ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

А.К. Иманбаева

АҚПАРАТ ЖӘНЕ ЭНТРОПИЯ ТЕОРИЯСЫ

Оқу құралы

Алматы
«Қазақ университеті»
2017

ӘОЖ 004 (075.8)
КБЖ 32.81 я 73
И 50

Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
физика-техникалық факультетінің
Ғылыми кеңесі және Редакциялық-баспа кеңесі
шешімімен ұсынылған
(№2 хаттама 29 желтоқсан 2016 жыл)

Пікір жазған
физика-математика ғылымдарының кандидаты ***Г.Л. Ғабдуллина***

Иманбаева А.К.
И 50 Ақпарат және энтропия теориясы: оқу құралы / А.К. Иманбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 92 б.
ISBN 978-601-04-2262-9

Оқу құралы әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың физика-техника факультеті «Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар» мамандығы бойынша оқитын студенттерге арналған.

Оқу құралында ақпарат және энтропия теориясының негізгі түсініктері мен фактілер келтірілген. Информацияны өлшеу, жіберу, өңдеу және таңбалау әдістері қарастырылған. Теориялық материал мысал және есептермен толтырылған.

ӘОЖ 004 (075.8)
КБЖ 32.81 я 73

ISBN 978-601-04-2262-9

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Ақпарат – біздің өмірімізде ең кең қолданылатын түсініктердің бірі. Бұл оқу құралында ақпарат ғылыми түсінік ретінде қарастырылған, сондықтан оны күнделікті қолданылатын ақпарат терминімен емес, ғылымдағы информация терминімен атаймыз. Информация – бұл іргелі ғылыми түсінік, оны алуға, жіберуге және өңдеуге болады. Информацияны алу үдерісі энтропияның өзгерісімен байланысты. Энтропия – бұл қандай да бір жағдайда анықталмағандықтың өлшемі; ақпарат теориясының негізгі түсініктерінің бірі.

Ақпарат және энтропия теориясы математиканың ықтималдық теориясы, математикалық статистика және ықтималдылық теориясы сияқты тарауларымен тығыз байланысты. Осы тараулар ақпарат теориясының математикалық іргетасы болып табылады. Басқа жағынан ақпарат теориясының өзі тарихи және тәжірибе жүзінде байланыс теориясының математикалық іргетасы деп айтуға болады. Бастапқыда бұл теория тек байланыс каналына арналған болатын. Көбінесе информация теориясын ықтималдық теорияның тармағы немесе байланыс теориясының бөлігі ретінде қарастырады. Сонымен, «Ақпарат және энтропия теориясы» пәнінің аясы өте тар, өйткені математика және байланыс теориясының қолданбалы (техникалық) аспектілерімен тығыз байланысты.

Ақпарат теориясы – информацияны, оның ағынын, байланыс каналдың мөлшерін және т.б. өлшеуге арналған математикалық теория, әсіресе радио, телекоммуникация және басқа байланыс құралдарына байланысты. Сондай-ақ пайдалы қасиеттеріне ие кодтардың құру әдістерін зерттейді.

1-тарау

КИБЕРНЕТИКА ҒЫЛЫМЫ

1.1. Кибернетика түсінігі

Ақпарат және энтропия теориясы кибернетиканың маңызды бөліктерінің бірі болып саналады.

Кибернетика (аударымы – басқару өнері) – бұл ақпаратты алу, сақтау, жіберу және өңдеудің жалпы заңдары туралы ғылым. Оның негізгі зерттеу заты – материялық табиғатына байланыссыз абстракт қаралатын, *кибернетикалық* деп аталатын *жүйелер*. Абстракцияның жоғары деңгейі кибернетикаға табиғаты әр түрлі, мысалы, техникалық, биологиялық және қоғамдық жүйелерді қарастыруға мүмкіндік береді. Абстрактілі кибернетикалық жүйе дегеніміз – бір-бірімен байланысқан жүйенің элементтері деп аталатын объектілер жиыны. Бұл элементтер мәліметтерді, деректерді қабылдау, сақтау, өңдеу және алмасуға қабілетті. Кибернетикалық жүйенің мысалдары: техникада автоматты реттеуші, электрондық есептеуіш машина, адам немесе жануардың миы, биологиялық популяция, социум. Басқару жүйесін құру жалпы принциптер мен ми жұмысын автоматтандыру жүйелерін құратын болғандықтан, көбінесе кибернетиканы жасанды интеллект әдістермен байланыстырады. Сондай-ақ кибернетика – табиғат пен қоғамдағы басқару мен байланыстың жалпы заңдары туралы ғылым; ал тәжірибелік мағынада күрделі жүйелер мен организмдердегі кері байланыс туралы ілім.

Абстрактілі кибернетикалық жүйе элементтерінің күйін параметрлер жиынының мәнімен толығымен сипаттауға болады. Кибернетиканың нақты қолдану үшін екі түрлі параметрді қарастыру жеткілікті. Бірінші ретті параметрлер үздіксіз деп аталатын қандай да заттық мәндерге ие, мысалы, –1-ден 2-ге дейін немесе $-\infty \div +\infty$. Екінші ретті параметрлер дискретті деп аталатын мәндердің шеткі жиынына ие, мысалы, кез келген ондық санға тең мән, «иә» немесе «жоқ». Кез келген тұтас немесе рационалдық санды дискретті параметрлер тізбегі көмегімен көрсетуге болады. Сонымен қатар санмен келтіруге болмайтын табиғаты сапалық шамалар үшін де дискретті параметрлерді пайдалануға болады. Осындай мақсат үшін сәйкесті шаманың барлық айырмалы күйлерін атап өту және қалай да белгілеу (мысалы, бестік жүйе бойынша) жеткілікті. Сөйтіп, келесі факторларды сипаттауға және енгізуге болады: жігерлілік, көңіл күй, қарым-қатынас және т.б.

Кибернетикалық жүйе элементтерінің күйі өздігінен және сыртқы сигналдар (қарастырылатын жүйенің сыртынан келетін) немесе жүйенің басқа элементтер әсерінен де өзгереді. Сондай-ақ әр элемент жалпы жағдайда өз күйіне және қарастырылатын уақыт моментінде кіріс сигналды қабылдауына байланысты шығыс сигналды тудыра алады. Бұл сигналдар жүйенің басқа элементтеріне (олар үшін кіріс сигнал ретінде) беріледі немесе толық жүйенің сыртына кететін шығыс сигналдың құрамына кіреді.

Кибернетикалық жүйе элементтер арасындағы байланысты ұйымдастыру жүйенің құрылымы деп аталады. Құрамы тұрақты және айнымалы жүйелерді айырады. Құрылымның өзгерісі барлық элементтер күйінің және толық жүйенің кіріс сигналдар функциясы ретінде беріледі. Сөйтіп, жүйені сипаттау үшін функциялардың үш жиынын қарастыру қажет:

1) жүйенің барлық элементтер күй өзгерісін анықтайтын функциялар;
2) элементтердің шығыс сигналдарын беретін функциялар;
3) жүйе құрамында өзгерісті шақыратын функциялар.

Егер осы функциялар қарапайым (бірмәнді) функциялар болса, *жүйе детерминделген* деп аталады. Егер барлық осы функциялар немесе олардың бірнешесі кездейсоқ функция болса, *жүйе ықтималдылық* немесе *стохастық* деп аталады. Егер көрсетілген жүйені сипаттау үшін функцияларға оның бастапқы күйінің сипаттамасы, яғни жүйенің алғашқы құрылымы мен оның барлық элементтерінің алғашқы күйі қосылса, кибернетикалық жүйенің толық сипаттамасы шығады.

* * *

Басқа ғылымдарға қарағанда кибернетика 1948 жылы шыққан, бірінші жариялымның шығуы – [Wiener N. Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine. – New York: The Technology Press and John Wiley & Sons, Inc. – Paris: Hermann et Cie, 1948].

1.2. Кибернетиканың негізін қалаушылар

Кибернетиканың негізін қалаушылар болып Америка ғалымдары **Норберт Винер** (Wiener) және **Клод Шеннон** (Shennon – информация теориясының қалаушысы) саналады.

* * *

Норберт Винер (1894-1964, Колумбия қ., Миссури штаты) – атақты америкалық ғалым. Бала кезінен кітап оқуға құмар болған. 7 жасынан Дарвин мен Дантені оқып, 11 жаста орта оқу орнын, ал 14 жаста жоғары білім беру орнын (Тафтс колледжді) бітірген. Колледжде бірінші ғылыми атағын алған: өнер бакалавры. Осыған үлкен үлес қосқан оның әкесі – славистика профессоры, Ресей эмигранты – Норбертті өз оқу бағдарламасымен оқытқан.

Винер «математикалық логика» мамандығы бойынша философия докторы атағын Гарвард университетінде 18 жасында алды. Сонан соң ол Бертран Расселмен (ағылшын математигі және философы, Нобель лауреаты) Кембриджде және Давид Гильбертпен (неміс математигі, 1910-1920 жылдары математиктердің әлем көшбасшысы) Геттингенде жұмыс істеді. 1915 жылы Гарвард университетінің философия кафедрасында ассистент орнын алды, бірақ тек 1 жылға. Бірінші дүниежүзілік соғыс аяқталған соң Массачусетс технологиялық институтының (МТИ) математика кафедрасына оқытушы (instructor) болып қабылданды және өмір бойы осы институтта жұмыс атқарды.

1920-1925 жылдарды Винер өзінің математика саласында қалыптасу жылдары ретінде санайды. Заманауи абстракті математика әдістерімен күрделі физикалық және техникалық есептерді шығаруға ынталанады. Осы жылдары Винер броундық қозғалыс, потенциал теорияларымен айналасып, байланыс теориясына қажетті жалпыланған гармониялық анализді құрастырады.

1932 ж. Винер толық профессор атағын алады. Оның аты Америка және Европаның зиялы қауымдарын жаулап алады. Оның басшылығының астында диссертациялар жазылады, бірнеше кітап және ғұмырнамалары жарық көреді, соның ішінде «Жалпылама гармониялық анализ», «Таубер теоремалары», «Фурье интегралы және оның кейбір қолданыстары» және т.б. Неміс математигі Э. Хопфпен бірігіп жасаған жұлдыздардың радиациялық тепе-теңдігі туралы зерттеуі ғылымға «Винер-Хопф теңдеуі» ретінде енген. Белгілі аналогты есептеуіш машиналардың құрастырушысы Ванневар Буш Винерді радиолокациялық стансалардан алынған ақпарат негізінде зенит отынын басқаруына байланысты математикалық есептерді шығаруға ынтықтырды. Ақырында Винер Англия үшін шайқастың қатысушысы болды, осы арқылы Алан Тьюрингпен таныса алды. Тьюринг – әйгілі математик, жасанды инттеллект теориясын қалаушылардың бірі, материяның өз қауымдығының болмысын дәлелдеген, барлық заманауи компьютерлердің түп бейнесі болып есептелетін «Тьюринг машинасының» құрушысы.

«Адам және компьютер» мәселесіне Винердің көзқарасын қалыптастыруға Мексика психологы және кардиологы Артуро Розенблют әсер еткен, кейіннен «Кибернетика» кітабын Винер А. Розенблютке арнаған. Әр ғылымдардың өкілдерін біріктіріп, Розенблютпен ұйымдастырылған азат әдістемелік семинарына Винер де қатысады. Бұл семинар «винерлік кибернетиканың» пайда болуына үлкен үлес қосқан. Розенблютпен достығы Винерді биология және медицина саласы әлеміне енгізді. Оның ақылына заманауи ғылым мәселесінің кең синтетикалық амалы туралы ой бекітіледі.

«Адам және компьютер» мәселесіне Норбер Винер бірнеше себептермен айналысқан. Ең алдымен, оны техникада, тірі табиғатта және қоғамда коммуникацияның сұрақтары қызықтырады. Адам мен компьютердің байланысу мәселесімен зор ғылыми әлеуеті бар зерттеуші айналысқанын айта кету қажет. Қазір біз ақпаратты технологиялар деп атайтын салаға классикалық университеттік және академиялық мәдениетке ие ғалым келгенін білеміз (мұндай мәдениеттен қазіргі заманда мәңгіге айырылған да шығармыз).

Винердің компьютерлермен байланысты ешқандай тәжірибелік жұмыстары жоқ болуына таңғалу керек емес, оны сол кезде маңыздырақ сұрақтар мазалады. Винер кибернетикалық философияның негізін салушы болды, яғни өз мектебінің негіз салушысы. Оның сіңірген еңбегі осы философиясын оқушылары мен жолын қуушыларға бергені, бірнеше қатар жұмыстарға қатысты, ақырында, ғаламтордың дүниеге келуіне әкелді. Винер есептеу машиналардың пайдалы нәтижелерді өз бетімен туғыза алады деген сол кезде кең таралған пікірмен келіспеген. Есептеу машиналарға тек деректерді өңдеуге арналған құрал функциясын, ал адамға пайдалы нәтижелерді алу функциясын жатқызған. Бірақ сол кездерде осы мәселенің шешімін табу өте күрделі болғандықтан, яғни мәселенің философтық түсінігімен технологиялық іске асырудың орасан зор алшақтығы (бұл мәселе пәнаралық деңгейде жатқаны түсінікті болған), Винерді МТИ-да әр саланың мамандарын тарту арқылы апталық семинарды ұйымдастыру қажеттілігіне әкелді.

Семинар 1948 ж. көктемде жұмысын бастады. Винер тар мамандандырудың, ғылымды сансыз ұсақтаудың жауы болған, сондықтан семинарға әр түрлі мамандар – математиктер, инженерлер, психологтар, философтар, медиктер, биологтар және т.б. келтірілген. Бастапқыда, жаңа ғылымның жалпы тілінің қалыптасуына біраз уақыт кетсе де семинар өте нәтижелі болды.

Соңында интернет желісінің бірінші негізін қалайтын ойлары ретінде қарастыруға болатын бірнеше принципті тұжырымдамаларды жасап шығару сәтті болды.

Біріншіден, семинарда талқылаулар барысында келесі жорамал айтылды: *компьютер коммуникацияның ең маңызды құралдарының бірі болу керек* (50-жылдары компьютерді байланыстың құралы ретінде елестету оңай болмаған). Бірінші компьютерлік желінің пайда болуына 15 жылдай уақыт әлі бар еді. Ethernet протоколының ойлап шығарушысы Роберт Меткалф компьютердің туралы: «Communication is the most important thing computers can do» (коммуникация – компьютердің жасай алатын істерінің ең маңыздысы), – деп айтқан.

Екіншіден, қазіргі кезге айқын тұжырымдама шығарылды: *компьютер интерактивті өзара іс-әрекетті режімде қамтамасыз етілуі керек*. Сол жылдары компьютердің шеттегі (перифериялық) құралдардан тек перфотаспа немесе перфокарталардан енгізу құралдары және қарадүрсін принтерлер болған.

Интерактивті режім ұрықтық түрде ішінара өз уақыты үшін Whirlwind («Дауыл») бірегейі компьютерде 1950 ж. МТИ-да іске асырылған. Оның жасауында Винер семинарының мүшелеріне белсене қатысты. Тап осы компьютерге алғашқыда алфавитті-цифрлі пернетақта қосылған.

Осылайша, кибер кеңістіктің екі анық құраушысы – компьютер коммуникация құралы және интерактивті режім ретінде Винер басшылық еткен семинарда аталған.

Интернет тарихына тағы бір жағдай маңызды. Желінің көп жасаушылары үшін Винердің семинары мектеп болды. Олардың ішінде Джон Ликлайдер бар, бірнеше уақыттан соң ARPANet жобасы жұмыс барысында желінің бірінші жобасының түйін тұлғасын құрастырған.

Ноберт Винер өмірінің соңғы жылдары философиялық және этикалық сұрақтарға терең көзқараспен қараған. Осындай ойлары «God and Golem», «Мен – математик» және «Бұрынғы вундеркинд» кітаптарында жазылған.

Винер өзін танымал философиялық мектептерге қоспайды. Ол материализмді механицизмге келтіреді, бірақ идеализмді қабылдамайды. Осындай ойларымен ол Н. Бор мен М. Борн сияқты атақты физик достарына жақын келеді.

Кездейсоқтық табиғатта шындығында бар және жаңа физика Ньютон мен Лапластың детерминделген физикасына қарағанда көбінесе стохасты болып келеді. Бірақ әлемнің жалпы механизмінде кездейсоқтыққа қандай рөлді беру мәселесі болып тұр. Қажеттілік пен кездейсоқтық, детерминизм мен ықтималдық қатынастары заманауи жаратылыстанудың ең күрделі мәселесі – кездейсоқтықтың өзі қажеттіліктің белгілі заңдарына бағынады, оларсыз ықтималдық теориясы болмас еді.

Винер стохастық жаратылыстанудың қалаушысы ретінде американдық физик У.Дж. Гиббсті айтады және өзін соның түпкі ойларының жалғастырушысы деп көреді. Винердің ықтималдық әлемінде реттілік хаоспен күреседі, бірақ ықтималдылығы кем күй болғандықтан шайқастан сөзсіз ұтылады.

Батыс елдерін интеллектуалды және моральды зауалға кетіп бара жатыр деп санап, Винер Шығысқа, оның ежелгі мәдениетіне көп көңіл аударған. «Шығыстың ұлы мәдениетіне қарағанда еуропалық мәдениетінің басымдылығы адамзаттың тарихындағы тек уақытша оқиға», – деп Винер жазған. Ол өзін жеке ататек жағынан Шығысқа қатысты деп ойлаған, дегенмен жалпы өзін америкалық деп санаған.

1963 ж. математика, техника және биологиялық ғылымдар саласында үздік еңбек сіңірген үшін Винер Америка ғалымдарының жоғары белгісі – Ғылымның ұлттық медалімен марапатталды. 1964 ж. ақпан айында «United States News and World Report» журналы Винердің соңғы «Адамдарға қарағанда машиналар ақылдырақ па?» сұхбатын жариялайды.

Кибернетиканың қалаушысы Норбер Винер 1964 ж. 18 наурызда 69 жаста дүниеден озды.

* * *

Винердің «**Кибернетика**» кітабының негізгі түйіндемесі – машиналар, тірі организмдер және қоғамда (хайуандар немесе адамдар қоғамы болса да) басқару мен байланыс үдерісінің ұқсастығы. Бұл үдерістердің мағынасы, ең алдымен, *информацияны,* яғни түрлі сигналдарды, хабарламаларды, мәліметтерді *беру, сақтау және өңдеу* болып табылады. Нақты мағынасы мен мақсатын ескерусіз кез келген сигналды, кез келген ақпаратты белгілі ықтималдылығы бар екі немесе бірнеше мән арасында қандай да бір *таңдау* деп қарастыруға болады. Осындай көзқарас барлық үдерістерге бірдей өлшеумен, бірдей статистикалық аппаратпен қарауға мүмкіндік береді. Осы себептен басқару және байланыстың жалпы теориясы – кибернетика туралы ой. Информация мөлшері, яғни таңдау санын Винер *теріс энтропиямен* теңестіреді, табиғаттың ең іргелі сипаттамасы зат немесе энергия мөлшеріне тән. Кибернетика ғимаратының екінші іргетасы осындай. Осы себептен кибернетиканың түсіндірмесін ұйымдастыру теориясы, әлемдік хаоспен, энтропияның қатерлі өсуімен айқасу теориясы деп білеміз.

Әрекеттегі объект информацияны сыртқы ортадан жұтады да, оны дұрыс тәртіпті таңдау үшін қолданады. Информация ешқашан жасалмайды, тек беріледі және қабылданады, бірақ осы кезде ол жойылуы мүмкін. Информация объектіге жету жолында және оның ішінде бөгеуіл, шуылдармен бұрмаланады. Энтропиямен айқас – бұл информацияны бұрмалайтын шуылмен айқас.

«Кибернетика» кітабы ғылым тарихында *мәлімет* ретінде болмаса да *сигнал* ретінде өз рөлін атқарды.

* * *

Клод Шеннон (1916-2001, Гэйлорд қ., Мичиган штаты) – американдық инженер және математик. Информация және байланыстың заманауи теориясының қалаушысы деп аталған ғалым. Жас Клод механикалық және автоматтық құрылғыларды құрастыруға әуестенген. Ол ұшақтардың модельдерін және радиотехникалық тізбектерді жинаған, радиомен басқарылатын қайықты құрған және өз үйімен досының үйінің аралығында телеграф жүйесін құрастырған. Соңынан математика профессоры болған апайы Кэтриннің әкелген математикалық есептер мен жұмбақтарды шешкен. Әйгілі Томас Эдисон – оның аталас ағайыны.

1932 жылы Мичиган университетіне түсіп, математика және электртехника мамандары бойынша бакалавр дәрежесін алды. Университетте Джордж Бульдің жұмыстарымен танысты. 1936 ж. оқуын бітіріп, Массачусетс технологиялық университетінде Ванневар Буштың дифференциалдық анализаторында – аналогты компьютерде ассистент-зерттеуші ретінде жұмыс істеді. Анализатордың күрделі, тар шеңберде мамандандырылған электртізбектерін зерттеу кезінде Шеннон Бульдің концепциялары лайықты қолдау табатынын көрді. 1937 жылғы магистрлік диссертациясынан жазылған «Реле және коммутаторларды символдық талдау» мақаласы 1938 жылы Америка инженер-электриктер институтының (AIEE) басылымында жарық көрді. Осы мақала 1940 ж. Шеннонға Альфред Нобель атындағы сыйлығын тапсырудың себебі болды.

Цифрлік тізбектер бұл заманауи есептеуіш техниканың негізі болып табылады, сондықтан Шеннонның жұмыстары XX ғасырдың ең негізгі ғылыми нәтижелеріне жатады. Гарвард университетіндегі атақты американдық психолог, клиникалық психология және нейропсихология облысында танымал маман, көптік интеллект түсінігінің авторы Говард Гарднер Шеннонның жұмысы туралы: «Мүмкін ең маңызды және ғасырдың ең әйгілі магистрлік жұмысы», – деп пікір білдірген.

К. Шеннон Массачусетс технологиялық университетінде «Теориялық генетика үшін алгебра» атты докторлық диссертациясын 1940 жылы қорғайды: математика саласында докторлық дәрежесін және электртехника бойынша магистр атағын алады. 1941-1956 ж. Мичиган университетінде сабақ береді әрі телеграфтық және телефондық Bell Labs компаниясында жұмыс істейді. Осы компанияның Bell атты математикалық лабораториясында логикалық функцияларға қажетті ауыстырып қосу тізбектерді зерттейді, нәтижесінде 1940 жылдың аяғында Шеннон Ұлттық ғылыми зерттеу сыйлығын алады. Екінші әлемдік соғысы кезінде жаудың ұшақтарын табу жабдықтарын жасауға және криптографиялық жүйелерді дамытуға, соның ішінде мұхит арқылы Черчилль мен Рузвельттің келіссөздерін қамтамасыз ететін үкімет байланысын орнатуға қатысқан. Кейін криптография саласындағы жұмысы оны информация теориясын құруға түрткі болды.

Шеннонның бастапқы мақсаты – электрлік шуылдар әсерінде болатын телеграфты немесе телефондық канал бойынша өтетін ақпараттың жіберуін жақсарту. Ол мәселенің ең жақсы шешімі ретінде ақпаратты тиімді орау екенін тез түсінді.

