін нүктелеріне ($m = m_i$), ал p, η, ε*-дерді* – жартылай бүтіндерге ($m = m_{i+1/2}$) қатыстыра отырып, солардағыдай белгілеулерді сақтаймыз.

$m_{i-1/2} \le m \le m_{i+1/2}$, $t^j \le t \le t^{j+1}$ тікбұрышындағы (8.113) екінші теңдеуді интегралдаймыз:

$$\int_{m_{i-1/2}}^{m_{i+1/2}} (\upsilon^{j+1} - \upsilon^j dm + \int_{t^j}^{t^{j+1}} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2})dt = 0 ,$$

ал қалғандары – $m_{i-1/2} \le m \le m_{i+1/2}$, $t^j \le t \le t^{j+1}$ тікбұрышында:

$$\int_{m_i}^{m^{i+1}} (\eta^{j+1} - \eta^j)dm - \int_{t^j}^{t^{j+1}} (\upsilon_{i+1} - \upsilon_i)dt = 0 ,$$

$$\int_{m_i}^{m_{i+1}} \left[\left(\varepsilon + \frac{\upsilon^2}{2} \right)^{j+1} - \left(\varepsilon + \frac{\upsilon^2}{2} \right)^{j} \right] dm + \int_{t^j}^{t^{j+1}} \left[(p\upsilon)_{i+1} - (p\upsilon)_i \right] = 0 .$$

Бұл тепе-теңдіктерге кіретін уақыттық интегралдарды мына өрнектермен ауыстырамыз

$$\int_{t^j}^{t^{j+1}} pdt \approx p^{(\sigma_1)}\tau , \quad \int_{t^j}^{t^{j+1}} \upsilon dt \approx \upsilon^{(\sigma_2)}\tau , \quad \int_{t^j}^{t^{j+1}} (p\upsilon)_i dt = p_{*_i}^{(\sigma_3)} \upsilon_i^{(\sigma_4)} \tau ,$$

мұндағы $f^{(\sigma_\alpha)} = \sigma_\alpha f^{j+1} + (1 - \sigma_\alpha) f^j$, σ_α – салмақтар ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), $p_{*i} = 0,5\ (p_{i-1/2} + p_{i+1/2})$. Кеңістіктік интегралдарды айқын ереже бойынша ауыстырамыз, мысалы,

$$\int_{m_{i-1/2}}^{m_{i+1/2}} \upsilon dm \ne \upsilon_i h , \quad \int_{m_i}^{m_{i+1}} \eta dm \approx \eta_{i+1/2} h .$$

Қорытындысында айырымдық сызбанұсқалардың төрт параметрлік тамырластығына келеміз

$$\frac{\upsilon_i^{j+1} - \upsilon_i^j}{\tau} = -\left(\frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{h} \right)^{(\sigma_1)} ,$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+1} - \eta_{i+1/2}^j}{\tau} = \left(\frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{h} \right)^{(\sigma_2)} , \qquad (8.114)$$

$$\frac{E_{i+1/2}^{j+1} - E_{i+1/2}^j}{\tau} = \frac{p_{*_{i+1}}^{(\sigma_3)} \upsilon_{i+1}^{(\sigma_2)} - p_{*_i}^{(\sigma_3)} \upsilon_i^{(\sigma_4)}}{h} ,$$

мұндағы $E_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2} + (\upsilon_i^2 + \upsilon_{i+1}^2)/2$ – газдың і-ші ұяшығының толық энергиясы. Олар өзімен кез келген σ_α, $\alpha = 1,..., 4$ кезіндегі (8.113) теңдеулерінің консервативтік үзіктік ұқсастарын көрсетеді. Олар үшін тордың кез келген ұясында ($\varpi_{h\tau}$ торы бойынша (8.114) теңдеулерін интегралдаумен газдың $0 \le m \le M_0$ барлық массасы үшін үзіктік түрде сақталу заңдары әділдігін қалыптастыру қиын емес) масса, импульс және толық энергия сақталуы заңдарының айырымдық ұқсастары орын алды.

$\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$ кезінде жүйе (8.114) шешіле алады мынадай айқын формулалармен: алдымен υ_i^{j+1}, сосын $\eta_{i+1/2}^{j+1}$ табылады, ал (8.114)-тің үшінші теңдеуінен және $p\eta = (\gamma - 1)\varepsilon$ күй теңдеуінен (идеал газ жағдайында) айдау әдісімен барлық $i = 0, 1,.. N$ үшін $p_{i+1/2}$ мәндері $i = 0$, $i = N$ кезіндегі шеттік шарттар пайдаланылып анықталады. Айқын емес сызбанұсқалар (8.114) итерациондық әдістер көмегімен шешіледі.

Параболалық тұрпаттағы теңдеулерден ерекшеленіп, айқын сызбанұсқалар гиперболалық теңдеулер $\tau \le Ch^2$ шарты кезінде емес, әлдеқайда жұмсағырақ $\tau \le Ch$ теңсіздігі орындалған кезде тұрақты болады, және сондықтан іс жүзінде жиі қолданылады. Сондай-ақ белгілейтініміз, машықтану есептеулері кезінде газдинамикалық айырымдық сызбанұсқаларға, күшті үзілулерді тегістейтін *жасанды* «*тұтқырлық*», енгізіледі. Бұл есептеулер жүргізуді жеңілдетеді, өйткені үзілулер аймақтарын арнайы бөлудің (*біртекті сызбанұсқалар*) қажеттігі жоғалды.

8.13. Толық консервативтіліктің қағидасы

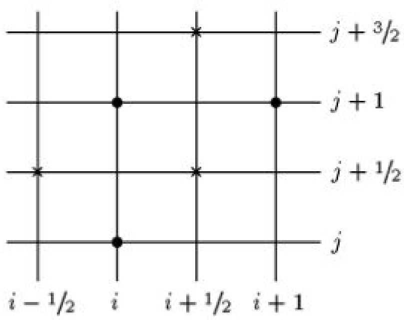
Газдық динамиканың үзіктік модельдерінің жылуберілісі модельдерінен елеулірек ерекшелігі газ үшін сақталу заңдарының математикалық көрсетілімі тәсілдерінің әртүрлілігінде. Бөлектікте, (8.113)-тің үшінші теңдеуінің $E=\varepsilon+\upsilon^2/2$ толық энергия үшін емес, ε ішкі энергия үшін және де аз дегенде екі түрде жазыла алатыны:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial\upsilon}{\partial m},\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial\eta}{\partial t}. \tag{8.115}$$

Бастапқы модель үшін жазудың бұл және басқа түрлері баламалы және теңдеулердің сәйкес келетін түрлендірулері кезінде бір-бірінен өтеді. Осы қасиет үзіктік модельдер жағдайында мүлде кепілденілмейді. Мысалы, (8.114) консервативтік сызбанұсқасының үшінші теңдеуінен, жалпы айтқанда, (8.115) теңдеулерінің үзіктік ұқсастары шықпайды. Дұрыс және керісінше: ішкі энергияның теңдеуін жақындастыратын сызбанұсқа үшін, толық энергияның сақталу заңының орындалуы міндетті емес. Жайбар мысал қызметін консервативтік емес сызбанұсқа «крест» атқарады

$$\begin{gathered}
\frac{\upsilon_i^{j+1}-\upsilon_i^j}{\tau}=-\frac{p_{i+1/2}^{j+1/2}-p_{i-1/2}^{j+1/2}}{h},\\
\frac{\eta_{i+1/2}^{j+3/2}-\eta_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau}=\frac{\upsilon_{i+1}^{j+1}-\upsilon_i^{j+1}}{h},\\
\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2}-\varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau}=-p_{i+1/2}^{j+3/2}\,\frac{\upsilon_{i+1}^{j+1}-\upsilon_i^{j}}{h},
\end{gathered} \tag{8.116}$$

мұны жазу үшін «шахматтық» тор қолданылады (8.14-суретке қараңыз; нүктелермен және айқышсызық нүктелерімен қолданылатын алты нүктелік үлгі



8.14-сурет

белгіленілген; ε, p,η функциялары жартылай бүтіндерге, ал υ – бүтін түйіндерге жатқызылады) және $p\eta = (\gamma - 1)\varepsilon$ жағдайында айқын формулалар бойынша оңай шешіледі.

Үзіктік модельдердің ұқсас «бөліктік», толық емес консервативтілігі сандық модельдеу үшін оларды жарамсыз етуі мүмкін (толық энергияны сақтау, оның құрамдастары – кинетикалық пен ішкі энергиясы екенін білдірмейді, ал солармен бірге газдың жылдамдығы мен температурасы – дұрыс есептеледі, және соған ұқсастар). Сондықтан үзіктік модельдерді тұрғызу кезінде олардың ішіне бастапқы зерзаттардың іргелі қасиеттерінің мүмкіндігінше көбірек санын бейнелеп көрсету қажет.

Бастапқы үшін (8.114) консервативтік сызбанұсқаларының төртпараметрлік тамырлығын алып, қалыптасқан сапаға ие (8.113) теңдеулерінің айырымдық жақындатуларын аламыз.

Әрі қарайғы есептеулерді ықшамдау үшін белгілеулер кіргіземіз

$$\bar{p}_i = p_{i+1/2}, \quad \bar{\eta}_i = \eta_{i+1/2}, \quad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1/2}, \quad \bar{p} = \bar{p}_i^{\,j}, \quad \upsilon = \upsilon_i^j,$$

$$\frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{h} = \bar{p}_{\bar{m}}, \qquad \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{h} = \upsilon_m,$$

осыдан кейін p, η және ω үстілерінен сызықшаларды алып тастаймыз (арнайы жағдайлардан басқа). Осындай мақсатпен (8.114)-тің үшінші теңдеуінің орнына, ішкі энергия үшін, (8.115)-тің бірінші теңдеуінің жақындатуын қарастырамыз. Бұдан басқа, керек болатын формула

$$f^{(\beta)} = f^{(\alpha)} + \tau(\beta - \alpha) f_t, \tag{8.117}$$

мұндағы α мен β – кез келген сандар, $f^{(\alpha)} = \alpha \hat{f} + (1 - \alpha) f$, $\hat{f} = f^{j+1}$.

Жасалған ескертулерді ескеріп (8.114)-тен сызбанұсқалардың төртпараметрлік тамырластығы алынады

$$\upsilon_t = -p_{\bar{m}}^{(\sigma_1)}, \quad \eta_t = \upsilon_m^{(\sigma_2)}, \quad \varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)}\upsilon_m^{(\sigma_4)}, \tag{8.118}$$

Бұлардан *толық консервативтікті* талап етеміз, яғни олар толық энергия ((8.113)-тің үшінші теңдеуі) теңдеуін және (8.115)-тің екінші теңдеуін жақындастыруы керек.

(8.118)-дің екінші теңдеуінен шығатын теңдік

$$\upsilon_m^{(\sigma_4)} = \upsilon_m^{(\sigma_2)} - \tau(\sigma_4 - \sigma_2)\upsilon_{mt} = \eta_t + \tau(\sigma_4 - \sigma_2)\upsilon_{mt}$$

және (10.28) -дің екінші теңдеуінен шығатыны

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)}\eta_t + \delta_1 E,$$

мұндағы $\delta_1 E = -\tau(\sigma_4 - \sigma_2) p_{mt}^{(\sigma_3)}$. Сонымен, сызбанұсқа (8.118) (8.115)-тің екінші теңдеуін жақындастырады тек $\sigma_2 = \sigma_4$ теңдігі орындалғанда ғана. Егер бұл теңдік орындалмаса, онда, үзіктік ортада қосымша (тіркелген) энергия көздері және ағыны пайда болуымен шақырылатын, ішкі энергия *$\delta_1 E$ дисбалансі* пайда болады.

Енді табатынымыз $\delta_2 E$ – толық энергияның дисбалансі. (8.118)-дің бірінші теңдеуін $\upsilon^{(0,5)} = 0,5\,(\upsilon + \hat{\upsilon})$-ға көбейтіп, алынатын теңдеу

$$\frac{\upsilon_t^2}{2} = -(\upsilon^{0,5}) \cdot p_{\bar{m}}^{(\sigma_1)},$$

осыдан соң оны (8.118)-дің үшінші теңдеуімен қосамыз:

$$\left(\varepsilon+\frac{\upsilon^2}{2}\right)_t=-p^{(\sigma_3)}{}_m^{(\sigma_4)}-\upsilon^{0,5}p_{\overline{m}}^{(\sigma_1)} \ . \qquad (8.119)$$

(8.119)-дың оң жағын (8.117) формуласы көмегімен түрлендіреміз:

$$\mathrm{P}^{(\sigma_3)}\upsilon_m^{(\sigma_4)}+\upsilon^{0,5}p_{\overline{m}}^{(\sigma_1)}=$$

$$=\left(p^{(\sigma_1\}}+\tau(\sigma_3-\sigma_1)p_t\right)\left(\upsilon_m^{(0,5)}+\tau(\sigma_4-0{,}5)\upsilon_{mt}\right)+\upsilon^{(0,5)}p_{\overline{m}}^{(\sigma_1)}=\left(p_{(-1)}^{(\sigma_1)}\upsilon^{0,5}\right)_m+\delta_2E\,,$$

мұнда қабылданған белгілеулер

$$p_{(-1)}=\overline{p}_{i-1)}=p_{i-1/2}\,,$$

$$\delta_2E=\tau(\sigma_3-\sigma_1)\upsilon_m^{(0,5)}p_t+\tau(\sigma_4-0{,}5)p_{mt}^{(\sigma_1)}+\tau^2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_4-0{,}5)p_t\upsilon_{mt}\,.$$

Қорытындысында (10.29)-дың қабылдайтын түрі

$$\left(\varepsilon+\frac{\upsilon^2}{2}\right)_t=-\left(p_{(-1)}^{(\sigma_1)}\upsilon^{(0,5)}\right)_m-\delta_2E\,.$$

Сонымен, (8.119) теңдеуі толық энергияның теңдеуін жақындатпайды (осындайлық (8.116) сызбанұсқасына да тән). Дисбаланс δ_2E, δ_lE дисбалансі тәрізді, жасанды текке ие. Ол $\delta_3=\delta_l$, $\delta_4=0{,}5$ жағдайына қатыспайды, яғни, δ_2=0,5.

Осы нәтижелерді біріктіре отырып, интегрлі-интерполяциялық әдіс көмегімен алынған, (8.118) сызбанұсқаларының төртпараметрлік тамырлылығының орнына, бірпараметрлік тамырлылығына келеміз

$$\upsilon_t=-p_{\overline{m}}^{(\sigma_1)},\qquad \eta_t=\upsilon_m^{(0,5)},\qquad \varepsilon_t=-p^{(\sigma_1)}\upsilon_m^{(0,5)} \qquad (8.120)$$

бұл газдық динамиканың толығымен консервативтік ($\delta_lE=\delta_2E=0$) үзіктік модельдері.

(8.120) теңдеулерінің бірін мына теңдеулердің бірімен ауыстыруға болады

$$\varepsilon_e=-p^{(\sigma_1)}\eta_t\,,\qquad \left(\varepsilon+\frac{\upsilon^2}{2}\right)_t=-\left(p_{(-1)}^{(\sigma_1)}\upsilon^{(0,5)}\right)_m,$$

ал соңғысының орнына мына теңдеулердің бірі алынады

$$\left(\varepsilon+\frac{\upsilon_{(+1)}^2}{2}\right)_t=-\left(p^{(\sigma_1)}\upsilon^{(0,5)}\right)_m,\qquad \left(\varepsilon+\frac{\upsilon^2+\upsilon_{(+1)}^2}{4}\right)_t=-\left(p_*^{(\sigma\ )}\upsilon^{(0,5)}\right)_m.$$

Сызбанұсқа (8.120) жалпы жағдайда $O(\tau+h^2)$ жақындатуына ие, ал σ_l=0,5 кезінде уақыт бойынша жақындату екі ретке ие. $\sigma_l=0$ кезінде (8.120) сызбанұсқасы айқын түрде болады және оның шешімі қарапайым формулалармен табылады.

Егер газ сипаттамалары кеңістік және уақыт бойынша күшті өзгеретін болса, олардың ерекше зор болатыны δ_1E мен δ_2E құрылымдарынан жақсы көрінеді (үзілулік ағымдар, ортаның күшті біртексіздігі, асқынуы бар режімдер және соған ұқсастар). Бұл жағдайларда энергияның тіркелген көздері шынайы шамалармен салыстырылатындай болады және бастапқы зерзаттың сандық модельденуінің нәтижелері оның шынайы тәртібінен белгілі түрде ерекшеленеді. Дисбаланстер, τ уақыт бойынша қадамды кішірейту көмегімен кішірейе алады, бұл табиғи түрде, есептеулік жәрдемдер санын сәйкестендіріп ұлғайтуды келтіреді (кеңістік бойынша тор қадамын кішірейту $\delta_1 E$ мен $\delta_2 E$ шамасына жалпы білінбейді).

Көптеген күрделі есептерді шешу кезінде қолданыс тапқан толық консервативтіктің қағидасы – қажет сапалары бар үзіктік модельдер тұрғызуға сенімді жақындаудың бірі.

8.14. Нұсқаулық қағидалар көмегімен айырымдық сызбанұсқаларды тұрғызу

Түрлі зерзаттардың математикалық модельдерін алудың негізгі тәсілдерінің бірі қызметін атқаратын нұсқаулық қағидалар, сондай-ақ сәйкес келетін үзіктік ұқсастарды тұрғызу үшін де кеңінен қолданылады. Бұған олардың жан-жақтылығы, қолданылуының салыстырмалы түрдегі қарапайымдылығы, сақталу заңдарымен және симметрия қасиеттерімен байланысы қабілеттендіреді. Мұндай жақындау кезіндегі ең табиғи жол – бастапқы зерзаттың (ортаның) үзіктеу, алынған зерзат үшін нұсқаулық қағиданы қалыптастыру және үзіктік шамалар үшін оның байланыстары (теңдеулері) негізінде тұжырым жасау, яғни ізделуші үзіктік моделін құрастыруды аяқтау.

Осы қисынға сүйене отырып, бірөлшемдік газдық динамиканың (8.113) теңдеулері үшін лагранждік координаттарда айырымдық сызбанұсқаларды тұрғызамыз және оларды 8.13, 8.14 тақырыптарындағы сызбанұсқалармен салыстырамыз.

Газды бір-бірімен көршілес материалдық «нүктелердің» («бөлшектердің») жиынтығы ретінде қарастырамыз, оңайлату үшін оның M_0 массасын массасы $m_{i+1/2} = M_0/N$, $i = 0, 1, ..., N - 1$ (масса $m_{i+1/2}$ – (8.114), (8.115)-тердегі h қадамының ұқсасы) тең мөлшердегі N бөліктерге бөлеміз. Басқа сөздермен, 8.13 тақырыбындағыдай, $i = 0, 1, ..., N$ нүктелерінде түйіндері және массасы бойынша тең мөлшердегі ұяшықтары бар айырымдық торды енгіземіз. Бөлшектердің (ұяшықтардың) координаттары мен жылдамдықтарын сәйкес келетін түйіндердің x_i, x_{i+1} декарттық координаттары және υ_i, υ_{i+1} жылдамдықтары арқылы сипаттаймыз. Материалдық нүктелердің қалған параметрлерін – тығыздықты $\rho_{i+1/2}$, меншікті көлемді $\eta_{i+1/2}$, қысымды $p_{i+1/2}$, ішкі энергияны $\varepsilon_{i+1/2}$ – ұяшықтың ортасына жатқызамыз (жартылай бүтін индекс).

Осындай түрмен тұрғызылған үзіктік орта үшін, ұяшықтардың жалпыланған координаттары ретінде $x_i(t)$, $x_{i+1}(t)$-ті таңдап, Гамильтон қағидасын қолданамыз ($\upsilon_i(t) = dx_i/dt = \dot{x}_i$, $\upsilon_{i+1}(t) = dx_{i+1}/dt = \dot{x}_{i+1}$ шамалары жалпыланған жылдамдықтар рөлін атқарады). Жүйенің кинетикалық энергиясын жеткілікті айқын өрнекпен анықтаймыз

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} T_{i+1/2} = \sum_{i=0}^{N-1} m_{1-1/2} \frac{\upsilon_i^2 + \upsilon_{i+1}^2}{4}$$

әрбір бөлшектің энергияларының қосындысы ретінде (басқа да өрнектер болуы мүмкін)

$$T_{i+1/2} = \frac{m_{i+1/2}}{2}\frac{\upsilon_i^2 + \upsilon_{i+1}^2}{2}.$$

Бөлшектердің «потенциялық» энергиясын олардың $\varepsilon_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}(x_i,\ x_{i+1})$ ішкі энергиясымен қатынастырамыз, өйткені оны «бостандыққа шығару» жұмысты аяқтау мүмкіндігін береді, бұл зарядталған конденсатор қоршауларының тұйықталуы сияқты, ішіндегі зарядтар қозғалысына түрленетін энергия жинақталуын босатып шығаруға ұқсас. Қарастырылған жүйе үшін, потенциялық энергияның мұндай анықтамасы, оның қозғалысының потенциалдығын негіздеу сияқты, егжей-тегжейлі және үймеленген талдауды талап ететінін, белгілейміз. Сондықтан жоғарыда келтірілген сапалы пайымдаулармен шектелеміз.

Ұяшықтар жиынтығының қосынды потенциялық энергиясы

$$V = \sum_{i=0}^{N-1} V_{i+1/2} = \sum_{i=0}^{N-1} m_{i+1/2}\varepsilon_{i+1/2}\ ,$$

мұндағы $V_{i+1/2}$ – жекеленген бөлшек энергиясы.

Үзіктік орта «лагранжиан»-ын беретін өрнек

$$L = T - V = \sum_{i=0}^{N-1} m_{i+1/2}\left(\frac{\upsilon_i^2 + \upsilon_{i+1}^2}{2} - \varepsilon_{i+1/2}\right), \qquad (8.121)$$

ал әсер функционалы өрнектелетін формула

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} L\big(x(t), \dot{x}(t), t\big) = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=0}^{N-1} m_{i+1/2}\left(\frac{\upsilon_i^2 + \upsilon_{i+1}^2}{4} - \varepsilon_{i+1/2}(x_i, x_{i+1}\right)dt\,. \qquad (8.122)$$

Сызбанұсқамен сәйкестілікте, алдымен мүшелерінің құраушылардың нұсқауларын есептеп аламыз, барлық кинематикалық түрдегі мүмкін жолдары бойынша, (8.122)-нің әсеріне Гамильтон қағидасын пайдалануға нұсқау жасаймыз.

$\upsilon_i = \dot{x}_i$ болады, сонан да

$$\delta\left(\frac{\upsilon_i^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\partial \upsilon_i^2}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = \frac{1}{2}\upsilon_i\delta\dot{x}_i\,.$$

Ішкі энергия нұсқауларын беретін формула

$$\delta\varepsilon_{i+1/2} = \frac{\partial\varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}}\delta x_{i+1}\,,$$

әсер нұсқаулары үшін

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} m_{i+1/2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\upsilon_i\delta\dot{x}_i + \frac{1}{2}\upsilon_{i+1}\delta\dot{x}_{i+1} - \frac{\partial\varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i}\delta x_i - \frac{\partial\varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}}\delta x_{i+1}\right)dt\,.$$

Соңғы теңдіктегі $\upsilon_i\ \delta\dot{x}_i$ мен $\upsilon_{i+1}\ \delta\dot{x}_{i+1}$ мүшелерін бөліктер бойынша интегралдаймыз, уақыт бойынша нұсқаулау мен дифференциалдау жәрдемдерінің ауыстырып қойылатынын ескереміз ($\delta\dot{x}_i = d(\delta x_i)/dt$), назар аударатынымыз $t = \boldsymbol{t_0}$, $t = t_1$ кезіндегі $\delta x_i = 0$, $i = 0, 1, ..., N - 1$ шарты. Өрнек аламыз, бұдан көрінетіні, δx_i нұсқауларға тәуелсіздіктің күшімен δQ үшін алатынымыз, $\delta Q = 0$ болады тек δx_i кезінде коэффициенттер нөлге тең болғанда, яғни мына теңдеулер орындалған кезде

$$\frac{в\upsilon_i}{dt} = -\frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varepsilon_{i-1/2}}{\partial x_i}, \quad i = 0, ..., N-1.$$

Олардың сол жақ бөліктерінде газ ұяшықтарының үдеуі жазылған. Оң жақтағы бөліктердің мағынасын түсіндіру үшін, еске алатынымыз, мұнда қарастырылатын адиабаталық ағымдарда қызмет ететін теңдіктер $d\varepsilon = -pd\eta$ мен $\varepsilon(p, \eta) = \varepsilon(\eta)$. Осыдан үзіктік орта үшін алатынымыз $d\varepsilon_{i+1/2} = -p_{i+1/2}d\eta_{i+1/2}$, $\varepsilon_{i+1/2} = \varepsilon(\eta_{i+1/2}) = \varepsilon[(x_{i+1} - x_i) / / m_{i+1/2}]$. Түрлендірулер жүргізе отырып

$$\frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial \eta_{i+1/2}} \cdot \frac{\partial \eta_{i+1/2}}{\partial x_i} = \frac{p_{i+1/2}}{m_{i+1/2}},$$

Гамильтон қағидасынан алынған газдық «бөлшектер» қозғалысы теңдеулерінің ақырғы түріне келеміз (теңөлшемдік торда):

$$\frac{в\upsilon_i}{dt} = -\frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{(m_{i+1/2} + m_{i-1/2})/2}, \qquad i = 0, ..., N-1. \tag{8.123}$$

(8.123) теңдеуіне қосамыз

$$\frac{d\eta_{i+1/2}}{dt} = \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{m_{i+1/2}}, \qquad i = 0, ..., N-1. \tag{8.124}$$

бұл $\eta_{i+1/2} = (x_{i+1} - x_i) / m_{i+1/2}$ теңдігінен (ұяшық массасы сақталу заңы) шығады, сондай-ақ $d\varepsilon_{i+1/2} = -p_{i+1/2}d\eta_{i+1/2}$ теңдігінен және (8.124)-тен шығатын теңдеу

$$\frac{d\varepsilon_{i+1/2}}{dt} = -p_{i+1/2}\frac{d\eta_{i+1/2}}{dt} = -p_{i+1/2}\frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{m_{i+1/2}}, \quad i = 0, ..., N-1, \tag{8.125}$$

бұл ішкі энергия өзгеруі заңын өрнектейді.

Берілген $\varepsilon_{i+1/2} = \varepsilon\ (\eta_{i+1/2})$ күй теңдеуімен бірге жүйе (8.123)–(8.125) өзімен, барлық сақталу заңдарына – импульстің, массаның, энергияның жауап беретін, газ динамикасының *жартылайүзіктік* моделін көрсетеді (белгілейтініміз, толық энергияның сақталу заңы $E = T + V$, уақыт ығысуына қатысы бойынша (8.121) лагранжиан өзгермейтінінен бірден шығады).

(8.123)-(8.125)-те уақыт бойынша туындыларды шеттік айырымдармен ауыстыруды жүргізе отырып, индекссіз белгілеулерге өте отырып және σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 салмақтарын енгізе отырып, газдық динамиканың үзіктік моделін аламыз

$$\upsilon_t = -p^{(\sigma_1)}\overline{m}, \qquad \eta_t = \upsilon_m^{(\sigma_2)}, \qquad \varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)}\upsilon_m^{(\sigma_4)},$$

бұл 8.13 тақырыбында интегрлі-интерполяциялық әдіс көмегімен тұрғызылған (8.118) айырымдық сызбанұсқамен үйлеседі (салмақтардың сай келетін іріктелуі кезінде бұл толығымен консервативтік болады).

Паш етіп көрсетілген жақындаудың қолданылуы жоғарыда көрсетілген қарапайым жағдаймен шектелмейді. Нұсқаулық қағидалар үзіктік модельдерді алу үшін өте қиын жағдайларда (көпөлшемдік үдерістер, күрделі құрылымды торлар және тағы басқалар) тиімді қолданылады.

8.15. Үзіктік модельдерге иерархиялық жақындауды қолдану

Берілген жақындаудың негізгі идеясы – зерттелуші зерзат модельдерінің иерархияда жататын моделі үзіктілігінің орны жайлы білуді пайдалану. Егер иерархия «жоғарыдан төмен» қағидасы бойынша тұрғызылса, онда, жалпы модельдің жекелік немесе толық үзіктелуін өткізіп, сосын төменірек деңгейдің үзіктік моделіне өтеді. Табиғи түрде, бастапқы модельдер үшін қабылданған, өту тәсілі қолданылады. Осыған ұқсас атқаруды орындау нәтижесінде тұрғызылған үзіктік модельге жоғарырақ деңгей моделінің қосымша сызықтары енгізіледі және бұл бастапқы зерзаттың жақындатушы моделінің баламалығын арттыра алады.

