В. П. Бусыгин,
Е. В. Желободько,
А. А. Цыплаков

Микроэкономика

ТРЕТИЙ УРОВЕНЬ

Версия от 15 октября 2007 г.

В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, А. А. Цыплаков
Микроэкономика — третий уровень

Оглавление

Часть II

Часть III

Приложения

Введение

В настоящее время многие российские вузы перешли на двухступенчатую систему образования и предлагают различные программы подготовки магистров. Курс микроэкономики является базовым для любой магистерской программы по экономике и включен в образовательный стандарт в качестве обязательного, однако с его методическим обеспечением есть проблемы: на русском языке пока отсутствуют пособия соответствующего уровня.

Конечно, на российском книжном рынке мы в изобилии находим учебные пособия (??на вводном и промежуточном уровне) как по экономической теории в целом, так и по отдельным ее разделам (микроэкономика, макроэкономика, теория отраслевых рынков и т. д.). В этих пособиях можно найти изложение экономической теории на уровне, вполне доступном для тех, кто только начинает знакомиться с экономической наукой. Известным недостатком всех этих пособий является то, что рассуждения проводятся в основном с помощью графиков или простых примеров, иллюстрирующих изложение. При этом практически всегда остается не вполне понятным, какая именно модель лежит в основе проводимого анализа экономического явления, какие предположения следует сделать, чтобы получаемые выводы были корректными.

Данный учебник написан с целью заполнить эту брешь. Он предназначен прежде всего для методического обеспечения курсов по микроэкономике продвинутого уровня, предлагаемых в рамках магистерских программ, ориентированных на подготовку студентов в области экономической теории. Учебник составлен на основе лекций и семинаров по различным дисциплинам микроэкономической направленности, которые читались его авторами на экономических факультетах Новосибирского государственного университета (г. Новосибирск) и Государственного университета Высшая школа экономики (г. Москва). Это прежде всего курсы «Методы микроэкономического анализа», «Микроэкономика II» и «Микроэкономика III», «Теория отраслевых рынков II». Содержащийся в этом учебнике материал в течение многих лет обкатывался в учебном процессе, причем существенная часть этого материала предлагалась студентам с начала 1990-х годов.

Теперь о том, как мы видим использование пособия в учебном процессе. Несомненно, что весь материал не может быть прочитан в каком-то одном (семестровом или даже двухсеместровом) курсе лекций. Но как нам представляется, большой объем пособия — это достоинство, позволяющее строить разные курсы. Тем самым, можно использовать единую логику, подход и систему обозначений в рамках серии курсов третьего уровня, покрывающих значительную часть микроэкономической теории. Так, на экономическом факультете НГУ курсы, которые соответствуют содержанию пособия, читаются в течение трех-четырех семестров, что вполне достаточно для изучения существенной части пособия. Кроме того, мы вовсе не рассчитываем на то, что весь материал внутри каждой главы будет подробно обсуждаться на лекциях и семинарских занятиях. Это принципиально невозможно. Перед преподавателем стоит задача выбрать тот материал, который соответствует выбранной им логике преподавания курса и уровню подготовки студентов.

С этой точки зрения существует много различных вариантов использования материала учебника. В первую очередь это касается теорем. Многие из них несколько сложны для понимания при первом знакомстве с ними либо их доказательства чрезмерно громоздкие. Предлагается поэтому обсуждать во время лекций доказательства только отдельных, сравнительно простых и важных для понимания соответствующих разделов курса теорем. Другой вариант — останавливаться только на основных идеях, лежащих в основе доказательства, опуская рутинные моменты и технические детали. Еще один вариант, возможно наиболее предпочтительный — формулировки теорем можно приводить не при самых слабых предположениях, при которых они справедливы, подчеркивая содержательно важные условиями и моменты. Можно также ограничится конкретными сравнительно простыми примерами, ссылаясь на общие теоретические результаты, которые эти примеры иллюстрируют. Последний вариант особенно уместен в преподавании микроэкономических курсов, которые ориентированы на специализированные разделы микроэкономики, такие как «Теория отраслевых рынков» и «Экономика общественного сектора».

До известной степени подобная структуризация материала в данном учебнике уже осуществлена. Так, некоторые доказательства вынесены в приложения либо в отдельные параграфы, содержание которых не влияет на понимание остального материала. К примеру, доказательство существования функции Неймана—Моргенштерна может быть безболезненно опущено; представляется, что приводить его имеет смысл только в курсе, который специально посвящен этим вопросам.

Теперь о принципах, которых мы придерживались при написании пособия. Материал учебника довольно стандартен для первого магистерского курса по микроэкономике. Так, мы последовательно придерживаемся неоклассической парадигмы. Эта парадигма включает в себя методологический индивидуализм, принципиальную несравнимость предпочтений (с чем связана необходимость использования концепции оптимальности Парето), моделирование поведения экономических субъектов как целеполагающего и рационального, а также равновесный подход. Авторы пособия исходят из того, что нет никаких других предпочтений, кроме индивидуальных. Соответственно нормативный аспект анализа ограничивается использованием концепции Парето (т. е. практически не рассматриваются вопросы справедливости, проблематика общественного выбора, различные аксиоматические подходы к анализу благосостояния). Другими словами, стараясь быть последовательными, мы оставили за кадром многие интересные интересные сюжеты и альтернативные подходы (неравновесный анализ, кооперативные игры, модели частично рационального поведения, альтруизм, эволюционный подход и т. п.), предполагая, что читаемые на основе учебника курсы могут быть дополнены курсами, построенными в другой логике и основанными на других парадигмах.

Далее, нашим приоритетом была логическая связность и последовательность изложения. Мы исходили из того, что прежде чем анализировать модель, следует ее по возможности четко изложить и оговорить все используемые предположения. Предпочтение отдавалось тем моделям, которые вписываются в эту общую логику. В дополнение к концепции рационального поведения, другой основной концепцией в пособии является концепция общего равновесия: рассматриваемые модели экономических феноменов должны конкретизировать классическую модель общего равновесия или же являться ее естественными модификациями. Там, где этот основной принцип не может быть использован (в ситуациях «стратегического взаимодействия»), используется инструментарий теории некооперативных игр: изучаемое экономическое явление представляется в виде игры и анализируются решения этой игры (причем в качестве основной концепции решения выступает равновесие по Нэшу и его классические обобщения).

Несколько слов о содержании пособия и организации материала. Базовый инструментарий дают первые пять глав, посвященные анализу поведения потребителя, поведения производителя, общего равновесия (мир Вальраса) и квазилинейной экономики (мир Маршалла) соответственно. Кроме того, в приложении к пособию излагаются основные сведения из теории игр, которые необходимы для понимания основного материала. (Это приложение целиком автономно и может быть использовано как пособие для вводного курса теории некооперативных игр).

В гл. 1 «Выбор: альтернативы и предпочтения» приводятся базовые понятия теории потребительского поведения, формально-логические основания теории рационального выбора.

В гл. 2 «Поведение потребителя» и гл. 3 «Поведение производителя (неоклассическая теория фирмы)» рассматриваются классические задачи потребителя и производителя. Свойства и методы анализа этих задач являются обязательным багажом экономиста-теоретика. В силу этого данные разделы изложены довольно детально и последовательно.

В гл. 4 «Классические (совершенные) рынки. Общее равновесие» особый акцент сделан на связи между оптимумом Парето и равновесием (двух так называемых теоремах благосостояния). Это одна из наиболее методологически отточенных частей пособия.