1950-1956 ж. Шеннон, фон Нейман мен Тьюринг жұмыстарын жалғастырып, логикалық машиналарды құрумен айналысты. Ол алғашқы рет шахмат ойнай алатын машинаны, лабиринттен шығу жолын іздеу жаттықтырушы машинасын құрды. Жапонияда 50-жылдары шығарылған ең алғашқы радиобайланысты өнеркәсіптік ойыншықтың құраушысы болды.

Шеннонның ең маңызды жұмысы оны әлемге танымды еткен – 1948 жылы басылымға шыққан «Байланыстың математикалық теориясы» мақаласы. Бұл мақалада информацияны жіберу, сақтау және өңдеу заманауи теориясы мен техникасының фундаменті қаланған.

Р.В. Хартлидің идеяларын толықтырып, Шеннон байланыс канал арқылы жіберуге тиісті мәліметтердегі информация түсінігін енгізді. Хартли, M мәліметтегі I информация мөлшері ретінде $I = \log(M)$ логарифмдік функцияны қолдануын ұсынған. Шеннонның толықтыруы келесідей болды: ол алғашқы рет жіберілетін мәліметтердің және каналдағы шуылдардың статистикалық құрылымын, бұдан басқа тек шекті емес, мәліметтердің үздіксіз жиынын да қарастырды. Ол информация мөлшерін термодинамика мен статистикалық физикадағы тәртіпсіздік мөлшері ретінде белгілі *энтропия* арқылы анықтады, ал информацияның бірлігі ретінде соңынан «бит» деп аталған шаманы алды, яғни бірдей ықтималдылығы бар екі нұсқаның біреуін таңдады. Өзінің информация мөлшері анықтамасына негізделіп, Шеннон шуылды каналдың өткізу қабілеті туралы теоремасын дәлелдеді. Қазір оның атындағы бұл теорема Шеннонның 1957-1961 ж. жұмыстарында жарық көрді. Кез келген шуылданған байланыс каналы Шеннонның шегі деп аталатын информацияны жіберу өзінің шекті жылдамдығымен сипатталады. Осы шектен жоғары жылдамдықтар кезінде берілетін информацияда қателер болуы мүмкін. Ал шектің төменгісіне қарай кез келген шуылданған каналда сәйкесінше информацияны кодтау әдісімен қателіктің ықтималдылығын азайту арқылы жақындауға болады.

Шеннонның информация теориясы байланыс теориясының екі негізгі мәселесін шешуге мүмкіндік берді: мәліметтердің артықтығын жою және шуылды каналдар арқылы жіберілетін мәліметтерді таңбалау. Бірінші мәселенің шешуі байланыс каналды тиімді қолдануына әкеледі. Екінші мәселенің шешуі қабылдау жерінде белгілі сигнал/шуыл (*S/N*) қатынасы кезінде байланыс каналы арқылы мәліметтерді жоғары анықтығымен жіберуіне әкеледі. Ол үшін бөгеуге тұрақты кодтарды қолдану қажет, ал осы канал арқылы информацияның жіберу жылдамдығы оның өткізу қабілетінен аз болуы керек.

Шеннонның соңғы басылымға шыққан жұмысы (1960 ж.) кері байланысы бар информацияны жіберу жүйелерге арналған. Шеннонмен белгіленген байланыс канал арқылы информацияны жіберудің негізгі заңдылықтары бірнеше зерттеулерге бағыт берді: энтропия мен информацияның жалпы қасиеттерін зерттейтін қолданбалы математиканың жаңа саласына; телекоммуникация теориясының бірнеше жаңа қолданбалы бағыттарына; математикалық статистикада, физикада, психология мен лингвистикада.

Клод Шеннон 24 ақпан 2001 жылы альцгеймер ауруынан 84 жаста дүниеден озды.

Клод Шеннонның жұмыстары дүниежүзіне танымал. Ғылыми жетістіктері үшін Шеннон бірнеше рет марапатталды. Соның ішінде 1940 ж. Америка институтының инженер-электриктердің марапат үйғарған Нобель сыйлығы, 1941 ж. Радио инженерлер институтының (IRE) М. Либманның сыйлығы, 1966 ж. ғылымда табыстар үшін ұлттық медалі, 1985 ж. Киото сыйлығы (ең жоғары жапондық ғылыми марапат), 1985 ж. инженер-акустиктер қоғамының (AES) алтын медалі.

Кеңес академигі А.И. Берг келесідей кибернетиканы сипаттаған: «Кибернетика – бұл күрделі динамикалық жүйелерді басқару туралы ғылым. «Күрделілік» термині бұл жерде философиялық категория ретінде қолданылады. Өндіріс, табиғат және адам қоғамындағы динамикалық жүйелер – бұл дамуға, өз күйін өзгертуге дайын жүйелер. Күрделі динамикалық жүйелер бір-бірімен байланысқан және әрекеттескен бірнеше қарапайымдырақ немесе элементарлы жүйелер немесе элементтерден тұрады».

Кеңес кезеңінде кибернетиканың дамуына елеулі үлес қосқан академиктер – А.И. Берг және В.М. Глушков. Негізінде кибернетиканың өзі философияның бір түрі болып саналғандықтан, ал XX ғасырдың 50-жылдары Кеңес Одағындағы маркстіклениндік диалектикасының кейбір сұрақтарына қарама-қайшы болды, сондықтан кибернетика «жалған ғылым» деп жарияланған және оған тыйым салынған, бірақ оған қарамастан оның маңызды тараулары (соның ішінде информация теориясы да) жалпыланған «кибернетика» сөзімен байланыспай дамыған.

Жоғарыда айтқандай, Винер кибернетиканы статистикалық физикамен және энтропияның өсуіне қарсы күресімен байланыстырған. Кейінгі авторлар көбінесе осы байланыссыз кибернетиканы абстрактілі түрде, үдерістердің энергетикалық жағын қарастырмай, баяндауды ұнатады. Негізінен кибернетика ақпарат ұғымы төңірегінде жатады, дегенмен басқарудың жалпы теориясы, айта кетсек, қазіргі информация теорясынан (яғни байланыстың жалпы теориясынан) кеңірек.

1.3. Кибернетикалық жүйелердің топтамасы

Кибернетикалық жүйелер олардың ішіндегі сигналдардың өзгешеліктерімен ажыратылады. Егер барлық сигнал және жүйе элементтерінің күйі үздіксіз параметрлермен берілсе, жүйе үздіксіз деп аталады. Осы барлық шамалар дискретті болса, онда дискретті жүйе туралы айтылады. Аралас немесе гибридті жүйелерде екі типті шама болады. Кибернетикалық жүйелерді үздіксіз және дискреттіге бөлу белгілі бір дәрежеге дейін шартты болып келеді. Ол пәнді терең игеруіне, ал кейбірде ыңғайлығына байланысты.

Қазіргі кездегі кибернетиканың бірнеше негізгі бөлімдерге бөлінеді, яғни

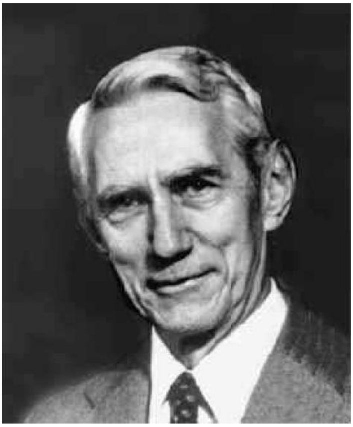
IT аза кибернетика (жасанды интеллект, 2-ретті кибернетика, компьютерлік көз, басқару жүйесі, тілдесу теориясы, эмердженттілік).

II Компьютерлік ғылым (робототехника, клеткалы автомат, стимуляция).

III Математика (динамикалық жүйе, информация теориясы, жүйелер теориясы).

IV Экономика және басқару (кибернетикалық басқару, экономикалық кибернетика, операцияларды зерттеу).

НОРБЕРТ ВИНЕР



КЛОД ШЕННОН

2-тарау

АҚПАРАТ ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ЕРЕЖЕЛЕРІ

2.1. Информацияның анықтамасы

Информация деп (**informatio** латын сөзі – түсіндіру, баяндау) бастапқыда адамдардың ауызша, жазбаша немесе басқа тәсілдермен (шартты белгі, техникалық құрал және т.б. көмегімен) жіберілген мәліметтер аталған. Бірақ ХХ ғасырдың ортасынан бастап информация жалпы ғылыми түсінік болды, өзіне келесілерді қабылдайтын:

1) адамдар, машиналар, адам мен машина арасындағы жариялым, мәліметтермен алмасу;
2) жануар және өсімдік әлеміндегі сигналдармен алмасу;
3) клеткадан басқа клеткаға, организмнен организмге қасиетті жіберу.

Материя және энергиямен қатар информация біздің әлемдегі бірінші түсінік болып табылады, сондықтан оның нақты анықтамасы жоқ. Бірақ оның негізгі қасиеттерін атауға болады:

1) информация адамға қоршаған әлемдегі іс жағдай туралы білім әкеледі;
2) информация материалды емес, бірақ ол дискретті белгі және сигналдар немесе уақыт функциялары ретінде материалдық тасушы ретінде білінеді;
3) информация бір белгіде немесе белгілердің өзара орналасуында болуы мүмкін (мысалы, «а», «д», «л» белгілер «адал», «дала», «ал» информациясын әкелуі мүмкін; «а» белгісі аялдама туралы информация болуы мүмкін);
4) белгі және сигналдар тек оларды тани білетін алушыға ғана информация әкеледі.

Есептің қойылымына байланысты біз информацияның ең барабар ***Шеннон анықтамасын*** қолданамыз:

Информация – алынған мәліметтің, хабардың нәтижесінде анықталмағандықтың азаю мөлшері.

Бұл информацияның классикалық анықтамасын К. Шеннон 1948 ж. «Байланыстың математикалық теориясы» жұмысында жазған.

Белгі деп алушымен айыратын кәдімгі материалдық объектілерді айтамыз: әріп, сандарды.

Сигнал деп динамикалық, яғни уақыт бойынша өзгеретін үдерістерді немесе табиғаты түрлі шамалардың (кернеу, қысым, электрмагнит өріс және т.б.) тербелістерін айтамыз.

Информация теориясында «белгі» және «сигнал» түсініктері көбінесе бір мағынаны білдіреді. Белгі немесе сигналдардан *мәлімет* деп аталатын тізбектер құрылады. Әр белгі немесе сигнал элементарлы мәлімет болады. Мәлімет немесе олардың тізбегі алушыға информация әкеледі. Белгілерді көбінесе мәліметті (информацияны) сақтауға, ал сигналды кеңістіктің бір нүктесінен басқа жеріне мәліметті тасымалдауға қолданады. Белгілердің (сигналдардың) барлық жиыны *алфавит* деп аталады.

Информацияны беру саласында мамандар информацияның сандық және сапалық сипаттамаларына – таңбалауына, шуылына, бөгеттерге назар аударады. Информатика мамандары информацияны табу, өңдеу, жіберу және сақтау, ғылым мен білімді информациялық қамтамасыз ету және т.б. мәселелерін қарастырады. Ықтималдық теориясында информация кездейсоқ оқиғалардың ықтималдылығы бір-біріне қарағанда аддитивті және сандық мөлшер ретінде енгізіледі. Генетиктердің көпжылдық зерттеулері биологиялық тұқым қуалау негізінде информация жатқанын көрсетеді.

2.2. Информацияның өлшем бірлігі

Аз информациясы бар хабарды көп информациясы бар айыратын критерийлерді қалай анықтауға болады?

Екі хабарды салыстырайық: *A* – күн шығады және *B* – ертең күн тұтылады. Бірінші (*A*) оқиғаның шындығында ешкімнің күмәні жоқ, ал екінші хабар (*B*) қызығушылық тудырады (баспасөзде кең қарастырады, белгілі ғалымдардан сұхбат алынады).

Осыдан мынадай нәтиже шығаруға болады: аз априорлы (тәжірибе алдында) ықтималдылығы бар оқиғалар көп информация әкеледі. Яғни информация I және оқиғаның ықтималдылығы P мынадай қатынаспен байланысқан:

$$I = f\left(\frac{1}{P}\right). \tag{1.1}$$

Белгісіз f функцияның түрін анықтау үшін жиынның өлшемі ретінде алынған информация мөлшердің аддитивтік қасиеті бар деп есептейміз, яғни екі когеренті 1 және 2 көзден түскен жалпы информация бөлек үлестің қосындысына тең болуы керек $I = I_1 + I_2$. Осы шарт орындалу үшін f функция келесі қасиетке ие болу керек:

$$f\left(\frac{1}{P}\right) = f\left(\frac{1}{P_1}\cdot\frac{1}{P_2}\right) = f\left(\frac{1}{P_1}\right) + f\left(\frac{1}{P_2}\right), \tag{1.2}$$

мұндағы P_1 және P_2 – екі тәуелсіз оқиғаның орындалу ықтималдылықтары. Осындай текті қасиеті бар жалғыз математикалық функция – ол логарифмдік функция, сондықтан

$$I = \log_r \frac{1}{P} = -\log_r P. \tag{1.3}$$

Біздің жағдайымыз үшін A оқиғасымен салыстырғанда B оқиғасында жатқан информация мөлшері $I(B/A)$, (1.2)-ге негізделіп ол келесі түрде жазылады:

$$I(B/A) = \log_r \frac{P(A,B)}{P(A)}, \tag{1.4}$$

$$P(A,B) = P(A)\cdot P(B/A),$$

мұндағы $P(A)$, $P(A, B)$ – сәйкесінше A оқиғаның және B мен A оқиғалардың бірге орындалу ықтималдылығы. $B = A$ оқиғаның пайда болуын A оқиға пайда болды деп мағыналауға болады. $I(A/A) = I(A)$ саны A оқиғасында жатқан $I(A)$ информацияның мөлшерін анықтайды:

$$I(A/A) = I(A) = -\log_r P(A),$$

I шамасы $0 \leq P \leq 1$ болғандықтан, әрдайым оң.

(1.3) формуладағы логарифмнің негізіне (r) байланысты информация мөлшері *бит* (логарифмнің негізі $r = 2$)*, дит* (негізі $r = 10$)*, нат*-пен (Эйлер саны негізі болатын натурал логарифм жағдайында $r = e$) өлшенеді.

Көбінесе ықтималдылығы бірдей екі оқиғаның біреуі орындалғаны туралы мәліметтегі мөлшерді информация мөлшерінің бірлігі ретінде алады. Мұндай информация мөлшерінің бірлігі *бит* немесе *екілік бірлігі* деп аталады. Мысалы, симметриялы тиынды лақтырған нәтижесінде алынған информация мынаған тең:

$$I = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 \text{ бит.}$$

Бит – ол өте аз бірлік, сондықтан көбінесе одан 8 есе көп шама қолданады: *байт* (*byte*). Байтты үлкен Б әріппен белгілейді. Басқа стандартты бірліктеріндегідей бит пен байт бірліктерінің туындылары бар: кило (К), мега (М), гига (Г), тера (Т), пета (П) және т.б. Бірақ бит пен байттар үшін олар 10-ның дәрежесін емес, 2-нің дәрежесін білдіреді:

кило – $2^{10} = 1024 \approx 10^3$,
мега – $2^{20} \approx 10^6$,
гига – $2^{30} \approx 10^9$,
тера – $2^{40} \approx 10^{12}$,
пета – $2^{50} \approx 10^{15}$.

Мысалы, 1КБ = 8 Кбит = 1024 Б = 8192 бит.

2.3. Информацияның түрлері

Белгі немесе сигналдардың реалды әлемнің объектілерімен бір мағыналық байланыстығына негізделген информация *семантикалық* немесе *мағыналық* деп аталады. Мәліметтегі белгілер (сигналдар) реті және олардың байланысында жататын информация *синтактикалық* деп аталады. Семантикалық информацияны алу тәжірибелік маңызы жоғары екендігі айқын. Бірақ семантикалық информацияның эффективті өлшемі жоқ. Ал синтактикалық информацияны өлшеуге болады, оның тәжірибелік құндылығы семантикалық информация (алушыға керек) берілген сигналдар тізбегінде жатқанында. Белгілі уақыт аралығында көп белгі берілсе, онда орташа (барлық мәліметтің ансамблі бойынша) көп мағыналық информация беріледі. Белгілер жалпы ғылымында (*семиотикада*) информацияның семантикалық және синтактикалық аспектілерінен басқа сигматикалық және прагматикалық аспектілері зерттеледі. Бірінші жағдайда объектілерді белгілеуге арналған белгіні таңдау (беру) сұрақтары, екіншіде информацияның тәжірибе жүзінде қолдануы, қойылған мақсатқа жетуге оның құндылығы қарастырылады. Қазіргі уақытта прагматикалық информацияның өлшем теориясы инженерлік қолдану деңгейіне дейін жеткізілмеген.

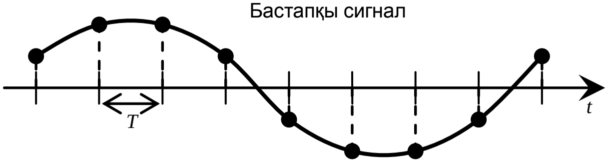
Информацияның жалпы келесі түрлерін айтуға болады (толық келесі тарауда жазылған): *дискретті* (*сандық*) және *үздіксіз* (*аналогты*). Дискретті информация қандай да бір шаманың тізбектік дәл мәнімен, ал үздіксіз информация үздіксіз үдерісімен сипатталады. Үздіксіз информацияны, мысалы, атмосфералық қысымның көрсеткіші немесе автомобильдің жылдамдық көрсеткіші көрсетеді. Дискретті информацияны кез келген сандық көрсеткіштен алуға болады: электронды сағат, магнитофонның санағышы және т.б.

Дискретті информацияны өңдеу өте ыңғайлы, бірақ үздіксіз информация тәжірибеде жиі кездеседі, сондықтан үздіксіз информацияны дискреттіге (*дискреттеу үдерісі*) және керісінше айналдыра білу қажет. Дискреттеу үдерісі толық екінші тарауда қарастырылған. Модем (бұл сөз модуляция және демодуляция сөздерінен тұрады) осындай аударуға арналған құрал: ол компьютерден алынған сандық берілгендерді дыбысқа немесе электрмагнитті тербелістерге – дыбыстың көшірмесіне аударады және керісінше.

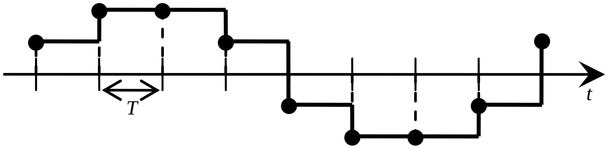
Үздіксіз информацияны дискретті түріне аударғанда үздіксіз шаманың мәнін анықтау периодын ($T = 1/\nu$) анықтайтын ν *дискреттеу жиілігі* маңызды (1.1-сурет).

Дискреттеу жиілігі жоғары болған сайын үздіксіз информацияны дискреттіге аудару дәлірегі артады. Бірақ бұл жиілік өскен сайын осындай аудару кезінде алынған дискретті берілгендердің де өлшемі және де оларды өңдеу, жіберу, сақтау қиыншылығы өседі.

Бастапқы сигнал



Дискреттелген сигнал



1.1-сурет

Дискреттеу дәлдігін арттыру үшін оның жиілігін шексіз өсіру міндетті емес. Бұл жиілікті Найквист (Nyquist) теоремасымен анықталатын шекке дейін өсіру дұрыс.

Кез келген үздіксіз шама бірнеше, бір-біріне беттестірілген, гармониктер деп аталатын және келесі түрдегі функциялармен анықталатын $A\sin(\omega t+\varphi)$, мұндағы A – амплитуда, ω – жиілік, t – уақыт, φ – фаза, толқындық үдерістермен сипатталады.

Найквист теоремасы. Дәл дискреттеу үшін сигналдың жиілігі дискреттелетін шамаға кіретін гармониктің ең жоғары жиілігінің екі есесінен көп болуы керек.

Бұл теореманы қолданудың мысалы ретінде лазерлі компактдискілерді қарастыруға болады, оларда дыбыс информациясы сандық түрде сақталады. Дискреттеу жиілігі артқан сайын дыбыс дәлірек болады және де бір дискіге мұндай информация аз жазылады. Бірақ жай адамның құлағы жиілігі 20 КГц-ке дейін дыбысты айырады, сондықтан одан көп жиілікті дыбысты жазу мәнсіз. Найквист теоремасы бойынша дискреттеу жиілікті 40 КГц-тен аз алмау керек. Дискретті информацияны үздіксіз түрге аударғанда анықтаушы ретінде осы аударудың жылдамдығы болады: жылдамдық артқан сайын үздіксіз шама жоғары жиілікті болады. Бірақ осы шамада жоғары жиіліктер көп болған сайын онымен жұмыс істеу қиындайды.

Үздіксіз информацияны дискретті түрге аударуға арналған құралдардың жалпы қысқаша аталуы – АСТ (аналогты-сандық түрлендіргіш, АЦП – аналого-цифровой преобразователь, ADC – Analog to Digital Convertor, A/D), ал дискретті сигналды үздіксізге аударушы құрал – САТ (сандық-аналогты түрлендіргіш, ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь, DAC – Analog to Digital Convertor, D/A).

2.4. Информацияны беру жүйесінің моделі

Информацияны беру радиотехникалық жүйесі (ИБ РТЖ) информацияны ғана жіберуге арналған, объект, энергия немесе сигналды емес. Осындай жүйелерде электрмагнитті толқындар (сигналдар) көзден тұтынушыға *информацияның тасымалдаушысы* ғана ретінде қолданылады. Бұл – радиосигналдарды жіберу және қабылдауға арналған басқа жүйелерден басты айырмашылығы.

Информацияны жіберу радиотехникалық жүйелерге немесе басқаша айтылатын *байланысты типті жүйелерге* радиобайланыс жүйелер (соның ішінде ұялы және радиотелефондық байланыс), радиохабар мен теледидар жүйелер (соның ішінде жерсеріктік байланыс), радиотелеметриялық жүйелер (радиоканалмен өлшеулердің нәтижесін жіберуге арналған) және т.б. жүйелер жатады. *Өлшеуші типті жүйелер* – радиолокациялық және радионавигациялық жүйелер, траекториялық өлшеу жүйелер, қоршаған орта параметрлерін өлшеуге арналған жүйелер және т.б. ИЖ РТЖ-нен айырмашылығы: қоршаған орта және объектімен әсерлесу кезінде пайдалы информация сигналға беттестіріледі (немесе сигналда пайда болады) және осы объектілер мен сигналдың таралу ортасының параметрлері мен қасиеттерін бейнелейді. Қабылдау орнында пайдалы информация сигналдан электрмагнитті өрістің сәйкесінше параметрлерін өлшеу арқылы алынады.

ИЖ РТЖ модельдің ең жалпы түрі 1.2-суретте көрсетілген. Бұл модель кез келген информацияны жіберу жүйесіне ие негізгі элементтерден тұрса да, ИЖ РТЖ сипаттайтын тек қарапайым суреттеме болады, яғни ол информацияны көзден алушыға дейін жіберу үдерісінде информациямен орындалатын амалдарды толығымен көрсетпейді.