Бұл пайымдауларды, тұтқырсыз жылу өткізбейтін газдың бір өлшемдік ағымын сипаттайтын, теңдеулерін қарастырып, нақтылаймыз

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V}{\partial x} = 0\,, \\ &\frac{\partial (\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 + p) = 0\,, \\ &\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[V(E+p)] = 0\,/ \end{aligned} \qquad (8.126)$$

Мұндағы $E = \rho(V^2/2 + 3RT/2)$ – газ көлемі бірлігінің кинетикалық пен ішкі энергияларының қосындысы, яғни оның толық энергиясы, $T = p/(\rho R)$ – температура, $R = k/m$ – газдық тұрақтылық, k – Больцман тұрақтысы, m – газ атомының немесе молекуласының массасы.

(8.126) теңдеулерінің Больцманның кинетикалық теңдеуінен, $f(x, \upsilon, t)$ таралуы функциясының шоғырлы түрде максвеллдік делінген шарты кезінде, оны «орталандыру» нәтижесінде, алынатынын еске аламыз:

$$f^{(0)}(\upsilon) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(\upsilon - V)^2\right], \qquad (8.127)$$

мұндағы υ – газ бөлшектерінің хаотикалық қозғалысының жылдамдығы (максвеллдік таралым кезіндегі ортаға жылудың тұтқырлы кернеулері мен ағындары қатыспайды).

(8.126) теңдеулерінің үзіктік ұқсастарын алдыдағы пункттерде сипатталған тәсілдің кез келгенімен тұрғызуға болады. Берілген жағдайда (және біршама жалпылаулар (8.126) үшін) иерархиялық жақындаудың мағынасы мынада:

1) f таралуы функциясы және газдың макросипаттамалары t^j, $j = 0, 1, \ldots$ үзіктік аргументінің функциясы ретінде қарастырылады, яғни бастапқы модельдің – Больцман кинетикалық теңдеуінің уақыт бойынша үзіктелуі жүргізіледі;

2) шама $\tau = t^{j+1} - t^j$ (үзіктеу қадамы), $\tau \leq l\, /\, |\langle\upsilon\rangle|$ шартын қанағаттандыратындай жеткілікті аз етіліп алынады, мұндағы l – еркін жүгірудің сипаттық ұзындығы, $|\langle\upsilon\rangle|$ – бөлшектердің сипаттық жылдамдығының модулі. Сондықтан τ уақытындағы бөлшектер арасындағы соқтығыстар саны шамалы аз және оларды ескермеуге болады (Больцман теңдеуінің қорытылуына қараңыз);

3) $f^{j+1} = f(x,\ \upsilon,\ t^{j+1})$ таралуының функциясы (Больцман теңдеуінің қорытылуына қараңыз) $f^j = f(x,\ \upsilon,\ t^j)$ функциясымен салыстыруда, тек олардың фазалық көлемінің бөлшектері өзгеруі есебінен, өзгереді, сонан да дұрыс болатын қарапайым байланыс

$$f(x,\ \upsilon,\ t^{j+1}) = f(x - \upsilon\tau,\ \upsilon,\ t^j), \tag{8.128}$$

осы соқтығысу қатыспағанда Больцман теңдеуінің шешімі болады;

4) байланыс (8.128) $\upsilon\tau$ параметрі бойынша f^{j+1}-ті Тейлор қатарына ыдырату жолымен ықшамдалады:

$$f^{j+1} = f^j - \tau\frac{\partial f^j}{\partial x}\upsilon + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^2}\upsilon^2 + \ldots \tag{8.129}$$

үшінші реттегі мүшелеріне дейінгі дәлдікпен; өйткені таралу функциясы υ^2 өсуімен экспоненциалды түрде азаяды, сонан да жылдамдықтары үлкен бөлшектердің үлесі аз деп саналады және (10.39)–дағы сәйкес келетін мүшелері лақтырылады;

5) моменттер үшін теңдеулерді қорыту кезінде, (8.129) арақатынастары тізбектеліп сәйкестелініп 1, $m\upsilon$, $m\upsilon^2/2$–лерге тең, $\Phi(\upsilon)$ функцияларына көбейтіледі (*қосындылық инварианттар*), және барлық υ жылдамдықтары бойынша интегралданады; нәтижесінде f^{j+1} мен f^j арасындағы байланыс, тығыздық, масса ағыны, толық энергия сияқты, газдың орташа гидродинамикалық параметрлері арасындағы байланысқа түрленеді:

$$\rho = \int mfd\upsilon, \quad \rho V = \int m\upsilon fd\upsilon, \quad E = \int\frac{m\upsilon^2}{2}fd\upsilon,$$

f^j, f^{j+1} моменттерінде алынған және басқа шамалармен (басқаша сөздермен, *уақыт бойынша үзіктелген* ортаның гидродинамикалық моделі алынады);

6) кеңістік бойынша үзіктеуден кейін, бастапқы кинетикалық теңдеудің біршама шектерін (*кинетикалық түрде келісілген айырымдық сызбанұсқаларды*) ескеретін, газдың ақырғы үзіктік (уақыт бойынша да, кеңістік бойынша да) модельдері тұрғызылады; олар, жалпы айтқанда, гидродинамикалық модельдердің жақындастыруларымен (мысалы, (8.126) теңдеулерімен) алына алмайды, өйткені оларды құрастыру үшін жоғарырақ иерархиялық деңгей моделінің қасиеттері қолданылады.

Жоғарыда сипатталған орындау тәртіптерінің ең қарапайым нұсқасы (8.127) таралуының шоғырлы түрде максвеллдік функциясы және оның (бірөлшемдік ағымдары үшін) (8.126) теңдеулеріне жауап беретін жағдайына сай келеді, олардың жартылайүзіктік ұқсастары мына түрде көрінеді:

$$\begin{gathered}
\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho V^2 + p), \\
\frac{(\widehat{\rho V}) - \rho V}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 + p) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho V^3 + 3pV), \\
\frac{\hat{E} - E}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left[V(E + p)\right] = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[V^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p)\right],
\end{gathered} \tag{8.130}$$

мұндағы жазуды ықшамдау үшін енгізілген белгілеу $g^{j+1} = \hat{g}$, $g^{j} = g$. Оларды қорыту кезінде (8.129)-дың оң жағында алынатын интегралдар, түрлі реттегі e^{-z^2} функциясы моменттерінің қосындылары мен көбейтінділері ретінде көрсетілген ($f^{(0)}$ таралуы функциясының қасиеттері ескерілген). Тақ моменттер нөлге тең, ал олардың жұптарын анықтайтын формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z^{2\tau} dz = \frac{\pi^{1/2}}{2^{\tau}}(2\tau - 1)!!.$$

Кеңістіктік операторларды осы немесе басқа тәсілмен үзіктеуді өткізгеннен кейін, (8.130)-тан (8.126) теңдеулерінің үзіктік ұқсастары толығымен алынады, олардың сандық шешімі айқын формулалар бойынша табыла алады ((8.128)-дің ішінде f^{i+1} мен f^{j}–дің орнын ауыстырып, (8.130) моделінің айқын емес нұсқаларын тұрғызу қиын емес). (8.130)-дың оң жақ бөлігінде тұратын τ бойынша аздықтың бірінші реттегі мүшелері өзімен, жақындатылатын модельдің шығу тегі жайлы қосымша ақпаратты таситын, (8.126) үшін әдеттегі үзіктік модельдерге қоспаны көрсетеді.

(10.40) жүйелерінің бәріне жеткілікті үлкен тұжырым жасамай-ақ, тек үзіксіздіктің теңдеуімен шектелеміз. (8.129)-ды мына түрде көрсете отырып

$$m\frac{f^{j+1} - f^{j}}{\tau} + m\frac{\partial f^{j}}{\partial x}\upsilon = m\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 f^{j}}{\partial x^2}\upsilon^2,$$

осы өрнекті $\Phi(\upsilon) = 1$–ге көбейтіп және оны υ бойынша интегралдап, аламыз

$$\frac{\rho^{j+1} - \rho^{j}}{\tau} + \int m\frac{\partial f^{j}}{\partial x}\upsilon d\upsilon = \frac{\tau}{2}\int m\frac{\partial^2}{\partial x^2}\upsilon^2 d\upsilon,$$

немесе, дифференциалдау таңбасын интеграл сыртына шығарып, аламыз

$$\frac{\rho^{j+1} - \rho^{j}}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}\int f^{j}\upsilon d\upsilon = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int f^{j}\upsilon^2 d\upsilon.$$

Соңғы теңдіктегі интегралдарды V мен р функцияларының анықталуымен сәйкестікте түрлендіреміз де (10.36) теңдеулерінің біріншісінікіндейге келеміз

$$\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho V^2 + p).$$

Жоғарыда сипатталған жақындау (8.126) теңдеулерінің көпөлшемді ұқсастарына және газ ағымдарының күрделірек модельдеріне жалпыланылады, мысалы Навье–Стокс теңдеуіне. Соңғы жағдайда $f = f^{(0)}$ таралуының максвеллдік функциясының орнына, табиғи түрде, жылудың нөлдік емес тұтқырлы кернеулері мен ағындары бар ортаға жауап беретін, келесі жуықтау – $f = f^{(0)} + f^{(1)}$ функциясы қолданылады.

Түсіндіреміз: шекаралық шарттар (8.130) тұрпатындағы модельдер үшін Эйлер (немесе Навье–Стокс) теңдеулері жағдайларындағыдай дәлдікпен алына алмайды, өйткені олардың автоматты түрде тасымалы кезінде үзіктік модель консервативтік емес болар еді. Сондықтан (8.130) моделі теңдеуі ғана емес, сондай-ақ, олар үшін шеттік шарттармен, кинетикалық теңдеудің биігірек иерархиялық деңгейінен орын алу үшін, келісуі керек.

Кинетикалық түрде келісілген айрымдық сызбанұсқалар өзінің тұрғызылуы күшімен, газдың көптеген жеткілікті күрделі ағымдарын сандық модельдеу үшін, оларды өте тиімді жасайтын, қасиеттер қатарын иеленеді.

Әдебиет: 8[205–221], 8[221–234], 8[235–246], 8[246–269]

Бақылау сұрақтары:

1. Өлшемділіктерді талдау және модельдерді топтық талдау.
2. Автомодельдік (өздік ұқсастық) үдерістер.
3. Сызықты еместік орталардағы ауытқулар таралуының түрлі режімдері.
4. Тұжырымдама, біршама салдарлар.
5. Асқынуы бар режімдерді жіктеу.
6. «Автомодельдік әдісті» кеңейту.
7. Сызықты еместік орталарда шоғырланған құрылымдар
8. Орташаландырудың түрлі тәсілдері
9. Жылу өткізетін орта жануының режімдерін жіктеу
10. Сызықты еместік орталарда шоғырланған құрылымдар.
11. Орташаландырудың түрлі тәсілдері.
12. Жылу өткізетін орта жануының режімдерін жіктеу.
13. Сандық модельдеудің қажеттігі, айырымдық сызбанұсқалардың қарапайым түсініктері.
14. Тікелей жалған жақындату немесе жуықтату.
15. Интегрлі-интерполяциялық әдіс.
16. Толық консервативтіліктің қағидасы.
17. Нұсқаулық қағидалар көмегімен айырымдық сызбанұсқаларды тұрғызу.
18. Үзіктік модельдерге иерархиялық жақындауды қолдану.

9. ҚАЛЫПТАСАТЫН ЗЕРЗАТТАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІ

МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРДІҢ ЖАН-ЖАҚТЫЛЫҒЫ

Математикалық модельдер жан-жақтылығының дәрежесі олардың, қызмет етуінің бір немесе көп режімдеріндегі біртиптік зерзаттардың азды-көпті көпсанды топтарының талдауына, қолданылуымен анықталады. Егер қызмет ету режімінде зерзат талдауы үдерісіне математикалық модель ауысымы қажет болса, машиналық әдістерді қолдану ыңғайсыз болады. Көптеген жағдайларда инженер-жасаушы элементтердің математикалық модельдерді құрастыру бойынша, мұндай жұмысты тек жекеленген қажет жағдайларда ғана орындауға иек арта отырып, күрделі және жауапты жұмыстан бос болуы тиіс. Яғни, АЖЖ-да қолданылатын элементтердің математикалық модельдері жоғары дәрежелі жан-жақтылықты иеленуі керек.

Талап етудің жоғары дәлдігі, жан-жақтылықтың үлкен дәрежесі бір жағынан және жоғары үнемділік екінші жағынан, қарама-қайшылы. Үдерістердің түрлі заңдылықтары модельде бөлшектеліне бейнеленген сайын, соғұрлым модель дәлірек және жан-жақтырақ, бірақ соғұрлым талап етілетін есептеу көлемі үлкен және пайдаланылатын параметрлер саны үлкен.

9.1. Амебалар жиналуының динамикасы

Амеба – ауқымы шамамен оншақты микрон (10^{-3} см) бірторлы ағза, топырақ ішін мекендейді және соның ішінде жалған аяқтармен, яғни өз денесінің бөліктерімен қозғалады. Амебалар негізінен, топырақпен бірге жұта отырып, бактериялармен қоректенеді (егер тағамдары жеткілікті болса, онда амебалар екі бөлікке бөлініп көбейеді).

Байқаулардан және эксперименттен белгілі, олардың бірлестіктерінің даму динамикасы – бір-бірінен алыс емес арақашықтықта болатын амебалардың көп саны жеткілікті, – жеткілікті күрделі болады. Мысалы, сыртқы жағдайлардан тәуелділікте амебалар, әрбір амебаның даралығы сақталғанымен, біртұтас болып қозғала бастайды ірі (жүздеген мың данаға дейін) жиналуға ұмтылады. Бұл макроскоптық «ұйымдасқан» қозғалыс, амебалардың өзімен өндірілетін біршама химиялық заттың жоғарырақ концентрациясы бағытында өтетіні байқалды.

Мазмұндылық модельді тұрғызу. Модель жуықтаулары, постулаттары және теңдеулері. Жалпы математикалық модель және оның түзетуі. Математикалық модель зерттелуінің біршама нәтижелері.

Амебалар жиналуы динамикасының математикалық моделі келесі ұйғарымдарға негізделеді:

1) амебалар арасындағы арақашықтық азырақ олардың жиналуларының ауқымдарымен салыстырғанда (жүздеген микрон), оларды «тұтас орта» ретінде қарастыруға және $N(x,y,z,t)$ концентрациясын – көлем бірлігіндегі амебалар санын кіргізуге болады;

2) үдеріс бірөлшемдік, яғни амебалар концентрациясы және басқа да шамалар функциялары болатын тек x координаты және t уақыты;

3) амебалар макроскоптық қозғалыс үдерісінде тумайды және өлмейді, яғниқозғалыстың сипаттық уақыты (бірнеше сағаттар) амебалар көбеюінің және өмірінің сипаттақ уақыттарына қатысы бойынша аз;

4) сыртқы әсер етушілерді (азық, жылу және т. б.) ынталандырушылар қатыспаған кезде амебалардың жеке қозғалысы ретсіз, астан-кестен; бөлініп шыққан бағыттары жоқ және әрбір амеба тең ықтималдықпен оңға да, солға да қозғала алады;

5) егер ортада «тартатын» химиялық зат бар болса, онда амебалардың меншікті реттелмеген қозғалысына олардың осы заттың үлкен тығыздығы бар аймағындағы бағытталған қозғалысы қосылады.

dt уақытындағы ортаның dx элементіндегі амебалар теңгерімінің теңдеуін, олардың санының «сақталу заңын» (3-ші ұйғарым) пайдалана отырып, құрастырамыз. Бұл жағдайда dx көлеміндегі (көлденең қима ауданының бірлігі) амебалардың жалпы саны элементтің сол жақ және оң жақ шекараларындағы $W(x, t)$ амебалар ағындырының айырымы себебінен ғана өзгереді. Шама $W(x, t)$ әдеттегі мағынада түсініледі: бұл уақыт бірлігінде бірлік бетті қиып өтетін амебалар саны.

Шама $W = W_c + W_d$ екі құрастырушыдан W_c мен W_d құрастырылады. Жалпы ағынның W_c бөлігі амебалардың ретсіз қозғалуының есебінен қалыптасады, және сондықтан Фурье заңымен ұқсастығы бойынша жылу диффузиясы үдерісі үшін олардың концентрацияларының градиенті арқылы оларды жазуға болады:

$$W_c = -\mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

мұндағы $\mu > 0$ – біршама коэффициент, қарастырылушы «ортаны» сипаттайды. Жылу берілісі құбылыстары үшін қолданылған ойлауларды пайдалана отырып, бұл формуланы W_c пен μ шамасы үшін микродеңгейде үдерістің егжей-тегжейлі талдауынан алу қиын емес.

Өрнектерді алу кезінде амебалардың бағытталған ағынын сипаттайтын W_d құрастыру үшін, затты «тартатын» тығыздықтың градиенті үлкен болған сайын W_d шамасы үлкен болады деп санаймыз:

$$W_d = \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Мұндағы $\eta > 0$ – біршама тұрақтылық, $\rho(x,\ t)$ – зат тығыздығы, ал градиент алдындағы көбейткіш N, W_d ағынын құрайтын ρ шамасының берілген градиенті кезінде, берілген нүктеде амебалар концентрациясына пропорционалдығын білдіреді. W_c, W_d үшін өрнектерді біріктіре отырып және оларды теңгерім теңдеуіне қойып, аламыз

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial N}{\partial x} - \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \qquad (9.1)$$

(9.1) теңдеуінде белгісіз функция екеу – N мен ρ. Сондықтан, заттың сақталу заңын пайдаланып, шама ρ үшін теңгерім теңдеуін алу қажет. Және мұнда химиялық заттың бөліну жылдамдығы амебалар концентрациясына пропорционал екенін ескерген жөн. Сондай-ақ жылдамдығы, табиғи түрде, оның концентрациясына пропорционал екенін (радиобелсенділік ыдырау үдерісіне ұқсас) ескереміз. Сонымен, уақыт бірлігінде көлем бірлігінде және зат мөлшері пайда болады және жоғалады шамасы тең

$$f = \alpha N - \beta \rho ,$$

мұндағы $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – константтар, олар оның амебалармен бөлінетін жылдамдығын және ыдырау жылдамдығын сәйкестелініп сипаттайды (міне осыдан заттар үшін модельдің, ішінде не өлмейтін және не тумайтын амебалар үшін модельден ерекшелетіні тұрады). Ортаның элементарлық көлемінде зат тығыздығының өзгеруі сондай-ақ элементтің сол жақ және оң жақ шекараларындағы оның ағындарының айырмасы себебінен де өтеді. Ол, жылуөткізгіш ортаның көбірек қыздырылған телімдерінен азырақ қыздырылғанға жылудың тарайтынына ұқсас, концентрациясы үлкен орындардан концентрациясы кіші орындарға ие ортада диффундирлейді. Бұл қозғалыс, Фик заңына сай, W_ρ ағынын жасайды, бұл тең $W_\rho = -D\frac{\partial \rho}{\partial x}$, мұндағы D > 0 – диффузия коэффициенті (Фик заңын қорыту Фурье заңын қорытуға ұқсас).

Сонымен, заттың теңгерімі теңдеуінің түрі

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial W_\rho}{\partial x} + f,$ немесе, W_ρ мен f өрнектерін ескергенде,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \alpha N - \beta \rho. \qquad (9.2)$$

(9.1), (9.2) теңдеулері өзара байланысқан: оның біріншісіне шама ρ кіреді, екіншісінде шама N бой көрсетеді. (9.1)-дің оң жақ бөлігінде тұрған жақшадағы $\eta N\partial\rho/\partial x$ мүшесі болуынан жүйе (9.1), (9.2) сызықтық емес. Қарастырылушы N амебалар концентрацияларына және ρ зат тығыздығына қатысты сәйкестелініп (9.1) мен (9.2) теңдеулерінің параболалық типке жататынын көру қиын емес.

Егер амебалар «тартатын» затты бөліп шығармаса және $\rho(x,\ t) \equiv 0$ болса, онда (9.1) жылуөткізгіштік (немесе диффузия) теңдеуіне ауысады

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2},$$

мұны түсіндіру оңай, өйткені W ағынында, амебалардың ретсіз, бағытталмаған қозғалысына сай келетін W_c құрастырушысы ғана қалады.

(9.1), (9.2) жүйелерінің сызықтық еместігінен оның жалпы шешімін құрастыруға болмайды, және сондықтан амебалар жиналуының кеңістікті-уақыттық динамикасын анықтау – өте оңай емес мәселе. Алайда ол әлдеқайда жеңілденеді, егер уақыттан тұрақтыдан және кеңістік бойынша $N \equiv N_0$, $\rho \equiv \rho_0$ шешімінен аз ауытқуы, яғни сызықтық емес мәселе сызықтық болғаны кезінде зерттелген болса. Мұндай шешім бола алады мына арақатынас кезінде

$$\alpha N_0 = \beta\rho_0,$$

бұл заттың бөлінуін және оның ыдырауы бір-бірін теңдестіретінін білдіреді.

Тұрақты шешім төңірегінде сызықты етілген (9.1), (9.2) жүйелерінің түрі

$$\frac{\partial\tilde{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x} - \eta N_0\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = D\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial x^2} + \alpha\tilde{N} - \beta\tilde{\rho}, \qquad (9.3)$$

мұндағы $\tilde{N}$ мен $\tilde{\rho}$ – аз ауытқулар ($\tilde{N} << N$, $\tilde{\rho} << \rho_0$). Оның жалпы шешімін $-\infty < x < \infty$ шексіз кеңістігі үшін (бұл жағдайда шеттік шарттарды қанағат етудің қажеттігі жоқ) бөліктік шешімдердің (гармоникалардың) қосындылары түрінде тұрғызуға болады

$$\tilde{N} = C_1 \sin kx e^{\gamma t}, \quad \tilde{\rho} = C_2 \sin kx\, e^{\gamma t}, \qquad (9.4)$$

мұндағы $k > 0$ – толқын саны, C_1, C_2 – константтар. Бөліктік шешім үшін орындалуы тиіс арақатынастар

$$C_1(\gamma + \mu k^2) = C_2\eta N_0 k^2, \quad C_2(\gamma + \beta + Dk^2) = C_1\alpha, \qquad (9.5)$$

$\lambda = 2\pi/к$ гармоникасының толқын ұзындығын, уақытпен ауытқудың өсуін немесе өшуін сипаттайтын оның γ – инкрементімен (немесе декрементімен) байланыстырады. *Сөну декременті* (латын сөзі *decrementum* – азаю), тербеліс сөнуінің сипаттамасы, мына жүйедегі: $\delta = \ln(A_1 / A_2)$, мұндағы A_1 мен A_2 – бір бағытта бірінен соң бірі жалғасатын тербеліс амплитудалары.

9.2. Диффуздық үдерістер және Колмогоровтың дифференциалдық теңдеулері. Марковтық үдерістер, тіке және кері Колмогоров теңдеулерін қорыту

Кездейсоқ марковтық үдеріс. Осыған ұқсас типтік мысал қызметін, ретсіз соғыстығыстардың сұйықтық молекулаларымен ретсіз соқтығысының (броундық қозғалыс) әсерінен ұйқы-тұйқы ауыстыру жасайтын кішкентай қатты бөлшектің сұйықтықта орналасқан қозғалысы атқарады. Оның кез келген $t \geq t_o$ уақыт моментіндегі қалпы R^3 үшөлшемдік кеңістіктің x, y, z координаттарымен беріледі. Әрі қарай есептеулерді ықшамдау үшін бірөлшемдік қозғалысты, яғни броундық бөлшектің x, $x \in R^1$ осі бойымен кездейсоқ шарлауды қарастырамыз.

Кездейсоқ үдеріс *марковтық атанады*, егер x нүктесі қалпы бойынша t уақыт моментінде, R^1 кеңістігінің біршама бөлігінде (кез келген өлшенетін Е ішкі жиынтықта) еркін моментте оны табудың ықтималдығы анықталатын болса. Басқа сөздермен, бұл үдерістің, t мен t' арасындағы аралық уақытта болып қалған оқиға t' моментінде нүкте қалпына ықпал етпейтін кезде, өткенінен соң әсері болмайды.

Марковтық үдерісті толығымен сипаттайтын функция

$$\rho(t, x, t', x'), \qquad x \in \mathrm{R}^1,$$

x' нүктесіндегі *ықтималдық тығыздығы* аталады, мұны біле отырып, ықтималдықты есептеу қиын емес

$$\rho(t, x, t', \mathrm{E}) = \int_{E(x')} \rho(x,t,x',t')dx'$$

бөлшекті x' нүктесінің біршама $E(x')$ төңірегінде t' уақыт моментінде табу.

Айқын көрінетіні, ρ функциясы үшін мөлшерлеу шартының орындалатыны

$$\int_{R^1} \rho(t,x,t',x')dx' = 1, \tag{9.6}$$

яғни кез келген моментте бөлшек міндетті түрде R^1 кеңістігінің қайсыбір нүктесінде болатыны.

Марковтық үдеріс моделі тұрғызылуы кезінде елеулі үлгімен оның *күшті үзіксіздігі* жайлы ұстаным қолданылады. Бөлшек уақыттың Δt аз аралығында $\Delta x \geq \delta$ координатының елеулі өсімшелерін тек қана аз ықтималдықпен алынады деп саналады. Бұл, кез келген үшін $\delta > \mathrm{O}$ болатынын білдіреді

$$\int_{|x'-x|\geq\delta} \rho(t-\Delta t,x,t,x')dx' = o(\Delta t),$$

немесе, баламалық жазуда,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|\geq\delta} \rho(t-\Delta t,x,t,x')dx' = 0. \tag{9.7}$$

Сондай-ақ кез келген $\delta > 0$ үшін x бойынша біркелкі деп жорамалданатын шектер бар

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|\geq\delta} (x'-x)\rho(t-\Delta t,x,t,x')dx' = b > 0, \tag{9.8}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|\geq\delta} (x'-x)^2\rho(t-\Delta t,x,t,x')dx' = 2a > 0. \tag{9.9}$$

Бұл жорамалдарда келесі түсіндіру бар: бөлшек үшін ықтималдық $|x'-x| < \delta$ аралығында t моментінде Δt-ға тура пропорционал ($t - \Delta t$ бастапқы моменттен өтетін уақыт аралығының азаюымен азаяды, бұл табиғи жәйт) және $|x'-x|$ аралығы ауқымының біршама «орташа» шамасына (және оның квадратына, бұл табиғи жәйт) кері пропорционал. Жалпы айтқанда, a мен b шамалары, x нүктесінен және t моментінен, яғни $a = a(x, \mathrm{t})$, $b = b(x, \mathrm{t})$ дан тәуелді, бірақ жеңілдік үшін мұнда a мен b – тұрақты болған кездегі кездейсоқ жағдай қарастырылады.

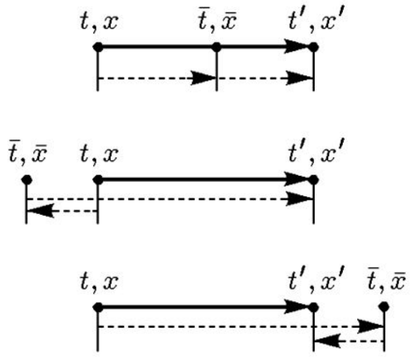
Ақырында, төменде қолданылатын соңғы жорамал, кез келген t, x, t', x' үшін x бойынша ρ функцииясының үзіксіз бөліктік туындылары бар екенінен тұрады

$$\frac{\partial\rho}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}. \qquad (9.10)$$

Қарастырылушы үдерістің негізгі қасиеті *Марков теңбе-теңдігімен* өрнектеледі

$$\rho(t, x, t', x') = \int_{R^1}\rho(x,t,\bar{t},\bar{x})\rho(\bar{t},\bar{x},t',x')dx', \qquad (9.11)$$

мұндағы $t < \bar{t} < t'$ – біршама t-дан t'-қа дейінгі аралықтағы уақыт моменті, ал $\bar{x}$ – i моментіндегі бөлшек координаты, $t < \bar{t} < t'$ – нүкте x-тан нүкте x'-қа дейінгі қозғалу кезіндегі біршама аралық нүкте. (9.11) теңбе-теңдігінің мағынасы x нүктесінен x' нүктесіне ауысуды қарастырған кезде, ауысулардың тізбектілігі сияқты – алдымен x нүктесінен $\bar{x}$ нүктесіне, содан кейін $\bar{x}$ нүктесінен x' нүктесіне (9.1-суретте осы ауысулардың мүмкін құрамалаулары көрсетілген, және де аралық жылжытулар штрихтық сызықтармен, ал негізгі ауысу – тұтасқан сызықтармен бейнеленген) түсіндіріледі. Екі тізбектелген тәуелсіз оқиғадан тұратын ықтималдық әр оқиғаның ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең, сондықтан (9.11)-дегі интегралдың астында сәйкес келетін шамалардың көбейтіндісі тұр. Интеграл $\bar{x} \in R^1$-дің барлық мүмкін аралық нүктелері бойынша алынады.