Гл. 5 «Квазилинейная экономика и частное равновесие» представляет собой в значительной степени ноу-хау авторов. Она систематизирует все те представления о частном равновесии, источником которых является Альфред Маршалл, а также отдельные результаты по теории общего равновесия при квазилинейности функций полезности, содержащиеся в литературе. Введение понятия квазилинейной экономики позволило внести единообразие в изложение ряда классических микроэкономических моделей в других главах (моделей общественных благ с квазилинейными предпочтениями, модели оптимального налогообложения Рамсея, моделей рынков с несовершенной конкуренцией).

Гл. 6 и 7 последовательно вводят риск в те модели, которые изложены в гл. 2 и 4.

Перечисленные главы составляют первую часть пособия, «Классические рынки».

Вторая часть пособия, «Фиаско рынка», объединяет главы, основной тематикой которых являются несовершенства в работе рыночного механизма, его фиаско. Эта тематика обычно относится к разделу микроэкономической теории известному под названием *Public Economics* («Экономика общественного сектора»).

Гл. 8 «Налоги» анализирует искажения, связанные с налогами, и проблему минимизации этих искажений (теорию оптимального налогообложения). В ней вводится ряд понятий, используемых в последующих главах второй части.

Гл. 9 и 10 посвящены экстерналиям и общественным благам. В них анализируются причины фиаско некоординируемого рыночного механизма, а также различные альтернативные механизмы координации.

Особенностью этих трех глав является то, что анализ практически нигде не выходит за рамки общего равновесия, что, как нам кажется, выгодно отличает наш подход от подходов других авторов учебников по микроэкономике. Благодаря этому, например, вопросы налогообложения излагаются существенно более аккуратно и логично, чем принято в курсах экономики общественного сектора.

В гл. 11 «Рынки с асимметричной информацией» анализируются последствия неодинаковой информированности экономических субъектов о свойствах обмениваемых благ. В ней рассматривается как двусторонняя монополия (торг), так и конкурентный рынок (модель Акерлова).

Третья часть «Рынки несовершенной конкуренции» посвящена методам анализа ситуаций, когда участники обмена обладают рыночной властью, то есть способностью влиять на условия сделок, в которых они участвуют. При этом в центре внимания оказывается стратегическое поведение экономических субъектов, обладающих рыночной властью, в связи с чем активно используется инструментарий теории некооперативных игр.

В гл. 12 «Монополия» и 13, «Олигополия» приводятся собственно методы анализа рыночных структур с несовершенной конкуренцией — монополии и олигополии. Акцент делается прежде всего на методы анализа последствий той или иной организации рынка в терминах уровней благосостояния. Рассуждения целиком проводятся в рамках моделей квазилинейной сепарабельной экономики, что обеспечивает корректность использования понятия излишка (для оценки соответствующих искажений и чистых потерь) и анализа отдельного рынка вне связи с остальной экономикой.

Гл. 14 и 15 посвящены моделям найма и затрагивает темы информационной асимметрии и теории контрактов.

Пособие также содержит «Математическое приложение» — сводку основных сведений из математики, используемых нами в анализе, упоминавшееся выше приложение по теории некооперативных игр, а также словарь англоязычных терминов??.

?? Объяснить значки

Авторы не стремились расставить темы в порядке возрастания сложности или следовать сложившейся в микроэкономических курсах?? последовательности их изложения, поскольку исходили из того, что потенциальный читатель уже достаточно хорошо знаком с обсуждаемыми идеями на содержательном уровне и частично — на формальном.

Практически в каждом параграфе пособия читателю предлагаются задачи для самостоятельного решения. В частности, это задачи на доказательство вариантов утверждений из основного текста, которые, как представляется, важны для успешного овладения методами микроэкономического анализа. В конце некоторых глав приведены общие «Задачи к главе», опирающиеся на материал более чем одного параграфа или стоящие несколько в стороне от обсуждаемых в главе вопросов.

Ссылки на литературу в пособии делятся на две категории. Внутри глав в сносках приведены исторические ссылки и ссылки на отдельные источники теоретических результатов. В конце пособия приводится список монографий и учебников, материал которых в той или иной степени повлиял на наше изложение микроэкономической теории. Там же указаны источники отдельных задач.

В заключение мы хотим поблагодарить всех тех, благодаря кому стало возможным появление этого учебника. Мы особо признательны Сергею Гелиевичу Коковину, с которым сотрудничаем уже много лет, и которого вполне можно назвать одним из авторов. Так, он является соавтором учебного пособия «Методы микроэкономического анализа», легшего в основу нескольких глав данного учебника. Кроме того, ему принадлежит авторство большого количества использованных нами задач. Коковин оказывал нам активную поддержку на протяжении всего срока работы над учебником. В то же время, мы целиком берем на себя ответственность за возможные огрехи в изложении тех разделов, которые разрабатывали в сотрудничестве с С. Г. Коковиным, и отдаем себе отчет в том, что не со всеми изложенными взглядами он может согласиться. Также мы благодарны Сергею Юрьевичу Ковалеву, который вместе с нами преподавал и преподает те курсы, которые легли в основу пособия. Ему тоже принадлежит авторство ряда задач.

Особо благодарны мы руководителям тех учебных заведений, в которых нам посчастливилось работать и которые оказывали нам различную поддержку, позволяя, в частности, не втискивать нашу педагогическую деятельность в «прокрустово ложе» (во многом довольно убогих) стандартов, а также студентам, помогавшим нам сделать изложение материала более доступным. Во время работы над пособием большим подспорьем для нас были гранты, которые стимулировали нас финансово и давали доступ к необходимой литературе. Это грант по проекту TEMPUS (TACIS) JEP 08508–94 «Перестройка и совершенствование подготовки экономистов в НГУ» (1994—1997 гг.), «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» в рамках «Инновационного проекта развития образования» (2002—2004 гг.) и грант ВШЭ??.

И конечно же мы благодарны авторам тех учебников и научных работ по микроэкономике, которые оказали на нас большое влияние, которые стали нашими заочными учителями в области экономической теории, заменив очных (ввиду их фактического отсутствия в то время, когда мы сами были студентами). В том что касается такого влияния, нам особо хотелось бы отметить французскую школу, идущую от Мориса Аллэ (Эдмон Маленво, Жан-Жак Лаффон, Жан Тироль, Бернар Саланьи). В этом ряду особое место занимает Эдмон Маленво, учебник которого «Лекции по микроэкономическому анализу» был одним из первых серьезных пособий по микроэкономике, переведенных на русский язык. В переводе этого учебника активно участвовал В. П. Бусыгин. Этот учебник особенно сильно повлиял на наше изложение теории экстерналий и общественных благ.

Кроме того, нам, конечно, не удалось избежать сильного влияния трех известных англоязычных учебников для магистратуры:

- Hal Varian, Microeconomic Analysis;
- Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green, Microeconomic theory;
- David M. Kreps, A Course in Microeconomic Theory.

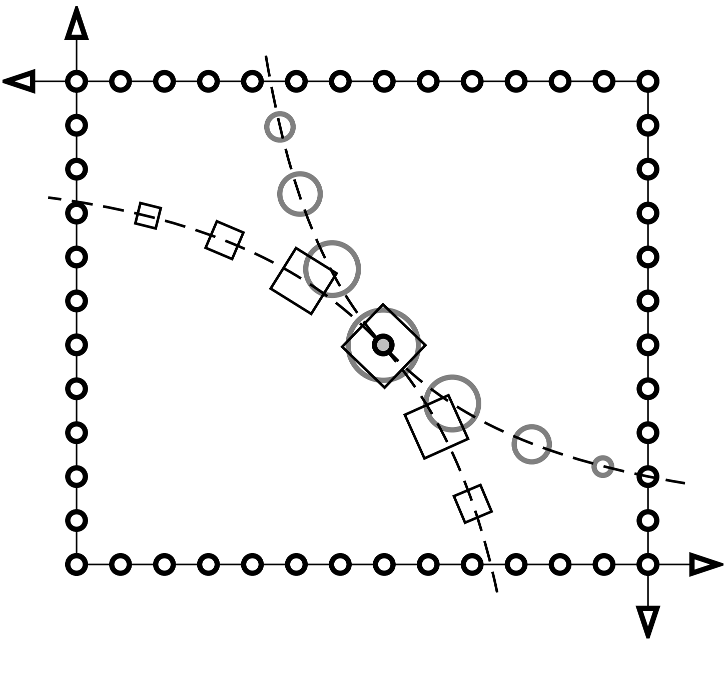
При работе над изложением теории монополии и олигополии большое впечатление на нас произвел учебник Элмара Вольфштеттера, который в то время еще не был издан и были доступны только отдельные его главы (в виде электронных документов).