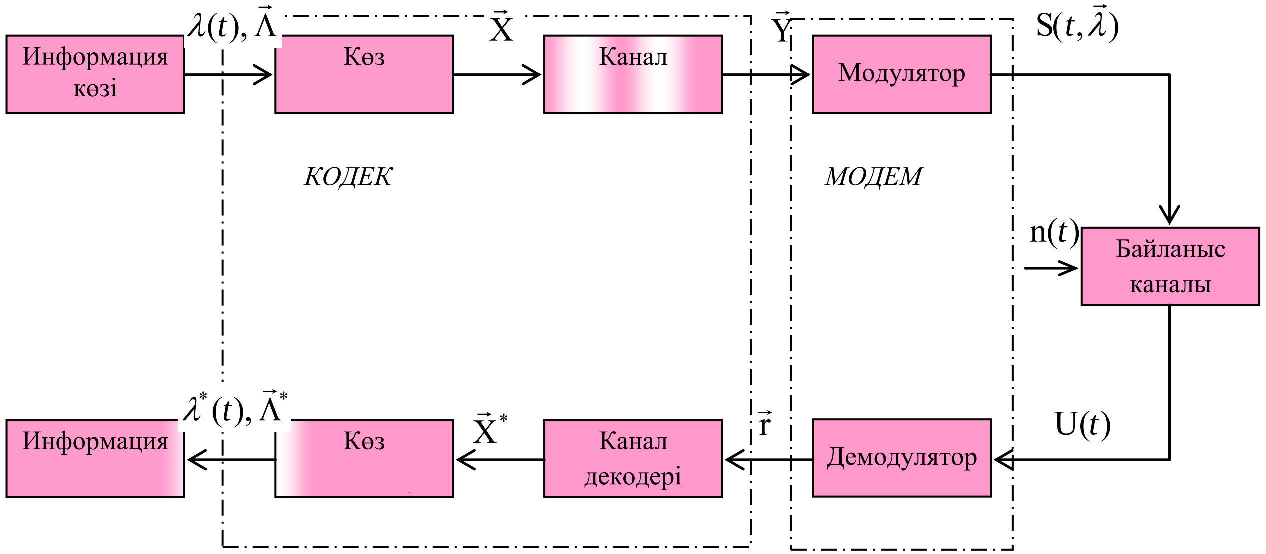
1.2-сурет

1.3-суретте ИЖ РТЖ модельдің толық суреттемесі келтірілген. Бұл модель элементтерінің қызметі мен функцияларын қысқаша қарастырайық.

Информация немесе мәліметтің көзі – бұл жіберетін мәліметті қалыптастыратын физикалық объект, жүйе немесе құбылыс. Мәліметтің өзі – бұл объект, жүйе немесе құбылыстың күйін бейнелейтін бір физикалық шаманың мәні немесе өзгерісі. Қағида бойынша, алғашқы мәлімет – дыбыс, музыка, сурет, қоршаған орта параметрлерін өлшеулері және т.б. табиғаты электр емес уақыт функциялар. Байланыс каналымен жіберу үшін осындай мәліметтер электрлік сигналға айналдырылады, оның уақыт бойынша өзгерісі ($\lambda(t)$ немесе үздіксіз сигнал) жіберетін мәліметті бейнелейді. Жіберілетін мәліметтің біразы өз табиғаты бойынша сигнал емес, бұл – сандар массиві, мәтін немесе басқа файлдар және осыған ұқсастықтар. Осындай түрдегі мәліметтерді қандай да бір $\vec{\Lambda}$ векторымен (дискретті сигнал) белгілеуге болады (1.3-сурет).

Таңбалау

Алғашқы мәліметтердің бірнешесі – дыбыс, әуен, сурет және т.б. адамның сезім мүшелерімен тура қабылдауға арналған және жалпы жағдайда байланыс каналмен нәтижелі жіберуге жарамсыз. Сондықтан $\lambda(t)$ немесе $\vec{\Lambda}$ мәліметтерді таңбалайды (код беру). Таңбалау үдерісіне $\lambda(t)$ үздіксіз мәліметтерді әдетте дискреттеуді кіргізеді, яғни элементарлы дискретті мәліметтер $\{\lambda_i\}$ тізбегіне айналдырады.


Информация көзі
$\lambda(t), \vec{\Lambda}$
Көз
$\vec{X}$
Канал
$\vec{Y}$
Модулятор
$S(t, \vec{\lambda})$
КОДЕК
МОДЕМ
n(t)
Байланыс каналы
U(t)
Демодулятор
$\vec{r}$
Канал декодері
$\vec{X}^*$
Көз
$\lambda^*(t), \vec{\Lambda}^*$
Информация

1.3-сурет

Кодтау (таңбалау, код беру) дегеніміз – информацияны бір түрден екінші түрге түрлендіру. Байланыс техникасында таңбалау хабарды ажыратылатын символдар тізбегіне айналдыру операциясын білдіреді. Реалды жүйелерде теңестіретін (өшіретін) шуылдар (қозулар) болады, сондықтан информацияның бөлігі жоғалады. Демек, информацияның (I) сақталу заңы $dI \leq 0$ теңсіздігі түрінде жазылады. Теңдік белгісі асимптотикалық түрде оптималдық таңбалауға сәйкес келеді. Таңбалау деп жалпы жағдайда $\mathrm{A}\{\lambda_i\}$, $i = 1,2...K$ мәліметтер алфавитін $\mathfrak{R}\{x_j\}$, $j = 1,2...N$ кодтық символдарға айналдыруын айтады. Әдетте (бірақ міндетте емес) кодтық символдар алфавиттің мөлшері ($dim\mathfrak{R}\{x_j\}$) көз алфавиттің мөлшерінен ($dim\mathrm{A}\{\lambda_i\}$) аз болады.

Электр байланыста «таңбалау» терминінің бірнеше мәні бар: әріпті нүктелер мен тирелердің тізбегімен беру, сигнал мәнінің санауларын екі немесе көп мүмкін мәндері бар импульстермен беру.

Мәліметтерді таңбалау әр түрлі мақсатты – жіберетін берілгендердің көлемін қысқарту (берілгендерді қысу), уақыт бірлігінде өтетін информация санын көбейту (жылдамдығын арттыру), жіберу ақиқаттығын ұлғайту, жіберген кезде информацияның құпиялығын қамтамасыз ету және т.б. мақсаттарға арналған.

Көз кодері

АЖ РТЖ моделінде көзді таңбалауды оның жіберу жылдамдығын арттыру немесе жіберуге арналған жиілік жолын қысқарту мақсатына жету үшін информацияның көлемін азайту (қысу) деп білеміз.

Көздің таңбалауын кейде *экономды, артықты емес* немесе *тиімді таңбалау* және *берілгендерді қысу* деп атайды. Тиімділікті осы жағдайда таңбалаумен қамтамасыз ететін берілгендердің көлемін азайту дәрежесі деп білеміз.

Егер сығылған берілгендер бойынша бастапқы информация *абсолютты дәл* алғашқы қалпына келтірілсе, онда мұндай таңбалау *беріктілікті* деп аталады. Беріктілікті таңбалауды мәтіндік информация, сандық берілгендер, компьютерлік файлдар және алғашқы және қалпына келтірілген берілгендердің аз айырмашылықтары болмауы тиіс жағдайларда қолданады.

Көп жағдайларда информацияны көзден оның тұтынушысына абсолютті дәл түрінде жіберу қажеті жоқ және байланыс каналында әрдайым бөгеттер болады, сондықтан абсолютті дәл жіберу принципінде мүмкін емес. Осындай жағдайларда алғашқы мәліметке қандай да бір жуықтау дәрежесімен қамтамасыз ететін бұзу, қысу әдісін қолдану қажет. Қағида бойынша, қысудың бұзу әдістерінің беріктіліктілерге қарағанда тиімділігі жоғары.

Осыдан көз кодерінің шықпасында $\lambda(t)$ немесе $\vec{\Lambda}$ жіберілетін мәліметтер бойынша *информациялық тізбек* деп аталатын $\vec{X}$ кодтық символдар тізбегі құрылады, ол бастапқы мәліметтің абсолютті дәл (немесе жуықталған) алғашқы түріне келтіруге мүмкіндік береді және мүмкіншілік болғанша мөлшері аз болады.

Көздің кодерінде қолданатын бірнеше әдістерді қарастырамыз: Шеннон-Фано әдісі, арифметикалық, Хаффман, LZ әдістері.

Канал кодері

Байланыс каналымен информацияны жіберген кезде бөгеулердің кесірінен берілгендерде қателер пайда болуы мүмкін. Егер осындай қателердің шамасы аз болса немесе олар сирек кездессе, информацияны қолдануға болады. Қателердің саны көп кезде информацияны қолдануға болмайды.

Канал кодерінде қолданатын әдісті *бөгеуге орнықты кодтау* деп атайды. Бұл – бөгеттері бар байланыс каналымен жібергенде пайда болатын қателер санын азайтуын қамтамасыз ететін жіберілетін берілгендердің өңдеу тәсілі. Бөгеуге орнықты кодтаудың бірнеше әдістері бар, бірақ олардың барлығы келесіге негізделген: берілетін мәліметтерге арнайы түрмен ұйымдастырылған артықшылық енгізіледі (берілетін кодтық тізбекке артық символдар қосылады), ол қабылдағышта қатені тауып және түзетуге мүмкіндік береді. Осылай, егер көзді таңбалағанда мәліметтегі жаратылыс артықшылықты жоюға тырысса, каналда таңбалау кезінде жіберілетін хабарға артықшылықты әдейі енгізеді. Нәтижесінде канал кодерінің шықпасында *кодтық тізбек* деп аталатын $\vec{Y}$ ($\vec{X}$) символдар тізбегі пайда болады.

Информацияны жіберген кезде бөгетке тұрақты кодтауы да, берілгендердің қысуы да міндетті операциялар емес екенін айтып кетейік. Бұл үдерістер (АЖ РТЖ құрылымдық схемасындағы сәйкесінше блоктар) жоқ болуы мүмкін. Бірақ бұл жүйенің бөгетке тұрақтылығына елеулі шығын әкеледі, ақпаратты жіберу жылдамдығы азаяды және жіберу сапалығы төмендейді. Сондықтан қазіргі барлық жүйелер (тек ең қарапайым жүйелерді қарамағанда) берілгендердің тиімді де, бөгеуге тұрақты да кодтаулардан тұруы керек.

Модулятор

Модулятордың функциясы – көз мәліметін немесе кодерден шыққан кодтық тізбекті *байланыс каналының қасиеттерімен байланыстыру* және жалпы байланыс каналымен бір уақытта бірнеше хабарды жіберуін қамтамасыз ету.

Расында, жіберуге арналған көп үздіксіз $\lambda(t)$ және дискретті $\vec{\Lambda}$ мәліметтер және де олардың таңбалау нәтижелері – $\vec{X}$ және $\vec{Y}$ кодтық символдар тізбегі – бұлар кең жолақты ($\Delta F \leq 1$ *МГц,* $\Delta F \sim f_0$) төмен жиіліктегі сигналдар. Ал электрмагнитті тербелістер (радиотолқындар) арқылы тиімді жіберу тек салыстырмалы тар жолақты спектрімен ($\Delta F << f_0$) жоғары жиілікті сигналдармен ғана ($f_0 \geq 1...1000$ *МГц* және одан да жоғары)) мүмкін.

Сондықтан *модулятор* $\lambda(t)$ ($\vec{\Lambda}$) *көз мәліметтерін* немесе сәйкесінше $\vec{X}$ және $\vec{Y}$ кодтық тізбектерді $S(t, \lambda(t))$, $S(t, Y(\lambda(t)))$ соңғы пайда болған сигналдың қасиеттері радиоканалмен (немесе басқа байланыс каналмен – телефондық, оптикалық және т.б.) информацияны тиімді жіберуге мүмкіндік беретіндей *сигналдарға түрлендіру керек* (сигналға мәліметтерді қосу). Жалпы радиоканалдарда жасайтын информацияны жіберу жүйелер жиынына жататын сигналдар келесідей болу керек: мәліметтер бүкіл көздерден барлық тұтынушыларға тәуелсіз жету қажет.

Қазіргі кезде сигналдарды тиімділігі әр түрлі модуляциялайтын әдістердің бірнешесі бар, олар қандай да бір сапалықпен информацияны жіберуді қамтамасыз етеді. Олардың ішінде ең қарапайым әдістері: үздіксіз сигналдардың амплитудалық, жиіліктік және фазалық модуляциясы.

Байланыс каналы

Біз қарастыратын моделінде информацияны көзден тұтынушыға дейін тасымалдаушы ретінде электрмагнитті толқындар немесе радиотолқындар, ал тарау ортасы ретінде қоршаған кеңістік немесе *радиоканал* қолданылады. Электрмагнитті толқындардың таралу ортасы болып табылатын радиоканалдың физикалық қасиеттері бұл курста қарастырылмайды, біз тек радиоканалды АЖ РТЖ-ның бөлігі деп көреміз. Радиоканалдың кірісіне жібергіштің $S(t,\lambda(t))$ сигналы түседі, ал шығысында $U(t)$ сигналы пайда болады, ол әдетте алынған тербеліс деп аталады.

Көп немесе аз қиыншылығы бар радиоканалдың модельдері көп, бірақ жалпы жағдайда $S(t, Y(\lambda(t)))$ сигналы байланыс каналымен өткенде әлсірейді, біраз уақыттық кідірісі (немесе фазалық ысырылу) және шуыл пайда болады. Алынған тербеліс ($U(t)$) бұл жағдайда келесі түрде болады:

$$U(t) = \varepsilon S(t-\tau, Y(\lambda(t))) + n(t),$$

мұндағы ε – өшірілу, τ – уақыттық кідіріс, $n(t)$ – байланыс каналындағы шуылдар.

Информацияны жіберу жылдамдығы бір секундта өткен бит санымен өлшенеді немесе оны басқаша *бод* (baud) деп атайды: 1 бод = 1 бит/с. Бодтың туынды бірліктері бит және байттікіндей, мысалы, 10 Кбод = 10240 бод.

Егер осы шуылсыз байланыс каналына жарамды толқындық үдерістердің максималды жиілігін білсек, сыйымдылығын жуықтап табуға болады. Информацияны жіберу жылдамдығы осы жиіліктен аз емес деп санауға болады. Мысалы, шекті жиілік 1000 Гц-ке тең кезде 1 Кбод-тан аз емес ақпаратты жіберу жылдамдығын қамтамасыз етуге болады.

Информацияны тізбекті жіберуге болады, яғни бит соңынан бит жіберіп және параллельді жіберуге болады, яғни бекітілген бит санын топтастырып. Параллельді тәсіл жылдамдырақ, бірақ оны техника жүзінде іске асыру қиын және үлкен қашықтыққа жібергенде қымбатқа шығады. Параллельді тәсілді 5 метрден көп емес қашықтыққа жібергенде қолданады.

Байланыс каналдардың және олармен байланысты шекті жиіліктердің мысалдары:

- телеграф – 140 Гц,
- телефон – 3,1 КГц,
- қысқа толқындар (10-100 м) – 3-30 МГц,
- УКВ (1-10 м) – 30-300 МГц,
- спутник (сантиметрлік толқындар) – 30 ГГц,
- оптикалық (инфрақызыл диапазон) – 0,15-400 ТГц,
- оптикалық (көрінетін жарық) – 400-700 ТГц,
- оптикалық (ультракүлкін диапазон) – 0,7-1,75 ПГц.

Байланыс каналдың математикалық моделі осы оқу құралдың 5-тарауында толық қарастырылған.

Қабылдағыш

АЖ РТЖ-сіндегі қабылдағыштың міндеті: $U(t)$ алынған тербеліс бойынша өзінің шығысында $\lambda(t)$ немесе Λ жіберілген мәліметтерді максималды мүмкіндік дәлдікпен қайта шығару. Қабылданған (қайта шығарылған) мәліметтің бөгеттер кесірінен, жалпы жағдайда, жіберілген мәліметтен айырмашылығы бар. Қабылданған мәліметті *бағалау* деп атаймыз (мәліметті бағалау ретінде айтылған) және жіберілген мәліметтің символындай тек «*» белгісі бар таңбасымен белгілейміз: $\lambda^*(t)$ немесе $\vec{\Lambda}^*$. Алынған тербеліс бойынша мәліметті бағалаудың қайта шығару үдерісі бірнеше кезеңнен тұрады.

Демодулятор

$\lambda^*(t)$ немесе $\vec{\Lambda}^*$ мәліметтерді бастапқы күйге келтіру үшін біріншіден жүйенің қабылдағышы қабылданған $U(t)$ тербеліс бойынша және жіберген кездегі сигналдың түрі мен модуляцияның әдісі туралы мәліметтерді ескеріп, $\vec{Y}^*$ $(\lambda(t))$ кодтық тізбекті (бұл тізбекті *қабылданған r тізбек* деп атайды) бағалау керек. Осындай үдеріс *демодуляция* немесе *сигналды қабылдау* деп аталады. Демодуляция кезінде қабылданған $\vec{r}$ тізбектің жіберілген $\vec{Y}$ кодтық тізбектен айырмашылығы өте аз болу керек.

Канал декодері

Жалпы жағдайда қабылданған $\vec{r}$ тізбектің жіберілген $\vec{Y}$ кодтық тізбектен айырмашылығы болуы мүмкін, яғни қателігі бар. Осындай қателіктердің саны байланыс каналындағы бөгеттердің деңгейіне, информацияны жіберу жылдамдығына, модуляция әдісіне және де $U(t)$ тербелісті қабылдау тәсіліне (демодуляцияға) байланысты. Канал декодерінің мақсаты – осындай қателіктерді мүмкіндігінше табу және түзету. Қабылданған $\vec{r}$ тізбектегі қателіктерді табу және түзету үдерісі каналдың таңбалауын шешу (декодтау) деп аталады. Осы үдерістің нәтижесі $\vec{X}^*$ ақпараттық тізбектің бағалауы болып табылады. Бөгетке тұрақты таңбаны, таңбалау әдісін және декодтау тәсілін қолданғанда декодердің шығысында түзелмеген қателіктер азырақ қалатындай етіп таңдау керек.

Көз декодері

Көздің информациясы (λ(t), $\vec{\Lambda}$) жіберуге ыңғайлы болу үшін ол таңбалау үдерісінен өтті (берілгендерді қысу, экономды таңбалау, көздің таңбалауы), сондықтан қабылданған $\vec{X}^*$ тізбек бойынша оның алғашқы қалпына (немесе алғашқы қалпына дерлік) келтіру қажет. $\vec{\Lambda}^*$ тізбекті $\vec{X}^*$ тізбегі бойынша қалпына келтіру үдерісі *көздің декодтауы* (таңбаны шешу) деп аталады. Ол таңбалау амалына кері болуы мүмкін (бұзылмайтын таңбалау/таңбаны шешу әдісті қолданған кезде) немесе $\vec{\Lambda}$ тізбегінен айырмашылығы бар $\vec{\Lambda}^*$ мәнін жуықтап қалпына келтіреді (бұзылу таңбалау / таңбаны шешу).

Бөгетке тұрақты әдістермен қоса экономды таңбалау әдістер информацияны жіберу жылдамдығы мен сапалығын асыру тиімді тәсілі болғандықтан, олар соңғы кезде информацияны жіберу жүйелерде елеулі орын алатынын атап кетейік.

Осылай информацияны жіберу жүйесін қысқаша қарастырдық, енді келесі тарауларда оның негізгі бөліктерін толық зерттейміз.

Тапсырма

1.1. Қатынастардың қайсысында информация көп: $x = 15$ немесе $x > 8$?

1.2. CAT сандық магнитофондарда дискреттеу жиілігі – 48 КГц. Осындай магнитофондарда шығаруға болатын дыбыс толқынның максималды жиілігі қандай?

3-тарау

ИНФОРМАЦИЯ МӨЛШЕРІН ӨЛШЕУ. ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ ЭНТРОПИЯ

3.1. Дискретті және үздіксіз шамалар үшін информация мөлшері

Ақпарат теориясының негізінде Шеннонмен ұсынған бір кездейсоқ шамасындағы басқа кездейсоқ шамасымен салыстырғанда информацияның мөлшерін өлшеу тәсілі жатыр. Бұл тәсіл информацияның мөлшерін санмен келтіруге мүмкіндік береді.

X және Y *дискретті* кездейсоқ шамалар үшін $P(X = X_i) = p_i$, $P(Y = Y_j) = q_j$ үлестірулермен және $P(X = X_i,\, Y = Y_j) = p_{ij}$ бірлескен үлестіру заңдарымен берілген Y шамасымен салыстырғанда X шамасындағы *информация мөлшері* келесіге тең:

$$I(X,Y) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j}. \qquad (2.1)$$

X және Y *үздіксіз* кездейсоқ шамалар үшін $p_X(t_1)$, $p_Y(t_2)$ және $p_{XY}(t_1, t_2)$ ықтималдылық үлестіру тығыздығымен берілген және (2.1) ұқсас формуланың түрі:

$$I(X,Y) = \iint_{\Re^2} p_{XY}(t_1, t_2) \log_2 \frac{p_{XY}(t_1, t_2)}{p_X(t_1) p_Y(t_2)} dt_1 dt_2, \qquad (2.2)$$

$$P(X = X_i, X = X_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ P(X = X_i), & i = j \end{cases}$$

болғаны айқын, сондықтан

$$I(X,X)=\sum_i p_i \log_2 \frac{p_i}{p_i p_i} = -\sum_i p_i \log_2 p_i \,. \qquad (2.3)$$

Ал

$$I(X,X)=S(X)=SX \qquad (2.4)$$

информациялық энтропия немесе *Шеннон энтропиясы* (S) деп аталады.

3.2. Информациялық энтропия

Энтропия – қазіргі ғылымдағы ең іргелі, әмбебап ұғым. Физика заңдылықтары түбінде белгілі физикалық шамалардың сақталу заңдарымен байланысты. Энтропия реалды үдерістерде сақталмайды, ол өседі немесе азаяды.

Алғаш рет энтропия түсінігі 1865 жылы Клаузис бос жүйенің термодинамикалық күйін функция ретінде енгізді, бұл функция мына түрде жазылады:

$$S = \frac{\delta Q}{T}\,, \qquad (2.5)$$

мұндағы Q – жылу сыйымдылық, T – температура. Классиктер энтропияны информациямен байланыстырмаған, Клаузис бұл формуланы эмпирикалық жолмен алған.

К. Больцман статистикалық физика әдісімен 1872 жылы энтропияның теориялық өрнегін қорытып шығарды:

$$S = k \ln w\,, \qquad (2.6)$$

k – тұрақты шама, w – термодинамикалық ықтималдық (идеал газ молекулаларының орын ауысу мөлшері) жүйенің макро күйіне әсер етпейді.

Информацияның орта мәнін **информациялық энтропия** деп атайды.

$$S = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i . \qquad (2.7)$$

Бұл (2.7) өрнек Шеннон энтропиясы болып табылады.

Энтропия – ретсіздіктің, бей-берекеттіктің өлшемі. Информациялық энтропия термодинамикалық энтропияның барлық қасиеттеріне ие әрі одан өзгешелігі тепе-теңсіз құбылыстарға да қолданылады.