9.1-сурет

Қарастырылушы үдеріс үшін Марков теңбе-теңдігі, t, x пен t', x' нүктелеріндегі ρ функциясының мәндерін біршама түрде байланыстыра отырып, өзгеше түрлі «іргелі заңның» рөлін ойнайды. Оның көмегімен алдымен $t - \Delta t$ мен t моменттеріндегі ρ шамасының айырымын есептейміз:

$$\rho(t - \Delta t, x, t', x') - \rho(t, x, t', x') =$$

$$= \int_{R^1}\rho(t-\Delta t,x,t,\bar{x})\rho(t,\bar{x},t',x')d\bar{x} - \rho(t,x,t',x'\}\int_{R^1}\rho(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}.$$

Осы теңдіктің сол жақ бөлігіндегі бірінші мүшеге ((9.11)-ге қараңыз) оның оң жақ бөлігіндегі бірінші интеграл жауап береді, ал екіншісіне – интегралға көбейтілген оған теңбе-тең мүше, бұл (9.6) мөлшерлеу шартына сай 1-ге тең. Көбейткіш ρ(t, x, t', x') $\bar{x}$-қа тәуелді емес, және сондықтан оны интеграл таңбасының астына енгізіп, теңдікті қайта жазамыз мына түрде

$$\rho(t - \Delta t, x, t', x') - \rho(t, x, t', x') = \int_{R^1}[\rho(t,\bar{x},t',x') - \rho(t,x,t',x')]\rho(t-\Delta t,x,t,\bar{x}\}d\bar{x}.$$

Енді осы теңдікте оның екі бөлігін де Δt-ға бөлеміз және интегралды – $|\bar{x}-x| \ge \delta$ және $|\bar{x}-x| < \delta$ аймақтары бойынша екіге бөлеміз:

$$\frac{\rho(t-\Delta t, x, t', x') - \rho(t, x, t', x')}{\Delta t} = I_1 + I_2, \qquad (9.12)$$

$$I_1 = \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|\ge\delta} [\rho(t, \bar{x}, t', x') - \rho(t, x, t', x')]\rho(t-\Delta t, x, t, \bar{x})d\bar{x},$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} [\rho(t, \bar{x}, t', x') - \rho(t, x, t', x')]\rho(t-\Delta t, x, t, \bar{x})d\bar{x}.$$

Интеграл I_1 (9.7)-нің күшті үзіксіздігі қасиеттерінің күшімен $\Delta t \to 0$ кезінде нөлге ұмтылады (нтеграл астындағы өрнектегі бірінші көбейткіш Δt-ға тәуелді емес және $\Delta t \to 0$ кезінде I_1 тәртібіне ықпал етпейді).

Интеграл I_2–ні, (9.10)-ды ескеріп ($\bar{x}-x$) дәрежелері бойынша бірінші көбейткішті өзара бөле отырып, түрлендіреміз:

$$I_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} \frac{\partial\rho(t, x, t', x')}{\partial x}(\bar{x}-x)\rho(t-\Delta t, x, t, \bar{x})d\bar{x} +$$

$$+\frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(t, x, t', x')}{\partial x^2}(\bar{x}-x)^2\rho(t-\Delta t, x, t, \bar{x})d\bar{x} +$$

$$+\frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} o[(\bar{x}-x)^2]\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(t, x, t', x')}{\partial x^2}\rho(t-\Delta t, x, t, \bar{x})d\bar{x}.$$

Осы теңдеуде, интеграл белгісінің астында тұрған ρ функциясының бөліктік туындылары $\bar{x}$-тан тәуелді еместігін байқай отырып, Δt-ны нөлге ұмтылдырамыз. Оларды интеграл астынан шығара отырып, алдыңғы екі мүше үшін (9.8), (9.9) жорамалдары күшімен аламыз, олардың шектері сәйкестелініп тең

$$b\frac{\partial\rho(t, x, t', x')}{\partial x}, \qquad a\frac{\partial^2\rho(t, x, t', x')}{\partial x^2},$$

ал үшінші қосылғышты мына түрде көрсетеміз

$$\varepsilon(\bar{x}-x)\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(t, x, t', x')}{\partial x^2}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\bar{x}-x|<\delta}(\bar{x}-x)^2\rho(t-\Delta t, x, t, \bar{x})d\bar{x},$$

мұндағы $\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x)$ – функция $\varepsilon(\bar{x}-x)$-тың орташа мәні, және де $o[(\bar{x}-x)^2]$ шамасын анықтау бойынша $\delta \to 0$ кезінде иеленеміз $\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x) \to 0$. Соңғы өрнекте алдымен $\delta \to 0$ кезінде шектік ауысуды іске асырамыз. Бұл шек, айқын түрде, кез келген $\Delta t > 0$ кезінде нөлге тең. Сондықтан оның шегі $\Delta t \to 0$ кезінде де нөлге тең. Ақырында, (14.12)-нің сол жақ бөлігінің шегі $\Delta t \to 0$ кезінде уақыт бойынша ρ функциясының туындысына тең. Бұл нәтижелерді қосындылап, барлық $t > t_0$, $-\infty < x < \infty$ үшін дұрыс, ықтималдық тығыздық үшін (9.12)-ден *Колмогоров теңдеуін* аламыз:

$$\frac{\partial\rho(t, x, t', x')}{\partial x} = a\frac{\partial^2\rho(t, x, t', x')}{\partial x^2} + b\frac{\partial\rho(t, x, t', x')}{\partial x}. \qquad (9.13)$$

Теңдеу (9.13) – сызықтық параболалық теңдеу. Осы қасиеттерге оны жалпылау да ие.

Колмогоров теңдеуінің қарапайым нұсқасы $b = 0$ кезінде (9.13)-тен алынады:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = a\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \tag{9.14}$$

және өзімен *жылуөткізгіштік* (немесе диффузия) *теңдеуін* көрсетеді.

Алайда жылуберілісі мен кездейсоқ марковтық үдерістің математикалық модельдері арасында елеулі айырым бар. (9.13) теңдеуін қорыту кезінде $\rho(t, x)$ функциясы үшін (9.7)–(9.9) күшті үзіксіздік шарты (жылуөткізгіштік теңдеуін қорытудан өзгеше түрде) қолданылды. Бұл $\rho(t, x)$ функциясының Колмогоров теңдеуінің кез келген шешімі бола алмайтынын келтіреді. Ол (9.13)–(9.14) теңдеулерінің іргелі шешімі деп аталатын болып шықты.

Бәрінен оңайы (9.16) қарапайым теңдеуі жағдайында $\rho(t, x)$ функциясының қасиетін түсіну. $u(t, x)$ функциясы – (9.14) теңдеуінің шешімі болсын, ол $t > t_0$, $-\infty < x < \infty$ кезінде анықталады және қанағаттандырады берілген бастапқы шартты

$$u(t, x) \to u_0(t, x) \geq 0,\ t \to t_0 \text{ кезінде.} \tag{9.15}$$

Сонда, егер $\rho(x, t, t', x')$ (9.14)-тың іргелі шешімі болса, онда функция $u(t, x)$-тың табылатын формуласы

$$u(t, x) = \int_{R^1} \rho(t, x, t', x')u_0(x')dx'. \tag{9.16}$$

$t' \to t_0$, $x' \to x$ кезінде (9.6) мөлшерлеу шартын пайдалана отырып және сол жақ шектің соңғы формуладағы δ-дан тәуелсіздігін ескеріп, аламыз

$$\lim_{t'-t_0} \int_{R^1} \rho(t, x, t', x')u_0(x')dx' = u_0(x),$$

яғни (9.17) формуласын.

Қарапайым мысал – (9.16) қарапайым формуламен берілетін және $\rho(t, x)$ функциясының қасиеттеріне ие, (9.14) жылуөткізгіштік теңдеуі үшін лездік нүктелік көздің функциясы. Жалпырақ теңдеулер (9.13)–(9.15) үшін олардың іргелі шешімдерінің соншалықты қарапайым көрсетілімдері болмайды. Алайда $\rho(t, x)$ шамасының Колмогоров теңдеуіне бағынатын және оның іргелі шешімі болатын жағдайы, ішінде кездейсоқ марковтық үдерістер өтетін зерзаттар, бөліктікте басқару мәселелерінде осындай зерзаттар зерттелуі кезінде елеулі түрде қолданылады.

Солай, параболалық теңдеулер – математикалық модельдердің жан-жақтылығына мысалдардың бірі (9.1-кесте). Олар табиғаты мүлдем әртүрлі үдерістердің кең шеңберін сипаттайды. Белгілеп көрсететініміз, параболалық теңдеулердің ретсіз реттелмегенн құбылыстармен (жылуберілісі, диффузия және т. б.) жиі байланысатыны. Алайда олар детерминирленгендер (жер бетіне жақын жер асты сулары, кеуектік ортада газды сүзгіден өткізу және т. б.) ретінде қарастырылатын көптеген үдеріске қатысты қолданылады.

9.1-кесте

Математикалық модельдердің жан-жақтылығы.
Параболалық теңдеулер

Зерзат (үдеріс)	Негізгі болжамдар мен заңдар

Сылақтық сулар қозғалысы	Масса сақталуы, Дарси заңы
Жылуберілісі; зат диффузиясы	Энергия сақталуы, Фурье заңы; масса сақталуы, Фик заңы
Амебалар жиынтығының қозғалысы	Амебалар саны сақталуы, «тартатын» заттар қатыспағандағы амебалар қозғалысының ретсіздігі
Кездейсоқ марковтық үдеріс	Марков теңдестігі, үдерістің күшті үзіксіздігі
Иерархиядағы билік таралуының динамикасы	Заңға бой ұсынулық, иерархиядағы биліктің қайта таралымы механизмдері жайлы постулат

Математикалық модельдердегі жан-жақтылық – бізді қоршаған әлемнің бірлігін және оның сипаттау тәсілдерін бейнелеу. Сондықтан бір құбылыстарды математикалық модельдеу кезінде жасалған және жиналған әдістерді және нәтижелерді, салыстырмалы түрде жеңіл, «ұқсастық бойынша», мүлдем басқа үдерістердің кең сыныптарына апаруға болады.

ҚАРЖЫЛЫҚ ПЕН ҮНЕМДІК ҮДЕРІСТЕРДІҢ КЕЙБІР МОДЕЛЬДЕРІ

9.3. Жарнамалық серіктік моделі

Жарнамалық серіктікті ұйымдастыру. Болашақ сатылымнан түскен табыс қымбат тұратын серіктіктің артықтықтарын жабу керектігі ұғынықты. Бастапқыда шығындар табыстан асып кететіні айқын, өйткені жаңалық жайлы потенциалды сатып алушылардың аз бөлігі ғана ақпаратталады. Кейін, сатылым саны артқан кезде, елеулі табысты санау мүмкіндігі туады, және ақырында, нарық толығатын сәт туады, әрі қарай тауарды жарнамалау мағынасыз болып қалады.

Жарнамалық серіктіктің моделі мынадай негізгі болжамдарға негізделеді. Шама dN/dt – тауарды білетін және оны сатып алуға дайын тұтынушылар санының уақытпен өзгеру жылдамдығы (t – жарнамалық серіктік басталуынан бергі уақыт, $N(t)$ – ақпаратты естіген алыс-беріс жұмысымен мекемеге келіп жүрушілердің саны) – оны әлі білмейтін сатып алушылар санына, яғни $\alpha_1(t)(N_0 - N(t)$ шамасына пропорционалды деп саналады, мұндағы N_0 – потенциалды төлеуге қабілетті сатып алушылардың жалпы саны, $\alpha_1(t) > 0$ жарнамалық серіктіктің қарқындылығын (осы уақыт сәтіндегі жарнамаға нақтылы шығындармен анықталатын) сипаттайды. Сондай-ақ қайсыбір түрде тауар жайлы білген тұтынушылар, фирманың қосымша жарнамалық «агенттеріндей» болып, алынған ақпаратты мәлімденбегендердің арасына таратады. Олардың үлесі $\alpha_2(t)N(t)\,(N_0 - N(t))$ шамасына тең және агенттер (мекеменің тапсырмасын орындаушы адамдар) саны көп болған сайын, көп болады. Шама $\alpha_2(t) > 0$ сатып алушылардың өздерінің арасында қатынаста болуының дәрежесін сипаттайды (ол, мысалы, сұраулар көмегімен қалыптаса алады).

Жинап келгенде алынатын теңдеу

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)]\,(N_0 - N). \qquad (9.18)$$

$\alpha_1(t) \to \alpha_2 N(t)$ кезінде (9.18)-ден Мальтус моделі типіндегі модель, ал қарама-қарсы теңсіздік кезінде – қисындық қисық теңдеуі алынады

$$\frac{dN}{dt} = N\,(N_0 - N), \quad d\tau = \alpha_2(t)dt,$$

мұның шешімі зерттелген.

Алынған ұқсастық толығымен түсінікті, өйткені берілген модельді және таралым саны өсімінің моделін тұрғызуда бір ғана идея «қанығу» пайдаланылды: қандай да бір шаманың уақытпен өсімінің жылдамдығы осы шаманың ағынды мәні $N(t)$-нің оның тепе-теңдіктік (таралым) не шектік (сатып алушылар) пен ағынды мәндерінің арасындағы $N_0 - N(t)$ айырымына көбейтіндісіне пропорционалды.

Қос үдерістің арасындағы ұқсастық, қандайда бір уақыт моментінде шама $\alpha_1 + \alpha_2 N$ нөлдік немесе тіпті (бұл үшін бір немесе қос коэффициент те $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ теріс мәнді болуы керек) теріс мәнді болса, аяқталады. Ұқсас негативті (келеңсіз) эффект түрлі тектегі жарнамалық серіктіктерде жеткілікті жиі кездеседі және олардың ұйымдастырушыларын не жарнама сипатын өзгертуге, не әрі қарай үгіттеуден мүлдем бас тартуға ояту керек. Тауар мәлімділігін арттыру бойынша іс-шаралар, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$ шамаларының мәндерінен тәуелділікте, тіке (параметр α_1), сондай-ақ жанама (параметр α_2) жарнамалардың нәтижелерін жақсартуға бағыттала алады.

Модель (9.18) қисындық теңдеуге тән айқын кемшіліктен айырылған. Шынында, ол, уақыттың соңғы моментте нөлге айналатын шешімдерді иеленбейді ($N(t)$ үшін сәйкес келетін формуладан шығатыны, $t \to -\infty$ кезінде $N(t) \to 0$). Жарнамаға қолданылуда, бұл, серіктік басталғанға дейін сатып алушылардың жаңа тауар жайлы білетінін білдіреді. Егер модель (9.18), $N(t = 0) = N(0) = 0$ нүктесі төңірегінде қарастырылса ($t = 0$ – серіктестік басталу моменті), $N \ll N_0$, $\alpha_2(t)\,N \ll \alpha_1(t)$ деп саналады, сонда (9.18) теңдеуінің қабылдайтын түрі

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)\,N_0$$

және шешімі

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt, \qquad (9.19)$$

бұл $t = 0$ кезінде табиғи бастапқы шартты қанағаттандырады.

(9.19)-ден, серіктестік басталуының өзінде, жарнамалық артықтықтар мен табыс арасындағы арақатынасты қорыту салыстырмалы түрде жеңіл. Жарнамаға шығынсыз бірліктік сатылымнан табыс шамасын p арқылы белгілейміз. Ықшамдық үшін әрбір сатып алушы бір тауар бірлігін ғана алады деп санаймыз. Коэффициент $\alpha_1(t)$ өзінің мағынасы бойынша – уақыт бірлігіндегі тең мәнді жарнамалық әсерлер саны (мысалы, бірдей жарнама қағаздарды жапсырмалау). s арқылы жарнаманың элементарлық актісінің құнын белгілейміз. Сондағы қосынды кіріс

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt, \qquad (9.20)$$

ал жұмсалған шығындар

$$S = s \int_0^t \alpha_1(t)dt.$$

Табыс $pN_0 > s$ шарты кезінде артықтықтардан асып түседі, және егер жарнама іс істеуде болса және қымбат болмаса, ал нарық сыйымды болса, онда ұтысқа серіктестің бірінші моменттерінің өзінде-ақ жетуге болады (шынайылықта жарнама төлемі, жарнамалық әсер мен келесі сатып алынатын нәрсе арасында *лаг* (толығырақ модельдерде ескеріле алатын, уақытша кідіріс) деп аталатын орын алады). Өте тиімді емес немесе қымбат жарнама кезінде фирма алғашқы қадамдарында шығынға ұшырайды. Алайда бұл жағдай, жалпы айтқанда, жарнаманы тоқтату үшін негіз бола алмайды. Шынында, өрнек (9.20) және оның көмегімен алынған шарт $pN_0 > s$ әділ тек N(t)-ның кіші мәндерінде ғана, P мен S функциялары уақыт өтуімен бірдей заңдар бойынша өседі. N(t) артқан кезде (9.18)-дегі лақтырылған мүшелер елеулі болады, бөліктікте, жанама жарнаманың әсері күшейеді. Сондықтан функция N(t) (9.20)-шы формуладағыдан гөрі уақыттың «тезірек» функциясы болады. Бұл сызықтық емес эффект N(t) шамасының өзгеруінде шығындар өсімінің шапшаңдығы өзгермеген кезде серіктіктің бастапқы кезеңіндегі қаржылық сәтсіздіктің орнын толтыру мүмкіндігін береді.

Бұл бекітуді α_1, α_2 тұрақты коэффициенттері бар (9.18) теңдеуінің бөліктік жағдайында түсіндіреміз. Былай ауыстырылып

$$\overline{N} = \alpha_1/\alpha_2 + N$$

ол қисындық теңдеуге келтіріледі

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 \overline{N}(\overline{N}_0 - \overline{N}), \quad \overline{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2 + N_0, \qquad (9.21)$$

мұның шешімі

$$\overline{N} = [1+(\overline{N}_0\alpha_2/\alpha_1-1)\exp(-\overline{N}_0\alpha_2 t)]^{-1}. \qquad (9.22)$$

Мұндағы $\overline{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2$, сонан да $N(0) = 0$, және бастапқы шарт орындалады. (9.21)-ден көрінетін $\overline{N}(t)$ функциясының туындысы, яғни, N(t) функциясы $t > 0$ кезінде оның бастапқы мәнінен үлкен бола алады ($\overline{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ немесе $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$ шарты кезінде). $\overline{N} = \overline{N}_0/2$, $N = (\alpha_1/\alpha_2 + N_0)/2$ кезінде туынды ең үлкен мәніне жетеді:

$$\left(\frac{d\overline{N}}{dt}\right)_m = \left(\frac{dN}{dt}\right)_m = \alpha_2\frac{\overline{N}_0^2}{4} = \alpha_2\frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

Осы периодтағы ағынды, яғни уақыт бірлігінде алынатын кіріс (пайда)

$$P = p\frac{dN}{dt} = p\alpha_2\frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

P_m-нен бастапқы ағынды шегеріп $P_0 = p\,(dN/dt)_{t=o} = \alpha_1 N_0$ ((2)-ге қараңыз), аламыз

$$P_m - P_0 = p\frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0)^2}{4},$$

яғни бастапқы және ең үлкен ағынды кіріс (пайда) арасындағы айырым едәуір елеулі бола алады. Серіктіктен шығатын үнемдік эффект (мұның қажет шарты болатын $P_m = p\frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_2}N_0)^2}{4} > \alpha_1 s$ теңсіздігінің орындалуы) оның барлық жүрісімен анықталады, ал сипаттамалары (9.21), (9.22)-ден квадратура (латын сөзі *quadratura* – шаршылық түрді беру) көмегімен есептеледі.

(9.21)-ден шығатыны, біршама моменттен бастап, жарнаманы жалғау қолайсыз болады. Шынында, $\overline{N}_0$-ге жақын, $\overline{N}(t)$ кезінде (9.21) теңдеуінің жазылатын түрі

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2\overline{N}(\overline{N}_0 - \overline{N}). \qquad (9.23)$$

Оның шешімі баяу экспоненциалдық заң бойынша $t \to \infty$ кезінде $\overline{N}_0$ шектік мәнге (ал N(t) функция – N_0-ге) ұмтылады. Уақыт бірлігінде жаңа сатып алушылардың болмашы аз саны пайда болады, және түсетін пайда кез келген жағдайларда жалғасып жатқан шығындарды жаба алмайды.

Осыған ұқсас сипаттамалар технологиялық және басқа да жаңалықтарды енгізуді сипаттау үшін де кеңінен қолданылатын (9.18) теңдеуі және оның түрлі жалпыламалары үшін есептеледі.

9.4. Нарықтық үнемдеу теңдесуінің макромоделі (Кейнс моделі мысалында) және дәстүрлі үнемдік модельдер тұрғызудағы бастапқы қалыптар. Тепе-теңдіктік нарықтың математикалық моделі

Нарықтық үнемдеу үдерісінің кез келген телімі өзінің жеке-дара қызықтарымен (табыстар табу, еңбек жағдайларын жақсарту, тәуекелді ең аз ету, қорларды үнемдеу және т. б.) әсер етеді. Мұндай жүйенің қарапайым нұсқасы – жетілдірілген бәсекелестікпен үнемдеу, әрбір іс-әрекет үнемдік жағынан мардымсыз аз болса және өндіріс, құн, еңбекақы және басқа макрокөрсеткіштер деңгейіне ықпал етпеген кезде. Сондай уақытта үнемдеу агенттерінің бытыраған әсерлері, сатып алу және сату қатынастарында барлар арқылы жұмыс берушілер мен жалдама жұмысшылар, қаржыгерлер мен ақша салушылар және басқа әсерлерінің келісілген картинасы жиынтығына үйлестіріле алады.

Егер осындай ұжымдық әрекеттестік нәтижесінде жүйедегі тауарлардың жалпы өндірісі мен қызметі оларға жалпы сұраныспен келісілсе, онда үнемдеудің мұндай күйі тепе-теңдестік, ал мұнда қалыптасқан бағалар (құндар) – тепе-теңдестік нарықтық бағалар деп аталады. Сұраныс пен ұсыныс арасындағы теңгерім, еркіндік кезінде емес, атап айтқанда осы нарықтық бағалар кезінде, бөліктікте, төлеуге қабілетті сұраныста орын алады.

Үнемдеу ғылымының маңызды мәселелерінің бірі – үнемдеу тепе-теңдігінің шарттарын анықтау, мұның санына тепе-теңдіктік нарықтық құндар кіреді. Үнемдік тепе-теңдіктің ең қарапайымырақ математикалық модельдері мынадай болжамдар кезінде тұрғызылады:

1) жетілдірілген нарықтық бәсекелестік, ірі өндірістік бірлестіктердің (және, әсіресе, монополияларды) де, сондай-ақ барлық жүйе үшін өзінің шарттарын мәжбүр ете алатын біріккен жұмысшылардың да қатыспайтынын білдіреді;

2) жүйенің өндірістік мүмкіндіктерінің өзгермеушілігі: жабдық, өндірістік панажайлар, уақытпен өзгермейтін технологиялар;

3) серіктердің уақыт ішінде өзгермейтін үнемдік ықыластары: кәсіпкерлер өз табысын арттыруға тырыспайды, жұмысшыларға – еңбекақысы қолайлы, инвесторларға (кәсіпке капитал салушыларға) құнды қағаздар бойынша алынған пайыздар ұнайды және т. б.

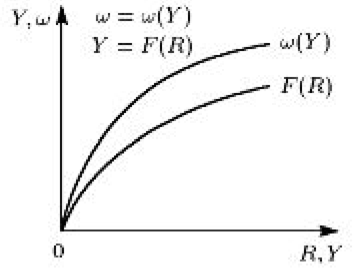
Осы болжамдарға жауап беретін модельдер идеалдық нарықтық үнемдеудің уақыт ішінде «тұрып қалған» тым бөліктік жағдайын сипаттайды. Алайда олар нарықтың «ретсіздіктен» қалыптасатын үнемдік тепе-теңдіктің болуы мүмкіндігі жайлы сұраққа жауап береді, және бұдан басқа, үнемдік жүйенің негізгі макрокөрсеткіштерін өзара байланыстырады.

Мұндай макромодельдердің бірі – *Кейнс моделі* – жалдағыштар мен жалданғыштар, тұтынушылар мен ақша жинайтындар (сақтаушылар), өндірушілер мен инвесторлар, базарлардағы қызмет ететін жұмыс күші, азық-түлік пен ақшалар, яғни осы тауарларды (еңбек, азық-түлік, ақшалар) өзара таратушылар мен айырбастаушылар агенттері ретінде қарастырады.

Жүйенің бірінші макрокөрсеткіші – *ұлттық табыс* Y, уақыт бірлігінде онымен өндірілетін жеке-дара (жеңілдету үшін) өнім болады. Бұл өнім үнемдеудің өндірістік секторымен өндіріледі, ал оның шамасы, қорлардың саны мен сапасына, негізгі ақша қорларының құрамына және R *жұмыс істейтін жұмысшылар* (екінші макрокөрсеткіш) санына тәуелді, F функциясымен беріледі. 2)-ші болжаммен сәйкестікте тепе-теңдестік күйінде өндірістік функция R, сонымен бірге және өнім Y тек жұмысбастылықпен анықталады, яғни

$$Y = F(R). \tag{9.24}$$

F(R)-ке қатысты әдетте, $F(0) = O$, $F'(R) >> O$, $R > 0$ және $R > 0$ кезінде $F''(R) < 0$ болады деп саналады (9.2-сурет). Функция F(R) «қанығу» қасиетіне ие: R өсуімен шығару баяуырақ өседі. Мұндай жақындау толығымен ақталған, солай болғандықтан өндірісте жұмыс істейтіндердің керексіз көп саны кезінде олар үшін сай келетін жұмыс майданы жай ғана табылмайды. Алтын желіні тауып алған бір немесе бірнеше тырысушы, тез және бөгеуілсіз өзінің ең үлкен өнімділігіне жетеді; жұмысшылардың көп саны кезінде олар бір-біріне кедергі жасауды бастайды, және олардың жеке өнімділігі азаяды; ақырында, тырысушылардың өте көп саны кезінде алтынды шығаруды өсіру мүлдем тоқтайды, өйткені жаңадан келгендер кен шығаратын жерге жете алмауы мүмкін.



9.2-сурет

(9.24) арақатынасы еңбек (R) нарықтары мен (Y) өнімі арасындағы байланысты береді. Қосымша арақатынас дәстүрлі саяси үнемдеудің негізгі постулаттарының бірінің көмегімен анықталады:

4) жұмысшының s еңбекақысы, бір бірлікке жұмысбастылығының азайғаны кезінде жоғалуы мүмкін өнім құнына тең (еңбекақы еңбектің шектік өніміне тең).