Еще раз подчеркнем, что всем им мы очень признательны.

Вместе с тем, хотелось бы подчеркнуть, что, как нам представляется, в каждом разделе имеются достаточно оригинальные подходы к изложению даже традиционного материала. Так, например, мы отказались при исследовании моделей несовершенной конкуренции от традиции полагаться только на условия первого (второго порядка) и предложили альтернативные доказательства как существующих утверждений, так и их обобщений на основе альтернативного метода (аналога выявленных предпочтений), который существенно упрощает эти доказательства, делает их (и сами методы анализа) более понятными. При изложении теории общего равновесия (теории цен) — ядра традиционной микроэкономики — мы отказались от априорной классификации благ (блага, антиблага и т. д.), что привело к необходимости существенно пересмотреть подходы к изложению теорем существования равновесия, теорем благосостояния, использовать нетрадиционные техники анализа таких моделей.

Мы вполне уверены, что вдумчивый читатель может найти неточности и недостатки в изложении материала. Надеемся на помощь таких читателей в совершенствовании учебника и будем благодарны за любые замечания по его структуре и содержанию.

Часть I



Глава

Выбор: альтернативы и предпочтения

1

Экономические явления — следствия решений отдельных субъектов экономики. Поскольку мотивы этих решений, как правило, скрыты от постороннего наблюдателя, можно формулировать различные предположения относительно этих мотивов. Неоклассическая традиция в экономической науке исходит из предположения, что в каждой ситуации принимаемые решения являются результатом сознательного выбора рациональных индивидуумов и поэтому их можно предсказывать и моделировать.

Микроэкономическая теория, которая рассматривает экономические явления не агрегированно, а на уровне отдельных экономических субъектов, тесно связана с понятием выбора (или, как еще говорят, принятия решений), его структурой и последствиями. Так, в микроэкономических моделях потребители рассматриваются как субъекты, выбирающие, что и в каких количествах потреблять и как распределять свое время и другие принадлежащие им ресурсы. Производители выбирают, какие технологии использовать, что и в каких количествах производить. Наемные работники в моделях найма выбирают уровень усилий, а наниматели — как стимулировать нужные им усилия с помощью контракта.

Осуществляя выбор, индивидуум руководствуется некоторыми мотивами, внутренними критериями, которые в микроэкономике принято называть предпочтениями. При этом предполагается, что предпочтения удовлетворяют некоторым естественным ограничениям, отражающим те или иные предположения о рациональности.

В дальнейшем множество всех мыслимых действий (альтернатив), которые доступны осуществляющему выбор индивидууму, будем обозначать через через X, а отдельную альтернативу из этого множества — через $\mathbf{x}$. В типичной ситуации выбора индивидууму доступны не все альтернативы, а только некоторое более узкое подмножество A ($A \subset X$). Другими словами, выбор индивидуума ограничен. Он должен выбрать из A некоторую альтернативу $\mathbf{x}$, которую считает в определенном смысле наиболее подходящей для себя.

Существует два основных подхода к формализации выбора и предпочтений. Один из них исходит из того, что индивидуум может делать некоторые оценочные суждения относительно пары альтернатив («лучше», «хуже»), что формально моделируется при помощи бинарных отношений. При таком подходе предположение о рациональности выбора сводится к выполнению двух основных принципов:

- бинарные отношения, отражающие предпочтения индивидуума, упорядочивают некоторым образом альтернативы из множества X;
- в соответствии с этим упорядочением индивидуум выбирает наилучшую альтернативу среди тех, которые ему доступны (т. е. среди альтернатив из A).

Другой подход состоит в непосредственном описании выбора. Такое описание задается при помощи правила выбора $C(\cdot)$, указывающее для данной ситуации выбора A множество $C(A)$ тех альтернатив, которые могут быть выбраны в данной ситуации ($C(A) \subset A$). Вообще говоря, $C(A)$ может содержать несколько равнозначных альтернатив, таких что индивидууму все равно, какую из них выбрать; $C(A)$ может быть и пустым, если индивидуум не может сделать выбор[1].

Описание предпочтений правилом выбора не очень компактно и в определенном смысле тавтологично: чтобы было возможно моделировать выбор, нужно для каждой потенциально возможной ситуации выбора знать $C(A)$. Однако если считать индивидуума рациональным, то можно предположить, что правило выбора удовлетворяет некоторым естественным свойствам, что позволяет сделать описание выбора более компактным и тем самым — операциональным.

В дальнейшем мы будем следовать первому подходу. В Приложении 1.A к главе мы исследуем связь двух подходов и покажем, что они в определенном смысле эквивалентны.)

Если задана модель выбора, то можно изучать, каким свойствам удовлетворяет выбор и как изменяется выбор при изменении множества доступных альтернатив (так называемая сравнительная статика).

[1]Здесь, в частности, можно вспомнить известный пример осла, который не может выбрать из двух одинаковых охапок сена. (Этот пример приписывают средневековому французскому философу Ж. Буридану, но подобная ситуация обсуждалась еще Аристотелем).

При описании предпочтений индивидуума часто удобно представлять их так называемой функцией (индикатором) полезности. С понятием «полезность» ранние исследователи экономического поведения связывали возможность такого количественного описания альтернатив, которое, как температура в физике, отражает присущие им глубинные свойства. Такой наивный кардиналистский вариант концепции полезности сегодня представляется несостоятельным. Современная теория является по существу ординалистской и трактует функцию полезности фактически лишь как удобное описание предпочтений индивидуума. При таком описании значение имеет только соотношение полезностей (выше/ниже), а не их величины. Если предпочтения можно представить функцией полезности, то существует бесконечно много других функций полезности, представляющих те же предпочтения, и нельзя утверждать, что одна из них является более «правильной», чем другая. Однако в приложениях теории часто предполагают, что предпочтения обладают некоторыми свойствами, при которых они представимы функциями полезности особого вида. В этом смысле можно говорить о современном кардиналистском подходе, когда для моделирования предпочтений выбирается такая функция полезности, с которой удобнее обращаться[2].

В этой главе мы рассмотрим положения формальной модели выбора и ее основные компоненты в общем виде. В последующих главах, опираясь на свойства этой общей модели выбора, мы проведем анализ различных ее вариантов для частных случаев. Излагая основы теории выбора, будем для удобства делать акцент на ее использовании в моделях поведения потребителя, поскольку это область микроэкономики, которая наиболее тесно связана с моделированием выбора.

1.1 Блага, множество допустимых альтернатив

Одним из базовых понятий экономической теории является понятие блага[3]. Понятие блага в микроэкономике, в отличие от обыденно-

[2] Прежде всего мы здесь имеем в виду аддитивно-сепарабельные функции полезности, представляющие сепарабельные предпочтения, в частности, функции полезности Неймана—Моргенштерна или квазилинейные функции полезности.