$[T]$ = Дж, $k = 1$ болғанда әрі тепе-тең күй жағдайында Шеннонның (2.7) өрнегі Больцманның (2.6) өрнегіне тең болады. Мұнда $p_1 = p_2 =,\dots, p_i = \dfrac{1}{w}$ болғанда

$$S = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i = \ln w = S_i .$$

3.3. Энтропия мен информация өлшемінің қасиеттері

Информация өлшемі мен энтропияның негізгі қасиеттері келесі:

1⁰ $I(X,Y) \geq 0,\ I(X,Y) = 0 \Leftrightarrow$ X және Y тәуелсіз шамалар;

2⁰ $I(X,Y) = I(Y,X)$; симметрия қасиеті;

3⁰ $S(X) = 0 \quad \Leftrightarrow X -$ тұрақты;

4⁰ $I(X,Y) = S(X) + S(Y) - S(X,Y)$, мұнда

$$S(X,Y) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log_2 p_{ij} ;$$

5⁰ $I(X,Y) \leq I(X,X)$. Егер $I(X,Y) = I(X,X)$, онда $X = X(Y)$.

Енді осы қасиеттерді дәлелдейік.

1. $e^{x-1} \geq x$ теңсіздіктегі ($x = 1$ болғанда теңдік орындалады) барлық x үшін логарифм алсақ, $x - 1 \geq \ln x$ немесе $\dfrac{x-1}{\ln 2} \geq \log_2 x$ теңсіздікке келеміз.

$$-I(X,Y)=\sum_{i,j} p_{ij}\log_2\frac{p_iq_j}{p_{ij}}\le\sum_{i,j} p_{ij}\frac{\frac{p_iq_j}{p_{ij}}-1}{\ln 2}=$$

$$=\sum_{i,j}\frac{p_iq_j-p_{ij}}{\ln 2}=\frac{\sum_i p_i\sum_j q_j-\sum_{i,j} p_iq_j}{\ln 2}=\frac{1-1}{\ln 2}=0,$$

яғни $I(X,Y)=0$ тек $p_{ij}=p_iq_j$ болғанда барлық I және j үшін, яғни X және Y тәуелсіз болғанда. Егер X және Y тәуелсіз болса, онда $p_{ij}=p_iq_j$, сондықтан логарифмдердің аргументтері 1-ге тең, ал логарифмдердің өзі 0-ге тең, бұл $I(X,Y)=0$ білдіреді.

2. Аргументтерге қатынасты формулалардың симметриясынан шығады.

3. Егер $S(X)=0$, онда $S(X)$ анықтайтын сомасындағы барлық мүшелері нөлге тең болуы керек, ал бұл тек X тұрақты болғанда ғана болуы мүмкін.

4. Төрт айқын қатыстан

$$\sum_j p_{ij}=p_i,\quad \sum_i p_{ij}=q_j,$$

$$S(X)=-\sum_i p_i\log_2 p_i=-\sum_{i,j} p_{ij}\log_2 p_i,$$

$$S(Y)=-\sum_j q_j\log_2 q_j=-\sum_{i,j} p_{ij}\log_2 q_j$$

келесі шығады

$$S(X)+S(Y)-S(X,Y)=$$

$$=-\sum_{i,j} p_{ij}\left(\log_2 p_{ij}-\log_2 q_j-\log_2 p_i\right)=I(X,Y).$$

5. $I(X,Y)=S(X)+S(Y)-S(X/Y)\le S(X)$ немесе $S(Y)-S(X,Y)\le 0$ дәлелдеу керек.

$$S(Y)-S(X,Y)=-\sum_{i,j} p_{ij}\log_2 q_j+\sum_{i,j} p_{ij}\log_2 p_{ij}=\sum_{i,j} p_{ij}\log_2\left(\frac{p_{ij}}{q_j}\right),$$

бірақ $p_{ij} = P\left(X = X_i, Y = Y_j\right) \leq q_j = P\left(Y = Y_j\right)$, демек, барлық логарифмдердің аргументтері 1-ден көп емес, сондықтан логарифмдердің мәні 0-ден көп емес, ал бұл барлық сома 0-ден көп еместігін білдіреді.

Егер $S(X) = I(X, X) = I(X, Y)$, онда әр i үшін p_{ij} не q_j не 0-ге тең. Бірақ мынадан $p_{ij} = P\left(X = X_i, Y = Y_j\right) = P\left(X = X_i / Y = Y_j\right) \times \times P\left(Y = Y_j\right) \in \left\{q_j, 0\right\}$ келесі шығады: $P\left(X = X_i / Y = Y_j\right) \in \{0,1\}$, ал бұл тек X – Y-тен функциясы болғанда ғана мүмкін.

X және Y кездейсоқ шамалар тәуелсіз болғанда біреуі екіншісін сипаттамайды, бұл $I(X, Y) = 0$ болуында көрсетілген.

3.4. Толық, шартты, кездейсоқ орта энтропия

Информация деп кездейсоқ энтропияны айтады:

$$I = -\ln P(\xi), \tag{2.8}$$

мұндағы $\xi = \xi(t)$ – кездейсоқ сан,

$$I \equiv S, \quad S = -\ln P(\xi) \tag{2.9}$$

– кездейсоқ энтропия.

Информация – анықталғандықтың өлшемі, энтропия – анықталмағандықтың өлшемі. *Орта энтропия*

$$S_\xi = -\sum_\xi P(\xi) \ln P(\xi). \tag{2.10}$$

Бұл кездейсоқ энтропияның орталанған мәні –

$$S_\xi = -\sum_\xi P(\xi) \ln P(\xi) = \sum_\xi P(\xi) S(\xi). \tag{2.11}$$

Энтропия күрделілікті өлшейтін бірден-бір функция.

Энтропияның негізгі қасиеттерін толығырақ қарастырайық.

1. Энтропияның иерархиялық аддитивтілік қасиеті бар. Сатылы түрде әрқайсысының жеке-жеке қосындысы болады:

$$S_{\xi_1\xi_2\cdots\xi_n} = S_{\xi_1} + S_{\xi_2/\xi_1} + S_{\xi_3/\xi_1\xi_2} + S_{\xi_4/\xi_1\xi_2\xi_3} + \ldots + S_{\xi_n/\xi_1\cdots\xi_{n-1}}, \qquad (2.12)$$

$S_{\xi_1\xi_2\cdots\xi_n}$ – толық орталанған тұтас энтропия. Мұндағы ξ – кездейсоқ шама, бұл физикалық шама көптеген мәндерді қабылдайды:

$$\xi(t) = \{\xi_1(t_1)\ldots\xi_n(t_n)\}. \qquad (2.13)$$

$S_{\xi_n/\xi_1\cdots\xi_{n-1}}$ – шартты энтропия.

Дәлелдеу: шартты ықтималдықтардың анықтамасы бойынша олардың иерархиялық мультипликативтілік деген қасиеті бар:

$$P(\xi_1,\ldots,\xi_n) = P(\xi_1)P(\xi_2|\xi_1)P(\xi_3|\xi_1\xi_2)\ldots P(\xi_n|\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}).$$

Бұл теңдікті логарифмдей отырып, мынаны аламыз:

$$S(\xi_1,\ldots,\xi_n) = S(\xi_1) + S(\xi_2|\xi_1) + S(\xi_3|\xi_2\xi_1) + \ldots + S(\xi_n|\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}).$$

Бұл теңдікті орташалай отырып

$$S_{\xi_1,\cdots\xi_n} = S_{\xi_1} + S_{\xi_2|\xi_1} + S_{\xi_3|\xi_1\xi_2} + \ldots + S_{\xi_n|\xi_1\cdots\xi_{n-1}}$$

деңгейіне келеміз.

Кездейсоқ шартты энтропия деп келесіні айтамыз:

$$S(\xi_k,\ldots,\xi_n) = -\ln P(\xi_k,\ldots,\xi_n/\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}). \qquad (2.14)$$

Шартты түрде орталанған шартты энтропия:

$$S_{\xi_r\ldots\xi_n}(/\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}) =$$

$$= -\sum_{\xi_k\cdots\xi_n} P(\xi_k,\ldots,\xi_n/\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}) \ln P(\xi_k,\ldots,\xi_n/\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}). \qquad (2.15)$$

(2.13) жиыннан жалпы бір қасиеті бар айнымалыны бөліп аламыз да, оны қасиеттері бойынша екі топқа бөлеміз. Осы әдіспен кездейсоқ шаманың мәндерін сатылы тізбек немесе бұтақ түрінде жазуға болады.

Әрбір жиынды одан әрі кіші жиынға бөлеміз, әрбір топ майда топқа бөліне беру керек, ең соңында бөлінбейтін құрылымдар қалуы керек.

Сатылы әр түрлі жиындар табиғатта, қоғамда, информациялық жүйелерде кездеседі. Осындай күрделі құрылымдарды басқару үшін бұл өте тиімді теория.

Ал әрбір жиындағы бұтақтардың санын қалай реттеу керек?

Мысалы, бір басшының қол астындағы 100 қызметкерді басқару үшін қанша сатыға бөлу, қанша салаға бөліп басқарудың тиімділігін есептеп шығуға болады.

Әр сатыдағы бұтақтың ықтималдығы үлкейген сайын оның энтропиясы азаяды. Бізге тиімді басқару үшін энтропия аз болу керек.

2. Шартты энтропия шартсыз энтропиядан артық бола алмайды:

$$S_{\xi|\eta} \le S_{\xi}. \qquad (2.15)$$

Дәлелдеу: $P(\xi)$ және $Q(\xi)$ ықтималдықтар үлестірімдері қандай болмағанымен мынадай теңсіздік орындалады:

$$\sum_{\xi} P(\xi) \ln \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \ge 0$$

теоремасын қолданып, ондағы $P(\xi)$-ны $P(\xi|\eta)$-ға, ал $Q(\xi)$-ды $P(\xi)$-ға алмастырсақ, мынаны аламыз:

$$-\sum_{\xi} P(\xi|\eta) \ln P(\xi|\eta) \ge \sum_{\xi} P(\xi|\eta) \ln P(\xi).$$

Бұл теңсіздіктің $P(\xi)$ салмағымен η бойынша орташалау мына теңсіздікке әкеледі.

$$-\sum_{\xi} P(\xi|\eta)\ln P(\xi|\eta) \geq -\sum_{\xi} P(\xi)\ln P(\xi)\,. \qquad (2.16)$$

3. Шарт қосылған кезде шартты энтропия өспейді:

$$S_{\xi|\eta\xi} \leq S_{\xi|\xi}\,. \qquad (2.17)$$

Толық орталанған шартты энтропия:

$$S_{\xi_1,\ldots,\xi_n} = -\sum_{\xi_1,\ldots,\xi_n} P(\xi_1,\ldots,\xi_n)\ln P(\xi_k,\ldots,\xi_n / \xi_1,\ldots,\xi_{k-1})\,.$$

4. Егер ξ_1, ξ_2 кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда $S_{\xi_1\xi_2}$ толық энтропиясы энтропиялар қосындысына ажырап кетеді:

$$S_{\xi_1\xi_2} = S_{\xi_1} + S_{\xi_2}\,. \qquad (2.18)$$

Дәлелдеу: ξ_1, ξ_2 деген екі кездейсоқ шама бар болсын. Біріншісі 1,...,m_1, ал екіншісі 1,...,m_2 мәндерін қабылдасын. $\xi = (\xi_1, \xi_2)$-нің m_1m_2 жұбы бар, олардың $P(\xi_1, \xi_2)$ ықтималдықтары бар. Жұптарды ξ = 1,…, m_1m_2 нөмірімен кездейсоқ ретпен нөмірлей берсек, мынаны аламыз:

$$S_{\xi} = -M\ln P(\xi) = -M\ln P(\xi_1, \xi_2) = S_{\xi_1\xi_2}\,.$$

Тәуелсіздік салдарынан

$$P(\xi_1, \xi_2) = P(\xi_1)P(\xi_2).$$

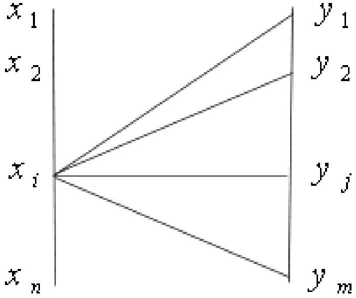
Сондықтан

$$\ln P(\xi_1, \xi_2) = \ln P(\xi_1) + \ln P(\xi_2)\,,$$

$$S(\xi_1\xi_2) = S(\xi_1) + S(\xi_2)\,.$$

Соңғы өрнекті орталау мынаны береді: $S_{\xi} = S_{\xi_1\xi_2} = S_{\xi_1} + S_{\xi_2}$.

Шартты энтропия түсінігін ақпаратты беру кезінде информациялық жоғалуларды анықтау үшін кең қолданады. Байланыс каналында X алфавиті арқылы мәліметтер жіберілсін дейік. Шуылдар (бөгеулер) әсерінен қабылдағышта басқа Y алфавитті қабылдайды (2.1-сурет).



2.1-сурет

x_i символды жіберіп, y_j символды қабылдауындағы анықталмағандықты $S(y_i / x_i)$ шартты энтропия білдіреді, ал $S(x_i / y_i)$ түсінігі y_j алған соң дәл x_i белгісіздігін көрсетеді. Егер байланыс каналды бөгеулер болмаса, онда берілген x_1 символдарына қабылданған y_1 символы сәйкес келеді, $x_2 - y_2$, …, $x_n - y_n$. Бұл кезде ақпарат көздің энтропиясы $S(X)$ қабылдағыштың энтропиясына $S(Y)$ сәйкес келеді. Егер каналда шуыл болса, олар берілген ақпараттың бөлігін жояды.

3.5. Есеп шығару мысалдары

Информация және энтропияны сандық түрде анықтауға болады. Осындай есептерді қарастырайық. Мұнда информация сандық түрде берілсін.

Екі ойын сүйекті лақтырғандағы информация мөлшерін өлшеу мысалын қарастырайық.

1-есеп. X_1, X_2 және Y дискретті кездейсоқ шамалар берілсін. X_1 және X_2 – сәйкесінше 1-інші және 2-інші ойын сүйектерде шыққан ұпай саны, ал $Y = X_1 + X_2$. $I(Y, X_1)$, $I(X_1, X_1)$, $I(Y, Y)$ табу керек.

*Шешімі.*Сүйектер бірдей және ешқандай ақауы болмағандықтан, X_1 және X_2 дискретті кездейсоқ шамалардың ықтималдылық үлестіру заңы ұқсас:

X_1	1 2 3 4 5 6
p	1/6,

яғни j = 1…6 $q_j = P(X_1 = j) = 1/6$.

Y шамасы үшін ықтималдылық үлестіру заңы

$$P(Y = i) = P(X_1 + X_2 = i), \quad i = 2...12,$$

X_1 және X_2 – тәуелсіз болғандықтан және сол себепті

$$P(X_1 = n,\ X_2 = m) = P(X_1 = n)P(X_2 = m),$$

$$p_i = P(X_1 + X_2 = i) = \sum_{\substack{n+m=i \\ 1 \le n, m \le 6}} P(X_1 = n)P(X_2 = m) = \sum_{\substack{n+m=i \\ 1 \le n, m \le 6}} \frac{1}{36}.$$

болады.

Y шамасын анықтайтын кестелер:

X_2 \ X_1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$Y=X_1+X_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

яғни i = 2…12 болғанда, $p_i = P(Y = i) = (6 - |7 - i|)/36$.

X_1 және Y шамалар үшін бірлескен үлестіру заңы келесі:

$$p_{ij} = P(Y = i,\ X_1 = j) = P(Y = i / X_1 = j)P(X_1 = j),$$

мысалы,

$$P(Y = 2,\ X_1 = 1) = P(Y = 2/ X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$$
$$= P(X_2 = 1)P(X_1 = 1) = 1/36.$$

Жалпы жағдайда мынаны аламыз:

$$p_{ij} = P(Y = i, X_1 = j) = \begin{cases} 1/36, & 1 \le i - j \le 6 \\ 0, & \text{басқа жағдайда} \end{cases}$$

Y X_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Енді информация мөлшерін табамыз:

$$I(Y, X_1) = \sum_{j=1}^{6} \sum_{1 \le i-j \le 6} p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j} = \frac{1}{36} \sum_{j=1}^{6} \sum_{1 \le i-j \le 6} \log_2 \frac{1}{6p_i} =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\sum_{i=2}^{7} \log_2 \frac{1}{6p_i} + \sum_{i=3}^{8} \log_2 \frac{1}{6p_i} + \ldots + \sum_{i=6}^{11} \log_2 \frac{1}{6p_i} + \sum_{i=7}^{12} \log_2 \frac{1}{6p_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\left(\log_2 \frac{6}{1} + \log_2 \frac{6}{2} + \ldots + \log_2 \frac{6}{6} \right) + \ldots + \left(\log_2 \frac{6}{6} + \log_2 \frac{6}{5} + \ldots + \log_2 \frac{6}{1} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\underline{2\log_2 6} + 4\log_2 3 + 6\log_2 2 + 8\log_2 \frac{3}{2} + 10\log_2 \frac{6}{5} + \underline{6\log_2 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left(2 + 2\log_2 3 + 4\log_2 3 + 6 + 8\log_2 3 - 8 + 10\log_2 3 + 10 - 10\log_2 5\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left(10 + 24\log_2 3 - 10\log_2 5\right) \approx 0.69 \text{ \textit{бит/символ}}$$

$$\mathrm{I}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_1) = \mathrm{I}(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_2) = -\sum_{j=1}^{6} \mathrm{q}_j \log_2 \mathrm{q}_j \ = \ \log_2 6 \ = \ 1 + \log_2 3 \approx 2{,}58 \ \text{бит / сим.}$$

$$\mathrm{I}(\mathrm{Y},\mathrm{Y}) = -\sum_{i=1}^{12} \mathrm{p}_i \log_2 \mathrm{p}_i =$$

$$= \frac{1}{36}\left(2\log_2 36 + 4\log_2 18 + 6\log_2 12 + 8\log_2 9 + 10\log_2 \frac{36}{5} + 6\log_2 6\right) =$$

$$= (4 + 4\log_2 3 + 4 + 8\log_2 3 + 12 + 6\log_2 3 + 16\log_2 3 + 20 + 20\log_2 3 - 10\log_2 5 +$$

$$+ 6 + 6\log_2 3)/36 = (46 + 60\log_2 3 - 10\log_2 5)/36 \approx 3{,}27 \ \text{бит / сим.}$$

Мұнда $0 < I(Y,X_1) = I(Y,X_2) < I(X_1,X_1) = I(X_2,X_2) < I(Y,Y)$, бұл информацияның қасиеттеріне сәйкес.

$I(X_1,Y)$информация мөлшерін есептегендегі асты сызылған мүше $\left(\frac{1}{36}2\log_2 6 = I(X_1,X_1)/18\right)$36 жағдайдың ішіндегі X_1 шаманы бірмәнді анықтайтын $Y = 2$ және $Y = 12$ болғандағы екі информацияға сәйкес келеді. $Y = 7$ болған жағдайлар X_1 туралы ешқандай мәлімет бермейді, бұл сызылған $6\log_2 1 = 0$ мүшеге сәйкес келеді.

Есептеуді информацияның 4-інші қасиетін қолданып та жүргізуге болады (энтропия арқылы), онда әдетте есептеу азаяды:

$$S(Y,X_1) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log_2 p_{ij} \ = \log_2 36 = 2(1 + \log_2 3) = 2S(X_1) \approx 5{,}17 \, \textit{бит / сим.}$$

$$I(Y,X_1) = S(X_1) + S(Y) - S(X_1,Y) = S(Y) - S(X_1) \approx 3{,}27 - 2{,}58 = 0{,}69 \, \textit{бит / сим.}$$

2-есеп. Дискретті кездейсоқ шама X ойын сүйекте шыққан ұпай санына тең болсын, ал Y тең 0, егер шыққан ұпай саны тақ болса және $Y = 1$ – ұпай саны жұп. $I(X,Y)$, $I(Y,Y)$ табу керек.

Шешімі. X және Y үшін ықтималдылықтарының үлестіру заңын құрастырайық.

X	1 2 3 4 5 6
p	1/6

Y	0 1
p	1/2

Сондықтан $i = 1...6$ болғанда $p_i = P(X = i) = 1/6$ және $j = 0...1$ болғанда $q_j = P(Y = j) = 1/2$. Енді осы дискретті кездейсоқ шамалар үшін бірлескен ықтималдылық үлестіру заңын құрастырайық.

X	1 3 5 2 4 6	1 3 5 2 4 6
Y	0 0 0 1 1 1	1 1 1 0 0 0
p	1/6	0

Сондықтан $p_{ij} = P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0, & \text{егер } i + j \text{ – жұп} \\ 1/6, & \text{басқа жағдайда} \end{cases}$

$$I(X,Y) = \sum_{i,\,j} p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j} = 6\frac{1}{6}\log_2 2 = 1 \ \textit{бит/сим.}$$

$$I(Y,Y) = -\sum_{j=0}^{1} q_j \log_2 q_j = 2\frac{1}{2}\log_2 2 = 1 \ \textit{бит/сим.}$$

Түскен ұпайдың дәл саны жұптық туралы дәл информация береді, яғни 1 бит. $I(X,Y) = I(Y,Y) = 1$ *бит/сим* және информацияның 3-інші қасиетінен X туралы мәлімет толығымен Y шаманы анықтайтындығы шығады, бірақ керісінше емес, $I(Y,Y) \neq I(X,Y) = 1 + \log_2 3 \approx 2{,}58$ *бит/сим* болғандықтан. Шынында, Y шамасы функционалды X шамасына тәуелді, ал XY-ке функционалды тәуелсіз.

Энтропия арқылы есептеулер келесідей болады:

$$S(X,Y)=-\sum_{i,j} p_{ij}\log_2 p_{ij} =\log_2 6=1+\log_2 3=S(X),$$

$$I(X,Y)=S(X)+S(Y)-S(X)=S(Y)=1 \ \textit{бит/сим.}$$

3-есеп. Екі тәуелсіз *A* және *B* ақпарат көздері $p(a_i,b_j)$ ықтималдылықтар матрицасымен анықталады. Энтропияның барлық түрлерін және a_i,b_i мәліметтер жұбына сәйкес келетін ақпарат мөлшерін анықтау керек.

$$P(a_i,b_j)=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix}0,2 & 0 & 0,1\\ 0 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,1 & 0,2\end{bmatrix} & \begin{matrix} j\\ 1\\ 2\\ 3\end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix}}_{i} & \end{array}$$

Шешімі. $p(ab)$ – шартсыз ықтималдылық болған соң олар үшін мына заң орындалады:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(a_i b_j)=1.$$

j жолын өзгертусіз, жатық жол (*i* – жолы) бойынша ашу, a_i символдарды «жұтады» және $p(b_j)$ шартсыз ықтималдылықты береді, яғни *B* көздің ықтималдылық мөлшерін:

$0,2 + 0 + 0,1 = 0,3 = p(b_1)$, $j = 1$ кезінде,
$0 + 0,2 + 0,1 = 0,3 = p(b_2)$,$j = 2$,
$0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,4 = p(b_3)$, $j = 3$.