Белгілейтініміз, (9.21) постулатында, бір жұмыс орнын қысқарту нәтижесінде жоқ болуы мүмкін басқа шығындар (қорларға шығындар, жабдық және т.б.) ескерілмейтіні (аз деп саналады). Сонымен, постулаттан аламыз

$$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s,$$

мұндағы $\Delta Y^{(1)}$ – бірлікке жұмыс бастылығының азайғаны кезінде жоғалған, өнім мөлшері, *p – өнім құны* (содан да берілген теңдіктің сол жағына жоғалған құнның шамасы жазылған). Егер жұмыс бастылық ΔR шамасына өзгерсе, онда соңғы теңдеуден айқын алатынымыз

$$\Delta Y \quad \cdot p = s \cdot \Delta R,$$

мұндағы $\Delta Y = \Delta Y^{(1)}\ \Delta R$ – жұмысшылар санын ΔR-ге өзгерткен кезде жоғалған немесе алынған құн. ΔR мен ΔY-ті R мен Y-пен слыстырғанда аз деп санап, соңғы теңдікті дифференциалдық түрде қайта жазамыз:

$$\frac{dY}{dR} = \frac{s}{p},$$

немесе, (9.24)-ті назарға алып,

$$F'(R) = \frac{s}{p}. \qquad (9.25)$$

F(*R*) берілгендіктен (сонымен бірге функция *F'*(*R*) белгілі), белгілі макрокөрсеткіштер *s* пен *p* кезінде (9.25)-тен *R* жұмыс бастылығы деңгейін, ал (9.24)-тен *Y* өнім шамасын табуға болады. Еске салатынымыз: бұл деңгей, жалданған жмысшылардың жалпы мүмкін санына емес, берілген бағалардағы берілген еңбекақыға еңбек етуге келіскен жұмысшылар санына және жүйенің басқа да сипаттамаларына жауап береді. Жұмысбастылықтың тепе-теңдік деңгейін қамтамасыз ету үшін бар шарттарға жұмыс істеуді қалайтындардың жеткілікті саны қашанда табылады деп болжамдалады, яғни:

5) еңбек ұсынысы өндірісті тоқтатпайды, жұмыс істейтіндер саны кәсіпкерлер жағынан еңбекке сұраныспен анықталады.

(9.24), (9.25) екі тендеудің құрамында төрт шама бар. Олардың біріне қатысты жасалынған болжам:

6) модельдегі еңбекақы s берілген саналады.

Ол жұмыс берушілер мен жалдайтындар арасындағы мәміле нәтижесінде анықталады (ал шынайы еңбекақы да бағалар деңгейіне тәуелді).

Айқын көрінетіні, тұйықталған модельді тұрғызу үшін өнім нарығын және қаржылар нарығын әрі қарай қарастыру қажет. Өндірілген өнім жартылай тұтынуға жұмсалады, жартылай жинақталады:

$$Y = S + \omega,$$

мұндағы ω – *тұтынылатын бөлік* (үнемге қайта оралмайды), ал S – жинақтайтын бөлік, үнемдік жүйеге қайта оралады (немесе қаржы түзетін өнім).

S пен ω шамалары арасындағы арақатынас келесі түсініктерден анықталады. ω шамасына қатысты саналады:

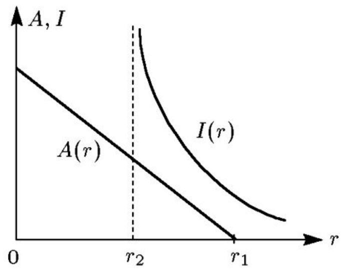
7) шығарудың тұтынылатын бөлігі шығарудың өзінің шамасына тәуелді, яғни. ω = ω (Y).

Мұндағы ω(Y) функция $F(R)$ функциясындағыдай «қанығу» қасиетіне ие: шығару неғұрлым үлкен болса, соғұрлым ΔY қосымша шығарудың азырақ үлесі тұтынуға жұмсалады (9.3-сурет) және үлкенірек үлесі жинақталады. $d\omega/dY$ = c(Y) шамасы тұтынуға бейімділік деп аталады және 0 < c < 1 шегінде жатады, басқаша аз шығару кезінде, өндірілгеннен (d = 1 – c шамасы – жиыстыруға бейімділік) гөрі көбірек өнім тұтынған болар еді.

Қаржы түзетін өнім

$$S = Y - \omega(Y) \qquad (9.26)$$

инвесторлармен үнемдеуге, болашақта осы іске ақша салудан табыс алу мақсатымен, үлес қосады. Модельде іске ақша салу алып қойылған (болашаққа қатысты етіліп) тұтынуға баламалы деп саналады және сондықтан жүйенің тағы бір қаржылық макрокөрсеткішімен – *r банкілік пайыз мөлшерімен* анықталады. Шынында, A ауқымында іске ақша салуды жасап және бір жылдан соң $D = Ar$ табыс алып, инвестор ештеңе жоғалтпайды (берілген мысалда және ұтпайды) бұл құралдарды r пайыз астында банкіге салумен салыстырғанда. Екі жағдайда да бүгінгі тұтыну келесі жылы тұтынудың үлкен мүмкіндігін әкелуге қалдырылады. Іске ақша салуға сұраныс, $0 < r < r_1$ кезінде $A'(r) < 0$ және $r \geq r_1$ кезінде A(r) = 0 болатын етіліп, $A(r)$ функциясымен беріледі: пайыздың үлкен мөлшерінде іске ақша салулар қатыспайды (9.3-сурет).



9.3-сурет

Тепе-теңдік шарттарында $S(Y)$ қаржытүзетін өнім болжамы $A(r)$ іске ақша салуға сұраныспен теңгеріледі:

$$S(Y) = A(r),$$

немесе, (9.26)-ны ескере отырып,

$$Y - \omega(Y) = A(r). \qquad (9.27)$$

Модельді соңғы тұйықтау үшін қаржылар нарығы қарастырылады. Ақшалар үнемдік агенттерге қаржы түзетін өнімді сатып алуға, тұтынуға, сондай-ақ жинақтау құралдарының бірі ретінде керек. Ақшаны мемлекет шығарады деп саналады және олардың мөлшері Z жүйенің берілген басқаратын параметрі болады. Ақшаға сұранысқа қатысты келесі болжам жасалады:

8) ақшаға сұраныс өзімен жәрдемдік пен алыпсатарлық сұраныстарының қосындысын көрсетеді.

Жәрдемдік сұраныс Y тауарын (қаржытүзетін де, сондай-ақ тұтынуға кететін де) сатып алуды жүргізу үшін қолда ұстауға қажет ақшаның санымен анықталады. Егер бағасы p-ға тең, ал *айналым уақыты* τ-ға тең болса, онда жәрдемдік сұраныс, айқын түрде , τpY-шамасына тең.

Алыпсатарлық сұраныс r пайызы мөлшерінің шамасымен байланысқан. Егер пайыз мөлшері жоғары болса, онда олардың қожайындары ақшаларының үлкен бөлігін, жақсы табысқа есептей отырып және банкілік міндеттемелермен салыстырғанда, банкнот (– үнемдік ақша орнына жүретін пайызсыз банк билеті, қағаз ақша) жоюшылығының жоғарырақ дәрежесін құрбан ете отырып, банкіде сақтауды жоғары бағалайды (өнімге айырбастауға қабілеттілікпен). Төменгі пайызды жалақы кезінде алыпсатарлық сұраныс өседі: өздерінің жинақтауларын шоғырландыра отырып, қожайындар барынша үлкен банкнотты қолдарына ұстауды қалайды. Содан да $I(r)$ функциясы үшін алыпсатарлық сұраныс (9.32-сурет) сондай болады, $r > r_2$ кезінде $I'(r) < 0$ болады және $r \to r_2$ $I(r)$ кенет артады ($\lim I(r) = \infty$, $r \to r_2$; ақша қожайындары банк міндеттемелерін иемденбейді). $r_2 < r_1$ деп санау табиғи нәрсе, өйткені қарсы жағдайда іске ақша салулар не нөлге тең, сөйтіп үнемдік тепе-теңдік жайлы айтудың қисыны келмейді, не функция $I(r)$ анықталмаған, және қарастырудың мағынасы жоқ.

Қаржылық нарық тепе-теңдікте болатынынан, жүйедегі ақша теңгерімін («сақталуы заңын») беретін теңдеу

$$Z = \tau pY + I(r). \qquad (9.28)$$

(9.24), (9.25), (9.27), (9.28) теңдеулерін тұтастыққа келтіріп, 1) –8) болжамдарымен алынған, нарықтық тепе-теңдіктің математикалық моделіне келеміз:

$$Y = F(R), \quad F'(R) = s/p, \quad Y - \omega(Y) = A(r), \;\; Z = \tau pY + I(r). \qquad (9.29)$$

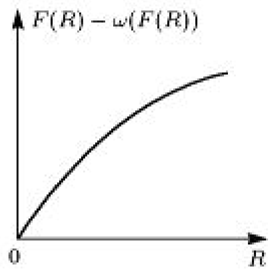
(9.29) моделінде берілетін жүйе параметрлері s (еңбекақының жалақысы), Z (ақшаларды ұсыну) және техникалық параметр τ. F, F', ω, A, I функциялары – жоғарыда сипатталған қасиеттері бар өз аргументтерінің белгілі функциялары. Осы шығулық берілулер бойынша модельден төрт белгісіз шама анықталады: Y (өнім шығару), R (жұмыс бастылық), p (өнім бағасы) және r (табыс мөлшері).

(9.29)-дан p, r, Y шамаларын шығарып тастап, (9.29) теңдеулерін R-ға қатысты бір теңдеуге келтіру оңай

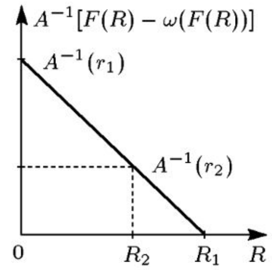
$$-\frac{\tau sF(R)}{F'(R)} + Z = I\{A^{-1}[F(R) - \omega(F(R))]\}, \qquad (9.30)$$

мұндағы A^{-1} – функция А-ға кері функция. (9.30)-дан R мәнін таба отырып, (9.29)-дан барлық қалған ізделуші шамаларды анықтау қиын емес.

(9.30)-дың сол жақ пен оң жақ бөлігіне кіретін, функциялардың графиктерін талдауды негізге алып, қатаң емес, бірақ қарапайым тұрғызулар көмегімен сол теңдеудің бар екенін дәлелдейміз.

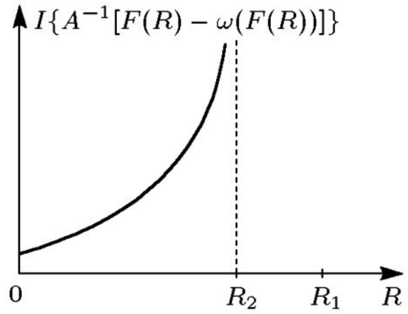


9.4-сурет

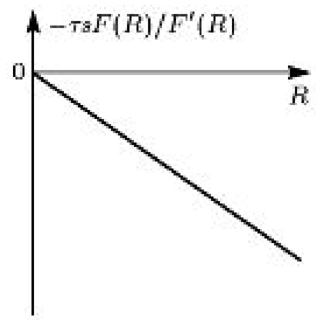


9.5-сурет

Функция $F(R) – \omega(F(R))$ – бірқалыпты өсетін функция R, $R = 0$ кезінде нөлге тең (9.4-сурет). Оның бірқалыптылығы $d\omega\ (F(R))/d(F(R)) = c < 1$ шартынан, ал R өсуінің мөлшері бойынша артуы – $dF(R)/dR > 0$ шартынан шығады. Берілген функция A^{-1} монотондық функциясы үшін аргумент болады, және A функцияларының қасиеттерінен (9.3-сурет) A^{-1}-дің R-ден сапалық тәуелділігін қалыптастыру оңай (9.5-сурет), және де $R > R_1$ кезінде $A^{-1} \equiv 0$ (R_1 – шама R-дің біршама мәні, $0 < \mathrm{R}_1 < \infty$). Өз кезегімен A^{-1}, монотондық функция I-дің аргументі қызметін атқарады, бұл I-дің қасиеттері мынадай (9.3-сурет), R функциясы сияқты оның ие болатын түрі 9.6-суретте көрсетілген ($R > R_2$ мәндері үшін функция I анықталмаған).



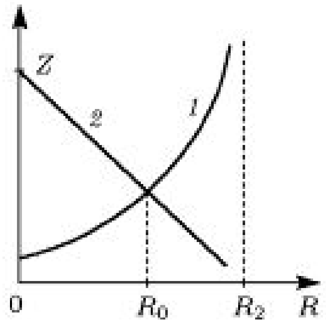
9.6-сурет



9.7-сурет

Енді (9.30) теңдеуінің сол жақ бөлігін қарастырамыз. Функция – $\tau s\mathrm{F}(R)/F'(R)$ нөлге тең $R = 0$ кезінде ($F'(0) \neq 0$ деп саналады); (9.1-суретке қараңыз). Оның R бойынша бірінші туындысы, $F'(R) > 0$, $F''(R) < 0$ функцияларының қасиеттерінен шығатындай, теріс таңбалы, яғни ол бір қалыпты азаяды (9.7-сурет).

(9.30) теңдеуінің сол жақ (қисық 2) және оң жақ (қисық 1) бөліктерінің графиктерін бір 9.8-суретке орналастыра отырып, басқарушы Z параметрінің жеткілікті үлкен мәндері кезінде қисықтардың біршама R_0 нүктесінде қилысатынына көз жеткіземіз, $0 < R_0 < \infty$. Графиктердің бірқалыптылығы әсерінен қиылысу нүктесі жалғыз. Сонымен, модель (9.29) үнемдеудің тепе-теңдік күйін сипаттайтын, шынында да жалғыз шешімге ие.



9.8-сурет

Алайда модель мәні мұнымен шектелмейді. Ол тепе-теңдіктің әртүрлі, бірақ жақын күйлерін салыстырып талдау үшін қолданыла алады (жүйе қалай тепе-теңдік күйге келе алады немесе одан шыға алады сұраққа, табиғи түрде, жауап бермей-ақ). Бір тепе-теңдестік күйден екіншісіне өтер кезінде s_0 пен Z_0 тепе-теңдестік параметрлерінің мәндері δs_0 мен δZ_0 кіші шамаларына өзгерді, делік (параметр τ өзгермейді деп санамыз). Сонда жүйенің барлық қалған сипаттамалары өзгереді. Екі салыстырушы күйдің тепе-теңдіктігін еске ала отырып, оларды (9.29)-дан табуға болады. Мысалы, (9.29)-дың екінші теңдеуінен, Тейлор қатарына жіктеуді қолдана отырып, аламыз

$$\frac{s_0}{p_0}\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta s}{p_0} - F''(R_0)\delta R.$$

Осыған ұқсас орындау ретін (9.29) жүйесінің қалған теңдеулерімен жүргізе отырып және нәтижелерді бір жерге біріктіріп, аламыз

$$\frac{\delta p}{p_0} = a_1(\delta A + \delta\omega) + a_2(\delta Z - \delta I) + a_3\delta s - a_4\delta Y. \qquad (9.31)$$

(9.31) өрнегіне зерттелуші жүйенің барлық сипаттамалары қатысады ($a_i < 0$, $i = 1,...,4$ коэффициенттері s_0, p_0, Y_0, r_0 шамаларының, R, ω, A, I функцияларының және олардың туындыларының тепе-теңдіктік мәндерімен анықталады). Сондықтан оның көмегімен, бір тепе-теңдік күйден екіншісіне ауысуда өтетін өзгерістердің тұтас кешенін (*жүйелік жақындау деп аталатын*) талдауға болады. Мысалы, жұмысбастылық саны өзгермеген (яғни δR = O, $\delta Y = 0$), еңбекақы ($\delta s = 0$) мен тұтыну өзгермеген ($\delta\omega = 0$) кезде бағаны төмендету ($\delta p < 0$), яғни жұмыс істеушілердің шынайы еңбек ақысын арттыру талап етіледі, делік. Сонда іске ақша салуды азайту ($\delta A < 0$), ақшалардың жалпы көлемін төмендету ($\delta Z < 0$) және оларға алыпсатарлық сұранысты арттыру талап етіледі ($\delta I > 0$). (9.31)-ші арақатынас талдауынан шығатын талаптар, жалпы айтқанда, қарама-қайшы бола алатынын, белгілейміз.

Тұрғызылған модельден шыға алатын кәсіпорындардың осы және басқа жүйелерін Z немесе s параметрінің (немесе қос параметрдің де) сәйкес келетін түрлілендіру жолымен автоматты түрде іске асыру болмайтыны ұғынылады.

Модель (9.29) үнемдік агенттер тәртібіндегі қажет өзгерістерді ғана көрсете алады. Осы өзгерістерді, нарықтық үдеріске қатысушыларды сендіре отырып қабылдауды, шынында қалай қамтамасыз ету жайлы мәселе, қарастырушы модельдің жақтауынан шығып келеді. Оны шешу зерзаттарды қиынырақ қалыптастыратындарды оқып білумен байланысқан. Осыған ұқсас зерзаттарды зерттеу кезінде, қанығу идеясы, микродеңгейден макродеңгейге ауысулар, «сақталу заңдарын» қолдану, тұрақтылық пен тепе-теңдестік жайлы ұйғарымдар және басқалар сияқты табиғи-ғылыми сферадан алып пайдаланылған жақындаулар кеңінен қолданылады.

9.5. Үнемдік өсімнің макромоделі

Өсуші үнемдеуде жұмыс істеушілер саны R(t) тұрақсыз, бірақ уақыт ағымымен өседі. Қарапайымырақ модельде жұмыс істейтіндер өсімінің шапшаңдығы жұмыс істеп жүргендердің санына пропорционалды деп саналады:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha R(t).$$

Сондықтан $R(t) = R_0 e^{\alpha t}$ – бұрынырақ белгілі уақыт функциясы (шама α беріледі, $R_0 = R(0)$ – бастапқы $t = 0$ моментінде жұмыс істейтіндердің саны). Жұмысшылар бөліктікте тұтынуға және бөліктікте жинауға кететін ұлттық табысты Y(t) өндіреді:

$$Y(t) = \omega + A. \qquad (9.32)$$

Өнімнің жиналған бөлігі саптан шығып қалатын өндіріс қуаттарының орнын толтыру үшін үнемдеуге, сондай-ақ жаңа қуаттар жасау үшін оралады. *Қуаттылық* M(t) деп үнемдеумен өнім шығарудың ең үлкен мүмкіндігі түсініледі. Өнімнің шынайы шығарылуы, табиғи түрде, жұмыс істеушілердің санына тәуелді және мына түрдегі өндірістік функциямен беріледі

$$Y(t) = M(t) \cdot f(x(t)). \qquad (9.33)$$

(9.33) формуласындағы шама $x(t) = R(t)/M(t)$ өзінің мағынасы бойынша – қуат бірлігіндегі жұмыс істейтіндердің саны. $f(x)$ функциясына қатысты жасалатын болжамдар келісілер: $f(0) = 0$, $f' > 0$ (жұмыс істейтіндер санымен шығарылу өседі) және $f'' < 0$ (қанығу). Функция $f(x)$, x мәндері үшін $0 \leq x \leq x_M$ кесіндіде анықталған, мұндағы $x_M = R_M/M$, ал $R_M(t)$ – шаруашылықтағы $M(t)$ қуаттылығы кезіндегі жұмыс орындарының саны. Егер барлық орын толып қалған болса, онда шығарылу $Y(t)$ анықтамасы бойынша M(t)-ға тең, яғни $f(x)$ үшін орындалуы керек шарт $f(x_M) = 1$.

Үнемдік өсім теориясының басты мәселелерінің бірі – өндірістік өнімді тұтынушы және жинақтауға бөлудің біршама мағынада оңтайлы тәсілдерін табу. Оңтайландыру критерийін таңдап алуға болады, мысалы, жанбасына тұтыну (бір жұмысшымен тұтылатын өнім мөлшері), яғни $c(t) = \omega(t)/R(t)$ шамасын.

Өсімнің Солоу алтын ережесінің мөлшері. Жұмыс істеушілер санындағыдай шапшаңдықпен уақыт өтуімен қуаттылық артқан кезде қарапайым, бірақ үнемдік өсімнің көрсеткіштік жағдайын талдаймыз. Бұл үшін, мына теңдіктің орындалуы айқын да қажет

$$\gamma - \beta = \alpha. \qquad (9.34)$$

Ол сондай-ақ сондай шапшаңдықпен $Y(t)$ (өйткені $f(x(t)) = f(x = R_0/M_0) = \text{const}$) және $\omega(t)$, $I(t)$ функциялары өсетінін білдіреді.

Жұмысшылардың жанбасына тұтынуы ең үлкен кезіндегі тұтыну мен жинақтау арасындағы жұмысшылар санын және арақатынасты табамыз. Анықтамасы бойынша

$$c(t) = \frac{\omega(t)}{R(t)} = \frac{Y(t) - A(t)}{R(t)}.$$

$Y(t) = M(t)\,f(x)$, $A(t) = a\gamma M(t)$ екенін ескеріп, және (9.33), (9.34)-ті назарға алып, аламыз

$$c(t) = c = \frac{f(x) - f(\alpha + \beta)}{x}, \qquad (9.35)$$

яғни уақыт өтуімен жан басына тұтыну өзгермейді. Оның ең үлкен мәніне, (9.35)-тен көрінетіндей, жетуге болады мына шартта

$$\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x) - a(\alpha + \beta)}{x}\right] = 0,$$

мұның x_m ізделінуші шама үшін беретін теңдеуі

$$x_m f'(x_m) - f(x_m) + a(\alpha + \beta) = 0. \qquad (9.36)$$

Бұл теңдеудің әрқашан бір ғана шешімі $0 < x_m \le x_M$ бар. Барлық жасалған болжамдармен қатар үнемдік өсімнің қарастырылушы режимін іске асыру үшін, $R_0/\ M_0 = x_m$ болатындай етіп, уақыттың бастапқы моментінде, R_0 жұмыс істеушілер саны M_0 қуаттылығымен келісуі қажет, екенін белгілейміз.

Ең үлкен мән c_m-ді, қамтамасыз ететін жинақтау мөлшері

$$n_m = \frac{A_m}{Y_m},$$

$Y_m = M_m f(x_m)$, $A_m = a\gamma M_m$ және (9.34), (9.36) теңдіктерінен табылады:

$$n_m = 1 - x_m \frac{f'(x_m)}{f(x_m)}, \qquad (9.37)$$

және бұл *өсімнің Солоу алтын ережесінің мөлшері* деп аталады.

Егер (9.34) шарты орындалмаса, онда үнемдік өсімнің режімдері күрделірек болады, және олардың сипаттамаларын оңтайлау барлық қарастырылушы уақыттық аралықта жүргізіледі. Еске саламыз, тұрғызылған модель және соған ұқсас модель өндірістік қатынастардағы (олар тұрақты саналады) өзгерістерді ескермейтінін және негізінен технологиялық байланыстармен жәрдем жасайтынын, бөліктікте, үнемдік өсім шапшаңдығына жоғары технологиялық шектеулер береді. Оларды алу кезінде табиғи-ғылыми зерзаттармен ұқсастық кеңінен қолданылады.

ЖАРЫСТАСТЫҚТЫҢ КЕЙБІР МОДЕЛЬДЕРІ

9.6. «Жыртқыш–құрбан» жүйесіндегі өзара қатынастар

Қатаң айтқанда, бұл қатынастар (ұқсас жүйе «масыл–қожа»-дағы қатынастар да) жарыстастық деп аталына алмайды. Құрбанның жыртқышпен «жарыстастығы» құрбандар санының өзгеруімен өрнектеледі, бұл өз кезегімен жыртқыш санына әсер етеді. Шынында, ешқандай ағза (тіптен халық та) оқшауланып өмір сүрмейді, өзін қоршайтынмен әрекеттеседі. Әрекеттестіктің кең тараған түрі – бір тірі ағзалардың (жануарлардың, құстардың, балықтардың, жәндіктердің) басқа ағзаларды қорек ретінде пайдалануы.

Математикалық модель қарапайымырақ, яғни екітүрлілік жүйе «жыртқыш–құрбан» келесі ұйғарымдарға негізделеді:

1) N құрбандар және M жыртқыштар тарылымдарының саны тек қана уақытқа тәуелді (нүктелік модель, шұғылданатын территориясындағы таралымның кеңістіктік таралуын ескермейді);

2) әрекеттестік қатыспағанда түрлер саны Мальтус моделі бойынша өзгереді; мұнда құрбандар саны артады, ал жыртқыштар саны түседі, өйткені бұл жағдайда олардың қоректенуіне ештеңе жоқ:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad \frac{dM}{dt} = -\beta M, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0;$$

3) құрбанның табиғи өлім-жітімі және жыртқыштың табиғи туып көбеюі мардымсыз деп саналады;

4) екі жиынтық сандарының қанығу эффектісі ескерілмейді;

5) құрбан саны өсімінің жылдамдығы жыртқыштар санына, яғни cM, $c > 0$ шамасына пропорционал түрде азаяды, ал жыртқыштар өсімінің шапшаңдығы құрбан санына, яғни dN, $d > 0$ шамасына пропорционал түрде артады.

1)-5) ұйғарымдарын біріктіріп, *Лотки–Вольтерр теңдеуінің* жүйесіне келеміз

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - cM)N, \quad \frac{dM}{dt} = (-\beta + dN)M, \qquad (9.38)$$

бұдан бастапқы сандар бойынша $N(0) = N(t = 0)$, $M(0) = M(t = 0)$ кез келген $t > 0$ моментіндегі таралым саны анықталады.

(9.38) сызықтық емес жүйесін N, M айнымалыларының жазықтығында зерттеу ыңғайлы, бұл үшін бірінші теңдеуді екінші теңдеуге бөлеміз:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(\alpha - cM)N}{(-\beta + dN)M}. \qquad (9.39)$$

(9.38), (9.39) теңдеулері тепе-теңдік қалпына (немесе стационарлық, уақыттан тәуелсіз шешім) ие

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, \qquad N_0 = \frac{\beta}{d}. \qquad (9.40)$$

Екітүрлілік әрекеттестердің дәлірек математикалық сипаттаулары алып жатқан территорияларындағы таралымдар таралуының біркелкі еместігін ескереді (бұларға бөліктік туындылардағы теңдеулер жүйесі сай келеді), ерекшеліктердің тууы мен олардың кемеліне келуінің арасындағы уақыттық кешігу және тағы басқалар. Уақыт бойынша да, кеңістікте де әрекеттестіктің әлдеқайда күрделі картиналары пайда болады.

9.7. Екі ел арасында қарулануды жарыстыру

Ұйғарымдалатыны сол, әр елдегі қарулданудың жалпы саны уақытпен өзгереді үш себепкерлік шарттан тәуелділікте: қарсы жақ қаруының санына, бар қарулардың тозуына және қарсы жақтардың арасындағы сенбестік дәрежесіне. Өсім шапшаңдықтары мен қарулданудың азаюы көрсетілген себепкерлік шарттарға пропорционал, яғни

$$\frac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t), \qquad \frac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t). \qquad (9.41)$$

(9.41) теңдеулеріндегі $M_1(t) \geq 0$, $M_2(t) \geq 0$ – қарулану көлемдері, $\alpha_1(t) > 0$, $\alpha_2(t) > 0$, $\beta_1(t) > 0$, $\beta_2(t) > 0$ коэффициенттері қарулданудың өсіріле беруінің жылдамдығын және «қартаюын» сипаттайды (үнемдеу модельдеріндегі өндірістік қуаттарды бәсеңдету үдерісіне ұқсас), $\gamma_1(t) \geq$ O, $\gamma_2(t) \geq 0$ функциялары бәсекелестердің өзара қырағылығының (сенбестігінің) деңгейін сипаттайды, бұл қарулану санынан тәуелсіз деп саналады да, басқа себептермен анықталады.

Тұрғызылған модельден, тепе-теңдіктің бір қалпынан басқасына өту кезінде, жарыстастардың мүмкін тәртіптерінің біршама сипаттамаларын анықтау қиын емес. Былай болсын, мысалы, бірінші және екінші елдердегі қарулануды өсіре берудің шапшаңдығы үлкен емес $d\alpha$ ($d\alpha = d\alpha_1 = d\alpha_2$) шамасына өзгереді. Мұнда қарулданудың көлемі де өзгереді, және де екі жағы да dM_1^0 мен dM_2^0 өсімшелерінің тең болғанын қалайды және екі жақтың қызығуларына шек қойылмауы тиіс. dM_1^0, dM_2^0 шамалары үшін аламыз

$$dM_1^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 + \alpha_1^2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2} d\alpha,$$

$$dM_2^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2^2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_2}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2} d\alpha.$$

Қарапайымдылық үшін, бәсекелестердің қырағылығы (сенімсіздігі) тең деп ($\gamma_1 = \gamma_2$) болжаймыз. Сонда $dM_1^0 = dM_2^0$ теңдігінен тепе-теңдіктің үлкен емес өзгеруі кезінде, жақтардың бірдейлік шартын аламыз

$$\alpha_1(\alpha_1 + \beta_2 - \beta_1) = \alpha_2(\alpha_2 + \beta_1 - \beta_2),$$

бұл, егер α_1, α_2, β_1, β_2 шамалары белгілі болса, елдер арасындағы сәйкес келетін уағдаластықтардың негізіне қойыла алады. Солай, мысалы, $\alpha_2 = \alpha_1$, $\sigma > 0$ болсын. Бұл жағдайда алдыңғы теңдеуден алатынымыз

$$\alpha_1(1-\sigma) = \beta_1 - \beta_2. \qquad (9.42)$$

$\sigma < 1$ кезінде (қарулану өсімінің шапшаңдығы екінші жақта біріншіден гөрі кіші) бірдейлікті сақтау үшін $\beta_2 < \beta_1$ қажет, яғни екінші жақта ((9.42) формуласымен сәйкестікте) қарулануды бәсеңдетудің шапшаңдығы кіші болуы керек. Қарама-қарсы теңсіздік $\sigma > 1$ кезінде, табиғи түрде бәсеңдету жылдамдықтары арасында кері арақатынас болады.