[3] Отметим, что понятие «благо» не подразумевает оценочных суждений, как то: хорошо — плохо, благо — вред и т. п., оно просто отсылает к способности удовлетворять некоторые потребности (например, потребность курильщика в сигаретах) или, наоборот, вызывать неудовлетворенность (как, скажем, наличие на полу сигаретных окурков и т. п.). Естественно, здесь и далее мы говорим прежде

го понимания, трактуется достаточно широко[4]. Предполагается, что блага различаются по следующим характеристикам:

- *физическим характеристикам/видам благ*, (например, хлеб и молоко или бумага разного качества);
- *времени*, когда они становятся доступными (просмотр фильма сегодня — это не то же самое, что просмотр этого же фильма завтра);
- *местам их расположения* (персики, продаваемые в Ташкенте, и такие же персики, продаваемые в Новосибирске, могут рассматриваться как разные блага);
- *состояниям природы* (зонтик завтра в случае, если завтра пойдет дождь, отличается от зонтика завтра, если будет солнечная погода) и т. д.

Кроме того, при моделировании важно четко представлять, какой информацией о свойствах благ обладают экономические субъекты. Классическая микроэкономика[5] исходит из предположения, что потребители обладают *полной* информацией о свойствах благ еще *до момента* их покупки[6]. Данное предположение значительно облегчает изучение процесса выбора. В случае же, когда информацию о свойствах блага потребитель получает лишь *в процессе потребления, но не в момент покупки* (например, покупка подержанной техники с рук), описание процесса рационального выбора должно включать стратегический момент, обусловленный неопределенностью свойств/качества блага в момент выбора[7]. Ситуация еще больше усложняется если свойства/качество блага не только *ненаблюдаемы в момент выбора*, но и *невыявляемы в процессе потребления*

всего об экономических благах, т. е. о благах, которые продаются и покупаются на рынках.

[4]См., напр., G. Debreu. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons, 1959 (Cowles Foundation Monograph No. 17).

[5]Здесь мы имеем в виду микроэкономику, как она сложилась к началу 1970-х гг., до появления так называемой информационной экономической теории в работах Дж. Акерлова, М. Спенса, Дж. Стиглица и др.

[6]С классификацией благ в связи с информированностью потребителя об их характеристиках, важных с точки зрения его оценки этих благ, можно ознакомиться в работах P. Nelson. Information and Consumer Behavior, *Journal of Political Economy* **78** (1970): 311–329 и M. R. Darby and E. Karni. Free Competition and the Optimal Amount of Fraud, *Journal of Law and Economics* **16** (1973): 67–88.

[7]Товары с такой структурой информированности называют *experience goods* — «товары, познаваемые в опыте».

(с некоторой долей условности примером благ с таким свойством, являются юридические, медицинские и другие подобные услуги)[8].

Для того чтобы описать процесс выбора, нам в первую очередь необходимо определиться с тем, что является альтернативой, непосредственным объектом предпочтения, выбора. Классический подход в качестве такового объекта рассматривает потребительские наборы (корзины). Этому подходу мы и будем следовать в дальнейшем[9].

Будем предполагать, что потребителю доступны l благ. Через x_k обозначим количество блага с номером k. Под потребительским набором будем подразумевать вектор

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots x_l) \in \mathbb{R}^l,$$

где k-я компонента означает количество потребляемого блага с номером k. Если не оговорено противное, анализ потребительского выбора будем проводить при упрощающем предположении, что все рассматриваемые нами блага бесконечно делимы. Отметим, что, вообще говоря, x_k может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В частности, если в качестве одного из товаров рассматривается количество часов труда, предлагаемое индивидуумом на рынок, то предположение, что $x_k < 0$, отражает тот факт, что в данном случае относительно этого товара индивидуум является продавцом, а не покупателем. Заметим, однако, что практически всегда можно переопределить блага таким образом, чтобы они измерялись неотрицательными количествами. Так, если в перечне благ труд заменить на досуг потребителя (разность между общим запасом времени, которым обладает потребитель, и рабочим временем), то соответствующая компонента допустимого потребительского набора будет неотрицательным числом.

Под множеством допустимых наборов (множеством допустимых альтернатив) $X \subset \mathbb{R}^l$ будем понимать множество всех физически и/или институционально возможных наборов благ. Обычно предполагается, что множество X является замкнутым и ограниченным снизу, т. е. существует вектор $\hat{\mathbf{x}}$, такой что для каждого $\mathbf{x}$, принадлежащего X, выполнено $\mathbf{x} \geqslant \hat{\mathbf{x}}$. В этой и следующей главе мы будем

[8] Товары с такой структурой информированности называют *credence goods* — «товары, требующие доверия».

[9] Вообще говоря, это не единственный подход к определению объекта (области определения) предпочтений. Так, например, К. Дж. Ланкастер (K. J. Lancaster. A New Approach to Consumer Theory, *Journal of Political Economy* **74** (1966): 132–157) в качестве такой области определения предлагал рассматривать характеристики благ, а не сами блага.

предполагать, если не оговорено противное, что множество X таково, что вместе с любым потребительским набором $\tilde{\mathbf{x}}$ содержит все наборы с таким же или бóльшим потреблением каждого из благ, т. е. те $\mathbf{x}$ для которых выполнено $\mathbf{x} \geqslant \tilde{\mathbf{x}}$. Кроме того, будем предполагать, что множество X выпукло и содержит потребительский набор с нулевым потреблением каждого из благ ($\mathbf{0} \in X$).

Замкнутость множества X — требование, скорее, техническое, и при этом оно не вызывает особых содержательных нареканий.

Ограниченность снизу для «обычных» благ объясняется тем, что они не могут потребляться в отрицательных количествах. В экономике могут наличествовать также блага, потребление которых может быть отрицательной величиной, например труд. Но потребление труда потребителем не может превосходить его совокупный запас времени за рассматриваемый период.

Свойство «продолжаемости вверх» означает, что потенциально потребителю доступно неограниченное количество блага. Конечно, предположение о выполнении этого свойства далеко не всегда оправданно, и во многих современных работах его не делают, но ряд классических результатов теории потребителя значительно проще формулируется и выводится в условиях этого предположения. Действительно, при отсутствии этого свойства мы уже, например, не можем быть уверены в том, что потребитель израсходует весь получаемый им доход (т. е. что выбор потребителя принадлежит бюджетной линии).

Наконец, поясним значение свойства выпуклости. Выпуклость множества X — это не такое безобидное и естественное предположение, как может показаться на первый взгляд. Существует достаточное число содержательных экономических вопросов, при изучении которых данное предположение неприемлемо. Например, некоторые из рассматриваемых благ могут потребляться исключительно в дискретных количествах. Подобная ситуация значительно усложняет дело и требует более тонких рассуждений, на которых мы не останавливаемся.

Свойство $\mathbf{0} \in X$ имеет достаточно прозрачный смысл, оно фактически означает, что потребитель *потенциально* может ничего не потреблять. Такая ситуация не означает что это будет его выбором, но мы признаем за ним такую возможность. Иногда бывает удобно предполагать, что множество допустимых альтернатив представляет собой неотрицательный ортант $\mathbb{R}^l_+$, т. е. $X = \mathbb{R}^l_+$. В дальнейшем в каждом конкретном случае будет либо указано, либо ясно из контекста, какой из вышеприведенных случаев имеется в виду[10].

Как мы уже говорили выше, в основе поведения потребителя лежат его предпочтения, в соответствии с которыми он осуществляет выбор между доступными ему наборами из множества допустимых альтернатив. Естественным языком для обсуждения концепции предпочтений является теория бинарных отношений, краткое описание которой дается в следующем параграфе.