Нормалауды тексерсек:

$$p(b_1)+p(b_2)+p(b_3)=0,3+0,3 + 0,4 = 1.$$

i жолын өзгертусіз, тік жол (*j* жолы) бойынша ашу, b_j символдарды «жұтады» және $p(a_i)$ шартсыз ықтималдылықты береді, яғни *A* көздің ықтималдылық мөлшерін:

$$0{,}2 + 0 + 0{,}1 = 0{,}3 = p(a_1) j = 1 \text{ кезінде},$$
$$0 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 = p(a_2)\ j = 2,$$
$$0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}4 = p(a_3)\ j = 3.$$

Нормалауды тексерсек:

$$p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1.$$

$p(b|a) = p(ab)/p(a), p(a/b) = p(ab)/p(b)$ ескерсек, шартты ықтималдылықтар матрицасын толтырамыз:

$$p(a_i / b_j) = \begin{bmatrix} \frac{0{,}2}{0{,}3} & \frac{0}{0{,}3} & \frac{0{,}1}{0{,}3} \\ \frac{0}{0{,}3} & \frac{0{,}2}{0{,}3} & \frac{0{,}1}{0{,}3} \\ \frac{0{,}1}{0{,}4} & \frac{0{,}1}{0{,}4} & \frac{0{,}2}{0{,}4} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \\ \left[\begin{matrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{l} j \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \cdot$$

Нормалау заңын тексерсек, дұрыс жауабын аламыз:

$$\frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1 = p(a_1/b_1) + p(a_2/b_1) + p(a_3/b_1) j = 1 \text{ кезінде},$$
$$0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1 = p(a_1/b_2) + p(a_2/b_2) + p(a_3/b_2), j = 2,$$
$$0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}5 = 1 = p(a_1/b_3) + p(a_2/b_3) + p(a_3/b_3), j = 3.$$

Сондықтан әр жол a_i мәліметтердің таралуы болып табылады, $b_j \in B$ мәліметтің статистикалық әсері арқылы өзгертілген:

$$p(b_j / a_i) = \begin{bmatrix} \frac{0{,}2}{0{,}3} & \frac{0}{0{,}3} & \frac{0{,}1}{0{,}4} \\ \frac{0}{0{,}3} & \frac{0{,}2}{0{,}3} & \frac{0{,}1}{0{,}4} \\ \frac{0{,}1}{0{,}3} & \frac{0{,}1}{0{,}3} & \frac{0{,}2}{0{,}4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} j \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0.25 \\ 0 & 2/3 & 0.25 \\ 1/3 & 1/3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Нормалау заңын тексерсек, дұрыс жауабын аламыз:

$$\frac{2}{3}+0+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1=p(b_1/a_1)+p(b_2/a_1)+p(b_3/a_1)\text{, } i=1 \text{ кезінде,}$$

$$0+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1=p(b_1/a_2)+p(b_2/a_2)+p(b_3/a_2)\; i=2,$$

$$0{,}25+0{,}25+0{,}5=1=p(b_1/a_3)+p(b_2/a_3)+p(b_3/a_3)\; i=3.$$

Сондықтан әр бағана b_j мәліметтердің таралуы болып табылады, $a_i \in A$ мәліметтің статистикалық әсері арқылы өзгертілген.

Осы қажетті берілгендерді анықтаған соң A және B көздердің шартсыз энтропиясын есептейміз:

$$S(A)=-(0{,}3\log 0{,}3+0{,}3\log 0{,}3+0{,}4\log 0{,}4)=1{,}57095\textit{бит} \;/\, \textit{хаб.},$$
$$S(B)=-(0{,}3\log 0{,}3+0{,}3\log 0{,}3+0{,}4\log 0{,}4)=1{,}57095 \;\textit{бит}\,/\,\textit{хаб.}$$

A көздің шартты энтропиясы:

$$S(A/b_j)=-\sum_i p(a_i/b_j)\log p(a_i/b_j),$$
$$\mathrm{S(A/b_1)}=-\left[(2/3)\log(2/3)+0\log 0+(1/3)\log(1/3)\right]=0{,}91829.$$
$$\mathrm{S(A/b_2)}=-\left[0\log 0+(2/3)\log(2/3)+(1/3)\log(1/3)\right]=0{,}91829.$$
$$S(A/b_3)=-[0{,}25\log 0{,}25+0{,}25\log 0{,}25+0{,}5\log 0{,}5]=1{,}5.$$

A көздің жалпы шартты энтропиясы B көзге қарағанда:

$$S(A/B)=0{,}3S(A/b_1)+0{,}30{,}3S(A/b_2)+0{,}4S(A/b_3)=$$
$$=2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}91829+0{,}4\cdot 1{,}5=1{,}15097\textit{бит}/\,\textit{хаб.}$$

Енді B көздің шартты энтропиясы:

$$S(B/a_i)=-\sum_j p(b_j/a_i)\log p(b_j/a_i)\,,$$
$$\mathrm{S(B/a_1)}=-\left[(2/3)\log(2/3)+0\log 0+(1/3)\log(1/3)\right]=0{,}91829,$$
$$\mathrm{S(B/a_2)}=-\left[0\log 0+(2/3)\log(2/3)+(1/3)\log(1/3)\right]=0{,}91829,$$
$$S(B/a_3)=-[0{,}25\log 0{,}25+0{,}25\log 0{,}25+0{,}5\log 0{,}5]=0{,}91829.$$

B көздің жалпы шартты энтропиясы *A* көзге қарағанда:

$S(B/A) = 0{,}3*2*0{,}91829 + 0{,}4*1{,}5 = 1{,}15097$ *бит/хаб.*

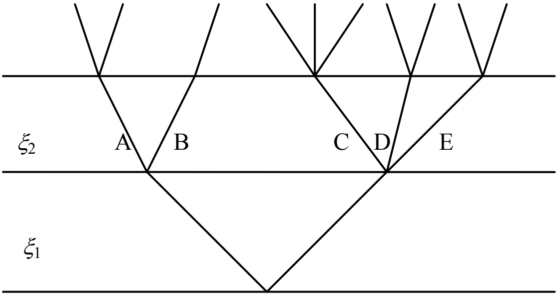
Екі ақпарат көздің қосынды энтропиясы:

$$S(A,B) = S(B) + S(A/B) = S(A) + S(B/A),$$
$$S(A,B) = S(A) + S(B/A) =$$
$$= 1{,}57095 + 1{,}15097 = 2{,}72192 \text{ бит/екі хабарға.}$$

Бір мәліметке келетін информация мөлшері:

$$I(A,B) = H(A) - H(A/B) =$$
$$= H(B) - H(B/A) =$$
$$= H(A) + H(B) - H(A,B) =$$
$$= 1{,}57095 + 1{,}57095 - 2{,}72192 = 0{,}41998 \text{ бит/хаб.}$$

4-есеп. 2.2-суреттегі сызбаны пайдаланып, есептеулер арқылы (2.12) формуланы дәлелдеу.



2.2-сурет

Дәлелдеу. Бірінші $P(\xi_1,\xi_2)$ табу керек. Ол үшін әрбір бұтақтың ықтималдығын тауып аламыз:

$$P_A(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}, \qquad P_B(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}, \qquad P_C(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{6},$$
$$P_D(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{6}, \qquad P_E(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{6}.$$

Енді толық орталанған тұтас энтропияны табамыз:

$$S_{\xi_1\xi_2} = -\sum_{\xi_1\xi_2} p(\xi_1, \xi_2)\log_2 p(\xi_1/\xi_2) =$$

$$= -\log_2\left\{\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}\right\} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{6}\right\} = -\left\{-1 + \frac{1}{2}(\log_2 2 - \log_2 3)\right\} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_2 3.$$

$$S_{\xi_1\xi_2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_2 3\,.$$

Осы толық орталанған тұтас энтропияны энтропия бұтағы арқылы дәлелдейміз:

$$S_{\xi_1\xi_2} = S_{\xi_1} + S_{\xi_2/\xi_1}\,,$$

S_{ξ_2/ξ_1} – толық орталанған шартты энтропия.

$$S_{\xi_1} = -\sum_{\xi_1} p(\xi_1)\log_2 p(\xi_1) = -\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right) = 1\,.$$

$$S_{\xi_2/\xi_1} = -\sum p(\xi_1\xi_2)\log_2 p(\xi_2/\xi_1) =$$

$$= -\sum p(\xi_2/\xi_1)p(\xi_1)\log_2 p(\xi_2/\xi_1) = \sum S_{\xi_2}(/\,\xi_1)p(\xi_1).$$

$S_{\xi_2}(/\,\xi_1)$ – шартты орталанған шартты энтропия.

$$S_{\xi_2}(/\,\xi_1) = -\sum p(\xi_2/\xi_1)\log_2(\xi_2/\xi_1).$$

$$S_{\xi_2}(/\,\xi_1) = \log_2\left\{2\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}\right\} = 1 + \log_2 3\,.$$

$$S_{\xi_2}(\xi_2/\,\xi_1) = -\sum S_{\xi_2}(/\,\xi_1)p(\xi_1)\,.$$

$$S_{\xi_1\xi_2} = (1 + \log_2 3)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_2 3\,.$$

Тапсырма

3.1. Келесі үлестірумен берілген дискретті кездейсоқ шаманың энтропиясын анықтаңыз.

X	1	2	3	4	5	6	7	8
p	0.1	0.2	0.1	0.05	0.1	0.05	0.3	0.1

3.2. X_1 және X_2 дискретті кездейсоқ шамалардың мәні екі идеал тиынның лақтырғанмен анықталады, ал Y тиынның «герб» жағы түскен сан сомасына тең. Y шамасында X_1 туралы қанша информация бар?

3.3. X_1 және X_2 тәуелсіз дискретті кездейсоқ шамалар бірдей ықтималдылықпен 0 немесе 1 мәнін қабылдайды: $Z = (X_1 + 1)^2 - X_2$. Z шамасында X_1 туралы қанша информация бар? $S(X_1)$ және $S(Z)$ анықтаңыз.

3.4. X_1 және X_2 дискретті кездейсоқ шамалар бір-біріне тәуелді және 2.3 есептегідей таралған, олардың бірлескен ықтималдылық үлестіруі келесі заңмен сипатталады:

X_1	0	0	1	1
X_2	0	1	0	1
p	1/3	1/6	1/6	1/3

$I(X_1, X_2)$информация мөлшерін анықтаңыз.

3.5. X_1 және X_2 шамалардың мәні екі идеал тетраэдрдің (жақтары 1-ден 4-ке дейін белгіленген) лақтырғанмен анықталады $Y = X_1 + X_2$. $I(X_1, Y)$, $S(X_1)$ және $S(Y)$ есептеңіз.

3.6. $Z = X_1 * X_2$ дискретті кездейсоқ шамада X_1 туралы информация мөлшерін есептеңіз. X_1 және X_2 шамалар алдыңғы есептен алынады. $S(Z)$ – ?

3.7. X_1 бірдей ықтималдылықпен үш мән қабылдайды: –1, 0 және 1. X_2 бірдей ықтималдылықпен 0, 1 және 2 мәндерді қабылдайды. X_1 және X_2 – тәуелсіз. $Y = X_1^2 + X_2$. $I(X_1, Y)$, $I(X_2, Y)$, $S(X_1)$, $S(X_2)$, $S(Y)$ анықтаңыз.

3.8. X, Y, Z дискретті кездейсоқ шамалардың энтропиясын және $Z = X + Y$ шамасында Y шамасымен салыстырғандағы информация мөлшерін анықтаңыз. X және Y – тәуелсіз және мынадай үлестірумен берілген:

X	0	1	3	4
p	1/8	1/8	1/4	1/2

Y	–2	2
p	3/8	5/8

3.9. Екі тәуелсіз A және B ақпарат көздері $p(a_i,b_j)$ ықтималдылықтар матрицасы берілген:

$$\begin{Vmatrix} 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0{,}14 & 0{,}16 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}01 \end{Vmatrix}$$

Энтропияның барлық түрлерін және a_i,b_i мәліметтер жұбына сәйкес келетін ақпарат мөлшерін анықтау керек.

4-тарау

ТИІМДІ ТАҢБАЛАУ ӘДІСТЕРІ

4.1.Деректердіқысу

Информацияны қысу мақсаты – берілген мәліметті сақтау немесе жіберуге қажетті бит санын азайту, бұл мәліметтерді тез жіберуге және экономды, қолма-қол сақтауға мүмкіндік береді.

Компьютерлік техникада информацияны сандық түрге айналдыру үшін (яғни 0 және 1 тізбегіне) арнайы кестелер (*таңбалау кестелер*) қолданылады. Ең қарапайым кесте – ASCII (American Standard Code for Information Interchange), әр символ 8 битпен таңбаланады. 0-ден 127-ге дейін бұл кестеде басқару символдар (мысалы, жолдың немесе беттің соңын білдіретін символ). Тәжірибеде бастапқы ASCII таңбасы емес оның ұлғайған ASCII+, 256 символдық (0-255) таңбасын сипаттайтын кестесін қолданады. Бірінші 128 орны стандартқа сәйкес келеді, ал қосымша 128 орын құралды немесе жүйелік бағдарламалық құралдың шығарушысымен белгіленеді. UNICODE таңбасында әр символ 16 битпен таңбаланады. Бірақ көп компьютерлік файлдарда біраз символдар басқа символдарға қарағанда жиі қолданылады, ал кейбіреуі мүлдем қолданбайды. Оны, әсіресе мәтін файлдарда байқауға болады: мұнда негізінде кіші әріптер, азғантай бас әріп, тыныс белгілері және сандар қолданады. Мысалы, қазақша мәтіндерде «о» әрпі, ағылшында «е» әрпі жиі кездеседі. Сондықтан мынадай сұрақ туады: неге жиі кездесетін символдарға қысқа таңба, ал сирек кездесетіндерге ұзынырақ таңба меншіктеуге болмайды? Осы принцип қысу әдістердің негізі болып табылады.

Қысу, мысалы, дискіге көптеу мәлімет жазуға, қатты дискінің мөлшерін «ұлғайтуға», модеммен жұмысты тездетуге мүмкіндік береді. Компьютерде файлдарды қысуға арналған программа-архиваторлар кең таралған (RAR, ZIP және т.б.). Информацияны қысу әдістері математикалық теория ретінде құрылған, және ұзақ уақыт (XX ғасырдың 80-жылдарының бірінші жартысына дейін) компьютерлерде аз қолданған.

Берілгендерді қысу бірсыпыра теориялық шектен көп болмайды. Осы шекті анықтауға келесі тақырыптар арналған.

4.2. Оптимальды таңбалаудың критерийлері

N әріптері бар алфавитті әр түрлі r символ арқылы ұзындығы m-ге тең түрде өрнектеу қажет. Бұл жағдайда мына теңсіздік орындалады:

$$r^{m_i} \geq N\ , \qquad (3.1)$$

мұндағы теңдік белгісі оптималдық таңбалауға сәйкес келеді.

r негізімен 3.1 формуланың екі жағын да логарифмдейміз:

$$m_i \log_r \cdot r \geq \log_r N, \quad m_i \geq \log_r \cdot N\ . \qquad (3.2)$$

(3.2) формуланы m_i-дің орта мәні үшін жазамыз:

$$\langle \mathrm{m_i} \rangle = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{p_i\, m_i}\ , \qquad \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{p_i} = 1, \qquad (3.3)$$

мұндағы p_i – m_i -дің пайда болу ықтималдылығы. $p_N = 1/N$ – әр әріптің пайда болу ықтималдылығы реттеліп пайда болған сөздің ықтималдылығынан үлкен болады: $p_N > p_i$. Егер (3.2) формуланың оң жағында $p_N \rightarrow p_i$ деп қабылдасақ, теңсіздік сақталады. (3.2) формуланың екі жағын да p_i-ге көбейтіп және i бойынша қосынды алсақ, мына формула шығады:

$$\langle m_i \rangle \geq -\sum_i p_i \cdot \log_r p_i\ . \qquad (3.4)$$

$I_i = -\log_r p_i$ өрнегі p_i ықтималдылығы бар оқиғаның информациясын анықтайды. (3.4) формула бойынша оптимальды таңбалау (қысу) $\langle m_i \rangle \approx S$ асимптотикалық теңдікті білдіреді, яғни сөздің ұзындығының орта мәні информациялық энтропияға тең болу керек. Тиімді таңбалау хабар ұзындығын қысқартады, оны жеткізу уақытын, оны сақтауға қажет жады көлемін кішірейтеді.

4.3. Шеннон-Фано әдісі

Егер алфавит әріптерінің пайда болу ықтималдылығы әртүрлі болса, онда біркелкі таңбалау (бір символ бір әріпке сәйкес келеді) оптимальды болмайды, өйткені тепе-тең хаостық күйдің ($p = p_i = 1/N$, ықтималдықтар бірдей жағдай) энтропиясы тепе-теңсіз, реттелген күйдің энтропиясынан ылғи да үлкен болады. Сондықтан біркелкі емес таңбалау қолданылады. Байқалуының көбірек ықтималдылығы бар әріптер үшін қысқа тізбекті таңбалау пайдаланылады, ал ұзын комбинациялар сирек әріптер үшін қолданылады.

Шеннон-Фано әдісін қолданамыз:

– алфавит әріптері (таңбаланатын кез келген хабар) ықтималдылығы азаю реті бойынша жазылады. Әріптер қосқанда ықтималдылығы шамамен тең болатын екі топқа бөлінеді;
– екі топтың әрқайсысы ықтималдылықтарының қосындысы бірдей болатын, тағы да екі топқа бөлінеді. Бөлу алфавитте таңбалайтын бір әріп қалғанша жалғаса береді.
– әрбір бөлу операциясынан кейін ықтималдылығы жоғарғы бөліктегі әріптерге 1 таңбалау элементі, ал төменгі бөліктегі әріптерге 0 сәйкестендіріледі (1 мен 0-ді ауыстырғанда не болатынын ойластырыңыз).

Осы әдіспен алынған біртексіз таңбалау бір мәнді шешілетін таңбалау болып есептелмейді. Бұл мәселені шешу үшін алфавит әріптерінің арасына бөлгіш символ қолдану керек немесе бастапқы бөлігі жеке комбинация ретінде қолданылған таңбалауды алып тастау керек. Мысалы, 101 бір әріптің таңбасын білдіреді, онда 1,10 немесе 10101 комбинациясын қолдануға болмайды.

Мысал. p_i ықтималдылығы азайған реттік түрде $x_i(i=1, ... 8)$ әріптер (сигналдар) берілген. Жоғарыда сипатталған алгоритм бойынша ұзындықтары m_i таңбалаулар анықталған.

3.1-кесте

әріп x_i	ықтим. p_i	таңба	ұзындығы m_i, *бит*
x_1	0,25	11	2
x_2	0,25	10	2
x_3	0,15	011	3
x_4	0,15	010	3
x_5	0,05	0011	4
x_6	0,05	0010	4
x_7	0,05	0001	4
x_8	0,05	0000	4

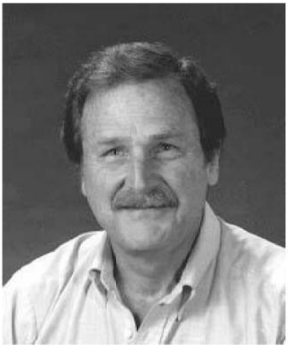
Таңбалаудың оптимальды алгоритмін графиктік бұтақ түрінде көрсетуге болады (3.1-сурет). Бұтақ деп үдерістің, объектінің ациклдік (түйықталмаған) графын айтады. *Граф* деп қабырғалармен (сызықтармен) байланысқан көптеген шыңдар (нүктелер) жиынын айтады. Табиғаты әр түрлі құбылыстар, объектілер шың бола алады: молекулалар, резисторлар, конденсаторлар, қалалар, оқиғалар, т.с.с. Қабырғалар объектілер арасындағы әр түрлі байланыстарды, қатынастарды, әсерлерді бейнелейді.

Стрелкалар бойынша x_i әріптерді бейнелейтін соңғы нүктелерге дейін қозғала отырып және жолда кездескен шыңдардың символдарын ретімен жазып, 3.1-кестеде келтірілген таңбаларды аламыз. Келтірілген графиктік бұтақтың түрін таңдаудағы негізгі принцип – алфавиттегі әр әріптен алынатын информация максимал болу үшін 0,1 символдарының бірдей ықтималдылығын қамтамасыз ету. Бұған қоса таңбалаудың бастапқы бөлігі дербес таңбалау болмау принципі де сақталған.

Шеннон-Фано әдісі ескі әдіс болып саналады және қазіргі кезде айтарлықтай тәжірибелік қызығушылық тудырмайды. Бұл таңбалау көбінесе оқу мақсатында қолданылады.

4.4. Хаффман алгоритмі

Хаффман әдісі бойынша файлды қысу үшін, біріншіден, файлды толығымен оқып және әр символ қанша рет кездесетінін есептеп шығу керек. Символдардың кездесу жиілігін санаған соң жиілігі төмендеу бойынша топтастырылады, яғни кестедегі әр символдың орнын ауыстырмай жадыда сілтеме кестесі төмендеу бойынша сортталады. Соңғы кестедегі әр сілтемені «түйін» деп атаймыз. Мұнан былай (ағашта) осы «түйінге» көрсететін сілтемені орналастырамыз.



ХАФФМАН

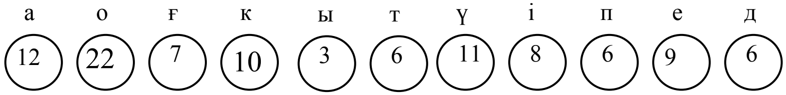
Мысал

Ұзындығы 100 байт мәтіндік файлды қарастырайық. Мәтін әр түрлі 11 символдан тұрсын. Әр символдың кездескен санын (кіріс жиілігін) есептеп келесіні алдық.

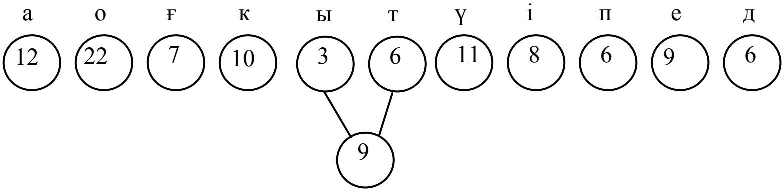
3.2-кесте

Символ	а	О	ғ	к	Ы	т	ү	і	п	е	д
кіріс саны	12	22	7	10	3	6	11	8	6	9	6

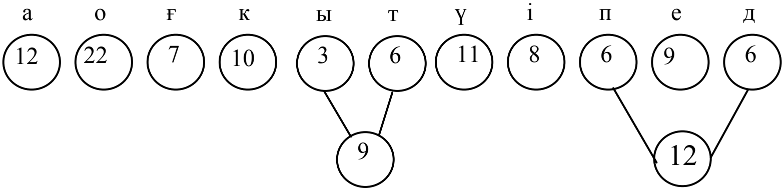
Ыңғайлық үшін символдар мен олардың кіріс жиілігін былай құрастырамыз:



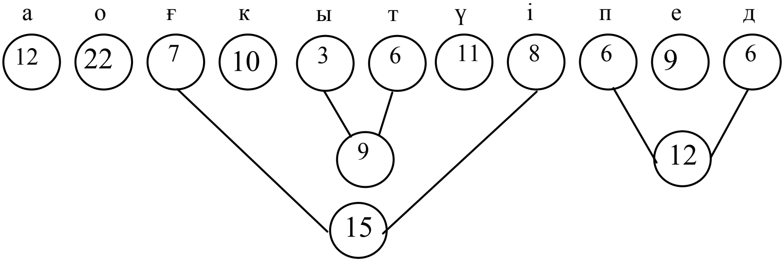
Енді жиілігі ең аз екі символды аламыз: біздің мысалымызда бұл «ы» (3) және «т» (6) немесе «п», «д»(6), соңғы үш символдың кез келгенін алуға болады. Біз «т» символды алайық. «ы» және«т» түйіндерден жаңа түйін құрастырамыз, оның жиілігі «ы» және«т» жиіліктерінің сомасына тең.