9.8. Екі армияның жауынгерлік әсерлері

Қарсы тұруға тұрақты армиялар да, сондай-ақ партизандық қосылыстар да қатыса алады. Қарастырушы модельдердегі қарсыластардың басты сипаттамасы болатын жақтар саны $N_1(t) \geq 0$ и $N_2(t) \geq 0$. Егер уақыттың қайсыбір моментінде сандардың бірі нөлге айналса, онда берілген жақ жеңілген болып саналады (оның үстіне, осы сәтте екінші жағының саны оң болады).

Тұрақты бөлімдер арасындағы әсерлер жағдайында олардың санының динамикасы үш себепкерлік шартпен анықталады:

1) жауынгерлік әсерлермен тікелей байланыспаған себептерден (сырқаттар, жарақаттар, қашқындық) құрам азаюы жылдамдығымен;

2) қарсы тұрушы жақтардың жауынгерлік әсерлерімен қалыптасқан жоғалулар шапшаңдығымен (бұлар өз кезегінде оның басшылық ету өнерінің және басқара білу ғылымының сапасымен, жауынгерлердің имандылық рухы мен кәсіптілігінің деңгейімен, каруларымен және тағы басқалармен анықталады);

3) біршама берілген уақыт функциясы болып саналатын қосымша күштер кіруінің жылдамдығымен.

Осы ұсыныстар кезінде $N_1(t)$, $N_2(t)$ үшін теңдеулер жүйесін аламыз

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \quad \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t), \tag{9.43}$$

бұдан берілген α_i, β_i, γ_i = 1, 2 функциялары, бастапқы $N_1(0)$, $N_2(0)$ мәндері кезінде, кез келген уақыт $t > 0$ моментінде бір мәнді шешілім анықталады. (9.43) дағы $\alpha_{1,2}(t) \geq 0$ коэффициенттері әдеттегі (жауынгерлік емес) себептер күшімен жоғалу жылдамдығын, $\beta_{1,2}(t)\geq 0$ – қарсыластың әсерінен жоғалу шапшаңдығын, $\alpha\gamma_{1,2}(t) \geq 0$ – қосымша күштер кіруінің жылдамдығын сипаттайды.

Тұрақты және партизандық бөлімдер арасындағы соғыс басқа модельмен сипатталады. Негізгі айырмашылық мынада, тұрақты емес қосылымдардың армиялықтармен салыстырғанда осалдау жері азырақ, өйткені партизандармен орналасып алатын аудандар бойынша іріктелусіз қимылдауға мәжбүр, көбінесе қарсылас үшін көрінбейтін болып қала беріп жасырын әрекет етеді. Сондықтан, біршама белгілі территорияда түрлі орындарда өздерінің қимылдары жиынтығын өткізетін партизан жоғалтуының шапшаңдығы, $N_1(t)$ армиялық қосылымдардың санына ғана емес, сондай-ақ $N_2(t)$ партизандардың өзінің санына да пропорционалды деп саналады, яғни $\beta_1(t)\ N_1\ N_2$ түріндегі мүшемен анықталады. Нәтижесінде модель сызықтық емес болады:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \quad \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1N_2 + \gamma_2(t), \tag{9.44}$$

(9.44)-дегі барлық шамалар (9.43) дегідей мағынаға ие.

Тұжырымдап айтатынымыз, мұнда қарастырылған жарыстастықтың қарапайымырақ модельдері, көптеген табиғи-ғылымдық зерзаттарды сипаттау кезінде кеңінен таралған, екінші реттегі (жалпы жағдайда өз бетінше еместік және сызықтық еместік) қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне сай келеді. Бұл заңға сыйымды, өйткені тұрғызу кезінде қолданылған жақындаулар (қанығу, шама өсімінің шапшаңдықтары осы шаманың мәніне пропорционал және басқалар) механикада, физикада, химияда қолданылатын жақындауларға ұқсас.

ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУГЕ КІРІСПЕ

9.9. Имитациялық модельдеу.

Имитациялық модельдеу **к**үрделі үнемдік тәртіпті талдауға және соған ұқсас мәселелерді талдауға қолданылады, бұлар үшін математикалық модельді теңдеулер жүйесі түрінде жазудың өзі қиын. Имитациялық модельдеу кезінде басқаруды таңдау жайлы мәселе айқын математикалық қойылымда қалыптасылмайды. Зерттеу мақсаттары әртүрлі бола алады: модель адекваттылығының қаншалықты екенін бағалау, басқарулардың қандайда бір нұсқадағы үдерісінің қалай ағатынын түсіну, оның оңтайлы басқарылуына қатысты ұсыныс қалыптастыру, басқару сапасының критерийлерін қалыптастыруға талпыну және т. б.

Зерттеу имитациондық эксперименттер әдісімен өткізіледі: зерттелуші үдеріс басқарулардың бірнеше нұсқалары кезінде модель көмегімен қайта өндіріледі. Имитациялық модельдеу жағдайлар талдауы мен шешілімдер сапаларын жалған және жалған емес амалдармен үйлестіруге мүмкіндік береді.

Ықтималдықтар теорияларындағы *кездейсоқ шама*, нақтылы ықтималдықтары бар қайсыбір мәндерді жағдайдан тәуелділікте қабылдайтын шама.

Псевдокездейсоқ сандар және псевдокездейсоқ сандар тізбектілігінің сапасын тексеру. Кездейсоқ және псевдокездейсоқ сандар, біршама кездейсоқ сандарды іске асыру ретінде қарастыратын сандар.

Псевдокездейсоқ сандар түсінігінің пайда болуы статикалық сынаулардың әдісі дамуымен байланысқан. Оларды біршама берілген формула (алгоритм) бойынша есептеу жолымен алуға болады, бірақ олардың қасиеттері кездейсоқ сандардың қасиеттеріне жақын болуы керек.

9.10. Кездейсоқ әрекеттестіктер өндірілуінің әдістері – шамалар, тізбектіліктер, үдерістер, ағындар және өрістер

Монте-Карло әдісінің алгоритмі. *Монте-Карло әдісі*, статикалық сынау әдісі, сандық әдіс, математикалық есептерді шешу кездейсоқ үдерістерді және оқиғаларды модельдеу көмегімен жүргізіледі. Термин «Монте-Карло әдісі» аталымы, кездейсоқ оқиғаларды модельдеу жолымен біршама есептеулер статистикалықпен бұрынырақ іске асырылғанымен, 1949 жылы пайда болды. «Монте-Карло әдіс» аталымы, өзінің ойын-сауық үйімен әйгілі Монте-Карло қаласы аталуынан шыққан. Монте-Карло әдісі кең таралымды, тез әсерлесетін есептеулік машиналар пайда болғанынан кейін, алды. Монте-Карло әдісімен жүргізілетін ЭЕМ-дегі есептеулер үшін бағдарламалар жасау салыстырмалы түрде қарапайым, ережедегідей, үлкен жедел жадысыз-ақ өткізілуі мүмкін.

Ішіндегі келесі саны алдыңғысы бойынша есептелетін алгоритмдер кеңірек тараған. Осылайша алынатын псевдокездейсоқ сандардың тізбектілігінде период бар, бұл оларды псевдокездейсоқ сандардың тізбектілігінен едәуір ажыратады. Псевдокездейсоқ сандардың алгоритмдері әлі де жеткіліксіз зерттелген, бірақ статистикалық сынаулар әдісі бойынша есептеулер кезінде псевдокездейсоқ сандарға басымдылық беріледі, өйткені псевдокездейсоқ сандардың тізбектілігінің қасиеттерін сынамалық есептеулер жолымен зерттеуге болады, ал эксперименталдық құрылғылар олардың әрбірін пайдаланған кезде жаңа псевдокездейсоқ сандардың тізбектілігін береді.

9.11. «Имитация», «имитациялық модель» аталымдары мазмұнының бірте-бірте дамуы және олардың қазіргі түсінілуі

Имитация (латын сөзі *imitatio* – еліктеу), біреуге немесе бірдеңеге еліктеу, елестету; ұқсатып істеу. Имитацияға полифондық (*поли...* және грек сөзі *phone* – дыбыс, дауыс; полифония – бірнеше дауыстың бірігіп көп дыбысты болып үндесуі) пішімдер қағида (канон), музыкалық шығарма түрі (фуга) негізделеді.

Имитация – бұл әсерін дәстүрлі құралдармен қарап жүруге мүмкін болмайтын байланыстардың үлкен санын зерттеуге мүмкіндік беретін жүйелік талдаудың негізгі сайманы, сондай-ақ себепкерлік шарттар қатарының ішкі өзара тәуелділіктерін де ашқызады.

Имитация – бұл қайта құралымдауға жол: байланыстар қисыны жетпей тұрған буындарды толтыруға мүмкіндік береді. Соңғы есепте имитация өзіне талдаудың дәстүрлі әдістерін, статистика әдістерін және ақпаратпен жұмыстың кез келген басқа мүмкін тәсілдерін кірістіреді. Бұл бәрін тұтас жүйеге үйлестірудің құралы. Мұнда толық пішімдеуге ұмтылу міндетті емес. Бұған қоса имитация – зерттеуші-тарихшының ЭЕМ мүмкіндігімен ескішілікке негізделген жәрдемдерді жүргізуге шығармашылық бастауын біріктіретін жалғыз жол.

Имитациялық модельдерді қолдану кезінде кірулік әсерлесулер мен зерттеу нәтижелері сәйкес келетін фазалық айнымалылардың уақыттан тәуелділіктерімен көрсетіледі. Алайда жағдайлар қатарында соншалықты егжей-тегжейлі ақпарат талап етілмейді – зерзат сипатталуының интегралдық бағаларын білу жеткілікті. Мұндай интегралдық бағалар болатын фазалық айнымалылардың уақыттан тәуелділігіндегі функционалдар.

ИЕРАРХИЯДАҒЫ БИЛІК ТАРАЛУЫНЫҢ ДИНАМИКАСЫ

9.12. «Мемлекеттік билік – азаматтық қоғам» жүйесінің жалпы моделі

Мәселенің жалпы қойылымы және терминологиясы. Билік құрылымын оқып білу – қоғам туралы ғылымдардағы, бәрінен бұрын политологиядағы негізгі мәселенің бірі. «Билік» түсінігі құпиялы, көп мәнді, қалыптасылуға және сандық өлшеуге әрең көнеді. Сондықтан да, политологияның математикалық модельдері табиғи түрде негізінен сипаттаулық, таңқарарлық сипатты тасиды және мониторинг мәселелерінің тар шеңберіне қатысты қолданылады: электоралдық күтулерді (тосуларды) және таңдаулар нәтижелерін статистикалық өңдеу, түрлі саяси күштерді анықтау, құрылғандар негізінде болашақ парламенттік дауыс берулерге болжаулар және тағы басқалар.

Жалпы политологияның математикалық модельдерін тұрғызуды жете түсініп, ресми түрдегі, яғни оңай қалыптасылатын негіздерге билікке ие нақ мемлекеттік иерархияны оқып білуден бастайды. Міне осыдан мемлекеттік биліктің бұқаралық ақпарат құралдары (БАҚ) билігінен, парасаттылық пен құлықтылық беделдер және басқа да биліктерден маңызды айырмашылығы тұрады.

Иерархиямен немесе *иерархиялық құрылыммен*, мемлекет атынан (яғни Конституция, заңдар, жарғылар, қаулылар, ережелер, нұсқаулар және соған ұқсастар бойынша) биліктік өкілдіктермен жасалынған институттардың (төменгі-жоғарғы сатылар, лауазымдар, қызметтік орындар, шендер және соған ұқсастар) үлкендік бойынша реттелген жиынтығы түсініледі.

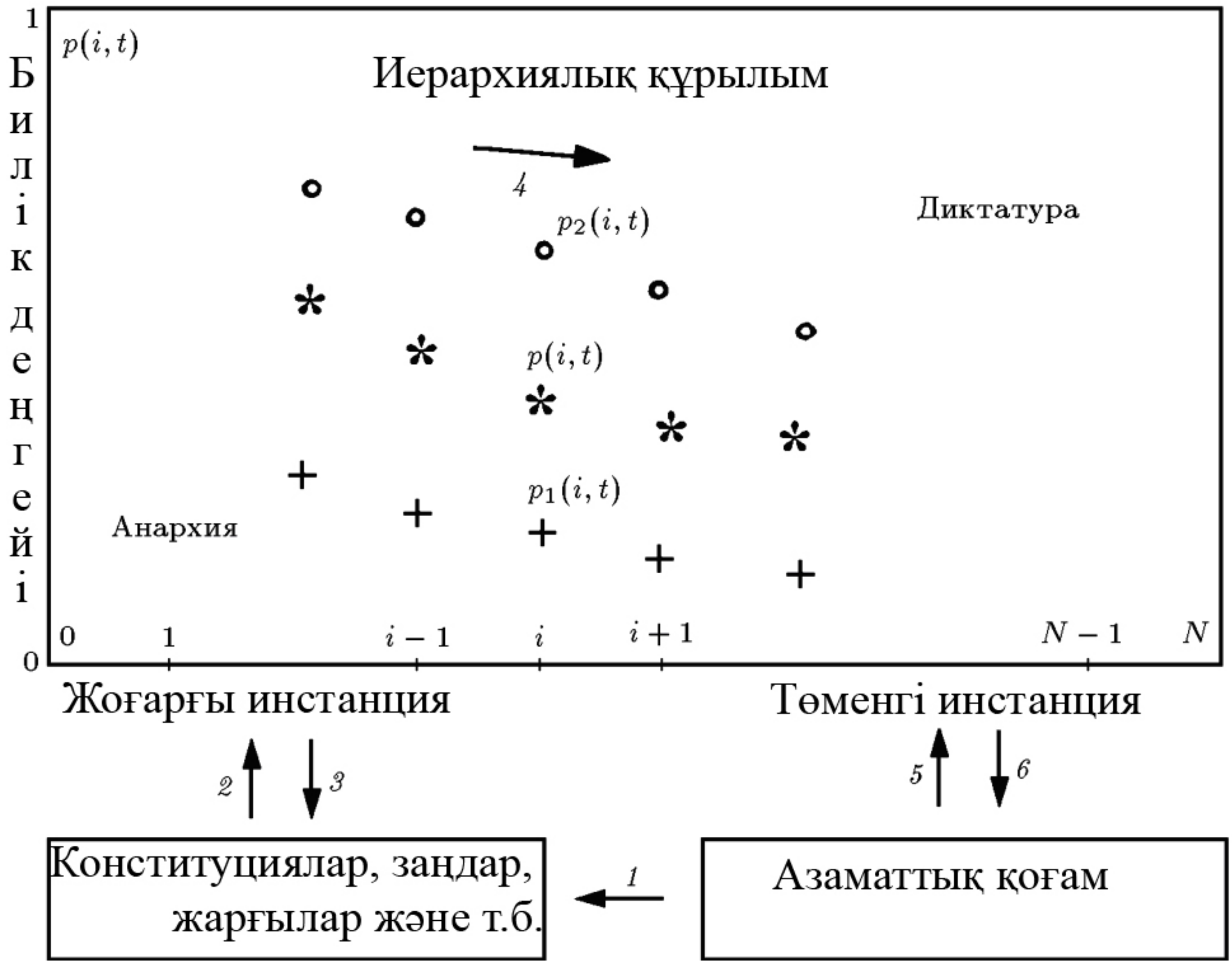
Орны болатындар жалпымемлекеттік кеңселер ғана емес, мысалы, одақтық министрліктер, сондай-ақ ресми түрде сәйкес келетін билікке ие аймақ аралық, аймақтық және жергілікті мүшелер. «Иерархиялық» сөзі, құрылымның ішінде бағынушылық тәртіптерінің алдын ала және айқын анықталатынына, көңіл аударады. Оның әрбір буыны (ең жоғарғыдан басқа) үлкен «бұйрық беретін» сатыларға және (төменгі буынды ескермегенде) берілген сатыдан бастайтын да, сондай-ақ басқа үлкен буындардан да бастайтын, «бұйрықтарды» орындайтын кіші сатыларға ие. Әрине, бұйрықтар тек үлкеннен кішіге жүреді.

Азаматтық қоғам – мемлекеттік билікке тікелей ие емес, қоғам бөлігі. Оған жататындар азаматтар (мұның санында өзінің қызметтік міндеттерінен тыс шеңберлерде әсер ететін мемлекеттік лауазымдылар бар) және әртүрлі олардың бірлестіктері (саяси, мәдени, кәсіптік), отбасылар және жеке кәсіпорындар және тағы басқалар.

Қоғам реакциясы – қайсыбір билік институтының (сайлаулар, референдумдар, плебисциттер, БАҚ арқылы, қоғамдық пікірлер мен сұрақтар, жиындар, ереуілдер тағы басқалар көмегімен) әсеріне азаматтық қоғамның (оң, теріс немесе парықсыз) жауабы.

Модельге сондай-ақ «иерархия реакциясы» түсінігі, мұның мағынасы, «билік таралуы» аталымының мағынасындай және басқа аталымдық дәлдеулер енгізіледі, бұлар төменде түсіндіріледі.

Иерархиялық құрылым N + 1 сатысынан тұрады (9.9-сурет), бұлардың әрқайсысына нөмір i қосымша жазылған ($0 \leq i \leq N$). Жоғарғы сатының нөмірі 0, төменгінікінің – нөмірі N. Бағытталған сызық *4* «жоғарыдан төменге» (немесе «солдан оңға») құрылымындағы бағыну бағытын, яғни иерархиялық баспалдақ бойынша берілетін билік жарлықтарының (бұйрықтарының) қозғалу бағытын белгілейді.



9.9-сурет

Алайда биліктік құрылымдардың іргелі қасиеттеріне математикалық модель тұрғызу және талдау жасау үшін, осы мәселе қағидалы түрде шешілетін болса, сол жеткілікті, дегенмен біршама сандық критерийлерге негізделінеді. Осы мәселе айқындалуы үшін *билік* сөзінің түрлі түсінілуін дәлдеу қажет.

Ол *билік мүшелері* (Жоғарғы Сот, қалалық кеңес, жергілікті полиция бөлімі және соған ұқсастар) мағынасында жиі қолданылады. Бұл түсінікті тең құндылықта ауыстыруға қызмет ететін аталымдар «сатылар-инстанциялар», «иерархиялық құрылым», «иерархия».

Осы сөздің басқа маңызды мәні *биліктік өкілдіктер* аталымымен сипатталады. Кез келген инстанцияның биліктік өкілдіктері, жалпы айтқанда, өзіне құрылымдағы инстанцияның нақтылы (жалған) қалпын кірістіретін, сандық критерийдің, оның жарлығында болатын көлемнің, қорлардың адамдық, қаржылық, материалдық, ақпараттық, парасаттық, заң шығарғыштық, басқарушылық және басқа да түрлері, территорияның ауқымы мен орналасқан жері, қоғамдық пікір мен сараптау көздеріндегі мәртебесі және тағы басқалардың біршама жиынтығы көмегімен анықталына алады деп саналады. Көрсетілген түсініктегі «билік» сөзі осы биліктік институттың басқа инстанцияларға және азаматтық қоғам өміріне ықпалының мүмкін деңгейін (дәрежесін, күшін) білдіреді. Үлкен биліктік өкілдіктерге ие инстанцияларға, табиғи түрде, иерархиядағы кіші өкілдіктерге ие инстанциямен салыстырғанда жоғарырақ (нөмірі кішірек) орын бөлініп беріледі.

«Биліктік өкілдік» аталымын әрі қарай дәл анықтау *ең үлкен өкілдік* және *ең кіші өкілдік* түсініктерімен байланысқан. Біріншісі билік мүшесі біршама жағдайдағы заң шығарушылықпен сәйкестікте, барынша мол түрде орындай алатын әсерлерді сипаттайды. Мысалы, губернатор немесе әкім, белгілі жағдайлар кезінде, өзімен бақыланатын территорияларда төтенше жағдайды хабарлауға құқығы болғанымен, бірақ соғыс пен бейбітшілік мәселелерін шешетін ешқандай заң күшін иелене алмайды. Ең кіші өкілдіктер билік әсерлерін әрқашан орындауға міндетті (Президент Конгресске жыл сайын бюджеттік жолдауды ұсынуға міндетті). Осы қос түсінік жақсы көрнекіленеді, мысалы, қылмыс жазалануының ең үлкен және ең аз мерзімдерінің сол бір түрін анықтайтын қылмысты істер заңының салаларымен (статьяларымен).

Билік шекаралары көптеген мемлекеттердің тәжірибелерінен белгілі ретінде, заң шығарушылықпен ғана емес, сондай-ақ кейінгі істерге үлгі боларлықтай өнегелердің дәстүрімен және жүйесімен анықталатынын белгілейміз. Алайда ықшамдық үшін барлық жерде әрі қарай сөз заңды түрде қалыптасқан өкілдіктер жайлы жүретін болады.

Математикалық модельде ең үлкен өкілдіктер біршама оң функциямен $p_2(i, t)$, $0 \le i \le N$ (9.9-суреттегі дөңгелекшелер)-мен, i нөмірі өсуімен азаюымен беріледі, яғни кез келген уақыт t моментінде дұрыс $p_2(i+1, t) < p_2(i, t) < p_2(i-1, t)$, $1 \le i \le N-1$. Ең кіші өкілдіктер оң функциямен $p_1(i, t)$, $0 \le i \le N$ (17.1-суреттегі айқыштар-крестиктер), сондай-ақ i өсуімен, яғни $p_1(i+1, t) < p_1(i, t) < p_1(i-1, t)$, $1 \le i \le N-1$ ($p_1(i, t) < p_2(i, t)$, $0 \le i \le N$-мен ұғынылады) бірқалыпты төмендеумен беріледі. Қос функция, жалпы айтқанда, t уақытына тәуелді, өйткені уақыт өтуімен заң шығарушылық, территориялық бөлу және соған ұқсастар өзгеруі мүмкін.

Тағы да айтарымыз: осылайша (агрегирленген жалпыланған үлгіде) қарастырылушы иерархиялық құрылым үшін кез келген инстанцияның қалпы оның нақтылы орнымен ғана емес, сондай-ақ іске қатысатын (және көбінесе салмақтырақ) себепкерлік шарттарымен анықталады. Сонымен, билік ағашының біршама «орташа төрешілдігіне» жауап беретін инстанция нөмірі жалған координата емес, «маңыз-мән бойынша» координата. Жоғарыда келтірілген биліктік өкілдік жайлы және «бағынушылық» ретінде инстанцияларды орналастыру тәсілі жайлы ойлауға егжей-тегжейлі және қатаң математиалық түр (микросипаттау) беру қиын емес, алайда «билік–қоғам» жүйесінің қағидалық қасиеттерін оқып білу үшін ол шешуші мәнге ие емес.

Соңында, модельде қолданылатын «билік» сөзінің тағы бір түсінігі берілген мезеттегі берілген инстанцияның *биліктік ықпалының деңгейімен* (немесе *билік шамасымен*) байланысқан. Шынында, биліктік өкілдіктер билік деңгейінің тек жоғарғы және төменгі заңды шекараларын және шамасын ғана анықтайды (осы мағынада белгілі «билік өкілдіктерінің көлемі» өрнегін түсінуге болады). Бұл шекаралар, жалпы айтқанда, әрқашан және барлық жерде қол жеткізе бермейді. Мысалы, үштен бес жылға дейін еркіндіктен айыруды қарастыратын қылмысты істер заңының біршама статьясы бойынша, соттар біршама уақытта орташа мерзім төрт жылда жеткілікті келісім шығарсын делік. Сонда олармен іске асырылған берілген статья (бап) бойынша олардың ең үлкендігінен 80% және ең кішілігінен 133% өкілдіктерді құрайды.

Билікке нақты жетудің математикалық моделінде r «кеңістіктік» координатқа және t уақытқа тәуелді теріс функция p (i, t), $0 \le i \le N$ жауап береді (13.1-суреттегі жұлдызшалар). Егер i, t-ның қандай да бір мәндеріне p $(i, t) > p_2 (i, t)$ (немесе p $(i, t) < p_1 (i, t)$) орындалса, онда өкілдіктер шеңберлерінен «шығуы» жайлы немесе биліктің биліктің шектен шығуы (төмендеуі) жайлы сөз ету табиғи нәрсе.

$p_1 (i, t)$, $p_2 (i, t)$ функциялары мен p (i, t) функциясы арасындағы айырымның құрылымы мынада, белгілі, берілген (мейлі ол ең жалпы түрде делік) биліктік өкілдіктерден $p_1 (i, t)$, $p_2 (i, t)$ ерекшелене отырып, функция p (i, t) – белгісіз, ізделінуші шама, иерархиялық құрылымда ағынды билік таралуын сипаттайды. Дәл p (i, t) функциясы (билік таралуы) үшін сәйкес келетін математикалық модельді тұрғызу және кеңістікті-уақыттық динамиканы оқып білу, зерттелетін жүйеге қатысатын барлық себепкерлік шарттардан тәуелділікте, төменде жүргізіледі.

Белгілейтініміз, *биліктің шынайы таралуы* түсінігінің білдіретіні модельге енгізілетін, болжау 1:

«билік–қоғам» жүйесіндегі барлық серіктестер заңға бой ұсынады: заңдар сақталынады, салықтар төленеді, бұйрықтар орындалады (қарсы жағдайда функция p (i, t) – билік шамасы – мүлдем анықталмайды немесе бар мағынасын жоғалтады).

Мұндай жақындау «қарапайымнан күрделіге», яғни күшті дәріптелген жағдай үшін модель тұрғызу және оны әрі қарай жетілдіру, күрделі зерзаттарды математикалық модельдеу кезінде типтік (көбінесе және жалғыз мүмкін) болады.

«Билік – қоғам» жүйесіндегі әрекеттестіктерді жалпы сипаттауды келтіреміз. Ол мынадан тұрады:

а) азаматтық қоғам тікелей немесе өкілдері арқылы Конституцияны қабылдайды (толықтырады, өзгертеді) (бағытталған сызық 1, 17.1-суретте). Ол, сонымен, иерархиялық құрылым үшін, бар заң шығармашылықтты ескеріп, осы құрылыммен әрекеттесе отырып, билік көзі (тапсырыс беруші, қожайын) ретінде көрінеді;

б) иерархиялық құрылым өзімен өзі емес, Конститутциямен және азаматтық қоғаммен әрекеттесуші «ашық» жүйе ретінде өмір сүреді. Конститутция (кең түсінікте, заңдарды, жарғыларды және т. б. қіріктіре отырып) иерархия үшін өзіне тән әуітпен (әуіт – резервуар) қызмет етеді, бұдан оның буындары қажеттілік өлшемі бойынша биліктің қосымша «тиісті бөліктерін» жинап алады (бағытталған сызық 2), не оның артықтық «үлестерін» қайтара (бағытталған сызық 3) алады.

Сонымен, иерархия мен Конституция арасында «билік айырбастау» сияқты және, айқын түрде емес, иерархия мен азаматтық қоғам – Конституция құрушы арасында билік «еркіндік» айырбас сияқты іске асырылады;

в) иерархиялық құрылымның өзінің ішінде, биліктік бұйрықтар берілісінің иерархияда қабылданылған механизмдерімен сәйкестікте, Конститутцияны құрайтын инстанциялар арасында (бағытталған сызық 4) ағынды биліктің қайта таралуы жүреді;

г) азаматтық қоғамға қатысы бойынша биліктік құрылымдар тыйым салатын (бағытталған сызық 5) немесе рұқсат беретін (бағытталған сызық 6) институттар ретінде көрінеді, бұлар қайсыбір қаталдауды немесе босаңсуды енгізеді және жояды (типтік мысал – армияға жыл сайынғы шақыру және халықтың бір бөлігі қосымша міндеттілікті таси бастағанда, ал басқа жағы одан босағанда әскерден қайту кезі).