1.2 Бинарные отношения и их свойства

Чтобы мотивировать и пояснить понятие бинарного отношения, рассмотрим известную детскую игру «камень — ножницы — бумага». Предполагается, что камень побеждает ножницы (тупит), ножницы побеждают бумагу (режут), бумага побеждает камень (оборачивает), в остальных случаях (например, камень — камень) — боевая ничья. Будем говорить, что x находится в отношении $\mathcal{R}$ к y, и записывать $x \ \mathcal{R} \ y$ в случае, если x «побеждает» y, где x и y принадлежат множеству $\{$камень, ножницы, бумага$\}$. Естественно отождествить отношение $\mathcal{R}$ с множеством, элементами которого являются упорядоченные пары[11] $\langle$камень, ножницы$\rangle$, $\langle$ножницы, бумага$\rangle$, $\langle$бумага, камень$\rangle$, и только они. Отметим, что так определенное отношение (множество) $\mathcal{R}$, очевидно, является подмножеством множества, состоящего из всевозможных упорядоченных пар, где каждый элемент пробегает множество $\{$камень, ножницы, бумага$\}$.

Этот простой пример приводит нас к следующему определению бинарного отношения.

Определение 1.1:

Пусть X — произвольное непустое множество. Декартовым квадратом множества X назовем множество, обозначаемое $X \times X$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ пробегают все множество X. Под бинарным отношением $\mathcal{R}$, заданным на множестве X, будем понимать некоторое подмножество декартова квадрата $X \times X$, т. е. формально $\mathcal{R} \subset X \times X$. ◀

[10] Более подробное обсуждение понятия блага и множества допустимых альтернатив см. в книге Э. Маленво. *Лекции по микроэкономическому анализу*, М.: Наука, 1985, гл. I, § 3 и гл. II, § 4.

[11] Выражение «упорядоченная пара» означает, что пары $\langle a, b\rangle$ и $\langle b, a\rangle$ считаются различными.

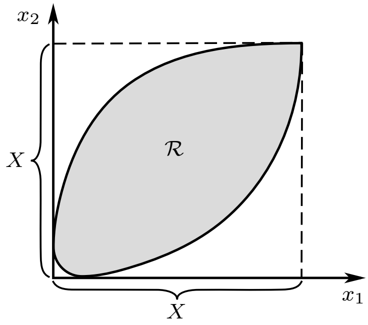


Рис. 1.1. *Бинарное отношение $\mathcal{R}$, заданное на множестве $X \subset \mathbb{R}$*

Другими словами, бинарное отношение — это некоторое множество упорядоченных пар $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — элементы множества X. Понятие бинарного отношения в случае $X \subset \mathbb{R}$ имеет достаточно простую графическую иллюстрацию (Рис. 1.1).

При рассмотрении бинарных отношений в случае, когда пара $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ принадлежит множеству $\mathcal{R}$, вместо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathcal{R}$ обычно записывают $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{y}$ и говорят, что $\mathbf{x}$ находится в отношении $\mathcal{R}$ к $\mathbf{y}$.

Определим теперь некоторые свойства бинарных отношений, которые в дальнейшем будут использованы при рассмотрении предпочтений[12].

Определение 1.2:

Бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется

* рефлексивным, если для всех $\mathbf{x} \in X$ выполнено $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{x}$;
* иррефлексивным[13], если $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{x}$ не выполняется ни при каком $\mathbf{x} \in X$;
* симметричным, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{y}$ следует $\mathbf{y} \,\mathcal{R}\, \mathbf{x}$;
* асимметричным, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{y} \,\mathcal{R}\, \mathbf{x}$ неверно;
* транзитивным, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ таких что $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \,\mathcal{R}\, \mathbf{z}$ выполнено $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{z}$;

[12] Здесь и далее, под $\neg A$ мы подразумеваем отрицание A.

[13] Часто это свойство также называют нерефлексивностью, но такая терминология приводит к парадоксальным выражениям. Например, «бинарное отношение не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным». Чтобы избежать этой игры слов, мы и используем термин «иррефлексивность».

* отрицательно транзитивным, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ таких что $\neg(\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y})$ и $\neg(\mathbf{y}\ \mathcal{R}\ \mathbf{z})$ выполнено $\neg(\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{z})$;
* полным, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ выполнено либо $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y}$, либо $\mathbf{y}\ \mathcal{R}\ \mathbf{x}$, либо и то и другое. ◀

Проиллюстрируем эти свойства бинарных отношений на примерах.

Пример 1.1

Пусть X — множество студентов, обучающихся в текущем учебном году в Новосибирском государственном университете; $\mathcal{R}$ — отношение «выше ростом, чем» заданное на X. Посмотрим, каким из указанных выше свойств удовлетворяет это бинарное отношение.

Очевидно, что какого бы студента мы ни взяли, его рост не может быть больше его же роста, т. е., например, 175 не может быть больше 175. Таким образом, это отношение является иррефлексивным и не удовлетворяет свойству рефлексивности.

Это отношение также является асимметричным и не является симметричным. Действительно, пусть $h(a)$ — рост некоторого студента a, а $h(b)$ — рост студента b, и пусть $a\ \mathcal{R}\ b$, т. е. студент a имеет больший рост, чем b ($h(a) > h(b)$). Тогда вполне понятно, что неравенство $h(b) > h(a)$ неверно. Это в свою очередь, означает, что неверно $b\ \mathcal{R}\ a$. Таким образом, с учетом произвольности выбора a и b мы получили желаемое.

Проверим теперь, что данное отношение является транзитивным. Из множества X возьмем трех произвольных студентов a, b, c, чей рост составляет $h(a)$, $h(b)$ и $h(c)$ соответственно, причем выполнены следующие неравенства: $h(a) > h(b)$ и $h(b) > h(c)$. Очевидно, что по свойству сравнения действительных чисел мы имеем, что $h(a) > h(c)$. Это в точности означает, что $a\ \mathcal{R}\ c$ и мы, таким образом, показали транзитивность $\mathcal{R}$.

Выполнение свойства отрицательной транзитивности проверим чуть позже, а сейчас перейдем к проверке свойства полноты. Как нетрудно понять, рассматриваемое бинарное отношение не является полным, если среди студентов есть хотя бы двое с одинаковым ростом. В этом случае ни один из этих двух студентов не будет выше другого и, таким образом, мы имеем нарушение свойства полноты. Если же среди нашего множества X нет ни одной пары студентов одинакового роста, то введенное на X отношение «выше ростом, чем» обладает свойством полноты. △

Пример 1.2
Пусть на множестве $X = \mathbb{R}^2_+$ задано отношение $\mathcal{R}$ по правилу $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 \geqslant y_1 + x_2$. Перед тем как отвечать на вопрос о том, каким свойствам удовлетворяет данное бинарное отношение, заметим, что $x_1 + y_2 \geqslant y_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geqslant y_1 - y_2$, т. е. $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geqslant y_1 - y_2$. Как нетрудно догадаться, данное бинарное отношение удовлетворяет тем же свойствам, что и отношение $\geqslant$ на действительной прямой, т. е. свойствам полноты, транзитивности и рефлексивности. (Проверьте самостоятельно выполнение/невыполнение условий симметричности/асимметричности и отрицательной транзитивности.) $\triangle$

Замечание: При проверке указанных выше свойств предпочтений следует быть осторожным и не делать поспешных выводов. В частности, если окажется, что некоторое бинарное отношение не является рефлексивным, то из этого, вообще говоря, не следует, что оно является иррефлексивным. Та же ситуация возникает при рассмотрении связки свойств симметричность/асимметричность.

Эти определения можно проиллюстрировать графически в духе Рис. 1.1. Так, например, рефлексивность означает, что *вся* диагональ декартова квадрата $X \times X$ принадлежит $\mathcal{R}$. Свойство симметричности означает, что множество $\mathcal{R}$ симметрично относительно диагонали декартова квадрата. Полнота означает, что если мы «согнем по диагонали» декартов квадрат, то в итоге получим треугольник без выколотых точек.