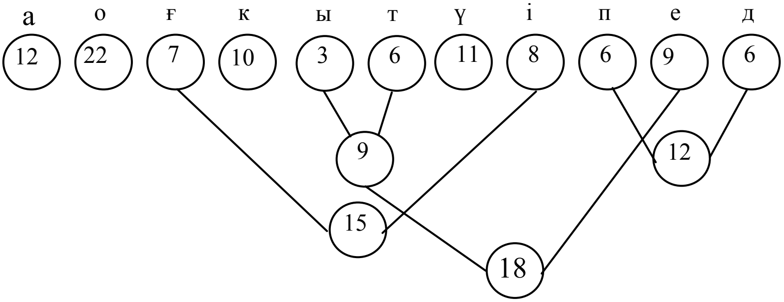
Шеңбер ішіндегі нөмір – «ы» және «т» символдар жиіліктерінің сомасы. Енді қайтадан ең аз жиілікті екі символды іздейміз. «ы» және «т» символдарды алмай, олардың орнына жаңа түйінді қарастырамыз. Ең аз жиілік енді «д» мен «п» символдарда. Қайтадан түйіндердің қосылу операциясын орындаймыз.



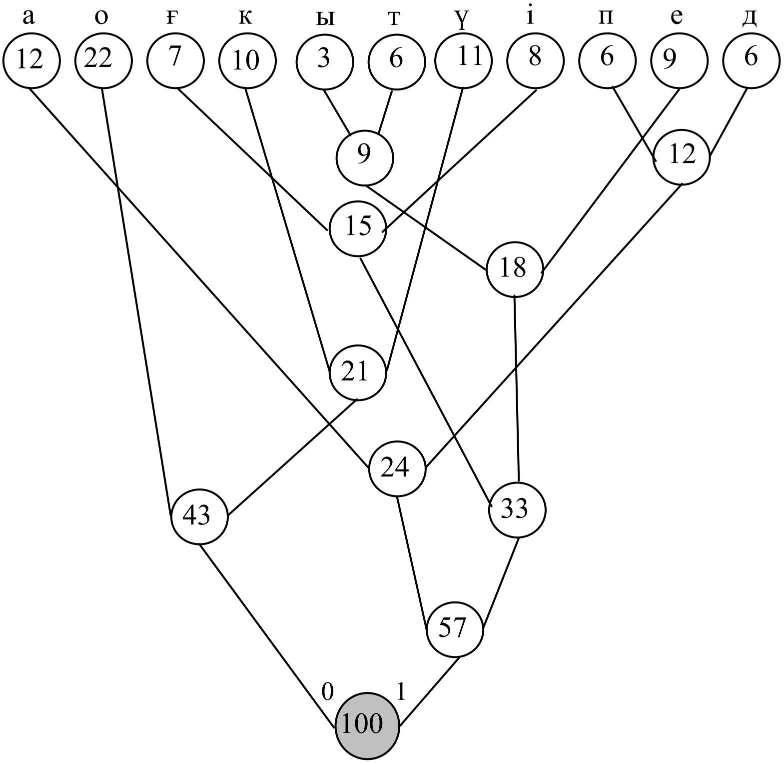
Келесі қадамымыз «ғ» және «і» символдарды қосу.



Енді жиілігі бірдей (=9) «е» символы және «ы» мен «т» қосылған кездегі бірінші пайда болған жаңа түйінді аламыз.



Осылай жалғастырып, толық «ағашты» құрастырамыз, яғни бір түйінге барлығы жиналу қажет.



Ағашты құрғаннан кейін біз файлды таңбалай аламыз. Әрқашан ағаштың түбірінен (Root) бастауымыз керек. Символға таңба бергенде ағаш бойымен жоғарыға қарай жүріп, бұтақтардың барлық бұрылысын ескереміз, егер солға бұрылсақ, онда 0 таңбасын, ал 1 таңбасын оң бұрылысқа береміз. Мысалы, «а» символ үшін таңбаны беру жолын қарастырайық: оңға 57-ге қарай жүреміз (1-ді сақтаймыз), енді сол бұрыс, сонан соң тағы сол бұрыс жасаймыз. «а» үшін таңба – 101. «ғ» символды қарастырсақ, оң, оң, сол, сол, яғни 1100 таңбасын аламыз. Осылай барлық символдар үшін орындаймыз:

3.3-кесте

символ	таңба	ұзындығы, *бит*
а	101	3
о	00	2
ғ	1100	4
к	010	3
ы	11100	5
т	11101	5
ү	011	3
і	1101	4
п	1010	4
е	1111	4
д	1011	4

Алғашқыда әр символ (ASCII код бойыша) 8 битпен беріледі. Таңба берген соң бит санын азайттық, демек, файлдың мөлшерін де азайттық. Қысу түрі келесідей болады:

3.4-кесте

жиілік	бастапқы	сығылған бит	битке азайды
а 12	12 x 8 = 96	12 x 3 = 36	30
о 22	22 x 8 = 176	22 x 2 = 44	132
ғ 7	7 x 8 = 56	7 x 4 = 28	56
к 10	10 x 8 = 80	10 x 3 = 30	50
ы 3	3 x 8 = 24	3 x 5 = 15	9
т 6	6 x 8 = 48	6 x 5 = 30	18
ү 11	11 x 8 = 88	11 x 3 = 33	55
і 8	8 x 8 = 64	8 x 4 = 32	32
п 6	6 x 8 = 48	6 x 4 = 24	24
е 9	9 x 8 = 72	9 x 4 = 36	36
д 6	6 x 8 = 48	6 x 4 = 24	24

Файлдың алғашқы мөлшері: 100 байт – 800 бит.

Сығылғын файлдың мөлшері: 41,5 байт – 332 бит.

Файл 58,5 %-ға сығылды.

Мұның бәрі өте жақсы, бірақ алғашқы файлды қайтару үшін әр файлға ағаштар өзгеше болғандықтан, таңбаны шешетін ағаш қажет. Сондықтан ағашты файлмен бірге сақтау керек. Бұл нәтижесінде соңғы файлдың мөлшерін ұлғайтады.

4.5. Арифметикалық таңбалау

Арифметикалық таңбалауда мәтін 0-ден 1-ге дейін аралықта жататын заттық сандармен беріледі. Мәтінді таңбалау барысында оны көрсететін аралық азаяды, ал биттер саны өседі. Белгілі бір модельмен берілген ықтималдылығына байланысты мәтіннің келесі символдары аралықтың шамасын қысқартады. Ықтималдылығы аз символдарға қарағанда ықтималдылығы көп символдар аралықты азырақ қысқартады, сондықтан олар нәтижеге аз бит қосады.

Жұмыстың басында мәтінге лайық аралығымыз – [0; 1). Келесі символды өңдегенде оған аралықтың бөлігін бергеннен соң аралықтың иені тарылады.

Мысал

{a, e, i, o, u, !} алфавиті (әріптердің ықтималдылықтары тұрақты) берілсін (3.5-кесте).«eaii!» мәтінін таңбалайық.

3.5-кесте

символ	ықтималдылық	аралық
a	0,2	[0,0; 0,2)
e	0,3	[0,2; 0,5)
i	0,1	[0,5; 0,6)
o	0,2	[0,6; 0,8)
u	0,1	[0,8; 0,9)
!	0,1	[0,9; 1,0)

Таңбалаушыға (кодировщик) да, таңбаны шешушіге (декодировщик) де ең бастапқы аралық [0; 1) екендігі белгілі. Келесі

[L; H) жұмыс аралығын анықтағанда мына формуланы қолданамыз:

$$\left[L_{ж} + h \cdot l_{c1};\ L_{ж} + h_{ж} \cdot l_{c2}\right) = \left[L;\ H\right),$$

мұндағы $L_{ж}$ – ағымды жұмыс аралығының бастапқы мәні, $h_{ж}$ – ағымды жұмыс аралықтың қадамы, l_{c1}, l_{c2} – символға берілген (кестедегі) аралықтың сәйкесінше бастапқы және соңғы мәні.

Таңбалау жолдары

Басында жұмыс аралығымыз – [0; 1), бастапқы символымыз («еаіі!» мәтіні үшін) «е»-ні қарастырамыз:

$$[0 + 1*0,2; 0 +1*0,5) = [0,2; 0,5).$$

1-інші символ «е»-ні қарастырғаннан кейін таңбалаушы аралықты осы символға модель бойынша берілген [0,2; 0,5)-ке дейін тарылтады. Енді жұмыс аралығымыз – [0,2; 0,5). $h_{ж}$ қадамы 0,3-ке тең. «а» символды қарастырғаннан соң:

«а»: $[0,2+0,3\cdot 0; 0,2+0,3\cdot 0,2) = [0,2; 0,26)$, $h_{ж} = 0,06$,

«і»: $[0,2+0,06\cdot 0,5; 0,2+0,06\cdot 0,6) = [0,23; 0,236)$, $h_{ж} = 0,006$,

«і»: $[0.23+0,006\cdot 0,5; 0,23+0,006\cdot 0,6)=[0,233;0,2336)$, $h_{ж}=0,0006$.

«!»: $[0,233+0,0006\cdot 0,9; 0,233+0,0006\cdot 1) = [0,23354; 0,2336)$.

Таңбаны шешушінің мәтін туралы тек оның соңғы аралығын [0,23354; 0,2336) біледі деп болжайық. 3.5-інші кесте бойынша модельдің «е» символға берілген аралық қорытынды аралықта толығымен жатқандықтан, ол бірінші кодталған символы осы екендігін бірден түсінеді.

Енді декодировщиктік әрекетін қайталайық:

Басында	[0,0; 1,0)
«е»-ні қарастырғаннан кейін	[0,2; 0,5)

Екінші символ «а» екені түсінікті, ол [0,2; 0,26) аралыққа әкеледі, [0,23354; 0,2336) қорытынды аралық толығымен ішінде жатқаннан соң.

Осылай жалғастыра бере декодировщик мәтінді шығарып алады. Бұл қадамдарды мына теңсіздікпен алуға болады.

$$l_{c1} \geq (\text{value}-L)/h < l_{c2}, \text{value} \text{ – алынған код.}$$

Әрі қарай кодировщиктің жасаған жұмыс аралыған тауып әр әріпті шешеміз.

Декадировщикке қорытынды аралықтың екі шектің мәндерін міндетті түрде білу қажет емес. Тіпті аралықтың ішінде жатқан бір мәннің өзі, мысалы, 0,23355 жеткілікті (басқа сандар – 0,23354, 0,23357 немесе 0,23354321 жеткілікті). Бірақ үдерісті аяқтау үшін декодировщик мәтіннің соңын дәл табу керек. Сондықтан мәтіннің аяғын арнайы символмен белгілеу керек, кодировщик және декодировщикке белгілі. Осы мақсатқа кестедегі «!» символы қолданылады. Осы символды декодировщик кездестіргенде өз үдерісін аяқтайды.

Кестедегі модельмен берілген, 5 символды «еаіі!» мәтіннің энтропиясы келесі:

$$-\lg 0{,}3-\lg 0{,}2-\lg 0{,}1-\lg 0{,}1-\lg 0{,}1 = -\lg 0{,}00006 = 4{,}22.$$

Мұнда таңбалауға ондық сандар қолданғаннан соң логарифмнің негізі – 10 саны (ондық логарифм). Негізінде, қорытынды аралықтың иені – 0,2336-0,23354 = 0,00006, ал энтропия – осы санның теріс ондық логарифмі.

Төрт символдан тұратын мәтінді таңбалауға бес ондық сан өте көп сияқты. Бірақ әр түрлі модельдер әр түрлі энтропияны береді. «еаіі!» мәтіннің бөлек символдарын талқылауға арналған ең жақсы модель – бұл символдардың жиілік көпшілігі:

{«е»(0.2), «а»(0.2), «і»(0.4), «!»(0.2)}.

Бұл ондық жүйеде энтропия саны 2,89-ға теңін береді, яғни берілген мәтінді үш цифрдан тұратын санмен таңбалайды. Бірақ қиынырақ модельдер жалпы түрінде едәуір жақсы нәтиже береді.

4.6. Ауыстыру немесе сөздіктік бейімделген информацияның қысу алгоритмдері. Лемпель-Зив әдістері

Шеннон-Фано, Хаффман және арифметикалық әдістер жалпы *статистикалық* әдістер деп аталады. *Сөздіктік* алгоритмдердің математикалық дәлелі азырақ, бірақ олар өте қолайлы.

70-жылдардың екінші жартысында (XX ғасыр) сөздіктік сығу алгоритмдері пайда болды. Алғашқы алгоритмді американдық ғалымдар Якоб Зив (Ziv) және Авраам Лемпель (Lempel) ұсынды. Зив пен Лемпельдің жұмыстары таза теориялық болатын, өйткені олар сөз жолдың «күрделі» мәселесін зерттеумен айналысқан, ал қолданыстағы сығу алгоритмдері тек оның жеке нәтижесі болатын. Бірнеше уақыт өткен соң ғана осы алгоритм бағдарламалық және аппараттық қамтамасыздандыруды құраушылар қолына түсті.

LZ77 алгоритмі

LZ77 алгоритмі (LZ – бұл Lempel және Ziv аттарының бірінші әріпінен құрылған) 1977 жылы жарияланған. Бірнеше информацияны қысу бағдарламалары LZ алгоритмнің түрлерін қолданады. LZ алгоритмнің әйгілігі жоғары қысу тиімділігіндегі олардың қарапайымдылығында.

LZ77 негізгі ойы келесіде: мәліметтегі символдар жолдың үзігі екінші және келесі сөз тізбектердің коды оның бастапқы қарастырылған сөз үзігіне сілтеуімен ауыстырылады. LZ77 алгоритмі мәліметтің қаралған бөлігін сөздік ретінде қолданады. Қысу барысында алгоритм сөйлемнің келесі үзігі үшін сөздіктің ішіндегі сілтеумен ауыстыруға тырысады.

LZ77 мәліметтің үстімен өтетін, екі бірдей емес бөлікке бөлінген, жылжымалы терезені қолданады. Бірінші бөлік сөздік деп аталатын көп мөлшерлі болады және мәліметтің қаралған бөлігін қабылдайды. Екінші, аз мөлшерлі буфер деп аталатын мәліметтің әлі таңбаланбаған символдарынан тұрады. Негізі терезенің мөлшері бірнеше килобайт, ал буфердің мөлшері жүз байттан аспайды. Алгоритм сөздіктен (терезенің үлкен бөлігінен) буфердің ішіндегісімен сай келетін жолды іздеуді тырысады.

LZ77 алгоритмі үш элементтен тұратын код шығарады:

- буфердегі жол үзіндіктің басы мен сөздіктегі жолға сәйкес келетін оның ығысуы;
- сәйкес келген жолдың ұзындығы;
- жолдан кейінгі буфердегі бірінші символ.

LZ77 алгоритмнің кемшіліктері:

- сөздіктің мөлшері өскен сайын алгоритм кодердің жұмыс істеу жылдамдығы пропорционал азаяды;
- жалғыз символдарды таңбалау өте тиімсіз.

1-мысал

«КЕРІКЕРНЕУ» жолды LZ77 алгоритмі бойынша таңбалау.

сөздік (8 бит)								буфер (5 бит)	таңба
1	2	3	4	5	6	7	8		
								КЕРІ_	0,0,К
							К	ЕРІ_К	0,0,Е
						К	Е	РІ_КЕ	0,0,Р
					К	Е	Р	І_КЕР	0,0,І
				К	Е	Р	І	_КЕРН	0,0,_
			К	Е	Р	І	_	КЕРНЕ	3,3,Н
Е	Р	І	_	К	Е	Р	Н	ЕУ . . .	0,1,У

Кодтың ұзындығы былай есептеледі:
Жолдың ұзындығы буфер мөлшерінен үлкен бола алмайды, ал ығысу сөздіктің мөлшерінен –1-ден үлкен бола алмайды. Сондықтан ығысудың екілік кодының ұзындығы $\log_2$ (сөздіктің мөлшері) бүтін үлкен жағына қарай дөңгеленген мәніне тең, ал жолдың екілік кодының ұзындығы $\log_2$ (буфердің мөлшері + 1) бүтін үлкен жағына қарай дөңгеленген мәніне тең. Ал символ 8 битпен таңбаланады (ASCII бойынша):

$$L_{жол} = \log_2 (\text{сөздіктің мөлшері}) +$$
$$+ \log_2 (\text{буфердің мөлшері} + 1) + 8.$$

Мысалымызда кодтың ұзындығы:

$$L_{код} = (\log_2 8 + \log_2 (5 + 1) + 8) * 7 = 98 \text{ бит},$$

бастапқысы: 11*8 = 88 бит. Қарастырған мәтін жолы өте қысқа болғандықтан (қысу әдістері көп мөлшерлі файлдарға қолданады), қысу әдісті қолданғаннан кейін көлемі бастапқыдан көп болды.

LZSS алгоритмі

1982 ж. Сторер (Storer) және Шиманский (Szimanski) LZ77 негізінде LZSS алгоритмін құрды, LZ77-ден ол шыққан кодтарымен ерекшеленді.

LZSS коды таңбаланбаған символдан өзгеше бірбитті префикстен басталады. Таңба екі символдан тұрады: ығысу мен ұзындықтан LZ77-дегідей. Егер буферде сөздіктегідей сәйкес жол болмаса, LZSS-та терезе сәйкес жолдың тура ұзындығына немесе 1-ге жылжиды, жолдың ұзындығы әрқашан нөлден көп, сондықтан жол ұзындығы үшін екілік кодтың ұзындығы – бұл буфердің ұзындығынан көп, бүтін жаққа дөңгеленген екілік логарифмі.

2-мысал

«КЕРІ КЕРНЕУ» жолды LZSS алгоритмі бойынша таңбалау.

сөздік (8 бит)								буфер (5 бит)	таңба	ұзындық
1	2	3	4	5	6	7	8			
								КЕРІ_	0,К	
							К	ЕРІ_К	0,Е	
						К	Е	РІ_КЕ	0,Р	
					К	Е	Р	І_КЕР	0,І	
				К	Е	Р	І	_КЕРН	0,_	
			К	Е	Р	І	_	КЕРНЕ	3,3	
К	Е	Р	І	_	К	Е	Р	НЕУ . .	0,Н	
Е	Р	І	_	К	Е	Р	Н	ЕУ . . .	0,1	
Р	І	_	К	Е	Р	Н	Е	У		

LZ77 және LZSS алгоритмдердің айқын кемшіліктері:

1) сөздік ұзындығынан үлкен қашықтықта бір-бірінен тұрған жолдарды таңбалауы мүмкін емес;
2) таңбалауға болатын жолдың ұзындығы буфердің мөлшерімен шектелген.

Егер сөздік пен буфердің мөлшерін өсіре берсек, онда таңбалаудың тиімділігі азаяды, яғни осы шамалар өскен сайын ығысу мен ұзындықтың кодтар ұзындығы да өсе бастайды, ал бұл кішкентай жолдардың кодтарын өте үлкейтеді. Тағы да алгоритм-кодердің жұмыс істеу уақыты көбейеді.

LZ78 алгоритмі

1978 жылы LZ77 авторларымен жаңа LZ78 алгоритмі құрылды.

LZ78 жылжымалы терезені қолданбайды, ол сөздікте қаралып қойылған сөйлемдерді сақтайды. Бастапқыда осы сөздік тек бір бос жолдан тұрады (ұзындығы нөл жолдан). Жинақталған жол сөздіктің сөйлеміне толығымен кіргенше алгоритм мәліметтердің символдарын оқиды. Бұл жол сөздіктегі бірде-бір сөйлеміне сәйкес келмей қалғанда алгоритм код шығарады, код сөздіктегі жолдың индексі және сәйкестікті бұзған символдан тұрады. Сонан соң сөздікке енгізілген жол қосылады. Егер сөздік толса, онда одан сәйкестікте ең аз қатысатын сөйлем алынып тасталады.

Пайда болған код мөлшерінің негізгісі болып сөздіктің мөлшері табылады, сондықтан LZ78 әдіс бойынша әр код сөздіктегі сөйлемнің нөмірінен тұрады. Соңғысынан осы кодтар тұрақты ұзындығы бар екенін білуге болады: сөздіктің мөлшерінен үлкен жаққа дөңгеленген екілік логарифмі плюс 8-ге (ASCII) тең.

3-мысал

«КЕРІ КЕРНЕУ» жолды LZSS алгоритмі бойынша таңбалау.

сөздік (8 бит)								буфер (5 бит)	таңба
1	2	3	4	5	6	7	8		
								КЕРІ_	0,0,К
							К	ЕРІ_К	0,0,Е
						К	Е	РІ_КЕ	0,0,Р
					К	Е	Р	І_КЕР	0,0,І
				К	Е	Р	І	_КЕРН	0,0,_
			К	Е	Р	І	_	КЕРНЕ	3,3,Н
Е	Р	І	_	К	Е	Р	Н	ЕУ	0,1,У

LZ77, LZSS, LZ78 математиктермен құрылған және еміне-ркін қолдануға болады.

LZW алгоритмі

1984 жылы Уэлч (Welch) LZ78 алгоритмін өзгерту арқылы LZW алгоритмін құрды.

Алгоритмнің қадамдары:

1. Барлық белгілі бірсимволдық сөздермен (әдетте ASCII кодтардың 256 символы арқылы) сөздікті тану. Бастапқы мәліметтің сөзін **W** әріппен тану.

2.Таңбаланатын мәліметтегі келесі K символды оқу.

```
3. Егер МӘЛІМЕТТІҢ СОҢЫ болса
       W үшін кодты беру
       Соңы
   Егер WK сөз сөздікте болса
       Кіріс сөзге WK-ның мәнін беру
       2-інші қадамға өту
   Әйтпесе
       W-ның кодын бер
       WK-ны сөздікке енгіз
       Кіріс сөзге K-ның мәнін бер
   2-інші қадамға өту.
```

LZ78-гі алгоритмдегідей LZW код сөзінің ұзындығы сөздіктің өлшеміне байланысты: LZW коды сөздік өлшемінің екілік логарифміне ұлғайту жағына қарай дөңгелетілген санға тең.

LZW коды пайда болған кезде ең үздік сығу коэффициентін көрсеткен болатын. Ол компьютерде ең кең таралған алғашқы сығу алгоритмдердің біреуі болды. Алгоритм Unix жүйелеріндегі compress бағдарламасында 1986 ж. іске асырылған. 1987 жылдан бастап суреттерді сығу GIF әдісінің стандарты болды және де TIFF форматында да қолданады. Қазіргі кезде PDF стандартында қолданыста.