«Иерархия–қоғам» жүйесіндегі әрекеттестікті сипаттау үшін бұлақты сұрақтардың бірі – иерархиялық құрылым мен Конститутция (және, жанама түрде, қорытындыда иерархия мен қоғам арасында) арасындағы билік көлемінің «шамасын» анықтау. Келесі 2 болжау енгізіледі:

иерархиялық құрылым мен Конституция арасындағы билік ауысуының белгісі және шамасы жүйе реакциясымен анықталады.

Жүйе реакциясымен қос серіктестің (иерархия мен қоғам) құрылым ішіндегі ағымдық билік таралымына р (i, t) қосындылық реакциясы түсініледі. Мысалы, қоғам реакциясына қолданыста, егер берілген уақыт моментінде, ол иерархияның берілген буынының қайсыбір әсерлерін (кедергілерін) жақтамайтынын өрнектесе, онда бұл оның билігі іске асуын азайтатын инстанцияны оятады, оның біршама қорлары «мөлшерін» конституциондық әуітке салып қойғандай болады (және қоғамдық көзқарас тұрғысынан сәйкес келетін теріс зардаптарды азайту немесе мүлдем олардан аман болу). Ыңғайлы мысал – салықтардың қайсыбір түрлерін жұмсарту. Ал оң қоғам реакциясы (яғни оны қолдау) заң шығарушылықтан қажет «қорларды» алып (мысал – қылмыскерлікпен күресуді күшейтуге талаптар), онымен іске асатын билік деңгейін арттыратын инстанцияны оятады. Қоғам реакциясының сапалық сипаты ондағы басым түсетін сана түрімен (құқықтық, анархиялық, өктемдік, араласқан) байланысады.

Қарастырылушы модельде қоғам реакциясы біршама берілетін функциямен $F_S(i, t, p, p_1, p_2)$ сипатталады, бұл рекция, жалпы айтқанда, барлық бұрынырақ кіргізілген шамаларға: г инстанция нөміріне; t уақытқа; инстанция p (i, t)-мен іске асырылатын билік деңгейіне; p_1 (i, t), p_2 (i, t) билік өкілдіктеріне тәуелді. Бұл қоғамның иерархияға уақыт өтуімен ауысатын құрылымдық қатынасын жеткілікті толық және дәл бейнелеуге мүмкіндік берді. Мысалы, егер өз аргументеріміздің барлық мүмкін мәндеріне, яғни кез келген жағдайда $F_S < 0$ ($F_S > 0$)-ге ие болсақ, онда қоғамда, анархиялық (барлығын қамтитын) сана басым болатыны, айқын көрінеді. Қоғам реакциясы толығымен байқалатын және өлшенетін шамамен ұсынылады, және біршама мағынада азаматтық қоғамның оның негізгі барлық элементтері бойынша оның негізгі тәртіптік сипаттамасы қызметін атқарады. Және де реакция дер кезінде өрнектелген, инстанциямен дұрыс мағынасы ашылған және өзінің қызметінде ескерілген болып түсініледі.

Ұқсас түрде модельге биліктік құрылымның тәртіптік сипаттамаларының бірі – *иерархия реакциясы* енгізіледі. Бұл түсінік иерархия буындарының, уақыттың осы мезгілінде олармен іске асырылатын билік деңгейін арттыруға немесе азайтуға ұмтылуын сипаттайды. Оған, F_S-тегідей аргументтерге тәуелді, солардағыдай мағынаға ие берілетін функция F_H (i, t, p, p_1, p_2) жауап береді, бірақ иерархияға қолданылатын түрде (оны инстанцияның «билікті сүю» дәрежесі деп атауға болады).

Келтірілген «билік–қоғам» жүйесін жалпы сипаттау, әртүрлі тіке немесе кері байланыстары бар тұйықталған өздіккелісуші және өздікұйымдасушы зерзат ретінде болуды көз алдына елестетеді. Кез келген уақыт сәтінде иерархияның инстанциясымен іске асатын билік деңгейі, мүлде ерікті емес, зерзаттың барлық құрауыштарының жүйелік әрекеттестігінің нәтижесі болады: иерархиялық баспалдақпен жүретін биліктік жарғылардың, қоғам реакциясының, әсер етуші заң шығарушылықтың, жүйенің бастапқы күйінің және тағы басқалардың. Осы жалпы сызбанұсқа негізінде математикалық модельді алу үшін меншікті түрде биліктік құрылымды егжей-тегжейлі қарастырамыз.

9.13. Иерархиялық құрылым ішінде билік қайта таралуының механизмі

Иерархия ішінде кез келген инстанция үлкендерден келетін қандайда бір биліктік бұйрықтарды орындауға қабылдайды, өз кезегімен, қайсыбір бұйрықтарды кіші буындарға жеткізеді. Және де иерархия баспалдақтары арасында биліктің біршама қайта таралуы өтеді (сөз биліктік өкілдіктер жайлы емес, шынайы іске асатын биліктің ағынды деңгейі – р (i, t) шамасы жайлы екенін еске саламыз). Негізгі тәртіптік постулат енгізіледі:

иерархияда билік тек үлкен ағынды билігі бар инстанциялардан кіші ағынды билігі бар инстанцияларға ғана беріле алады (және де берілу жылдамдығы, инстанциялардағы ағынды биліктердің мәндері арасындағы айырым үлкен болған сайын, үлкейеді).

Иерархия ішіндегі биліктің қайта таралуына жауапты екі негізгі механизмді қарастырамыз.

а) *Жақынға әсер*. Шартты түрде айтқанда, бұл механизмді, бастық жақынырақтағы бағыныштыларына биліктік бұйрықты берген кезде, команда бойынша билік берілісі деп атауға болады, бұлар тек өздерінің бағығыныштыларымен ғана осылай әрекеттеседі. Берілген механизм жақсы белгілі кеңсешілдік орындалу ретіне сәйкес келеді («кеңсешілдік» сөзі және барлық басқа түсініктер қандайда бір көңіл ауанының реңдерісіз – жұмысшы аталым ретінде қолданылады).

i-ші инстанция (i+1)-ші инстанцияға бір бұйрық берсін делік (мысалы, бір мекемеге қарасты қаржылық қызмет жайлы жоба дайындау тапсырылсын).

Әрекеттестіктің мұндай элементарлық актісінде иерархия бойынша көршілер арасында не өтті? Бағынушы бұйрықпен бірге, ол орын алған билік деңгейіне қосымша, біршама (үлкен емес делік және уақытша делік) биліктің тиісті бөлігін алды (мысалы, бұйрықты алсадағы, ол қаржылық құжаттарды бұрынырақ үлкен дәрежеде оқып біледі). Екінші жағынан, i-ші инстанция, жұмыстың берілген теліміне бақылауды (i+1)-ші буынға ауыстырып, өзінің ағынды билігінің бірашама бөлігін жоғалтқан.

Берілетін бұйрықтардың жиынтығы, i -шіден (i+1)-ші инстанцияға жүретін, билік ағынының өзінше тегін қалыптастырады. $W(i, t)$ билік ағынын, i-ші дәрежеден уақыт бірлігінде (i+1)-ші дәрежеде алынған, билік мөлшері ретінде анықтаймыз.

Постулатпен сай шама $W(i, t)$ $p(i, t) > p(i+1, t)$ кезінде оң, $p(i, t) < p(i+1, t)$ кезінде теріс және $p(i, t) = p(i+1, t)$ кезінде нөлге тең. $W(i, t)$ үшін өте жалпы өрнек қарастырылады:

$$W(i, t) = -\gamma p(i, t) - p(i+1, t), p(i, t), p(i+1, t), i, i+1, t] \times [p(i+1, t) - p(i, t)], \quad (9.45)$$

мұндағы γ функция, өзі тәуелді аргументтердің барлық мәндері кезінде оң болады.

б) *Алысқа әсер*. Бұл механизмнің үлгілік сипаттауы белгілі «бастан асыра команда» өрнегімен беріле алады. Бұл, i-ші инстанцияның, жақынырақ бағынушыларға тоқтамай, алыс нөмірлі буындарға биліктік бұйрықтарды беретінін білдіреді. Осындай тектегі әсерлерге жатқызуға болатындар, мысалы, қарулы күштер киімінің жазғы түріне ауыстырылуы жайлы бұйрығын, іске асыруға команда бойынша берілістің орындалу реті талап етілмейді, бірден барлық әскери қызметкерлерге мәлімдеу (және орындау) үшін сәйкес келетін бұйрықты жариялау жеткілікті.

Алысқа әсер механизмімен түзілетін, (i+1)-ші инстанциямен j-ші буыннан алынатын (немесе төменге берілетін), билік ағыны жеткілікті жалпы формуламен өрнектеле алады

$$V(i + 1, j, t) = \chi(p(i + 1, t), p(j, t), i + 1, j, t) \cdot [p(j, t) - p(i + 1, t)], \quad (9.46)$$

мұндағы функция $\chi \geq O$ постулатпен келісімде болады. Өзінің мағынасы бойынша тәртіптік сипаттама χ жақынырақ γ функцияға, бірақ, біріншіден, онымен көрші емес, бір-бірінен алыстағы инстанциялар әрекеттестігі сипатталады, яғни $j \neq i + 2$, i; екіншіден, шама χ нөлге айналады, яғни иерархияның қайсыбір баспалдақтары арасындағы бастан асыра өтетін командалар қатыспауы мүмкіндігі қарастырылған.

Өзінің бағыныштысынан билік бөлігін шақырып алу (мысалы, біршама істі кері шақыру), бастық ерте ме, кеш пе бәрібір іс «төмен түседі», бәлкім іс әлдебір бұйрық түрінде, басқа да жолмен орындалады. Немесе кез келген иерархияда ешбір инстанция, өзіне бағыныштының ең аз бөлігімен орындалатын қажеттікпен (созылмалығы жеткілікті иерархиялық құрылым орын алады), істің елеулі үлесін тіке орындауды өзіне алуға қабілетсіз. Екінші жағынан, қорытындысында іс, бұйрық, солармен бірге билік бөлігі жасалуы тиіс, болмаса кішіліктегіге беріледі. Сонымен, енгізілген постулат табиғи не болмағанда «орташа» негізделген.

9.14. Билік теңгерімі, құқықтық өріс. Құқықтық өріс шекарасынан шығу

Негізгі модельдік түсініктер енгізілген, өзара байланыс пен ұсыныстар сипатталған кезде, модель тұрғызуға соңғы қадам жасап мына сұраққа жауап беруге болады: иерархиядағы билік таралуын, яғни р(i, t) функциясын қалай табуға болады? Кез келген t уақыт моментіндегі биліктік құрылымның i-ші буыны үшін, ол, мұның қорытылуына өз тегімен шоғырланған билік сақталуы заңы қолданылатын, теңдеуге бағынады:

инстанция билігі шамасының өзгеруі (азаюы және артуы) жылдамдығы билік ағынымен және жүйе реакциясымен анықталады.

t мен $t + \Delta t$ моменттері арасында Δt уақыт аралығында i-ші инстанция қанша билік мөлшерін алатынын (жоғалтатынын) санаймыз. Бұл мөлшер қалыптасады:

а) (9.45) механизмі бойынша (i–1)-ші дәрежесінен алынатын билік ағынымен, яғни мына шамамен

$$\Delta p_{-} = W(i-1,t)\Delta t;$$

б) соған ұқсас механизм бойынша (i+1)-ші буында берілетін ағынмен,

$$\Delta p_{+} = W(i-1,t)\Delta t;$$

в) (17.2) механизмі бойынша қашықтатылған инстанциялардан ($j \neq i + 1$, $i - 1$), алынатын және берілетін ағындар қосындысымен $\Delta p_{\Sigma} = \sum_{j=0}^{N} V(i,j,t)\Delta t$;

г) Болжау 2 бойынша азаматтық қоғам реакциясымен анықталатын, инстанциялар мен заң шығарушылық арасындағы билік алмасуы жылдамдығымен,

$$\Delta pF = F(i,t,p(i/t),p_1(i/t),p_2(i,t))\Delta t.$$

Δ_{p-}, Δ_{p+}, $\Delta_{p\Sigma}$, Δ_{pF} шамаларын қосылдыра отырып, қосынды өзгерісті аламыз

$$\Delta p = p(i,t+\Delta t) - p(i,t) = \left[W(i-1,t) - W(i,t) + \sum V(i,j,t) + F(i,t,...)\right]\Delta t. \qquad (9.47)$$

Теңгерім (9.47) теңдеуін қорыту кезінде Δt уақыт аралығы, әдеттегідей, W, V, F шамалары тұрақты деп санауға болатындай етіліп, жеткілікті аз деп, жорамалданады.

«Билік–қоғам» жүйесі құқықтық деп аталады, егер қоғам реакциясы иерархияның кез келген инстанциясының әсеріне билік таралуын, оған алдын ала жазылған өкілдіктер шеңберінде, ұстап тұруға бағытталған болса. Ең үлкен және ең кіші өкілдіктер, осы түсінікті қабылдаған мағынада, құқыққа сай деп түсініледі (реакцияның ұқсас типі құқықтық қоғамдық санаға жауап береді).

x функциясы бойынша біркелкі азаюды беретін, өте танымал бір ғана (теріс емес) шешім бар

$$p(x) = \frac{a^{1/2}b}{e^{-1/2} - e^{-a^{-1/2}}}\left[\left(1 - e^{-a^{-1/2}}\right)e^{xa^{-1/2}} + \left(1 - e^{a^{-1/2}}\right)e^{-xa^{-1/2}}\right] + (1 - bx). \qquad (9.48)$$

(9.48) шешімінің сапалы тәртібі a параметрмен (параметр $b \approx 1$, сонан да

$1 - b << 1$, өйткені өкілдіктердің елеулі құламасы бар жеткілікті созылмалы иерархиялық құрылымдар қарастырылады) анықталады. Шешімдер, бір мән b = 0,9 үшін және үш мән $a = 10^{-3}$, 10^{-2}, 10^{-1} үшін. a өсуімен шешім жазығырақ болады, және біршама $a > a_{кр}$ кезінде шешім бөлікteліп $p > p_2$ аймағында жатады. (9.48)-ді талдай отырып, келесі алдын ала қорытындыларды жасауға болады:

1) биліктің стационарлық таралуы құқықтық жүйеде бар;

2) билік таралуының өкілдіктер жақтауынан шығып кететін жүйе параметрлерінің аймағы бар (берілген жағдайда кіші баспалдақтар бөлігі үшін билік арттырылған). Құқықтық аймақта билік табудың қажет және жеткілікті шартын жазу қиын емес:

$$a^{1/2}b\left(e^{a^{-1/2}}-1\right)/\left(e^{a^{-1/2}}+1\right)\le(1-b)(1+\alpha). \qquad (9.49)$$

a шамасы өсуімен (9.49) критерийі барынша күштірек бұзылады, және де егер $a \to \infty$ болса, онда $p(x) \to 1 - b/2$. Ең үлкен арттыру ($x = 1$ нүктесінде жетілетін) тең $p(1) - p_2(1) = 1 - b/2 - (1 + \alpha)(1 - b)$, ал $b \approx 1$ кезінде болады $p(1) - p_2(1) \approx 0{,}5$, яғни арттыру ең үлкен өкілдіктердің 50%-ын құрайды;

3) биліктің идеалдық таралуы іске асырылмайды, шешімнің әрқашанда «қоспасы» болады мына шамаға $p^0(x) = 1 - bx$, бұл шама – (9.48)-дің оң жақ бөлігінің екінші мүшесі.

Келесі екі қорытынды әділетті түрде болады:

– құқықтық жүйе үшін әрқашан иерархиялық құрылымда биліктің жалғыз стационарлық таралуы бар, және де билік шамасы бірқалыпты үлкендіктен кішілік инстанцияларға түседі;

– құқықтық жүйенің өзінде де әрқашан параметрлер аймағы болады, бұларды іске асыруда билік таралуы құқықтық өріс шекарасынан шығады.

Соншалықты жалпы болатын және биліктің идеалдық таралуының, яғни қоғам реакциясы әрқашан және барлық жерде нөлдік болатындай, іске асырылуы мүмкін еместігі жайлы және алдыңғылардың ішіндігі 3)-ші қорытынды.

Дискреттік модельдерді алуға иерархиялық жақындауды қолдану. Осы жақындаудың негізгі идеясы – зерттелуші зерзаттың иерархия ішіндегі модель үзіктелуіне жататын орын жайлы білімді қолдану. Егер иерархия «жоғарыдан төмен» қағидасы бойынша тұрғызылса, онда, жалпы модельдің бөліктік немесе толық үзіктелуін жүргізе отырып, содан соң төменірек деңгейдегі дискреттік модельге өтеді. Табиғи түрде, бастапқы модельдер үшін қабылданылған ауысу тәсілі қолданылады. Осыған ұқсас орындау реті нәтижесінде тұрғызылған дискреттік модельге жоғарырақ деңгейдегі модельдің қосымша сипаттары енгізіледі, және бұл бастапқы зерзатқа аппроксимирлеуші модельдің парапарлығын арттырады.

Бұл талдауларды, тұтқырсыз жылуөткізбейтін газдың бірөлшемдік ағынын (бірөлшемдік жүйе дивергенттік түрде жазылған) сипаттайтын теңдеуді қарастырып, айқындаймыз

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(pV)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(\rho V)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2+p)=0,\quad \frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[V(E+p)]=0. \qquad (9.50)$$

Мұндағы $E = \rho(V^2/2 + 3RT/2)$ – газ көлемі бірлігінің кинетикалық пен ішкі энергияларының қосындысы, яғни оның толық энергиясы, T=p/(ρR) – температура, R = k/m – газ тұрақтысы, k – Больцман тұрақтысы, m – газ атомының немесе молекуласының массасы.

(9.50) теңдеулері, Больцман кинетикалық теңдеуін, $f(x, \upsilon, t)$ таралу функциясының шоғырланған максвеллділігі жағдайы кезінде, «орташалау» нәтижесінде алынған:

$$f^{(0)}(\upsilon) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(\upsilon - V)^2\right], \qquad (9.51)$$

мұндағы υ – газ бөлшектерінің ретсіз қозғалысының жылдамдығы (максвеллдік таралу кезінде ортада тұтқыр кернеулер мен жылу ағындары қатыспайды).

(9.50) теңдеулерінің дискреттік ұқсастарын алдыңғы жақта сипатталған пункттердегі тәсілдердің бірімен тұрғызуға болады. Берілген жағдайда (және кейбір жалпылаулар (9.50) үшін) иерархиялық жақындау тұжырымдалады мынаған:

1) таралу функциясы f және газдың макросипаттамасы t^j, j = 0, 1,... дискреттік аргументтік функциясы ретінде қарастырылады, яғни бастапқы модельдің – Больцман кинетикалық теңдеуінің уақыт бойынша үзіктеуі жүргізіледі;

2) шама $\tau = t^{j+1} - t^j$ (дискреттеу қадамы), $\tau \le l/|\langle\upsilon\rangle|$ шартын қанағаттандыруға жеткілікті болатындай аз етіліп алынады, мұндағы l – еркін жүгірудің сипаттық ұзындығы, $|\langle\upsilon\rangle|$ – бөлшектердің сипаттық жылдамдығының модулі. Сондықтан τ уақытындағы бөлшектер арасындағы соқтығыстар саны соншалықты емес және оларды ескермеуге болады;

3) $f^{j+1} = f(x,\upsilon,t^{j+1})$ таралу функциясы $f^j = f(x,\upsilon,t^j)$ функциясымен салыстыруда, олардың фазалық көлемінің бөлшектері өзгеруі есебінен ғана өзгереді, содан да әділ болатын қарапайым байланыс

$$f(x,\upsilon,f^{j+1}) = f(x - \upsilon\tau,\upsilon,t^j), \qquad (9.52)$$

бұл соқтығыстар болмаған кезде, Больцман теңдеуінің шешімі болады;

4) байланыс (9.52), f^{j+1}–ді υ параметрі бойынша Тейлор қатарына жіктеу жолымен ықшамдалады:

$$f^{j+1} = f^j - \tau\frac{\partial f^j}{\partial x}\upsilon + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^2} + \ldots \qquad (9.53)$$

үшінші реттегі мүшелерге дейінгі дәлдікпен; өйткені таралу функциясы экспоненциалды түрде υ^2 өсімімен азайтады, сонда үлкен жылдамдықтары бар бөлшектердің үлесі аз болып саналады және бұған сай келетін (9.53)-дегі мүшелер лақтырылады;

5) моменттер үшін теңдеулерді қорыту кезінде, (9.53) арақатынастары, тізбекті түрде, сәйкестелініп 1, $m\upsilon$, $m\upsilon^2/2$–лерге тең Φ(υ) функцияларына көбейтіледі (*сумматорлық инварианттар*), және барлық υ жылдамдықтары бойынша интегралданады; нәтижесінде f^{j+1} мен f^j арасындағы байланыс тығыздық, масса ағыны, толық энергия сияқты газдың орташа гидродинамикалық параметрлері арасындағы байланысқа түрленеді:

$$\rho = \int mfd\upsilon, \qquad \rho V = \int m\upsilon fd\upsilon, \qquad E = \int \frac{m\upsilon^2}{2} fd\upsilon,$$

және $f^{\,j}$, $f^{\,j+1}$ моменттерінде алынған, басқа шамалармен (басқа сөздермен, ортаның *уақыт бойынша дискретті гидродинамикалық модель* алынады);

6) кеңістік бойынша сәйкес келетін үзіктеуден соң, бастапқы кинетикалық теңдеудің (*кинетикалық түрде келісілген айырымдық сызбанұсқалардың*) біршама ерекшелігін сипаттайтын, газдың соңғы үзіктік (уақыт бойынша да, кеңістік бойынша да) модельдері тұрғызылады; олар, жалпы айтқанда, гидродинамикалық модельдердің аппроксимациясымен алына алмайды (мысалы, (9.50) теңдеулері), өйткені оларды құрастыру үшін жоғарырақ иерархиялық деңгейдегі модельдің қасиеттері қолданылады.

МАССААЛМАСТЫРУ ҮДЕРІСТЕРІН МОДЕЛЬДЕУ

9.15. Үдерістердің математикалық сипаттауын құрастырудың негізгі кезеңдері

Математикалық модельдеу көмегімен кез келген массаалмастыру үдерісін ішкі жүйелер қатарынан: «тепе-теңдік», «массаберілісі», «гидродинамика», «жылуберілісі», «масса мен энергия теңгерімдерінің ішкі жүйесі»-лерінен тұратын үлкен жүйе ретінде көрсетуге болады. Бұл ішкі жүйелер талдауы өз кезегімен, оларды төменірек деңгейдегі ішкіжүйелерге мүшелеуге мүмкіндік береді. Мысалы, «гидродинамика» ішкі жүйесі үшін макро- және микродейгейлерді қарастыру орынды; «жылуберілісі» ішкі жүйесі үшін – жылудың жалпы теңгерімдерін (макродеңгей) және фазалар ағындарының әсер етуін (микродеңгей).

Мұнда массаалмастыру үдерісінің математикалық сипаттауы, жекеленген ішкі жүйелердің – өзіне басқа ішкі жүйелердің ықпалын бейнелейтін, әрбірі кірулік айнымалылардың меншікті жиынымен сипатталатын блоктардың, сондай-ақ зерттелетін ішкі жүйе қызметін қалыптастыратын ішкі айнымалылардың математикалық сипаттаулары негізінде жасалады.

Математикалық сипаттауды ішкі жүйелер (бұғаттар) жиынтығы түрінде көрсету, оны тұрғызудың орындалуын жекеленген ішкі жүйелер сипаттауларын құрастыру бойынша жәрдемдер жиынтығы ретінде қарап, сөйтіп математикалық сипаттау тұрғызылуының блоктық қағидасын іске асыруға мүкіндік берді. Сипаттаудың барлығының дәлдігі берілген жағдайда жекеленген ішкі жүйелерді сипаттау дәлдігімен, сондай-ақ толығымен сипаттау дәлдігіне жекеленген ішкі жүйелер дәлдігінің жинақталған ықпалымен анықталады.

Жүйелілік жақындауға негізделген қарастырылушы үдерістердің математикалық модельдерін тұрғызудың блоктық қағидасын қолдану, массаалмастыру үдерістерін масштабтау сияқты іс жүзінде маңызды мәселені белгілеуге және оны шешуге мүмкіндік береді. Көрсетілген қағиданы қолдану кезінде масштабтық ауысу, үдерістің құралғылық жабдықталуын сипаттайтын геометриялық ауқымдар өзгеруі кезіндегі қайсыбір сипаттау деформациясы ретінде болады, яғни геометриялық ауқымдардың үдеріс қасиеттеріне ықпалы тек бір ғана ішкі жүйеде, атап айтқанда «гидродинамика» ішкі жүйесінде бейнеленеді. Сондықтан осы ішкі жүйені математикалық сипаттаудың, сапалы және сандық қатынаста, жеткілікті нақтылы болуы кезінде, масштабтық ауысуды іске асыру мүмкін болады.

9.16. Сұйық – бу (газ) және сұйық – сұйық тепе-теңдіктерін сипаттау

Т температура және Р қысым кезіндегі сұйық қоспаны қарастырамыз, қоспа сол температура мен қысым кезінде бу қоспасымен тепе-теңдікте болады. Бізді қызықтыратын шамалар екі фазаның да температурасы, қысымы және құрамдары. Сұйықтық – бу тепе-теңдігін есептеу кезінде, айнымалылардың қайсылары берілетіні және қайсылары есептелетіні тәуелділігіндегі мәселелерді төрт негізгі тұрпатқа бөлуге болады. Мәселелердің бірінші тұрпатына сұйықтықтың белгілі құрамы мен қысымы бойынша будың құрамын және қысымын есептеу жатады. Екінші тұрпатқа сұйықтықтың құрамы мен температурасы бойынша будың құрамы мен қысымын есептеу жатады. Мәселелердің үшінші мен төртінші тұрпаттары белгілі қысым не температура кезіндегі бу құрамы бойынша сұйықтықтың құрамын анықтауды кірістіреді.

Қоспаның әрбір *i* құрауышы үшін термодинамикалық тепе-теңдік шарты берілуінің өрнегі

$$f_i^{\upsilon} = f_i^{L}, \tag{9.54}$$

мұндағы f – фугитивтілік; индекс υ – бу, индекс L – сұйық екенін білдіреді.

Іргелі мәселе болатын осы фугитивтіліктерді қоспалар құрамымен байланысуды қалыптастыру, өйткені химиялық технологияның үдерістерін жасау кезінде тура осы құрам қызықтырады.

Қоспадағы құрауыштың фугитивтілігі температураға, қысымға және қоспа құрамына тәуелді. Температурасы, қысымы және мольдік үлестері бар f_i^{υ} байланысы үшін фигутивтік коэффициентті енгізу ыңғайлы

$$\Phi_i = \frac{f_i^{\upsilon}}{y_i^{P}}, \tag{9.55}$$

бұл, әдетте күй теңдеуімен сипатталатын, Р–υ–Т–у диаграммалары бойынша есептеліне алады. Идеал газдар қоспасы үшін $\Phi_i = 1$.

Сұйық фазадағы *i* құрауышының фугитивтілігі осы фазаның құрамымен, γ_i белсенділік коэффициентімен және фугитивтілігімен байланысады, *i* құрауышының стандарттық күйімен мына арақатынаста

$$\gamma_i \equiv \frac{a_i}{X_i} = \frac{f_i^{L}}{X_i f_i^{0}}, \tag{9.56}$$

мұндағы a_i – *i*-құрауышының белсенділігі. Стандарттық фугитивтілік f_i^{0} бұл, жүйенің жалпы қысымы P және $X_i = 1$ кезіндегі *i* таза сұйықтығының фугитивтілігі.

Дәстүрлі термодинамика белсенділік коэффициентінің құрамнан және температурадан тәуелділігі түрін анықтауға мүмкіндік бермейді. Әйтсе де шектелген эксперименталдық мағлұматтарды реттеуге және талдап қорытындылауға мүмкіндік беретін термодинамикалық арақатынас бар, – бұл Гиббс–Дюгем теңдеуі. Гиббс-Дюгем теңдеуіне сай, құрауыштардың белсенділік коэффициенттері тәуелсіз емес бола алмайды, ал өзара байланысады, мынадай арақатынаспен

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \left(\frac{\partial \ln \gamma_i}{\partial X_i} \right)_{T,P} = 0 . \tag{9.57}$$

Вильсон теңдеуі. Вильсон, әдеттегі ерітінділер үшін полимерлер ерітінділеріне, термодинамикалық функциялардың өрнектерін қолданды, алайда орташа көлемдік үлестердің орнына құрауыштардың «шоғырланған» көлемдік үлестерін енгізді:

$$\frac{g^E}{RT} = \sum_{i=1}^{N} X_i \ln \xi_i , \tag{9.58}$$

мұндағы ξ_i – сондай тұрпаттағы орталық молекулаға қатысты *i* құрауышының «шоғырланған» көлемдік үлесі.