Выше мы ввели и обсудили ряд часто встречающихся свойств бинарных отношений. Теперь рассмотрим взаимосвязь между этими свойствами.

Теорема 1.1:

{i} Каждое асимметричное бинарное отношение является иррефлексивным.

{ii} Каждое полное бинарное отношение является рефлексивным.

{iii} Каждое иррефлексивное и транзитивное бинарное отношение является асимметричным.

{iv} Отношение $\mathcal{R}$ является отрицательно транзитивным тогда и только тогда, когда $\forall \mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{z} \in X$ из $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{z}$ или $\mathbf{z}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y}$. $\lrcorner$

Доказательство: Доказательство свойств тривиально. С целью демонстрации техники доказательства докажем только пункт {iii} теоремы.

Предположим противное, т. е. пусть отношение $\mathcal{R}$ иррефлексивно, транзитивно, но не является асимметричным. Тогда найдется такая пара $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, что $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y}\ \mathcal{R}\ \mathbf{x}$. Так как отношение $\mathcal{R}$ транзитивно, то из $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y}\ \mathcal{R}\ \mathbf{x}$ следует $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{x}$. Получили противоречие с иррефлексивностью. ■

Пример 1.3 (продолжение Примера 1.1)
Нам осталось проверить свойство отрицательной транзитивности. Для его проверки воспользуемся представлением этого свойства из только что доказанного утверждения. Для этого из множества X возьмем трех произвольных студентов a, b, c, чей рост составляет $h(a)$, $h(b)$ и $h(c)$ соответственно, причем выполнено неравенство $h(a) > h(b)$. Очевидно, что каким бы ни было значение $h(c)$, должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств — $h(a) > h(c)$ или $h(c) > h(b)$. Таким образом, видим, что для данного отношения $\mathcal{R}$ выполнено свойство отрицательной транзитивности. △

Задачи

1.1 Предположим, условно, что существует всего два города, в каждом из которых продается по три товара. Какова размерность пространства благ исходя из определения блага по Дебре?

1.2 Пусть X — множество всех ныне живущих людей на планете Земля. Проверьте выполнение свойств

- полноты,
- рефлексивности,
- симметричности,
- транзитивности,
- отрицательной транзитивности

для следующих бинарных отношений, заданных на X:

(A) «является потомком»;
(B) «является внуком»;
(C) «является родителем такого же числа детей, что и...»;
(D) «состоит в браке с...» (допуская полигамию);
(E) «состоит в браке с...» (предполагая моногамные отношения);
(F) «состоит в родстве с...»;
(G) «хотя бы раз в жизни думал о...».

1.3 Пусть X — множество населенных пунктов на планете Земля. Определите, какими свойствами обладают следующие отношения:

(A) «расположен восточнее» (в случае, если Земля круглая);
(B) «расположен восточнее» (в случае, если Земля плоская и стоит на черепахах);
(C) «имеет ту же численность, что и ...»;
(D) «имеет то же число безработных, что и ...».

1.4 Определите, какими из свойств (полнота, рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, транзитивность, отрицательная транзитивность) обладает каждое из приводимых ниже отношений $\mathcal{R}$, заданных на $\mathbb{R}^2_{++}$:

(A) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$;
(B) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} \geqslant \frac{x_2}{y_2}$;
(C) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$;
(D) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant y_1 y_2$;
(E) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} \geqslant 0$;
(F) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} > \min\{y_1, y_2\}$.

В случае, если отношение $\mathcal{R}$ обладает тем или иным свойством, представьте формальное доказательство, если же не обладает, то приведите пример, показывающий это.

1.5 Отношение лексикографического упорядочения, заданное на $\mathbb{R}^2_{++}$, определяется следующим образом: $\mathbf{x}\ \mathcal{R}^L\ \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $x_1 > y_1$ или когда $x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$. Каким свойствам (полнота, рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, транзитивность, отрицательная транзитивность) удовлетворяет данное отношение?

1.6 Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего ни свойству рефлексивности, ни свойству иррефлексивности.

1.7 Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего ни свойству симметричности, ни свойству асимметричности.

1.8 Покажите, что каждое асимметричное бинарное отношение является иррефлексивным.

1.9 Приведите пример симметричного, но не рефлексивного бинарного отношения.

1.10 Объясните, почему каждое полное бинарное отношение является рефлексивным.

1.11 (A) Как известно для любых высказываний A и B выполнено следующее логическое правило: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$. Используя этот факт, докажите, что отношение $\mathcal{R}$ является отрицательно транзитивным тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ таких что $\mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{y}$ выполнено $\mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{z}$ или $\mathbf{z} \mathcal{R} \mathbf{y}$.

(в) Докажите то же утверждение, не прибегая к исчислению высказываний (т. е. рассуждениям вида $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$).

1.3 Неоклассические предпочтения

Теперь, вооружившись понятием бинарного отношения, мы можем перейти к обсуждению неоклассического подхода к моделированию предпочтений и выбора.

В экономической теории предпочтения потребителя — единственная характеристика, которая принимается во внимание при объяснении его поведения. Поэтому в дальнейшем, излагая теорию потребления мы будем отождествлять потребителя с его предпочтениями. Предпочтения потребителя в неоклассической традиции представляются (описываются) тройкой бинарных отношений[14], заданных на множестве допустимых альтернатив X:

- строгим отношением предпочтения $\succ$ (тот факт, что данный потребитель предпочитает альтернативу $\mathbf{x}$ альтернативе $\mathbf{y}$ или, другими словами, что альтернатива $\mathbf{x}$ для него лучше, чем альтернатива $\mathbf{y}$, будет обозначаться как $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$);
- нестрогим отношением предпочтения $\succcurlyeq$ (тот факт, что потребитель нестрого предпочитает альтернативу $\mathbf{x}$ альтернативе $\mathbf{y}$ или, другими словами, что альтернатива $\mathbf{x}$ для него не хуже, чем альтернатива $\mathbf{y}$, будет обозначаться как $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$);
- отношением безразличия (эквивалентности) $\sim$ (тот факт, что потребитель безразличен в выборе между альтернативами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ или, другими словами, альтернатива $\mathbf{x}$ для него эквивалентна альтернативе $\mathbf{y}$, будет обозначаться как $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$).

Определение 1.3:

Тройка бинарных отношений $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ соответствует неоклассическим предпочтениям, если она обладает следующими свойствами:

* строгое отношение предпочтения $\succ$ является *асимметричным* (если $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ не может быть лучше $\mathbf{x}$) и *от-*

[14] Строгий аксиоматический подход к концепции предпочтений, основанный на бинарных отношениях, получил распространение в экономической теории после публикации работ К. Эрроу по общественному выбору (см., напр., K. J. Arrow. A Difficulty in the Concept of Social Welfare, *The Journal of Political Economy* **58** (1950): 328–346).

рицательно транзитивным (если неверно, что $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$, и неверно, что $\mathbf{y}$ лучше $\mathbf{z}$, то неверно, что $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{z}$);

* нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ является *полным* (для двух наборов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ либо $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, либо $\mathbf{y}$ не хуже $\mathbf{x}$) и *транзитивным* (если $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, и $\mathbf{y}$ не хуже $\mathbf{z}$, то $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{z}$);
* отношение безразличия $\sim$ *рефлексивно* (если $\mathbf{x}$ эквивалентен $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ эквивалентен $\mathbf{x}$), *симметрично* (любой набор эквивалентен сам себе) и *транзитивно* (если $\mathbf{x}$ эквивалентен $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}$ эквивалентен $\mathbf{z}$, то $\mathbf{x}$ эквивалентен $\mathbf{z}$);
* отношения связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ тогда и только тогда,}\\ &\text{когда неверно, что } \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\end{aligned} \tag{P1}$$

(или, что эквивалентно, $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$),

$$\begin{aligned}&\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ тогда и только тогда,}\\ &\text{когда как } \mathbf{x} \succ \mathbf{y},\ \text{так и } \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \text{ неверны,}\end{aligned} \tag{P2}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ тогда и только тогда,}\\ &\text{когда } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}.\end{aligned} \tag{P3}$$

◀

Предположение, что потребитель является рациональным или, другими словами, упорядочивает альтернативы (потребительские наборы) на основе неоклассических предпочтений, является традиционным для экономической теории, и мы будем в дальнейшем всюду следовать этой традиции (если противоположное не оговорено особо).