LZW алгоритм бастапқыда патенттелген алгоритмдердің бірі болған. Кезінде бұл алгоритмге бірнеше патент берілген; мысалы, АҚШ-та: америкалық U.S. Patent 4 464 650 патенті (Sperry Corporation фирмасына, қазір бұл фирма Unisys Corporation деп аталады) және U.S. Patent 4 814 746 (IBM). LZW алгоритмнің әр түрлі вариацияларына Еуропа, Жапония және Канадада ұқсас патенттер берілген. Қазір барлық патенттердің мерзімі аяқталды.

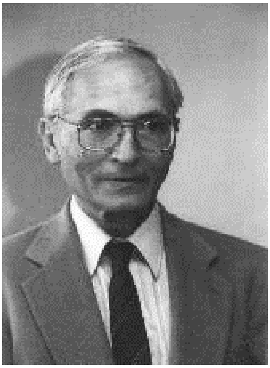
4-мысал

«ababaabbacacacacccccccaabbddddbdbdddbdbd» – жолды LZW алгоритмі бойынша таңбалау. a символы бірінші жолда, ол 97 санымен таңбаланады. [97]b = ab жолы 256 нөмірмен сақталады. Келесі қадамдары кестеде келтірілген.

Жол	Код	Жаңа жол	нөмірі
a	97	ab	256
b	98	ba	257
ab	256	aba	258
a	97	aa	259
ab	256	abb	260
ba	257	bac	261
c	99	ca	262
a	97	ac	263
ca	262	cac	264
cac	264	cacc	265
c	99	cc	266
cc	266	ccc	267
ccc	267	ccca	268
aa	259	aab	269
b	98	bb	270
b	98	bd	271
d	100	dd	272
dd	272	ddd	273
d	100	db	274
bd	271	bdb	275
bd	271	bdd	276
dd	272	ddb	277
bdb	275	bdbd	278
d	100		

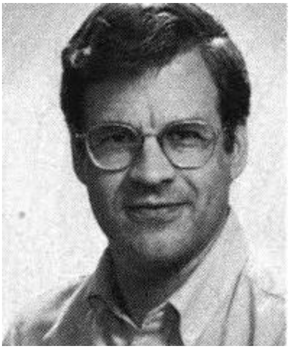
Бұл мысалда әр жолдан тек оның нөмірі жіберіледі. Әдетте әр нөмірге 12 бит орын беріледі, сондықтан 4096 нөмір жинақтауға болады. Нөмір шегіне жеткен соң жүйе тазартылып, жаңадан толтыруды бастайды.

LZWәдісі жиі модемдерде қолданылады сығу тәсілін таңдаған соң модемдер ақпаратты берудің сығылған режиміне өтеді және жол жүзінде таратқыш модем шифрленген мәтінді сұрастырады, ал қабылдағыш модем оны шешіп, алушыға нақты түрінде береді.



ЗИВ

ЛЕМПЕЛЬ



УЭЛЧ

LZ ұқсас алгоритмдерінің бірнеше түрлері бар, олар бір-бірімен қайталанатын сөйлемдерді іздеу әдісімен айырылады.

3.6-кесте

	аты	автор	жыл	айырмашылығы
1	2	3	4	5
1.	LZ77	Ziv and Lempel	1977	Белгі мен символдар алмасады. Белгілер алдыңғы N символдардың ішіндегі жолды көрсетеді
2.	LZ78	Ziv and Lempel	1978	Белгі мен символдар алмасады. Белгілер алдында қаралған жолды көрсетеді

1	2	3	4	5
3.	LZR	Roden et al.	1981	Белгі мен символдар алмасады. Белгілер алдыңғы символдардың ішіндегі жолды көрсетеді.
4.	LZW	Welch	1984	Код тек белгілерден тұрады. Белгілер алдында қаралған жолды көрсетеді. Белгілердің белгілі ұзындығы бар.
5.	LZJ	Jakobsson	1985	Код тек белгілерден тұрады. Белгілер алдында қаралған жолды көрсетеді.
6.	LZT	Thomas et al.	1985	Код тек белгілерден тұрады. Белгілер алдында қаралған жолды көрсетеді.
7.	LZSS		1986	Белгі мен символдар жалау-битпен айырылады. Белгілер алдыңғы N символдардың ішіндегі жолды көрсетеді.
8.	LZB	Bell	1987	LZSS сияқты, бірақ белгілер үшін әр түрлі таңбалау қолданылады.
9.	LZH	Brent	1987	LZSS сияқты, бірақ белгілер үшін Хаффман әдісі қолданылады.
10.	LZT	Tischer	1987	LZC сияқты, бірақ сөйлемдер белгілі бір тізбекке болады.

Тапсырма

4.1. Шеннон-Фано әдісімен әріптердің кодын ал

әріп	А	Ә	Б	Г	Ғ	Д	Е	И	К	Қ	Л	М	Н	О	П
жиілігі	105	85	26	46	43	43	20	81	99	104	57	50	64	77	100

4.2. Арифметикалық кодтау арқылы 7 символды алфавиттен {a, f, m, n, o, p, .} ықтималдылықтары {0,2, 0,05, 0,1, 0,25, 0,3, 0,06, 0,04} сәйкес «moon.» сөзді таңбалаңыз.

4.3. «Бір координатты жүйеден екінші жүйеге өту» сөйлем үшін Хаффман ағашын салыңыз және қанша пайызға сығылғанын анықтаңыз.

4.4. LZ77 әдісімен «жинақталған динамикалық тұрақты» сөйлемді таңбалап, ұзындығын есептеңіз (сөздік – 18, буфер – 7 бит).

4.5. LZSS әдісімен «араларында жаралы маралдар бар» сөйлемді таңбалап, ұзындығын есептеңіз (сөздік – 18, буфер – 7 бит).

4.6. LZ78 әдісімен «былай табылған масштаб» сөйлемді таңбалап, ұзындығын есептеңіз (сөздік – 18 бит).

5-тарау

БӨГЕУГЕ ОРНЫҚТЫ КОДТАУ

5.1. Байланыс каналы

Ақпараттық канал – ақпарат көзінен (каналдың бастапқы құрылғысы) қабылдағышқа (каналдың соңғы құрылғысы) дейін деректерді беру үшін байланыс желілермен біріктірілген құрылғылардың жиыны.

Байланыс желісі канал құрылғылар арасында ақпараттық сигналдардың өтуін қамтамасыз етеді. Ақпаратты әр түрлі әдіспен тасымалдауға болады: сым арқылы электр тогымен, жарық арқылы (оптоталшық) және кеңістікте радиодиапазонды электрмагниттік толқындар көмегімен. Олардан басқа да байланыс ұйымдастыруға болады, бірақ олар сирек кездеседі, мысалы, дыбыс толқын арқылы су, атмосфера және т.б. тығыз орталарда.

Канал құрылғыларына қабылданған сигналды күшейту үшін *репиттерлер* жатады. Егер кодтау/декодтау үдерісі өте жоғары жылдамдықпен өткізілсе, канал құрылғыларына тағы да кодер/декодерлерді жатқызуға болады. Негізі кодер/декодерлер ақпарат көзі және қабылдағышқа жатады.

Каналдың техникалық сипаттамалары оның ішіне кіретін құрылғылардың жұмыс істеу принципі, сигналдың түрі, сигналдың таралатын физикалық ортаның қасиеті мен құрамы және қолданатын кодтың түрімен анықталады.

Каналдың эффективтілігі ақпараттың жылдамдық және берілу айқындығы, құрылғылардың істеу сенімділігі және уақыт бойынша сигналдың кідіруімен сипатталады.

Уақыт бойынша сигналдың кідірісі – сигналды таратқыштан қабылдағышқа дейін кеткен уақыт аралығы.

Математикалық тұрғыда канал кірісте рұқсат етілген деректердің жиынымен, шығыста рұқсат етілген деректердің жиынымен және x сигналы кеткен кезде y сигналды алу $P(x/y)$ шартты ықтималдылықпен беріледі.

Шартты ықтималдылықтар сигналды канал арқылы өту кезінде бұрмалайтын шуылдардың (бөгеулердің) статистикалық қасиеттерін сипаттайды. Егер $y = x$ жағдайда $P(x/y) = 1$ және $y \neq x$ кезінде $P(x/y) = 0$ болса, онда канал «шуылсыз» деп аталады. Кіріс және шығыс сигналдардың құрамына байланысты каналдар дискретті және үздіксіз болады. Дискретті каналда сигнал бір немесе екі алфавиттің (кіріс және шығысқа біреуден) символдар ретінен тұрады. Үздіксіз каналдарда кіріс және шығыс сигналдар үздіксіз параметр – уақытқа тәуелді болып келеді. Сондай-ақ аралас немесе гибридті каналдар болады, ондай кезде дискретті және үздіксіз компоненттері бөлек қаралады. Төменде тек дискретті каналдар қарастырылған.

Каналдың ақпаратты беру қабілеті *өткізу қабілеті* немесе *каналдың сыйымдылығы* деп аталатын санмен сипатталды. Каналдың сыйымдылығы *C* әріппен белгіленеді.

Шуылсыз канал үшін сыйымдылық:

$$C = \lim_{T\to\infty} \frac{log_2 N(t)}{T},$$

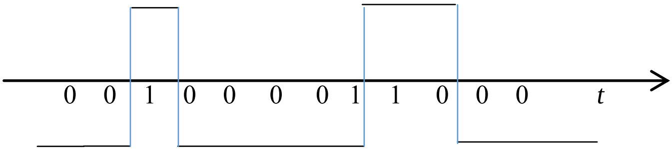
мұндағы $N(t)$ – T уақытта барлық мүмкін сигналдардың саны. Сыйымдылықтың өлшем бірлігі – бод. 1 бод = 1 бит/с. Осы байланыс каналдың негізгі сипаттамасын есептеу мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Шуылсыз каналдың алфавиті екі символдан тұрады: 0 және 1, әр символдың ұзақтығы – τ секунд. Осындай каналдың сыйымдылығын есептеу керек.

Шешімі. T уақыт ішінде $n = T/\tau$ сигнал өтіп үлгереді, ондай ұзындығы n әр түрлі сигналдар саны 2^n болады. Бұл жағдайда

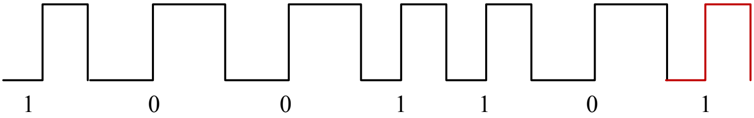
$$C = \lim_{T\to\infty} \frac{log_2 2^n}{T} = 1/\tau \textit{ бод.}$$

Мысалдағыдай сипаттамасы бар сигналды келесідей суреттеуге болады (5.1-сурет). Мұнда сигналды кодтау үшін келесі деңгей алынады: төменгі 0 үшін, жоғары 1 үшін. Бұл тәсілдің кемшілігі бірнеше қатар жүретін 0 немесе бірнеше 1-ді жіберу кезінде пайда болады. Таратқыш пен қабылдағыш арасында аздай синхрондаудың бұзылуы жөнделмейтін қателікке әкеледі.



5.1-сурет

Жалпы тәжірибеде ақпаратты беру үшін басқы тәсіл қолданады. 0 және 1 үшін бір-бірінен екі есе айырылатын екі бөлек жиілік беріледі (5.2-сурет), бұл жиілікті модуляция (FM) деп аталады. Осындай таңбалауда егер 1 сигналдың уақыт ұзақтығы τболса, нөлдікі – 2τ.



5.2-сурет

2-*мысал*. Енді осындай каналдың (5.2-сурет) сыйымдылығын есептейік.

Біріншіден, $N(t)$ сигнал санын анықтау керек. Бізде $n = T/\tau$, енді ұзындықтары 2 және 1-ге тең кескіндермен n ұзындықты кескінді қанша тәсілмен бөлуге болатынын есептеу керек. Яғни

$$N(t) = S_n = C_n^n + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-2}^{n-4} + \cdots,$$

мұндағы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – Ньютон биномының формуласы.

– бірінші қосынды (C_n^n) – ұзындығы n кескінді ұзындығы 1-ге тең n кескінмен бөлу тәсілі;

– екінші қосынды (C_{n-1}^{n-2}) – ұзындығы n кескінді ұзындығы 1-ге тең (n-2) кескінмен және ұзындығы 2-ге тең бір кескінмен бөлу тәсілі;

– үшінші қосынды (C_{n-2}^{n-4}) – ұзындығы n кескінді ұзындығы 1-ге тең (n-4) кескінмен және ұзындығы 2-ге тең екі кескінмен бөлу тәсілі.

Осыдан $S_1 = 1$. Кез келген *k*<m үшін

$$C_m^n + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1},$$

сондықтан

$$S_{n-1} = C_{n-1}^{n-1} + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-3}^{n-5} + \cdots,$$

$$S_n = C_n^n + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-2}^{n-4} + C_{n-3}^{n-6} + \cdots,$$

$$S_{n+1} = C_{n+1}^{n+1} + C_n^{n-1} + C_{n-1}^{n-3} + C_{n-2}^{n-5} + \cdots,$$

яғни $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$, *n*> 1 кезде. Егер $S_0 = 1$ бастасақ, онда $S_0, S_1, \ldots$ – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... – Фибоначчи сандары. Ал XIX ғасырдан бастап Фибоначчи тізбегінің n-інші мүшесін есептейтін формула белгілі:

$$S_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Осылай,

$$C = \lim_{T\to\infty}\frac{\log_2 N(T)}{T} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 S_n}{n\tau} = \frac{\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\tau} \approx \frac{0{,}69}{\tau}\text{бод}.$$

Тәжірибеде жиіліктік модуляцияны қолданғанда 0-дер екі есе тығыз таңбаланады. Бұған сигналдың деңгейі емес, деңгейдің ауысуын (полярлығы) ескеру арқылы жетуге болады. Егер ν жиілігі 1 деген сигналға сәйкес келсе, онда 2ν жиілігі арқылы сигналдың деңгейі тексеріледі. Егер деңгей өзгерсе, онда бұл 1, егер өзгермесе, онда – 0. Тәжірибеде ν – синхронизация жиілігі, яғни импульстің жиілігі, ол деректерден тыс сигналдың полярлығын өзгертеді. 0 поярлықтың өзгеру импульсін шығармайды, ал 1 шығарады.

Келесі ақпаратты беру теориясының негізгі факті немесе *бөгеулер бар кезде кодтаудың негізгі теоремасы* каналдың сыйымдылығы мен таратқыштың энтропиясы белгілі жағдайда байланыс каналдың максималды жіберу жылдамдығын анықтауға мүмкіндік береді.

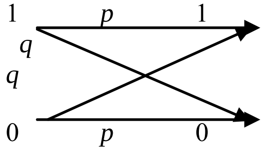
Шеннон теоремасы. Информация көзі X дискретті кездейсоқ шамамен сипатталсын. Шуылы бар канал қарастырылады, яғни әр берілетін мәліметке тасымалдау кезінде бұрмалану ε ықтималдылығы берілген (қатенің ықтималдылығы). Онда тек X-ке қатысты u беру жылдамдығы бар, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists u' < u$ және u-ға әлде де жақын болғанда u' жылдамдықпен және ықтималдылығы ε-нан аз X шаманың мәндерін беру тәсілі бар және $u = C/S(X)$. Бұл тәсіл – бөгеуге тұрақты код.

5.2. Бөгеуге орнықты кодтаудың негізі

Шуылмен күрестің ең қарапайым тәсілі – жұптылықты бақылау (модемдерде кең таралған). Кодтау былай жүреді: сигналдағы бір сандарды алдын ала келісім бойынша таңдалған жұп (even) немесе тақ (odd) мәнге келтіру үшін әр байтқа тоғызыншы бит қосылады. Осы кодтауды қолдана отырып, көп қателерді табуға болады.

Қатені жөндейтін қарапайым әдістің бірі – әр битті үш рет қайталау. Егер 3 биттің біреуінде қате кетсе, ол жөнделеді, бірақ екі немесе үш қате кезінде дұрыс мәлімет алынбайды. Қатені жөндейтін кодтау қатені анықтауға арналған кодтаумен қатар қолданылады. Үш рет қайталау кезінде сенімділікті арттыру үшін 3 бит қатар емес, бір-бірінен белгілі арақашықтықта орналасады. Үш рет қайталау әдісі ақпаратты жіберу жылдамдығын біраз азайтады.

Байланыс каналды суреттememен көрсетуге болады. Екілік симметриялық каналды қарастырайық (5.3-сурет).



5.3-сурет

Мұнда (5.3-суретте) p – бит санын қатесіз жіберу ықтималдылығы, ал q – қатемен жіберу. Осындай каналда қателер бір-бірімен байланыссыз өтеді деп есептеледі.

Екілік симметриялық канал Бернулли сызбасын іске асырады, сондықтан екілік симметриялық каналмен n бит санын k қатемен жіберу ықтималдылығы келесідей анықталады:

$$P_n(k) = C_n^k p^{n-k} q^k.$$

Мысал. Бір бит информацияны қатемен жіберу ықтималдылығы берілген q=0,01. 1000 бит (125 байт) информацияны қатесіз жіберу ықтималдылығын анықтау керек. Ол былай есептеледі:

$$P_{1000}(0) = C_{1000}^0 p^{1000} q^0 = 0{,}99^{1000} \approx 4{,}32 \cdot 10^{-5}.$$

Яғни информацияны қатесіз жіберу ықтималдылығы өте аз.

Сондықтан деректерді жіберу кезінде қатенің ықтималдылығын азайту үшін арнайы кодтар қолданады. Әдетте жүйелі бөгеуге тұрақты кодтар қолданады. Осындай кодтардың жалпы математикалық моделін қарастырайық.

Екілік (m, n) код деп мынадай сызбадан тұратын жұпты айтады:

- кодтау $E: \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$,
- декодтау $D: \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^m$,

мұндағы $\mathbb{Z}_2^n$ – ұзындығы n барлық екілік тізбектер жиыны, $m<n$($m = n$ жағдайды криптографияда қарастырады).

D және E функциялары былай таңдалады: H функциясы

$$H = D \circ T \circ E$$

ұқсасты болу керек, мұндағы T – бірге жақын ықтималдылықпен қателік функциясы.

Ұқсастық дегеніміз былай анықталады: $D \circ T$ – D және T функциялардың композициясы, яғни $(D \circ T)(x) = D\big(T(x)\big)$.

Бөгеуге тұрақты кодтар 2 үлкен топқа бөлінеді:

1) қатені түзетуші кодтары: мақсаты бірге жақын ықтималдылықпен мәліметті бастапқы қалпына келтіру;

2) қатені табу кодтары: мақсаты бірге жақын ықтималдылықпен мәліметтегі қателерді табу.

Қатені табу кодтарынан қарапайым әдістердің бірі – жұптылыққа тексеру коды, m ұзындығы берілген кез келген $a_1 \dots a_m$ мәліметке қолдануға болады. Кодтау сызбасы былай анықталады:

$$E(a_1 \dots a_m) = a_1 \dots a_m a_{m+1},$$

$$a_{m+1} = \begin{cases} 0, & \text{егер } \sum_{i=1}^{m} a_i - \text{жұп болса;} \\ 1, & \text{егер } \sum_{i=1}^{m} a_i - \text{тақ болса.} \end{cases}$$

Осылайша, $\sum_{i=1}^{m} a_i$ жұп болу керек.

Сәйкесінше, декодтау сызбасы былай анықталады:

$$D(a_1 \dots a_m a_{m+1} = \begin{cases} a_1 \dots a_m, & \text{егер } \sum_{i=1}^{m+1} a_i - \text{жұп болса;} \\ < \text{қате} >, & \text{егер } \sum_{i=1}^{m+1} a_i - \text{тақ болса.} \end{cases}$$

Әрине, $\sum_{i=1}^{m+1} a_i$ жұптылығы ақпаратты қатесіз жіберуге кепілдік бермейді.

Мысал. m = 2 кезінде жұптылыққа тексеру келесі кодпен (E функциясымен) іске асырады: 00→000, 01→011, 10→101, 11→110. Осы кодқа байланысты екілік симметриялық каналда қатемен (ең болмағанда бір қатемен) алынған мәліметтердің үлесі

$$q^3 + 3pq^2 + 3p^2q,$$

үш, екі немесе бір қате, сәйкесінше. Оның ішінде жұптылықты өзгертпейтін дәл екі битте қате байқалмау мүмкін. Осындай қателердің ықтималдылығы $-3pq^2$. Екі битті мәліметті қатемен жіберу ықтималдылығы $-2pq + q^2$. Аз q кезінде $3pq^2 \ll 2pq + q^2$ дұрыс.

Үш рет қайталау (m, $3m$) кодты қарастырайық. Қайталауы бар кодтар өте тиімсіз, бірақ теория жүзінде мысал үшін өте ыңғайлы және түсінікті. Кез келген мәліметті ұзындығы m блоктарға бөлініп, әр блок үш рет жіберіледі, бұл E функциясын анықтайды. D функциясы былай анықталады: алынған мәліметтер жолы ұзындығы $3m$ блоктарға бөлінеді, декодталған блоктағы i-інші нөмірлі бит ($1 \leq i \leq m$) i, $i + m$, $i + 2m$ блоктардан қаралады, нәтижесінде үш биттен екі рет қайталанған бит алынады. Берілген позицияда бит үш рет дұрыс қабылдану ықтималдылығы – p^3. Үштікте бір қатемен алу ықтималдылығы – $3p^2q$. Сондықтан бір биттің дұрыс қабылдау ықтималдылығы – $p^3 + 3p^2q$. Осыған ұқсас қатемен қабылдау ықтималдылығы – $q^3 + 3pq^2$.

Мысал. q = 1 болсын. Онда бір битті жібергенде қатенің ықтималдылығы – 0,028, яғни бұл әдіс қатенің ықтималдылығын 10 %-дан, 2,8 %-ға дейін азайтады.

Осылай бес рет қайталау арқылы ақпаратты жіберу жүйесін ұйымдастыруға болады, 1 битке келетін қателік ықтималдылығы тең:

$$q^5 + 5pq^4 + 10p^2q^3 = 0{,}00856 = 0{,}856\,\%,$$

яғни 1 %-дан аз. Нәтижесінде ұзындығы 10-ға тең жолдың қатесіз беру ықтималдылығы $0{,}9^{10} \approx 35$ %-дан $0{,}972^{10} \approx$ 75 %-ға дейін өседі үш рет қайталау кезінде және $0{,}99144^{10} \approx 92$ %-ға дейін бес рет қайталау кезінде.

Қарастырылған мысалдардағы қарапайым кодтар *блоктық* түрге жатады. Анықтама бойынша, блоктық код m символдан тұратын әр блокты одан ұзын n символдан тұратын блокпен ауыстырады. Сондықтан (m, n) код блокты болып табылады. Басқа да *ағаш тәрізді* немесе *тізбекті* кодтар болады, оларда келесі символдың мәні мәліметтің алдыңғы бөлігіне байланысты. Ағаш тәрізді шуылдан қорғау әдістің арифметикалық әдіске ұқсастығы бар.

5.3. Хэмминг қашықтығы

Бөгеуге тұрақты кодтар теориясының негізгі түсініктерінің бірі – Хэмминг арақашықтығы.

Хэмминг қашықтығы дегеніміз – екі бинарлы векторлардағы бит санының айырмашылығы.

Егер екілік сандарды $a = a_1 \ldots a_n$ және $b = b_1 \ldots b_n$ деп белгілесек, онда олардың арақашықтығы – $d(a, b)$.