Шоғырланған құрамдар тұжырымдамасының негізгі идеясының маңызы мынада, микроскоптық қарастыру кезінде сұйық қоспа біртекті болмайды: қоспаның бір нүктесіндегі құрам басқасындағы құрамнан өзгере алады. Инженерлік қосымшаларда қоспалардағы құрауыштардың орташа концентрациясы ғана қолданылғанымен, сұйық қоспаның парапар сипаттауын тұрғызу үшін шоғырлық құрамдармен жәрдемдеу қажет. Вильсон енгізген, шоғырлық құрамдар тұжырымдамасына сай, орталықтық молекулаға қатысты молекулалар таралуының түрі

$$\frac{x_{ij}}{x_{ki}} = \frac{X_j e^{-\frac{g_{ij}}{RT}}}{X_k e^{-g_{ki}/RT}} , \tag{9.59}$$

мұндағы x_{ij} – *i* айналасындағы j «шоғырлық» мольдік үлес; g_{ji} шамалары *j* мен *i* молекулаларының әрекеттестігі энергияларына пропорционалды.

Енгізілген шоғырлық концентрацияларды ескеріп (9.58) теңдеуіндегі *i* құрауышының ξ_i шоғырлық көлемдік үлестерді анықтауға болады, мына өрнектегідей сияқты

$$\xi_i = \frac{X_j e^{-\frac{g_{ij}}{RT}}}{\sum_{j=1}^{N} X_j V_j e^{-g_{kji}/RT}} , \tag{9.60}$$

мұндағы *Vj* – *j*-құрауышының мольдік көлемі.

(9.60) өрнегін (9.58)-ге қою, қоспаның құрамы мен температурасына тәуелді Гиббс артықтық энергиясын береді:

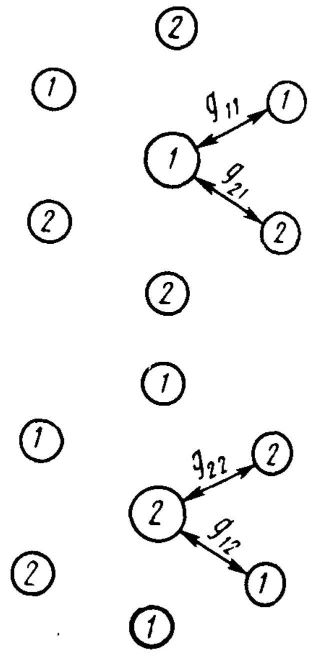
$$\frac{g^E}{RT} = \sum_{i=1}^{N} X_i \ln(\sum_{j=1}^{N} X_j \Lambda_{ji}). \tag{9.61}$$

Қоспа құрамы бойынша (9.61) өрнегін дифференциалдау кеңінен танымал Вильсон теңдеуіне келтіреді:

$$\ln\gamma_i = 1 - \ln\left(\sum_{j=1}^{N} X_j \Lambda_{ij}\right) - \sum_{l=1}^{N} \frac{X_l \Lambda_{li}}{\sum_{j=1}^{N} X_j \Lambda_{lj}} \qquad (9.62)$$

– теңдеу параметрлері.

Вильсон теңдеуі (9.62) электролиттер еместердің гомогендік қоспаларына қолданылады.



9.10-сурет. Қоссұйықтықтық теориямен сәйкестіліктегі ұяшықтар типі үшін.

НРТЛ теңдеулері. Мұнда, еркін көлем теориясын негізге ала отырып, бинарлық қоспаның (9.10-сурет) 1-ші және 2-ші тұрпаттағы молекулаларына сай келетін, ұяшықтардың екі сұрпы ерітіндіде бар деп жорамалданады.

Мұндай қоссұйықтық ерітіндінің артықтық Гиббс еркін энергиясы болатын таза сұйықтың 1-ші сұрыптың ұяшығына *1* молекулаларымен тасылатын еркін энергия мен *2* молекулалармен тасылатын еркін энергия қосындысы, яғни

$G^E = X_1(G_1 - C_{11}) + X_2(G_2 - G_{22}),$ (9.63)

мұндағы G_1 – ерітіндідегі *1* молекулаларының Гиббс еркін энергиясы; G_{11} – таза сұйықтағы *1* молекулаларының Гиббс еркін энергиясы.

ЮНИКВАК (*UNIQVAC – universal quasy chemical*) *теңдеуі*. Праусниц және басқа ғалымдармен Гугенгеймнің квазихимиялық теориясы негізінде Гиббстың артықтық энергиясы үшін толығымен немесе жартылай араласқан жүйелердің өрнегі алынды.

ЮНИКВАК теңдеуінің негізгі артықшылығы мынада, екі қалыптасылатын параметр болған кезде, ол бинарлық жұптың әрбірі үшін, электролиттер емес көптеген сұйық қоспалары үшін сұйықтық – бу және сұйықтық – сұйықтық тепе-теңдіктерін жақсы қайта өндіруді қамтамасыз етеді.

ЮНИФАК әдісі. Термодинамикалық қасиеттерді анықтау кезінде молекуланы функционалдық топтардың агрегаты ретінде қарастыру жиі болады; сонда таза газдардың және сұйықтықтардың біршама термадинамикалық қасиеттерін топтық құрастырушыларды қосындылау жолымен есептеуге болады. Топтық құрастырушылар бойынша ығысу жылуларын және белсенділік коэффициенттерін есептеу әдістерін жасауға бірнеше әрекет жасалынған болатын. Олардың ішінен екі кеңінен тарағанды еске саламыз. АСОГ (*Analitical Solution of Groups*) аталуын көтеретін бұл әдістер және ЮНИФАК (*Universal Functional Model of Coefficient Activity*), қағидалы түрде ұқсас, бірақ егжей-тегжейлі талдауларда ажыратылады.

Топтық құрастырушылар бойынша кез келген есептеу әдісінің негізі болатын идеяның мағынасы мынада, химиялық технология мыңдаған химиялық қосылыстармен жұмыс жасағанымен, осы қосылыстарды құрайтын функционалдық қатар саны едәуір аз болады.

Кез келген топтық құрастырушы әдіс міндетті түрде жуықталған болады, өйткені бір молекуладағы берілген топтың үлесі басқа молекулада мүлдем міндетті емес болып шығады. Топтық құрастырушылар әдістерінің негізі болатын аддитивтілік жайлы ұйғарым: молекуладағы бір топтың үлесі басқа топтардың үлестеріне тәуелді болмайды. Әртүрлі топтардың саны үлкен емес болып қала беруі керек, алайда жеткілікті болуы тиіс молекулярлық құрылымның қасиеттерге елеулі ықпалын ескеретіндей болып. Топтық құрастырушылардың қоспаға таралуының тұжырымдамасы төтенше қызық, өйткені өнеркәсіпте қолданылатын таза сұйықтардың саны өте мол; мыңдаған, мүмкін, миллиондаған сұйық қоспалар 50 немесе максимум 100 функционалдық топтардан құрастырылуы мүмкін.

«Топтар ерітіндісі» моделінің негізгі идеясы мынада, өзінде эксперименталдық мағлұматтары жоқ жүйелердің фазалық тепе-теңдігін есептеу үшін, фазалық тепе-теңдік бойынша бар мағлұматтар қолданылады. Әдіс негізіне екі тұжырымдама жатады:

1. Электролиттік емес жүйелердегі құрылымдық топтардың жұптары арасындағы әрекеттестікті сипаттаушы параметрлерді алу үшін белсенділік коэффициенттерінің эксперименталды түрде анықталған мәндерін өңдеу.

2. Бұл параметрлерді эксперименталды түрде зерттелмеген, бірақ тура сондай функционалдық топтары бар басқа жүйелердегі белсенділік коэффициенттерін есептеу үшін қолдану.

Белсенділіктің молекулярлық коэффициенті екі бөлікке бөлінеді. Бір бөлік молекулалар ауқымындағы түрлілікпен қалыптасқан үлесті, ал екінші бөлік – молекулярлық әрекеттестіктермен қалыптасқан үлесті сипаттайды.

Газ – сұйықтық тепе-теңдігі. Тепе-теңдік кезінде газ фугитивтілігі сұйықтық фугитивтілігіне тең. Осыдан фазалық тепе-теңдік константы мәнін аламыз

$$K_i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{f_i^0 \gamma_i}{P\Phi_i}, \qquad (9.64)$$

мұндағы Φ_i – газдағы фугитивтілік коэффициенті.

Газ – сұйықтық тепе-теңдіктің есептелуіндегі негізгі қиындық сұйық фазадағы белсенділік коэффициентті γ_i, және газдық фазадағы фугитивтілік коэффициентті Φ_i анықтауда. Электролиттер еместердің ерітінділеріндегі белсенділік коэффициенттерді бағалау әдістері қарастырылған болатын. Ал газдық фазадағы фугитивтілік коэффициентін бағалау, күйлер (Ван-дер-Ваальс, вириалдық-шынайылық және басқа) теңдеулері негізінде, орындала алады. Алайда сұйықтағы газ ерігіштігі жиі түрде аз болады және бұл жағдайларда сұйық фаза идеалдыққа ұмтылады. Бұдан басқа, бірқалыпты қысымдар кезінде газдық фазаның идеалсыздығы шамалы ғана. Сонда қайсыбір құрауыштың сұйық фазадан газдыққа ұшуға ұмтылуы басқа құрауыштардың қатысуына тәуелсіз болады және Генри заңы әділ болатын идеалдық жүйеге сай болады:

$$P_i^* = K_i x_i, \qquad (9.65)$$

мұндағы P_i^* – ерітінді үстіндегі газдың тепе-теңдіктік қысымы.

Идеал ерітінділер K_i тек температураға ғана тәуелді, оның ұлғаюымен өседі; мұнда газ ерігіштігі азаяды. Генри заңы сұйытылған ерітінділерге қолданылатынан, ол нашар еритін газдар үшін жеткілікті дәл тепе-теңдікті сипаттайды. Салыстырмалы түрде жоғары ерігіштігі бар газдар үшін ол тек төменгі концентрацияларда ғана әділ болады.

Булысұйықтық тепе-теңдіктерді есептеу. Бұрынырақ булысұйықтық тепе-теңдіктік есептелуінде пайда болатын мәселелердің мүмкін түрлерін қарастырдық. Олардың шешімдері ұқсас болғандықтан, тек біреуін ғана келтіреміз: сұйықтықтың берілген құрамы мен қысымы бойынша бу құрамын және қоспаның қайнау температурасын анықтау.

Математикалық сипаттау теңдеулері жүйесінің кірістіретіні тепе-теңдіктік теңдеулер жүйесі

$$y_i P = x_i \gamma_i (x_i, T) P_i^0 (T), \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (9.66)$$

және стехиометрлік арақатынас

$$\sum_{i=1}^{N} y_i - 1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i \gamma_i P_i^0}{P} - 1 = 0. \qquad (9.67)$$

(9.66), (9.67) теңдеулеріндегі бу фазасы идеалды (Φ_i=1) деп жорамалданады. Сұйық фазадағы белсенділік коэффициенті γ –дің құрам мен температурадан тәуелділігі булысұйықтық тепе-теңдіктің (Вильсон, НРТЛ, ЮНИКВАК, ЮНИФАК) теңдеулерінің бірімен анықталады.

Ізделінетін айнымалылар: y_i (N мәндері бар), T. Барлығы N+1 айнымалы бар. (9.66), (9.67) теңдеулерінің жүйесі сызықтық емес болғандықтан, оны шешу итерациондық әдістермен жүргізіледі. Ньютон әдісімен (9.66), (9.67) теңдеулері шешімінің алгоритмін қарастырамыз.

1. Қайнау температурасның T_0 бастапқы жуықталуы беріледі.

2. Берілген құрам мен температура үшін құрауыштардың белсенді коэффициенттері есептеледі.

3. (18.13) теңдеуі бойынша y_i буы құрамы есептеледі.

4. (14.14) теңдеуі бойынша қоспаның қайнау температурасы T анықталады.

5. $|T - T'| < \in$, (9.68)

шартының орындалуы тексеріледі, егер (9.68) шарты орындалған болса, онда есептеу аяқталады.

Сұйықтық – сұйықтық жүйесіндегі тепе-теңдік. Мұндай жүйелердің сипаттауы болатын материалдық теңгерім теңдеулерімен және стехиометрлік арақатынастармен толтырылған, фазалық тепе-теңдіктің құрауыштық теңдеулері. Сұйықтық – сұйықтық жүйелеріндегі тепе-теңдіктік есептеулер кезінде екі мәселені бөліп шығаруға болады: бірінші мәселе қоспаға қатысатын әрбір құрауыштың жалпы құрамы бойынша, берілген температура кезіндегі тепе-теңдіктік фазалар құрамын анықтаудан тұрады; екінші мәселе басқа белгілі температура кезіндегі берілген құрам бойынша тепе-теңдіктік фазалардың бірінің құрамын анықтауға тіреледі.

9.17. Массаберілісін сипаттауға детерминирленгендік пен стохастикалық жақындаулар

Массаберілісі үдерістерінде зат тасымалын детерминирлеп сипаттау диффузияның іргелі Фик заңдарына негізделген.

Фик теңдеуі (молекулалық тасымал):

$$q_C = -D_M \frac{dC}{dZ}. \tag{9.69}$$

Фик теңдеуі (конвективтік тасымал):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}W_x + \frac{\partial C}{\partial y}W_y + \frac{\partial C}{\partial z}W_z = D_M \nabla^2 C. \tag{9.70}$$

Ньютон теңдеуі:

$$q_C = K\Delta C. \tag{9.71}$$

Детерминирленген құрастырушының параметрлері:

$$N_{Nu_\partial} = N_{sh}\frac{al}{D_M}; \quad N_{\Pr_\partial} = N_{Sc}\frac{\upsilon}{D_M}. \tag{9.72}$$

Массатасымалы құбылыстарының стохастикалық сипатының күшімен тепе-теңдік күйге жету кеңістік пен уақыт ішіндегі энергия мен масса таралуының ықтималдық заңдарына бағынады. Өнеркәсіптік жағдайлардағы массаайырбастың тепе-теңдіксіздігінің маңыздырақ себептеріне жатқызуға болатындар: болуы уақыты бойынша ағын бөлшектері таралуының бірдейсіздігі; механикалық алып кетілуі нәтижесінде фазалардың кері лақтырылуы; фазалар түйісуі уақытының жеткіліксіздігі. Бөліну баспалдағына тепе-теңдік жетуінің дәрежесі сұйықтықтың және будың гидродинамикалық ағындарымен, олардың өзара әрекеттестігімен, яғни, құралғыда болуы уақытымен анықталады. Шынайы жағдайларда болуының уақыты бойынша ағын элементтері таралуының бірдейсіздігі бірінші кезеңде жылдамдықтар кескінінің бірқалыпты еместігімен, ағындар турбулизациясымен, жекеленген құрауыштар тасымалы жылдамдықтарының айырмашылығымен, температураның және қысымның градиенттерімен қалыптасады.

9.18. Сұйық – бу (газ) және сұйық – сұйық жүйелеріндегі массаберілісі

Заттың бір фазадан басқасына тасымалы үш негізгі кезеңді кірістіреді: 1) фаза көлемінен фазалар бөлімінің шекарасына затты жеткізу; 2) фазалар бөлігінің шекарасы арқылы затты тасымалдау; 3) бөлім шеарасынан екінші фазаның көлеміне затты тасымалдау.

Фаза ішінде затты тасымалдау молекулалық, конвективтік және турбуленттік диффузия жолымен өтеді. Қозғалмайтын ортада тасымал тек молекулалық диффузия жолымен, қозғалатын ортада – молекулалық және конвективтік диффузия жолымен өтеді. Турбуленттік қозғалыс кезінде басым түрде турбуленттік диффузия жолымен өтеді.

Массақайтымының және массаберілісінің негізгі теңдеулерін қарастырамыз. Фазалар арасына тепе-теңдік қатыспаған кезде бір фазадан басқасына зат тасымалы өтеді: бұл үдеріс *массаберілісі* деп аталады. Массаберілісі фазалардың әрқайсысының шектеріндегі зат тасымалынан (массақайтымы) және фазалар бөлімінің шекарасы арқылы зат тасымалынан тұратын күрделі үдеріс. Әдетте фазалар шекарасында зат тасымалына кедергі болмайды деп, саналады. Уақыт бірлігінде F беті арқылы z бағытында тасымалданатын i құрауышы мөлшерінің құрайтыны

$$W_i = -DF\frac{dC_i}{dz}. \qquad (9.73)$$

(9.73) теңдеуі Фик заңын өрнектейді, және де мұнда химиялық потенциалдың градиенті жуықталып концентрация градиентімен ауыстырылған.

Массаберілісі үдерісін қарастырған кезде қозғалтушы күш үшін фазалардың біріндегі құрауыштың нақты концентрациясы және оның ішіндегі осы құрауыштың тепе-теңдік концентрациясы арасындағы айырым қабылданады. Массақайтымы мен массаберілісі үдерістері жайлы көрсетілген ұйғарымдардың, фазалардың әрбірінде зат ауысуына біршама кедергі болатыны жайлы ұйғарымға, күштері тең болады. Бөлім бетінде кедергі қатыспағанында үдеріске жалпы кедергі фазалардың әрбіріндегі кедергілерден қосындыланады, яғни фазалар кедергілерінің аддитивтілігі орын алады.

Массаберілісінің, яғни фазалар жанасуы бетіне (немесе осы беттен) зат тасымалының теңдеуінің, жазылу түрі

$$W_i = \beta F \Delta, \qquad (9.74)$$

мұндағы W_i – уақыт бірлігінде тасымалданатын зат мөлшері; F – фазалар жанасуының беті; Δ – қозғалтушы күш (концентрациялар айырымы); β – пропорционалдық коэффициент, *массақайтымы коэффициенті* деп аталады және өзімен бет бірлігі арқылы уақыт бірлігінде қозғалту күші 1-ге тең кезінде, фаза ішінде тасымалданатын зат мөлшерін көрсетеді.

Массаберілісі коэффициентінің шамасы фаза қозғалысының сипатына және оның қасиеттеріне тәуелді. Қазіргі уақытта заттың фазаға тасымалы механизмінің келесі модельдері кең тараған: қабыршақтық модель, бұған сай массаберілісінің коэффициенті молекулалық диффузияның коэффициентіне пропорционал, өткізгіштік модель және фазалар бөлімі бетін жаңалайтын модель. Соңғы екі массаберілісінің үдерісі стационарлық емес ретінде қарастырылады, ал массаберілісінің коэффициенті 0,5 дәрежесіндегі диффузияның молекулалық коэффициентіне пропорционал.

Әдебиет: 9 [136–141], 9 [150–162], 8 [170–179], 9, 10, 9[173–194], 2[225–244]

Бақылау сұрақтары:

1. Амебалар жиналуының динамикасы.
2. Мазмұндылық модельді тұрғызу.
3. Модель жуықтаулары, постулаттары және теңдеулері.
4. Жалпы математикалық модель және оның түзетуі.
5. Математикалық модель зерттелуінің біршама нәтижелері.
6. Диффуздық үдерістер және Колмогоровтың дифференциалдық теңдеулері.
7. Марковтық үдерістер.
8. Жарнамалық серіктік моделі және жарнамалық серіктіктің мазмұндық моделі. Жұмыс істейтін гипотезалар, жуықтаулар және негізгі теңдеулер.
9. Математикалық модель, оның зерттеуі және жағдайы, жарнамалық серіктіктің тоқталу моменті.
10. Нарықтық үнемдеу теңдесуінің макромоделі (Кейнс моделі мысалында) және дәстүрлі үнемдік модельдер тұрғызудағы бастапқы қалыптар.
11. Тепе-теңдіктік нарықтың математикалық моделі.
12. Үнемдік өсімнің макромоделі.
13. Өсімнің Солоу алтын ережесінің мөлшері.
14. «Жыртқыш–құрбан» жүйесіндегі өзара қатынастар.
15. Екі ел арасында қаруланууды жарыстыру.
16. Екі армияның жауынгерлік әсерлері.
17. Имитациялық модельдеу.
18. Монте-Карло әдісі.
19. Кездейсоқ шамаларды модельдеу.
20. Псевдокездейсоқтық сандар және олардың машиналық өндірілуінің орындалу реттері.
21. Псевдокездейсоқ сандар тізбектілігінің сапасын тексеру.
22. Кездейсоқ әрекеттестіктер – шамалар, тізбектіліктер, үдерістер, ағындар және өрістер өндірілуінің әдістері.
23. «Имитация», «имитациялық модель» аталымдары мазмұнының бірте-бірте дамуы және олардың қазіргі түсінілуі.
24. «Мемлекеттік билік – азаматтық қоғам» жүйесінің жалпы моделі.
25. Мәселенің жалпы қойылымы және терминологиясы.
26. Иерархиялық құрылым ішінде билік қайта таралуының механизмі.
27. Билік теңгерімі, құқықтық өріс.

28. Құқықтық өріс шекарасынан шығу.
29. Үзіктік модельдерді алуға иерархиялық жақындауды қолдану.
30. Үдерістердің математикалық сипаттауын құрастырудың негізгі кезеңдері.
31. Сұйық – бу (газ) және сұйық – сұйық тепе-теңдіктерін сипаттау.
32. Мәселелердің негізгі тұрпаттары және оларды шешудің алгоритмдері.
33. Массаберілісін сипаттауға детерминирленгендік пен стохастикалық жақындаулар.
34. Сұйық – бу (газ) және сұйық – сұйық жүйелеріндегі массаберілісі.

АТАЛЫМДАР (ТЕРМИНДЕР) СӨЗДІГІ

Адекваттылық (дұрыс сәйкестік) (латын сөзі *adaequatus* «адекватус» – теңестірілген, тең).

Ақпараттық үдеріс – ақпаратты жинау, сақтау, әперу және өңдеу үдерісі.

Алгебралық теңдеу, екі алгебралық өрнекті теңестіргенде алынатын теңдеу. Мысалы, алгебралық теңдеу болатын $\frac{x}{x+1}=2,$ $x^2+xy+y^2-x+2y+1=0.$ Бір белгісізі бар алгебралық теңдеу мына түрге түрлене алады $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0.$

Алгоритм (алгорифм) (*algorithmi*, *algorismus* сөздерінен, әуелгі – математик әл-Хорезми есімінің латынша транслитерациясы; транслитерация – белгілі бір тілге ғана тән дыбысты екінші бір тілдің орфографиялық заңдылығына лайық белгілеу) біртұрпатты есептердің кейбір сыныбынан кез келген нақты есепті таза механикалық түрде шешуге мүмкіндік беретін, ережелердің соңғы жиынтығы.

Алгоритмдік тіл, рәміздер жиыны, құрастыру ережелерінің жүйесі және алгоритмдерді жазуға арналған осы рәсімдердің тілдік құрылысына мағына беру.

Аналитикалық аспект зерзатта өтетін құбылыстарды және олардың арасындағы функционалдық байланыстарды бейнелейтін теңдеулердің біршама жүйесі түріндегі үдерістің математикалық суреттеуі болады.

Аппроксимация (латын сөзі *approximo* – жақындату**),** бір математикалық зерзаттарды (мысалы, сандарды немесе функцияларды) қарапайымырақ және қайсыбір мағынада бастапқыға жақын (мысалы, сынғандарға жақын қисық сызықтар) басқалармен ауыстыру.

Асимптота (грек сөзі *asymptotos* – сәйкес келмейтін) шексіз тармағы бар қисық, осы тармақ шектеусіз жақындайтын түзу; мысалы, гипербола асимптотасы.

Бағдарламалау тілі, берілулерді (ақпаратты) және оларды сандық есептеу машиналарына (СЕМ) өңдеудің алгоритмін (бағдарламасын) суреттеуге арналған жалған тіл.

Бағдарламалық басқару, мұнда ығысудың барлық шамалары уақыт функциясы ретінде тұрғызылады; ертерек берілген бағдарлама бойынша зерзат жұмысы режимімен басқару.

Теңгерімдеу (техникалық; баланс – теңгерім; балансировка –теңгерімдеу, теңгеру), машиналардың айналатын бөліктерін (роторларды, маховиктерді, біліктерді, шпинделдерді және тағы басқаларды) теңгерімдеу (теңгерімсіздікті жою). Динамикалық және статикалық теңгерім ажыратылады.

Бифуркация (латын сөзі *bifurcus* – қосарлау), қосарлау, айырлап бөлу немесе тарамдау; (медицинада), түтікшелік мүшені (ыдысты немесе кеңірдек тарамын) бірдей бұрыштармен әр жаққа кететін екі бірдей дәл белгілеу үшін қолданылатын өлшеуішке бөлу.

Бүтін сандық бағдарламалау, яғни оның мақсатты функциясының аргументтері өзінің мағынасы бойынша тек бүтінсанды мәндерді ғана қабылдай алатын мәселелер.

Гистограмма (грек сөзі *histos*, мұнда – бағана және *…грамма*) (бағаналық диаграмма), сандық белгісі бойынша қайсыбір шаманың статистикалық таралуының графиктік бейненуі түрлерінің бірі. Гистограмма өзімен бір түзуге тұрғызылған аралас тікбұрыштардың жиынтығын көрсетеді; әрқайсысының ауданы, берілген тікбұрыш тұрғызылған интервалдағы осы табылатын шаманың жиілігіне пропорционалды.

Грин функциясы, функция аналитикалық көрсетіліммен байланысқан функция, сондай-ақ математикалық физиканың қарапайым дифференциалдық теңдеулеріне арналған шеттік есептерді шешуде де қолданылады. Бұл функцияның бөлікті жағдайын, потенциал теориясы бойынша өзінің зерттеуіне алғаш енгізген Джордж Грин болатын, осы есім құрметіне, осы аталым аталған (1828 жыл). Грин функция тудыратындардан шығаратын көздерден өріс таралуын сипаттайды (сондықтан да мұны таралу функциясы деп те атайды).

Гюгонио шарты – секіріске дейінгі және кейінгі шамалар арасындағы бірмәнді байланыс.

Декомпозиция – біршама бүтінді бөліктерге ыдырату, осы құрамдас бөліктердің әрі қарай біріктіріліп тұтасуын, яғни әуелгі зерзатқа қосылысып айналуын болжамдайды.

Дескриптивная лингвистика (кешіккен латын сөзі *destriptivus* – суреттеме), 20 ғасырдың 36–50 жылдарындағы американдық тіл білімінің құрылымдық дескриптивтік лингвистикасы бағыттарының бірі. Берілген бағдарлама бойынша тілді жалған суреттеу талабын жариялайды.

Детерминирленген модель кездейсоқ құрауыштарды құрамында ұстамайды.

Дескрипция (латын сөзі *descriptio* – суреттеу), нәрсенің меншіктік немесе жалпы есімін ауыстыратын тілдік құрылыс.

Дивергенция (кешіккен латын сөзі *divergentia* – айырмашылық) (биологияда), эволюция жүрісіндегі ағзалардың әуел бастағы жақын топтарындағы белгілердің және қасиеттердің айырмашылығы. Дивергенция түсінігін мәдени өсімдіктер сұрыптарының, үй жануарлары тұқымдарының және биологиялық түрлердің көптүрлілігін түсіндіру үшін Ч. Дарвин енгізді; берілген *векторлық өріс* көздерінің тығыздығын сипаттайтын *скалярлық өріс* ***a*** (Р); белгіленуі div ***a***. Конвергенцияға қарсы қойылады.

Динамикалық бағдарламалау әдісі, бұл дискреттік уақыты (бөліктікте үзіксіз уақыты бар есептер) бар есептердің арнайы сыныбы.

Динамикалық модель, зерттеу нәрсесі – уақыт өтуімен қарастырылушы зерзаттың өзгеруі.

Дисбаланс (*дис*… және *баланс* қосағынан құрылған), *дебаланс* (*де*… және *баланс* қосағынан құрылған) сөзімен ұғымдас, машиналардың айналатын бөліктерінің (роторлардың, иінді біліктердің, тегершіктердің немесе доңғалақтардың және тағы басқалардың) теңгерімделуі. Бұл бұйым цапфтарының тіректік беттері арқылы осьтері мен инерцияның бас осьтері үйлеспеуінен пайда болады. Осы осьтердің үйлестірілуі теңгерімдеумен іске асады.