Предположения о свойствах неоклассических предпочтений тесно связаны с понятиями *рациональности* потребителя, *непротиворечивости вкусов*, *внутренней состоятельности выбора*. Предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ удовлетворяют всем свойствам, которым исходя из экономической и житейской интуиции должны удовлетворять предпочтения рационального потребителя.

Заметим, что если верны соотношения (P1) и (P3), то нестрогое отношение предпочтения однозначно определяет строгое отношение предпочтения и отношение безразличия. Значит, его свойства однозначно определяют свойства двух других отношений. Аналогично, если верны соотношения (P1) и (P2), то строгое отношение предпочтения однозначно определяет нестрогое отношение предпочтения и отношение безразличия. Поэтому возникает вопрос о непротиворечивости всех перечисленных требований к неоклассическим предпочтениям, а также об их избыточности[15].

Приведем предварительно некоторые факты относительно взаимосвязей тех свойств бинарных отношений, на которые будет опираться проверка непротиворечивости определения неоклассических предпочтений.

Теорема 1.2:

{i} Пусть отношения $\succ$ и $\succcurlyeq$ связаны соотношением (P1). Тогда

(1) асимметричность $\succ$ эквивалентна полноте $\succcurlyeq$;
(2) отрицательная транзитивность $\succ$ эквивалентна транзитивности $\succcurlyeq$.

{ii} Пусть отношения $\succ$ и $\sim$ связаны соотношением (P2). Тогда

(1) $\sim$ симметрично;
(2) если $\succ$ отрицательно транзитивно, то $\sim$ транзитивно;
(3) если $\succ$ асимметрично, то $\sim$ рефлексивно.

{iii} Пусть отношения $\succcurlyeq$ и $\sim$ связаны соотношением (P3). Тогда

(1) $\sim$ симметрично;
(2) если $\succcurlyeq$ транзитивно, то $\sim$ транзитивно;
(3) если $\succcurlyeq$ полно, то $\sim$ рефлексивно. ┘

Доказательство: {i1} Полноту отношения $\succcurlyeq$ можно переформулировать следующим эквивалентным образом: если не выполнено $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, то $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$. Поскольку $\succ$ и $\succcurlyeq$ связаны соотношением (P1), следующие два свойства эквивалентны:

$$\urcorner(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Rightarrow \urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x}).$$

Первое означает полноту $\succcurlyeq$, а второе — асимметричность $\succ$.

{i2} Очевидно, что поскольку $\succ$ и $\succcurlyeq$ связаны соотношением (P1), отрицательная транзитивность отношения $\succ$

$$(\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z}) \text{ и } \urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})) \Rightarrow \urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$$

эквивалентна транзитивности отношения $\succcurlyeq$

$$(\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}.$$

---

[15] Очевидно, что требования к отдельным бинарным отношениям, составляющим предпочтения, непротиворечивы. Например, отношение $\succcurlyeq = X \times X$ будет полным и транзитивным, т. е. некоторое полное транзитивное бинарное отношение всегда существует.

{ii1} Согласно (P2) как $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, так и $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ определяются одинаковым образом — как одновременное выполнение соотношений $\urcorner \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\urcorner \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

{ii2} Пусть $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$. Согласно (P2) это означает, что $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$, $\urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$, $\urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{z})$ и $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$. По отрицательной транзитивности отношения $\succ$ из этого следует, что $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$ и $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{x})$. В свою очередь, согласно (P2), это что означает $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$.

{ii3} Из асимметричности $\succ$ следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}$ неверно. Поэтому из (P2) следует $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$.

Пункт {iii} теоремы доказывается так же, как пункт {ii}. ■

На основе доказанного утверждения легко установить совместность требований в определении неоклассических предпочтений. Другими словами, верно следующее утверждение.

Теорема 1.3:

{i} Пусть отношение $\succ$ («строгое отношение предпочтения») асимметрично и отрицательно транзитивно, отношение $\succcurlyeq$ определяется на основе предположения (P1), отношение $\sim$ определяется на основе предположения (P2). Тогда $\succcurlyeq$ полно и транзитивно, $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно и выполнено предположение (P3).

{ii} Пусть отношение $\succcurlyeq$ («нестрогое отношение предпочтения») полно и транзитивно, отношение $\succ$ определяется на основе предположения (P1), отношение $\sim$ определяется на основе предположения (P3). Тогда $\succ$ асимметрично и отрицательно транзитивно, $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно и выполнено предположение (P2). ┘

Это утверждение показывает также, что совокупность требований к неоклассическим предпочтениям является избыточной, поскольку, например, строгое отношение предпочтения и его свойства полностью определяют два других отношения предпочтения и их свойства. Поэтому для полного описания неоклассических предпочтений достаточно описать либо соответствующее строгое, либо нестрогое отношение предпочтения (либо то, что из промежуточных курсов микроэкономики известно как «карта кривых безразличия»). Существуют две устоявшиеся традиции построения теории поведения потребителя, различающиеся способом описания предпочтений индивидуума. Первая берет за основу описание строгого отношения предпочтения (как асимметричного и отрицательно транзитивного отношения предпочтения). Вторая же традиция исходит из нестрогого отношения предпочтения, которое по исходным предположениям удовлетворяет свойствам полноты и транзитивности. Обе эти традиции приводят к одним и тем же неоклассическим предпочтениям, если строгое и нестрогое отношения предпочтения строятся на основе друг друга вышеуказанным способом, т. е. $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$.

Традиционная неоклассическая парадигма исходит из положения, что предпочтения (вкусы, оценки) потребителя являются основой его поведения (осуществляемого им выбора). Таким образом, для построения теории поведения потребителя, нам необходимо удобное для последующего анализа описание этих предпочтений. Хотя может быть предложено несколько возможных описаний, следует иметь в виду, что каждое из них является лишь способом представления одного и того же объекта — предпочтений (вкусов, оценок) данного потребителя. Проверка того, насколько такое описание адекватно, является целью эмпирического анализа. Теория, постулируя те или иные свойства таких описаний, должна приводить к верифицируемым (хотя бы потенциально) прогнозам относительно поведения потребитея. Эмпирическая оценка этих гипотез на их соответствие реально наблюдаемому поведению позволяет, в свою очередь, установить, насколько такое описание адекватно, что и является целью эмпирического анализа. Для нас важно только то, что конструкция, с помощью которой моделируются предпочтения, мыслима и непротиворечива.

Заметим, что определить нестрогое отношение предпочтения можно и следующим альтернативным способом, который представляется не менее естественным: $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. В случае неоклассических предпочтений такое альтернативное определение приводит к тому же отношению (как показывает приведенное ниже утверждение). При отказе от предположения, что предпочтения являются неоклассическими, мы получаем два альтернативных описания одного и того же предпочтения (и соответственно различные теории поведения, построенные на основе таких описаний).

Укажем теперь другие свойства неоклассических предпочтений, которые не отражены в Определении 1.3.

Теорема 1.4:

Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения на X. Тогда они обладают следующими свойствами.

{i} Строгое отношение предпочтения $\succ$ транзитивно (если $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}$ лучше $\mathbf{z}$, то $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{z}$) и иррефлексивно (набор не может быть лучше самого себя).