$a = a_1 \ldots a_n$ екілік санның *салмағы* деп ондағы бірлердің санын айтады, белгісі – $\omega(a)$:

$$\omega(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Мысал. a = 01100110 және b = 11010100 болсын, онда $\omega(a) = \omega(b) = 4$, $d(a, b) = 4$.

Енді осы арақашықтықтың қасиеттеріне тоқталып өтейік:

1) кез келген нүктеден оның өзіне дейінгі қашықтық 0-ге тең.
2) X нүктесінен одан өзге Y нүктесіне дейінгі қашықтық Y нүктесінен X нүктесіне дейінгі қашықтыққа тең.
3) егер оның екі қабырғасының қосындысы үшінші қабырғасынан үлкен болса, үшбұрыштар теңсіздігі орындалады.

Түзетуші алгоритмді әр түрлі орындауға болады. Соның бірі – екі сөздің қосындысындағы бірліктер саны қосу амалы 2 модульдік қосумен (XOR немесе разряд бойынша қосу) орындалады: $a = 001$, $b = 100$, $a \oplus b = 101$, $d = 2$.

a және b бинарлық сөздердің арақашықтығы олардың модульдік қосу салмағына тең, яғни

$$d(a,b) = \omega(a \oplus b).$$

Егер екі сөз қандай да бір разрядта өзгеше болса, онда олардың модульдік қосу салмағына 1 қосылады. Сондықтан егер a және b ұзындықтары n бинарлық сөздер болса, онда a сөзі b сөзі ретінде қабылдау ықтималдылығы

$$p(a \to b) = p^{n-d(a,b)} q^{d(a,b)}.$$

Мысалы, 1011 бинарлық сөзді 0011 ретінде қабылдау ықтималдылығы – $p^3 q$.

Бір позицияда қатені анықтау үшін сөздердің минималды арақашықтығы 1-ден көп болу керек, әйтпесе бір позициядағы қате бір кодтық сөзді басқа кодтық сөзге ауыстырып жібереді, ол кезде қатені анықтауға мүмкіндік жоқ.

k саннан көп емес барлық қателерді *анықтау* үшін бинарлық сөздер арасындағы ең кіші арақашықтық k+1 болу қажет және жеткілікті. Осындай кодтар үшін мәліметтегі қателер анықталмай қалу ықтималдылығы тең:

$$\sum_{i=k+1}^{n} C_n^i p^{n-i} q^i = C_n^{k+1} p^{n-k-1} q^{k+1} + \cdots + C_n^{n-1} p q^{n-i} + q^n$$
$$\approx C_n^{k+1} p^{n-k-1} q^{k+1}.$$

k саннан көп емес барлық қателерді *жөндеу* үшін бинарлық сөздер арасындағы ең кіші арақашықтық 2k+1 болу қажет және жеткілікті.

Мысал. (1,3)-кодты қарастырайық. E функциясы келесідей анықталған: 0 → 000, 1 → 111; ал D: 000 → 0, 001 → 0, 010 → 0, 011 → 1, 100 → 0, 101 → 1, 110 → 1, 111 → 1. Сөз арақашықтығы 3-ке тең болған соң бұл код (3 рет қайталау) 1 позициядағы қатені жөндейді.

Егер код k санғатең және одан аз қателерді жөндесе, онда ұзындығы n сөздің қатемен алу ықтималдылығы $-\sum_{i=k+1}^{n} C_n^i\, q^i$. Ал қатесіз алу ықтималдылығы

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i p^{n-i} q^i = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \cdots + C_n^k p^{n-k} q^k$$

мәннен аз болмау керек.

Информацияны беру үдерісін келесідей қарастырған ыңғайлы. Бастапқы ақпарат $a=a_1 \ldots a_n$ E функциясымен таңбаланып, $b=b_1 \ldots b_n$ кодтық тізбекке айналсын. Байланыс каналы ақпаратты тасымалдау кезінде T функциямен $e=e_1 \ldots e_n$ *қате жолын* қосады, ал қабылдағыш $r = r_1 \ldots r_n$ ақпаратты қабылдайды, мұнда $r_i = b_i + e_i (1 \le i \le n)$. Қатені жөндейтін жүйе алынған сөз кодтық екенін ғана тексереді және егер өзгеше болса, қате туралы мәліметтейді.

Мысал. a = 01 сөзі, b = 0110 сөзбен таңбалансын. Қате жолы – e = 0010. Онда алынған сөз r = 0100. Қателерді жөндейтін жүйе алынған сөзді 0110-ге ауыстырады және бастапқы (жіберілген) түрге келтіреді.

Егер жүйе қателерді тек анықтаса (жөндеусіз) және екі кез келген бинарлық сөз арақашықтығы – $k \geq 2$, онда тек жалғыз 1-і бар қате жолы $r = b+e$ сөзге әкеледі, ал ол кодтық болмайды.

Мысал. Жұптылыққа тексеру (2,3)-кодты қарастырайық. {000, 011, 101, 110} – кодтар жиынын аламыз, бірде-бір қате жолы – 001, 010, 100, 111 – бір кодтық сөзді басқа кодтық сөзге ауыстырмайды. Сондықтан бір және үш реттік қателер табылады.

2-*мысал.* Келесі (2,5)-код екі қатені табады:

$$a_1 = 00 \rightarrow 00000 = b_1, \quad a_2 = 01 \rightarrow 01011 = b_2,$$
$$a_3 = 10 \rightarrow 10100 = b_3, \quad a_4 = 11 \rightarrow 11110 = b_4.$$

Екі кодтық сөз бір-бірінен үш позицияда өзгеше болғандықтан, осы код бір қатені де жөндей алады. Бір қате $d(b_i,b_j) \geq$ ≥ 3 $(i \neq j)$ болғандықтан берілген кодтық сөзден арақашықтығы 1-ге тең сөзге әкеледі. Екілік симметриялық каналда бір блок ақпаратты қатесіз алу ықтималдылығы p^5+5p^4q-дан аз болмау керек.

Кодтық сөздердің минималды арақашықтығы $2k+1$ болатын $(n - r, n)$ кодта n, r және k сандар келесі теңсіздікке сәйкес келу керек:

$$r \geq log_2\left(C_n^k + C_n^{k-1} + \cdots + C_n^1 + 1\right),$$

– бұл *Хэммингтің теңсіздігі* немесе *төменгі шекарасы* деп аталады. Егер n, r және kсандар *Варшамов-Гильберттің теңсіздігі* немесе *жоғары шекарасы* деп аталатын теңсіздікке сәйкес келсе

$$r > log_2\left(C_{n-1}^{2k-1} + C_{n-1}^{2k-2} + \cdots + C_{n-1}^1 + 1\right),$$

онда k (және одан аз) қатені жөндейтін $(n - r, n)$ код бар.

Төменгі шекара бөгеуге тұрақты кодтың қажетті, ал жоғарғы шекара жеткілікті шарты болып есептеледі.

5.4. Хэммингтің түзеткіш (коррекциялау) таңбалауы

Информация берудің сенімділігін қамтамасыз ету – маңызды мәселе. Қазіргі кездегі компьютерлер секундына миллиондаған операция орындағанда найзағай, тұтынатын кернеу флуктуациясы, магниттік беттің дефектісі, т.с.с. факторлар көптеген қателіктердің себептері болады.

Хабар қайталанған кезде қателіктерді байқауға болады. Әдетте екінші және үшінші қайталау жеткілікті болуы мүмкін. Егер қабылданған кез келген символ жаңа хабар болғанда қателікті табу қиын. Хабардың түріне белгілі шарттар қойғанда ғана қателікті табуға болады. Екілік символдан тұратын хабардың қателігін табатын таңбалау құрудың ең қарапайым әдісі – хабардағы 1 символын санау және хабарда 1 символының саны жұп болу үшін тағы бір екілік символды (0 немесе 1) қосып жазу. Сонымен хабардағы *n*-1символға жұптылықты тексеретін *n* позиция қосылады. Хабарды қабылдауда 1 символын санайды, егер барлық *n* позициядағы 1 символының саны тақ болса, кемінде бір қателік бар екендігі анықталады.

1 символының санын есептеу және нәтиженің жұптылығын таңдау модулі 2 болатын есептеуге эквивалентті. Модулі 2 бойынша есептеу дегеніміз кез келген сан 2-ге бөлініп, қалдығымен ауыстырылады. Алғашқы *n*-інші позициядағы 1 саны екілік модуль бойынша есептелініп, нәтиже *n*-інші позицияға жазылады.

Жұптылықты ескеретін *m* байланыссыз тексеруді қабылдайық. «Байланыссыз» деген сөз жеке тексерулердің модулі 2 бойынша қосындылары басқаларымен сәйкес келуі керек. Мысалы, жұптылықты 3 рет тексеретін позицияларды жазайық:

1-тексеру	1, 2, 5, 7
2-тексеру	5, 7, 8, 9
3-тексеру	1, 2, 8, 9.

Бұлар тәуелді болады, себебі кез келген екеуінің қосындысы үшіншісіне тең. Үшінші тексеру артық. Әр орындалған (жұп) тексеруге 0 символын орындалмаған (тақ) тексеруге 1 символын жазсақ, онда m цифрдан тұратын сан шығады және ол **«синдром»** деп аталады. Бұл сан (синдром) 2^m-нен аспайтын дұрыс және дұрыс емес символдарды анықтай алады және мына теңсіздікті жазуға болады:

$$2^{m} \geq n+1 \qquad (3.5)$$

Хэмминг таңбалауы синдром бойынша қателіктің қайда екенін көрсетеді, ал 0-ге тең синдром қателіктің жоқтығын көрсетеді. Түзеткіш таңбалаулар теориясын негіздеу және талдау қазіргі жиындар теориясының, математикалық логиканың актуальды мәселелері болып табылады. Біз қателікті тауып, түзетудің алгоритмінің қарапайым мысалы ретінде 4 екілік символдан тұратын хабарды беруді қарастырамыз.

Түзеткіш (коррекциялық) таңбалаудың этаптары

1. Мысалы, 1011 хабары 3, 5, 6, 7 информациялық позицияларда жазылсын, ал 1, 2, 4 позициялары бос қалсын, олар тексеруші ретінде қолданылады. Бос позициялардың нөмірін таңдап алу себебі олардың екілік есептеуде оң жағындағы бірінші, екінші үшінші разрядтарда 1 символы бар (3.7-кестені қараңыз).

3.7-кесте

позиция нөмірі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
нөмірдің екілік таңбасы	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010

2. Синдром былай құрылады: бірінші тексерістің қорытындысы оң жақтағы бірінші цифр, 2-інші тексерістің қорытындысы оң жақтағы 2 цифр болып жазылады, т.с.с. Біздің мысалда $n + 1 = 7$, сондай-ақ $2^3 > 7$ болғандықтан, (8) теңсіздігін қанағаттандыратын $m = 3$ ең аз мәні қабылданған. $m = 3$ болғанда синдром үш екілік символдан тұрады.

3.8-кестеде тексеру позициясының нөмірлерін анықтаймыз: Бірінші тексеруге 1, 3, 5, 7; ал екінші тексеруге 2, 3, 6, 7; үшінші тексеруге 5, 6, 7 позициялары кіреді.

3. Информациялық хабарлауды таңбалау үшін (шарттар қою үшін) оларды 3, 5, 6, 7 нөмірлі позицияларда жазамыз. Сонда хабар мына түрде жазылады

3.8-кесте

Позиция нөмірі	1	2	3	4	5	6	7
Хабар	-	-	1	-	0	1	1

Мұндағы бос орындар тексеру символдарының орны.

4. 1, 3, 5, 7 позициялар бойынша бірінші тексеруді орындаймыз. Бос орынды 0 деп қабылдаймыз:

$$0 + 1 + 0 + 1 = 0.$$

Бірінші тексерудің қорытындысы бойынша 0 символы 1-позицияға жазылады, себебі позицияның кіші нөмірлері синдромның оң жақ шеткі разрядына тең келеді.

2, 3, 6, 7 позициялар бойынша екінші тексеру нәтижесі:

$$0 + 1 + 1 + 1 = 1.$$

Бұл қорытындыны 2-позицияға жазамыз.

5, 6, 7 позициялары бойынша үшінші тексеру нәтижесі:

$$0 + 1 + 1 = 0.$$

4-тексеру позициясына (тексеру реті бойынша) 0 жазамыз. Осыдан кейін мына түрдегі таңбаланған хабар аламыз:

Позиция нөмірі	1	2	3	4	5	6	7
Хабар	-	-	1	-	0	1	1
Таңбаланған хабар	0	1	1	0	0	1	1

5. Таңбаланған хабарды қабылдағанда мүмкін болатын бір қателікті табайық. Мысал ретінде байланыс каналының соңында 3 позицияда флуктуация нәтижесінде 1 символы қосылсын, онда 1 + 1 = 0 шығады және алынған хабар

$$01\underline{0}0011 \tag{3.6}$$

болады, асты сызылған символ – қате символ.

(3.6) – хабарды жұптылыққа тексереміз.

1, 3, 5, 7 позициялар бойынша 1-тексеру нәтижесі:

$$0 + 0 + 0 + 1 = 1. \qquad (3.7)$$

2, 3, 6, 7 позициялар бойынша 2-тексеру нәтижесі:

$$1 + 0 + 1 + 1 = 1. \qquad (3.8)$$

5, 6, 7 позициялар бойынша 3-тексеру нәтижесі:

$$0 + 1 + 1 = 0. \qquad (3.9)$$

(10), (11), (12) нәтижелердің қорытындысы:

синдром = 011

Екілік есептеудегі 011 саны ондық жүйедегі 3-ке тең. Қателік үшінші позицияда болған.

6. 3-позициядағы символдың қателігін түзеу 0 →1, себебі тек 0,1 символдары бар. (3.6) хабардың орнына түзетілген хабар аламыз:

$$0110011 \qquad (3.10)$$

Келтірілген Хэмминг алгоритмінде информациялық және тексеру символдары таңбалау сөзінде бірдей қатысады, яғни таңбалау біркелкі қорғалған.

Тапсырма

5.1. Екілік симметриялық канал 2 биттен тұратын сөз жолын жіберуге арналған. Қабылдау ықтималдылықтар кестесін салу керек.

5.2. Екілік симметриялық каналмен ұзындығы 14 сөз жолы беріледі. 5 символы қатемен алынатын ықтималдылығы қандай?

5.3. Екілік симметриялық каналда 1 бит информацияны қатемен жіберу ықтималдылығы – q = 0,5. 2 байт информацияны екі қатемен жіберу ықтималдылығын табыңыз.

5.4. Берілген кодталған тізбектің қатесін тауып, жөндеңіз 1011110111100001000010111. Тізбекті ондық жүйеге ауыстырыңыз.

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. Лидовский В.В. Теория информации: учеб. пособие. – М., 2002. – 116 с.
2. Жаңабаев З.Ж., Тынтаева Ш.Б., Жолдасова Х.Б. Физиканы оқыту әдістемесі. – Алматы: Қазақ университеті, 2002. – 119 б.
3. Фурсов В.А. Теория информации. – Самара, 2011. – 128 с.
4. Зверева Е.Н., Лебедько Е.Г. Сборник примеров и задач по соновам теории информации и кодирования сообщений. – СПб., 2014. – 76 с.
5. Потапов В.Н. Теория информации. Кодирование дискретных вероятностных источников: учеб. пособие. – Новосибирск, 1999. – 71 с.
6. Лебедько Е.Г. Математические основы передачи информации. – Ч 5: учеб. пособие для вузов. – СПб: СПб., 2010. – 93 с.

А. ASCII кодтары

Код		Символ	Unicode таңбасында кодтың аты
Жүйе			
10-қ	16-қ		
1	2	3	4
32	20		SPACE
33	21	!	EXCLAMATION
34	22	″	QUOTATION
35	23	#	NUMBER SIGN
36	24	$	DOLLAR SIGN
37	25	%	PERCENT SIGN
38	26	&	AMPERSAND
39	27	‘	APOSTROPHE
40	28	(	LEFT PARENTHESIS
41	29	)	RIGHT PARENTHESIS
42	2A	*	ASTERISK
43	2B	+	PLUS SIGN
44	2C	,	COMMA
45	2D	-	HYPHEN-MINUS
46	2E	.	FULL STOP
47	2F	/	SOLIDUS
48	30	0	DIGIT ZERO
49	31	1	DIGIT ONE
50	32	2	DIGIT TWO
51	33	3	DIGIT THREE
52	34	4	DIGIT FOUR
53	35	5	DIGIT FIVE
54	36	6	DIGIT SIX
55	37	7	DIGIT SEVEN
56	38	8	DIGIT EIGHT
57	39	9	DIGIT NINE
58	3A	:	COLON
59	3B	;	SEMICOLON

1	2	3	4
60	3C	<	LESS-THAN SIGN
61	3D	=	EQUALS SIGN
62	3E	>	GREATER-THAN SIGN
63	3F	?	QUESTION SIGN
64	40	©	COMMERCIAL AT
65	41	A	LATIN CAPITAL LETTER A
66	42	B	LATIN CAPITAL LETTER B
67	43	C	LATIN CAPITAL LETTER C
68	44	D	LATIN CAPITAL LETTER D
69	45	E	LATIN CAPITAL LETTER E
70	46	F	LATIN CAPITAL LETTER F
71	47	G	LATIN CAPITAL LETTER G
72	48	H	LATIN CAPITAL LETTER H
73	49	I	LATIN CAPITAL LETTER I
74	4A	J	LATIN CAPITAL LETTER J
75	4B	K	LATIN CAPITAL LETTER K
76	4C	L	LATIN CAPITAL LETTER L
77	4D	M	LATIN CAPITAL LETTER M
78	4E	N	LATIN CAPITAL LETTER N
79	4F	O	LATIN CAPITAL LETTER O
80	50	P	LATIN CAPITAL LETTER P
81	51	Q	LATIN CAPITAL LETTER Q
82	52	R	LATIN CAPITAL LETTER R
83	53	S	LATIN CAPITAL LETTER S
84	54	T	LATIN CAPITAL LETTER T
85	55	U	LATIN CAPITAL LETTER U
86	56	V	LATIN CAPITAL LETTER V
87	57	W	LATIN CAPITAL LETTER W
88	58	X	LATIN CAPITAL LETTER X
89	59	Y	LATIN CAPITAL LETTER Y
90	5A	Z	LATIN CAPITAL LETTER Z
91	5B	[	LEFT SQUARE BRACKET
92	5C	\	REVERSE SOLIDUS

1	2	3	4
93	5D	]	RIGHT SQUARE BRACKET
94	5E	^	CIRCUMFLEX ACCENT
95	5F	_	LOW LINE
96	60	‘	GRAFE ACCENT
97	61	a	LATIN SMALL LETTER A
98	62	b	LATIN SMALL LETTER B
99	63	c	LATIN SMALL LETTER C
100	64	d	LATIN SMALL LETTER D
101	65	e	LATIN SMALL LETTER E
102	66	f	LATIN SMALL LETTER F
103	67	g	LATIN SMALL LETTER G
104	68	h	LATIN SMALL LETTER H
105	69	i	LATIN SMALL LETTER I
106	6A	j	LATIN SMALL LETTER J
107	6B	k	LATIN SMALL LETTER K
108	6C	l	LATIN SMALL LETTER L
109	6D	m	LATIN SMALL LETTER M
110	6E	n	LATIN SMALL LETTER N
111	6F	o	LATIN SMALL LETTER O
112	70	p	LATIN SMALL LETTER P
113	71	q	LATIN SMALL LETTER Q
114	72	r	LATIN SMALL LETTER R
115	73	s	LATIN SMALL LETTER S
116	74	t	LATIN SMALL LETTER T
117	75	u	LATIN SMALL LETTER U
118	76	v	LATIN SMALL LETTER V
119	77	w	LATIN SMALL LETTER W
120	78	x	LATIN SMALL LETTER X
121	79	y	LATIN SMALL LETTER Y
122	7A	Z	LATIN SMALL LETTER Z
123	7B	{	LEFT CURLY BRACKET
124	7C	|	VERTICAL LINE
125	7D	}	RIGHT CURLY BRACKET
126	7E	~	TILDA

В.–$P\log_2 P$ функцияның мәндері

P	$-P\log_2 P$	P	$-P\log_2 P$	P	$-P\log_2 P$	P	$-P\log_2 P$
0,00	0,0000	0,26	0,5053	0,52	0,4906	0,80	0,2796
0,01	0,0664	0,27	0,5100	0,53	0,4854	0,81	0,2678
0,02	0,1129	0,28	0,5142	0,54	0,4800	0,82	0,2575
0,03	0,1517	0,29	0,5179	0,55	0,4744	0,83	0,2462
0,04	0,1817	0,30	0,5211	0,56	0,4684	0,84	0,2648
0,05	0,2161	0,31	0,5238	0,57	0,4623	0,85	0,2231
0,06	0,2435	0,32	0,5260	0,58	0,4558	0,86	0,2113
0,07	0,2686	0,33	0,5278	0,59	0,4491	0,87	0,1993
0,08	0,2915	0,34	0,5292	0,60	0,4422	0,88	0,1871
0,09	0,3127	0,35	0,5301	0,61	0,4350	0,89	0,1496
0,10	0,3322	0,36	0,5306	0,62	0,4276	0,90	0,1368
0,11	0,3503	0,37	0,5307	0,63	0,4199	0,91	0,1238
0,12	0,3671	0,38	0,5304	0,64	0,4121	0,92	0,1107
0,13	0,3826	0,39	0,5298	0,65	0,4040	0,93	0,0978
0,14	0,3971	0,40	0,5288	0,66	0,3957	0,94	0,0839
0,15	0,4105	0,41	0,5274	0,67	0,3871	0,95	0,0703
0,16	0,4230	0,42	0,5856	0,68	0,3874	0,96	0,0565
0,17	0,4346	0,43	0,5236	0,69	0,3694	0,97	0,0423
0,18	0,4453	0,44	0,5211	0,70	0,3602	0,98	0,0286
0,19	0,4552	0,45	0,5181	0,71	0,3508	0,99	0,0140
0,20	0,4644	0,46	0,5153	0,72	0,3412	1,00	0,0000
0,21	0,4728	0,47	0,5120	0,73	0,3314		
0,22	0,4806	0,48	0,5083	0,74	0,3215		
0,23	0,4877	0,49	0,5043	0,75	0,3113		
0,24	0,4941	0,50	0,5000	0,78	0,3009		
0,25	0,5000	0,51	0,4954	0,79	0,2903		

Оқу басылымы

Иманбаева Ақмарал Каримқызы

АҚПАРАТ
ЖӘНЕ ЭНТРОПИЯ
ТЕОРИЯСЫ

Оқу құралы

Редакторы *Г. Ыбырайқызы*
Компьютерде беттеген және
мұқабасын көркемдеген *Ғ. Қалиева*

ИБ №10544
Басуға 03.03.2017 жылы қол қойылды. Пішімі 60х84 $^1/_{16}$.
Көлемі 5,75 б.т. Офсетті қағаз. Сандық басылым. Тапсырыс №618.
Таралымы 100 дана. Бағасы келісімді.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің
«Қазақ университеті» баспа үйі.
050040, Алматы қаласы, әл-Фараби даңғылы, 71.

«Қазақ университеті» баспа үйі баспаханасында басылды.