Дискреттік (үзіктік) **модель** табиғи нөмірлеуді рұқсат ететін, бір-бірінен «ажырап кеткен» мәндерді қабылдайды.

Дистрибутивтілік (латын сөзі *distributivus* – таратушы), дистрибутивтік (таратушы) заң, $(a + b +...+c)n = an + bn +... + cn$ формуласымен өрнектелетін қосу мен көбейту қасиеттері.

Дистрибутивтік талдау, лингвистикалық зерттеудің әдісі, мұнда тілдік бірліктерді жіктеу мен оларды оқып білу басым түрде оларды сөз ағынында дистрибуциялау негізінде жүргізіледі. Дескриптивтік лингвистика өкілдерімен жасалынған.

Дифференциалдық теңдеу, ізделуші функция және оның туындыларын (немесе дифференциалдарын) және тәуелсіз айнымалыларды байланыстыратын теңдеу.

Доминанта (латын сөзі *dominans*, ілік септеуде *dominantis* – үстемдік ету, басым түсу), басым түсетін ой, негізгі белгі немесе бірдеменің маңызды құрамдық бөлігі.

Доминанттық белгі, кейде басым болуды берілген түрлермен жасалған органикалық массамен, немесе ерекшесі санымен өрнектейді.

Ең кіші шаршылар әдісі, құрамында кездейсоқ қателер бар өлшеу нәтижелері бойынша белгісіз шамаларды бағалауға арналған қателер теориясы әдістерінің бірі. Байқауларды өңдеу кезінде қолданылады.

Есептеулік аспект – бағдарламалау тілдерінің бірінде модельдеуші бағдарлама ретінде жүзеге асырылған, математикалық суреттеу теңдеулері жүйесін шешудің әдісі мен алгоритмі.

Жасанды біліктілік, адамның біліктілік қызметінің кейбір жақтарын – қисындық, аналитикалық ойлауын модельдейтін кибернетикалық жүйелерін шартты түрде белгілеу.

Жобалау, болжамдалатын немесе мүмкін болатын зерзаттың, күйдің түп нұсқасының, бейне үлгісінің – жобасын жасау үдерісі. Дәстүрлі түрлермен (архитектуралы-құрылыстық, машиналы-құрылыстық, технологиялық және басқа) қатар, еңбек үдерістерінің, ұйымдардың, экологиялық, әлеуметтік, инженерлі-психологиялық, генетикалық және басқа да адамды-машиналық жүйелерді жобалаудың өзіндік бағыттары қалыптаса бастады.

Жүйелі техника (үлкен жүйелер техникасы), күрделі жүйелерді жобалауды, жасауды, сынауды және кәдеге асыруды қамтитын ғылыми бағыт. Жүйелі техника XX- ғасыр шебінде пайда болды, қуатты ЭЕМ жасалуына байланысты 50- жылдарда оның дамуы кенет көтерілді. Жүйелердің жалпы теориясының бірінші нұсқасын жасаған, Екінші дүниежүзілік соғыстан кейін, австриялық ғалым Людвиг фон Берталанфи.

Идентификация (кешіккен латын сөзі identifico – теңдестіремін), техникада, математикада танылушы нәрсенің идентификатор деп аталатын өзінің үлгісіне (белгісіне) сәйкес келуін қалыптастыру.

Иерархия (грек сөзі *hieros* – қасиетті және *arche* – билік; төмен шенділердің тағы басқалардың жоғарғы шенділерге бағыну тәртібі), жоғарыдан төмен қарайғы тәртіптегі бүтін элементтердің немесе бөліктердің орналасуы.

Инвариант (латын сөзі *invarians* – өзгермейтін) (математикада), қандай да бір түрлендірулерде өзгермей қала беретін шама. Мысалы, қайсыбір фигураның ауданы, екі түзу арасындағы бұрыш – қозғалыс инварианты.

Изоклиндер (*изо…* және грек сөзі *klino* – иілдіремін), магниттік карталардағы магниттік иілдірудің изосызықтары. Нөлдік иілдірудің изоклині магниттік экваторды анықтайды.

Инварианттық, қандай да бір шаманың физикалық жағдайлар өзгерулерінде немесе кейбір түрлендірулерге қатысты өзгермеуі, әдетте координаталар мен уақыттың, есеп беру жүйесінің бірінен басқасына өткенінде өзгермеуі; яғни координаттар жүйесін таңдаудан тәуелсіз.

Имитация (латын сөзі *imitatio* – еліктеу), біреуге немесе бірдемеге еліктеу, елестету; ұқсатып істеу.

Имитациялық модельдеу күрделі үнемдік тәртіпті талдауға және соған ұқсас мәселелерді талдауға қолданылады, бұлар үшін математикалық модельді теңдеулер жүйесі түрінде жазудың өзі қиын.

Инстанция (латын сөзі *instantia* – саты, тікелей жақындау), бір-біріне бағынатын жүйедегі баспалдақ, түйін (мысалы, сотқа жататын инстанция).

Интерфейс (ағылшынша *interface*), унифицирленген байланыстар (берілетін ақпараттар, дабылдар, параметрлері, құралғылар түрлері бойынша) жүйесі, есептеу жүйелерінің құрылғылары арасындағы (мысалы, енгізілетін берілулер құрылғысы мен жадыға сақтау құрылғысы арасындағы) ақпараттарды алмастыруға арналған. 3-ші буындық ЭЕМ-де қолданылады.

Итерация (латын сөзі *iteratio* – қайталау), қайсыбір математикалық жәрдем қолдануды қайталау.

Итерациялық әдістер (латын сөзі «итерацио» – қайталау), мұндай әдістердің әрқайсысында біршама біртұтастық есептеулік атқару тәртібі қайта-қайта қайталанады, және де жүргізілген есептеу нәтижесі әрбір ретте келесі есептеудің негізіне кіреді (салынады).

Квадрант (латын сөзі *quadrans* – төртінші бөлік), орталықтық бұрышы 90^0 жазық сектор, дөңгелектің ¼ бөлігі. Жазықтық квадранты – 4 аймақтың (бұрыштардың) кез келгені, бұларға жазықтық екі өзара тік қиылысқан түзумен бөлінеді.

Квазистатикалық модель, бұл модельде, қарастырушы ахуалдағы әрбір мезеттегі зерзат статикалық деп саналатындай, зерзат өзгерісі баяу өтетіні қабылданылған.

Кинетостатика (грек сөзі *kinetos* – қозғалатын және статика), механика бөлімі, мұнда статика әдістерімен динамика есептерін шешудің тәсілдері қарастырылады. Кинетостатика Д'Аламбер қағидасына негізделеді.

Конвергенция (латын сөзі *convergo* – жақындаймын, ұқсаймын).

Континуум (латын сөзі – үзіксіз) математикада, үзіксіз жиынтық, мысалы түзудегі кесіндінің барлық нүктелерінің немесе түзудің барлық нүктелерінің жиынтығы, барлық әсер етуші сандардың баламалық жиынтығы. Дәлірек, в евклидтік кеңістіктегі бос емес байланысқан жиынтық, егер ол ықшамды болса, континуум деп аталады.

Консерватизм (французша *conservatisme* – күзетемін, сақтаймын), ескіргеннің, дәурені өткеннің жолын ұстаушылық және барлық жаңаға, алдыңғы қатардағыға өшпенділік.

Корпорация (кешіккен латын сөзі *corporatio* – бірлестік), 1) бірлестік, одақ, қоғам. 2) (Заңдық) қандай да бір мақсат үшін біріккен адамдар жиынтығы; заңды құқығы бар мекеме немесе адам (мысалы, Америкада көпшілік бірлестіктер – муниципалитеттер және жекеменшіктік – акционерлік қоғамдар).

Корреляция (математикалық статистикада), ықтималдық немесе статистикалық тәуелділік.

Коррупция (латын сөзі *corruption* – параға сатып алу; сыбайластық), жеке басын байыту мақсатында, өзінің қызметімен байланысқан құқықтарды қызмет адамының пайдалануымен тұжырымдалатын, қылмыс. Коррупция буржуазиялық мемлекеттерге және қоғамдарға (шенеуніктерді және қоғамдық, саяси қайраткерлерді параға сатып алу және т. б.) тән.

Көп өлшемдік көптүрлілік немесе k-өлшемдік көптүрлілік, бұл k параметрлерге немесе еркіндік дәрежелеріне ие жиынтық. Параметрлер осы көп түрліліктегі (жалпыланған) координаттар деп аталады.

«**Қара жәшік**», басым түрде жүйелітехникада жүйелерді белгілеу үшін қолданылатын, аталым, ол жүйелердің құрылымы мен ішкі үдерістері белгісіз немесе өте күрделі; мұндай жүйелерді оқып білу белгілі (берілген) кіретін ықпалдарға (дабылдарға) олардың реакцияларын зерттеуге негізделген.

Құрылымдық модель, ішінде моделденуші зерзаттың құрылымы (құрылысы) көрінеді.

Лагранжиан, формуланың лагранжі (Лагранж құрметіне аталған – Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736–1813) француз математигі және механигі), бұл формуланың соңғы өсімшелерімен бірдей.

Либрация (латын сөзі *libratio* – шайқалу, тербелу).

Лингвистика (латын сөзі *lingua* – тіл), тіл білімі түсінігімен мағыналас.

Линеаризация (латын сөзі *linearis* – сызықтық ету), сызықты емес жүйелердің (немесе тәуелділіліктердің) ең кең тараған талдау әдістерінің бірі, мұнда олар сызықтылар сияқты (нақтылы жорамалдармен) қарастырылады.

Мағыналық аспект өзімен моделденуші зерзат табиғатын физикалық суреттеуді көрсетеді.

Мазмұндық модель, қайсыбір ғылым тіліндегі модель құрылысы.

Маңыз-мәнді параметрлер, яғни параметрлердің кез келген аз өзгеруінде қарастырылушы зерзат шынында өзгереді.

Математикалық бағдарламалау, біршама шектелулермен (теңдіктермен және теңсіздіктермен) анықталатын жиынтықтардағы функциялардың экстремумдарын табу жайлы есептерді шешудің теориясы мен әдістеріне арналған математикалық пән.

Математикалық модельдеу, өзіне математикалық модельдерді тұрғызу мен зерттеу сияқты, есептеу алгоритмдерін және осы алгоритмдерді ЭЕМде іске асыратын бағдарламалар жасауды кіргізетін, қолданбалы математика облысына қатысы бойынша жиі қолданылатын аталым.

Математикалық модель – математикалық нышан көмегімен өрнектелген, сыртқы әлемнің қандай да бір құбылысын және үдерісін жуықтап сипаттау.

Механикалық модель, механика тілінде өзінің қасиеттерімен байланысқан шынайы зерзатты қарастырады.

Модельдеу, қайсыбір құбылыстарды, үдерістерді немесе зерзаттар жүйелерін олардың модельдерін тұрғызу және оқып білу жолымен зерттеу; сипаттамаларды анықтау немесе дәлдеу және қайта құрылыстырылған зерзаттарды тұрғызудың тәсілдерін ұтымдылау үшін модельдерді қолдану. Модельдеу – тану теориясының негізгі дәрежесінің бірі: модельдеу идеясына теориялық (мұнда түрлі тектегі таңбалық, дерексіз модельдер пайдаланылады) та, сондай-ақ эксперименталдық та (нәрселік модельдерді пайдаланатын) кез келген ғылыми зерттеу әдісі маңызы бойынша негізделеді; қоршаған әлемді оқып білу әдістерінің бірі.

Модель верификациясы (модельдің шындықпен жасалуы) – модель дұрыстығын нәтижені басқа белгілі деректермен, бөлектікте эксперименталдық берілулермен және тағы басқалармен салыстыру кезінде бақылау.

Модель дәлдігі, бұл мөлшерлік адекваттылық немесе парапарлық.

Модель идентификациясы (теңестірілуі) пайда болады, егер модель сызбанұсқасы таңданылған соң, оның параметрлерін, құрылымын, соған ұқсастарын анықтау талап етілсе.

Модельдің жеткілікті қарапайымдылығы, модель жеткілікті қарапайым бола алады, егер де біздің билігіміздегі зерттеу құралдары қолайлы мерзімде мүмкіндікті өткіздірсе және еңбек пен құралдар шығыны бойынша үнемдетсе, бірақ та – қойылатын мәселеден тәуелділікте – сапалы немесе сандық саналы дәлдікпен, зерттелуші қасиеттер талданса және нәтиже түсінілгенде.

Модель өнімділігі оқып білінетін зерзат массалар, ұзындықтар және соған ұқсастардың құрауыштары сияқты түрлі параметрлерді кіргізе алуымен, берілген деп саналатын функционалдық тәуелділікті кіргізе алуымен байланысқан және қарастырылатын шамалар (мысалы, серпімділіктің сызықты емес заңы жағдайындағы күш салу мен ауыспалылық арасындағы байланыс) арасындағы байланысты сипаттайды.

Модель постулаттары, гипотеза (негіз, болжам) түсінігімен мағыналас.

Модель толықтығы бір параметрді анықтауда ол толық, ал басқаны анықтауда толық емес қағидалы мүмкіндік береді.

Модифицирлеу полимерді, олардың қасиеттерін топмолекулалық құрылымды реттеу (кристалдауды тудырушыларды енгізу, термалық өңдеу) жолымен бағыттап өзгерту немесе молекуланың химиялық құрамын (реакцияласуға қабілетті топты және басқаларды енгізу) өзгерту. Мысалы, пластмассаның соққылық беріктігін арттыру үшін, химиялық талшықтар боялуын жеңілдету үшін қолданылады.

Монте-Карло әдісі, статикалық сынау әдісі, сандық әдіс, математикалық есептерді шешу кездейсоқ үдерістерді және оқиғаларды модельдеу көмегімен жүргізіледі.

Мөлшерлік модель қасиеттердің қайсыбір мөлшерлік сипаттамаларының өзгеру бағыттары, олардың өзара байланысы, бірте-бірте дамуы және соған ұқсастары жайлы дұрыс қорытынды шығарады.

Навье–Стокс теңдеуі, 1822 жылы енгізілген тұтқыр сұйық пен газ қозғалысының дифференциалдық теңдеуі. А. Навье (француз инженері және ғалым) мен Дж. Стокс (ағылшын физигі және математигі) есімдерімен аталған.

Оңтайландыру немесе **оңтайлау (оптимизация)**, нақты критерийлерге және мәселелерге мүмкіндігінше сай келетін, аталым ретінде латын сөзі *optimus* – үздік аталуынан шыққан. Оңтайландырудың негізгі мәселесі болатын ең кіші жоғалтулар кезінде ең жақсы нәтижелерге жету.

Плебей, ежелгі Римде басы бос, бірақ саяси тең құқығы жоқ төменгі топтың адамы; орта ғасырларда және одан кейінгі кезде капиталистік елдердегі қала кедейлері тобының өкілі.

Плебисцит (латынша *plebiscitum*, *plebs* – жай халық және *scitum* – шешім, қаулы), 1) Ежелгі Римде плебейлер жиналыстарымен қабылданылған қаулы. 2) Халық дауыс беруі түрлерінің бірі. Халықаралық қатынастарда бұл сөз халықтың жерге орнығуының қайсыбір мемлекетке жататыны жайлы сұрауда қолданылады.

Полиграфия (грек сөзі *polygraphia*, сөзбе-сөз – көпсуреттеу), 1) техника саласы, баспа өнімдері – кітаптар, газеттер және соған ұқсастарды өндіруге арналған техникалық құралдар жиынтығы. Полиграфиядағы негізгі өндірістік үдерістер: баспа үлгілерін даярлау, меншікті түрде басу және басылған өнімді әрлеу. 2) полиграфиялық өнеркәсіппен мағыналас (баспа өнімін даярлайды).

Процесс (латын сөзі *processus* – жылжу, алға басу, жылжыту), үдеріс, 1) қайсыбір дамудағы құбылыстырдың, күйлердің рет-ретімен ауысуы; 2) нәтижеге жету үшін атқарылатын іс-әрекеттер жиынтығы (қосындысы) (мысалы, өндірісте өнім шығару үшін); 3) материалға әсер етудің нәтижесінде оның қасиеттерінің өзгеруі, яғни заттың бір түрден екінші түрге өзгеруі (мысалы, қағаздан жартылай өнім, одан кейін дайын өнім шығуы).

Псевдо… (грек сөзі *pseudos* – жалған, өтірік), күрделі сөздердің бөлігі, білдіретін мағынасы: бір мағынада жалғандық, екінші мағынада бояма, жорылған, алдамшы, жорымал (мысалы, псевдоғылым).

Релаксация (латын сөзі *relaxation* – әлсіреу, босаңсу), бөлшектердің көп санынан тұратын физикалық жүйеде термодинамикалық тепе-теңдікті (толық немесе жартылай) қалыптастыратін үдеріс.

Сапалық әдістер, көмегімен шешілім қасиеттерін, оны тұрғызбай-ақ, берілген басқару қасиеттерін талдау жолымен оқып біледі.

Сапалық модель, қажеттігіне қарай, мұнда мөлшерлік заңдылықтар анықтылығы толық емес айқындалады (мысалы, кейбір әлеуметтік немесе биологиялық ғылымдарда).

Сепаратриса – ерекше траектория.

Симплекс (латын сөзі *simplex* – жай), n өлшеулердің берілген санынан құрылған қарапайым дөңес көпжақтылық. $n = 3$ кезінде үшөлшемдік симплекс өзімен еркін тетраэдрді көрсетеді. Екіөлшемдік симплекспен еркін үшбұрыш, ал бірөлшемдікпен – кесінді түсініледі. Нөлөлшемдік симплекс жай нүкте ғана.

Симплекс-әдіс, мұның негізіне мүмкін көпжақтылықтың ұштарын іріктеп алуды реттейтін идея жатады.

Симуляция (латын сөзі *simulatio* – қулық, сылтаулату) (медицинада), сырқаттануды бейнелеу немесе оның белгілерін сол сырқатпен азаптанбайтын адаммен бөлектеу. Әдейі жасалған қулық әдетте пайдақорлықты (әскери қызметтен бойды аулақ салу, материалдық жеңілдік алу және басқаларды) іздейді.

Сипаттамалық теңдеу, $\det(A - \lambda I) = 0$ түріне ие n дәрежелі алгебралық теңдеу, мұндағы A – шаршылық матрица, I – n ретіндегі бірлік матрица.

Сплайн – бұл үзімді-полимиалдық функция, мұның үзімдерінің қабысуы нүктелерінде оның өзі және туындыларының нақты сандары үшін үзіксіздік жағдайлары қанағаттанады.

Статикалық модель, уақытпен өзгермейтін модель.

Стационарлық модель, бұл модельде үдерістер өтеді, бірақ зерттелуші зерзат уақыт өтуімен өзгермейді деп саналады.

Стохастикалық (грек сөзі *stochastikos* – болжап біле алатын; ойлап таба алатын), кездейсоқ, ықтимал.

Стохастикалық модель, ықтималдық модельмен мағыналас.

Стохастикалық үдеріс, кездейсоқтық үдеріспен мағыналас.

Сызықтық бағдарламалау, математикалық бағдарламалау бөлімдерінің бірі, мұндағы зерттелетін функция сызықты (1-ші дәрежелі) және ол сызықтық теңдеулермен, теңсіздіктермени берілген жиынтықтарда берілген.

Сызықтық еместік модель, мұнда суперпозиция қағидасы орындалмайды.

Сызықтық модель, мұнда суперпозиция (қосылыстыру; яғни кірулерді қосқан кезде шығулар да қосылысады, ал кіру кез келген санға көбейтілген кезде шығу да сол санға көбейтіледі) қағидасы орындалады.

Теңсіздік (математикада), басқасынан қайсысының үлкен немесе кіші екенін көрсететін сандар арасындағы арақатынас.

Траектория, қозғалыс үдерісінде бөлшектің суреттеп өтетін сызығы.

Түрлендірулік есептеудің тікелей әдістері, бұлардың көмегімен функционал экстремумының есептерін жуықтап шешу Эйлер теңдеуіне назар салмай-ақ, осыған ұқсас еркін дәрежесінің шектеулі саны бар есепке алып барады.

Үзіксіз модель кейбір аралықтың барлық мәндерін қабылдайды.

Фазалық көп түрлілік, бұл күйлердің көп түрлілігі.

Фазалық портрет – фазалық жазықтықтағы барлық траекториялардың жиынтығы.

Финитизм (латын сөзі *finitus* – айқын, белгілі; аяқталған, біткен), қисынды-математикалық тұжырымдама, бұған сай метатеорияға әдеттегі тіл аталымдарында жүретін пайымдаулардың финиттік (сезімтал айқын, даусыз) құралдары ғана жіберіледі.

Функционалдық модель, зерзат қалай қызмет етеді – мысалы ол сыртқы әсерге қалай ықпал етеді, соны ғана көрсетеді.

Фрагмент (латын сөзі *fragmentum* – сынық, кесек, шағым, тілік), өнер туындыларының бөлігі, мәтін үзіндісі.

Фунт (латын сөзі *pondus* – салмақ, ауырлық), ағылшындық өлшемдер жүйесіндегі массаның негізгі бірлігі, белгіленуі 1b. 1Ф. (саудалық) = 0,45359237 кг, 1Ф. (дәріханалық пен тройскілік, немесе ақшалық) = 0,37324177 кг; 2) *орыстық өлшемдер* жүйесіндегі масса бірлігі, 1Ф. = 0,40951241 кг = 1/40 *пұтқа* = 32 *лоталарға* = 96 *мысқалдарға* = 9216 *үлестерге*.

Цапфа (неміс сөзі *Zapfen*), білік осінің тіреу болатын бөлігі. Цапфа білік шетінде шип (тікенек немесе тиек), ал орта бөлігінде – шейка (мойын жері) деп аталады.

Шпиндель (немісше *Spindel*, сөзбе-сөз – ұршық; техникада айналатын ось, яғни ұршық білік).

Ықтималдық модель кездейсоқ құрауыштарды – статикалық заңды қанағаттандыратын скалярлық немесе векторлық шамаларды, кездейсоқ жүйеліліктерді немесе функцияларды, кездейсоқ құрылымдарды және соған ұқсастарды өзіне қоса алады.

Эволюциялық модель, динамикалық модельмен мағыналас.

Қысқартулар тізімі

АЖЖ – автоматтандырылған жобалау жүйесі;
АСОГ (*Analitical Solution of Groups*);
Детерминация (латын сөзі determinatio – шектеу, анықтау);
ЖІҚ –жұмыс істейтін құжаттау;
МДЖ – магнит-динамикалық жүйе;
НБ – нобайлық (эскиздік) жоба;
Осциллятор (латын сөзі *oscillo* – шайқаламын), тербелетін жүйе;
Ротация (латын сөзі *rotation* – айналып оралу);
СЕМ – сандық есептеуіш машина;
Техн.ж – техникалық жоба;
ТТ – техникалық тапсырма;
ТҰ – техникалық ұсыныс;
ЭЕМ – электронды есептеуіш машина;
ЭҚК – электр қозғаушы күш;
ЮНИКВАК (*UNIQVAC – universal quasy chemical*);
ЮНИФАК (*Universal Functional Model of Coefficient Activity*);

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. Левин Ю. С. Производственные процессы в полиграфии: проектирование и расчет. [Текст]: Учебник для вузов по специальности «Технология полиграфического производства» / Ю. С. Левин, П. А. Матвеев, К. -Д. Маудрих. –Москва –Лейпциг: Книга, 1985. – 320 с.

2. Кафаров В. В., Глебов М. Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с. ISBN – 5-06-002066-5.

3. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. Курсовое проектирование: [Для вузов по специальности «Автоматизирование путем управления»]. –М.: Высшая школа, 1998, – 133 с..

4. Кафаров В. В. Методы кибернетики в химии и химической технологии: Учебник для вузов по специальности «Основные процессы химических процессов и химической кинетики». – М.: Химия, 1985. – 448 с.

5. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990, – 264 с. ISBN 5-217-00861–X.

6. Сойер Б., Фостер Д. Л. Программирование экспертных систем на языке Паскале. Перевод с английского. –М.: Финансы и статистика, 1990, – 191 с.

7. Одинокова Е. В. Проектирование полиграфических машин: Учебник для вузов / Е. В. Одинокова, Г. Б. Куликов, И. Ш. Герценштейн; Моск. гос. ун-т печати. – М.: МГУП, 2003. – 411 с. ISBN 5-8122-0307-5.

8. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с. ISBN 5-02-015186-6.

9. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.

10. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, исправленное. –М.: КомКнига, 2007. – 192 с.

11. Опыт имитационного моделирования исторического процесса. Гусейнова А. С., Павловский Ю. Н., Устинов В. А. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 160 с.

12. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 568 с.

13. Каган А. В. Математическое моделирование в электромеханике: Задания на практические работы. Методические указания к выполнению практических работ. –Санкт-Петербург, 2004. –57 с.

14. Каган А. В. Основы моделирования в электромеханике: Учеб. пособие. –СПб.: СЗПИ, 1995, –58 с.

15. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высшая школа, 2001, –327 с.

16. Веников В. А., Веников Г. В. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1984, –439 с.

17. Каган А. В. Математическое моделирование в электромеханике. Ч.2: Письменные лекции. СПб.: СЗТУ, 2002. –74 с.

18. ҚАЗАҚША-ОРЫСША, ОРЫСША-ҚАЗАҚША ТЕРМИНОЛОГИЯЛЫҚ СӨЗДІК. ХИМИЯ. Республикалық мемлекеттік «Рауан» баспасы. –Алматы: 2000. –324 б.

19. ҚАЗАҚША-ОРЫСША, ОРЫСША-ҚАЗАҚША ТЕРМИНОЛОГИЯЛЫҚ СӨЗДІК. ЭНЕРГЕТИКА. Республикалық мемлекеттік «Рауан» баспасы. –Алматы: 2000. –320 б.

20. ҚАЗАҚША-ОРЫСША, ОРЫСША-ҚАЗАҚША ТЕРМИНОЛОГИЯЛЫҚ СӨЗДІК. Жалпы техника және полиграфия. Республикалық мемлекеттік «Рауан» баспасы. –Алматы: 2000. –352 б.

21. Бәзілов Ж.Ж. Баспа, полиграфия және іс жүргізу терминдерінің орысша-қазақша түсіндірме сөздігі. – Алматы: Мектеп, 2012. –480 б.

22. Егінбаев Ж.Е., Баешов А.Б. Кванттық химия. Оқулық. –Алматы, 1999. –147 б.

23. Егінбаев Ж.Е., Баешов А.Б. Кванттық химияның есептеу тәсілдері. Оқулық. –Алматы: 1999. – 71 б.

24. Егінбаев Ж.Е., Баешов А.Б. Шешу жолдары көрсетілген химия есептері. Оқу құралы, – Түркістан: –ХҚТУ, 2002. –210 б.

25. Егінбаев Ж.Е., Баешов А.Б. Физика-химиялық анализ әдістері. Оқулық. – Шымкент. –ХҚТУ, 2003. –118 б.

26. Егінбаев Ж.Е., Баешов А.Б. Физикалық және коллоидтық химия пәні бойынша әдістемелік нұсқаулар мен лабораториялық жұмыстар. Оқулық. Шымкент. –ХҚТУ, 2003. –160 б.

27. Егінбаев Ж.Е., Шоқанов Ә.Қ. Шешуі көрсетілген физика курсы есептері жинағы. Оқу құралы. – Алматы: ЖСШ РПБК «Дәуір» баспасы, 2008. –192 б.

28. Егінбаев Ж.Е. Оптоэлектроника және сканерлеуші жүйелер. Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2010. –269 б.

29. Ермағанбетов М.Е., Егінбаев Ж.Е., Архипова И.А. Қасиеттері ерекше полимерлер. Оқу құралы.– Алматы: Абай атындағы ҚазҰПУ, 2011. –155 б.

30. Егінбаев Ж. Е. Винилдік мономерлерді полимерлендіру үдерістерінің теориялық негіздері. Монография.– Алматы: Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ, 2013. –287 б.

МАЗМҰНЫ

Жетпісбай Егінбайұлы Егінбаев

ПОЛИГРАФИЯЛЫҚ ҮДЕРІСТЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Оқу құралы

(5В072200 – Полиграфия мамандығы үшін)

Редакторы З. Ғұбайдулина
Техн. Редактор А. Бейсебаева

Басуға ……… 2015ж қол қойылды.
Таралымы ... дана. Пішімі 60х84 $^{1}/_{16}$. №1
Көлемі.... б.т. Тапсырыс №.... Бағасы келісімді

Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰЗТУ баспа орталығы
Алматы қаласы. Сәтбаев көшесі 22.