{ii} Нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ рефлексивно (любой набор не хуже самого себя) и отрицательно транзитивно.

{iii} Для любых $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполняется ровно одно из следующих трех соотношений:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{y} \succ \mathbf{x}, \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y}.$$

{iv} Для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

{v} Для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, но $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$ неверно.

{vi} Для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{z} \in X$ выполнено

(1) $(\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$;
(2) $(\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$;
(3) $(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$;
(4) $(\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$;
(5) $(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$;
(6) $(\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$. ┘

Доказательство: Докажем только некоторые из перечисленных свойств. Доказательство остальных свойства оставляется читателю в качестве упражнения.

{i} Покажем транзитивность $\succ$. Предположим противное. Пусть существуют $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ такие, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, но при этом $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$. В силу асимметричности отношения $\succ$ из $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ следует, что $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$. Из $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$ и $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$ по свойству отрицательной транзитивности следует, что $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$. Получили противоречие.

Иррефлексивность следует из асимметричности.

{iii} Из асимметричности $\succ$ следует, что соотношения $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ не могут выполняться одновременно. Свойство (P2) означает, что как $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, так и $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ одновременно могут быть неверными, если и только если $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. Сопоставляя эти факты, убеждаемся в истинности доказываемого.

{iv} Из доказанного в пункте {iii} следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ выполнены тогда и только тогда, когда не выполнено $\urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$. Но согласно (P1) $\urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$ эквивалентно $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$.

{vi1} Пусть $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$. Согласно (P2) из $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$ следует, что $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$. Предположим противное, т.е. что $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$. Тогда из $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$ и $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$ по свойству отрицательной транзитивности строгого отношения предпочтения имеем $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$. Пришли к противоречию. ■

Как уже отмечалось, еще один способ моделирования предпочтений основан на «карте кривых безразличия». Он эквивалентен моделированию с помощью неоклассических предпочтений, если «карта кривых безразличия» связана с элементарными бинарными отношениями соответствующим образом.

Определение 1.4:

Для данного набора $\mathbf{x} \in X$

* множеством безразличия[16] будем называть множество наборов, эквивалентных $\mathbf{x}$:

$$I(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \sim \mathbf{x} \,\};$$

* верхним лебеговым множеством будем называть множество наборов, которые не хуже $\mathbf{x}$:

$$L^{+}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\};$$

* нижним лебеговым множеством будем называть множество наборов, которые не лучше $\mathbf{x}$:

$$L^{-}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \,\}.$$ ◀

Эти объекты обладают очевидными свойствами:

Теорема 1.5:

Пусть $I(\cdot)$ и $L^{+}(\cdot)$ заданы на основе неоклассических предпочтений. Тогда для них верны следующие утверждения:

{i} Если $I(\mathbf{x})$, $I(\mathbf{y})$ — любые два множества безразличия, то они либо не имеют общих точек, либо совпадают.

{ii} Если $L^{+}(\mathbf{x})$, $L^{+}(\mathbf{y})$ — любые два верхние лебеговы множества, то либо $L^{+}(\mathbf{x}) \subset L^{+}(\mathbf{y})$, либо $L^{+}(\mathbf{y}) \subset L^{+}(\mathbf{x})$. ┘

[16] Надеемся, что читатель узнал в этом объекте кривую безразличия, известную ему из вводного курса микроэкономики.

Если отображение $L^+(\cdot)$ ставит в соответствие каждому набору из X некоторое подмножество X, и обладает свойством, указанным в пункте {ii} данной теоремы, то на его основе нетрудно построить неоклассические предпочтения по следующему правилу: $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \in L^+(\mathbf{y})$. При этом отношения $\succ$ и $\sim$ задаются в соответствии с (P1) и (P3), т. е. $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, если $\mathbf{y} \notin L^+(\mathbf{x})$, и $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, если $\mathbf{x} \in L^+(\mathbf{y})$ и $\mathbf{y} \in L^+(\mathbf{x})$. Такие предпочтения будут неоклассическими, поскольку отношение $\succcurlyeq$ будет полным и транзитивным.

Альтернативный подход к построению предпочтений на основе карты кривых безразличия состоит в том, чтобы рассматривать в качестве исходного строгое отношение предпочтения, заданное на множествах безразличия (обозначим его через $\succ^*$). Разные множества безразличия не пересекаются и в совокупности составляют множество X. При этом любые два множества безразличия — I и I' — либо находятся в отношении $I \succ^* I'$, либо находятся в отношении $I' \succ^* I$, либо совпадают. Тогда строгое отношение предпочтения $\succ$ на X можно задать следующим образом: $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}'$ тогда и только тогда, когда $I \succ^* I'$, где $\mathbf{x} \in I$, $\mathbf{x}' \in I'$.

В целом можно сказать, что подход, основанный на карте кривых безразличия, является лишь иным изложением обычного неоклассического подхода[17].

Как говорилось выше, для описания выбора индивидуума в теории выбора вводятся понятия ситуации выбора и правила выбора, определенного на множестве ситуаций выбора. Ситуация выбора — это некоторое непустое подмножество множества допустимых (физически) альтернатив X, с которым индивидуум сталкивается и из которого он может выбирать.

Определение 1.5:

Пусть $\mathcal{A}$ — множество ситуаций выбора ($\mathcal{A} \subset 2^X$). Правило выбора (функция выбора) $C(\cdot)$ ставит в соответствие каждой ситуации выбора A из $\mathcal{A}$ (где $A \neq \varnothing$) множество $C(A)$ выбранных альтернатив, каждая из которых является элементом A, т. е. $C(A) \subset A$. ◀

Для потребителя, имеющего неоклассические предпочтения, соответствующее правило выбора $C(A)$ естественно определить следующим образом.

[17] Исторически такой подход, пионером которого является В. Парето, был как раз первым ординалистским подходом к моделированию предпочтений (см. V. Pareto• *Manuel d'économie politique*, Paris: V. Giard et E. Brière, 1909).

Определение 1.6:

Правило выбора задается на основе неоклассических предпочтений $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ следующими эквивалентными способами:

(i) $C(A) = C_{\succcurlyeq}(A) = \{\, \mathbf{x} \mid \forall \mathbf{y} \in A\ \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \,\}$;

(ii) $C(A) = C_{\succ}(A) = \{\, \mathbf{x} \mid \nexists \mathbf{y} \in A\colon \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}$. ◀

Другими словами, если из A выбрана альтернатива $\mathbf{x}$, то никакая другая альтернатива $\mathbf{y}$ из A не может быть лучше $\mathbf{x}$. То есть

$$\mathbf{x} \in C(A) \text{ и } \mathbf{y} \in A \Rightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}.$$

или

$$\mathbf{x} \in C(A) \text{ и } \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} \notin A.$$

Отношения $\succ$, $\sim$ в некотором смысле можно рассматривать как правила выбора, заданные на парах альтернатив. Подразумевается, что если $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, то соответствующее правило выбора имеет вид $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}\}$, а если $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, то правило выбора имеет вид $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$. Неоклассическая теория выбора распространяет это правило на другие ситуации выбора, позволяя тем самым предсказывать выбор в очень многих ситуациях.

Задачи

1.12 Какое наименьшее число вопросов требуется задать индивидууму с неоклассическими предпочтениями, чтобы выявить его предпочтения на потребительских наборах, состоящих из пяти благ, каждое из которых может потребляться в количестве 0 или 1?

1.13 Пусть некто предложил в качестве аксиом строгого отношения предпочтения постулировать асимметричность и транзитивность. Какие проблемы на этом пути вы предвидите?

1.14 Пусть $\succcurlyeq$ — нестрогое отношение предпочтения (полное и транзитивное бинарное отношение), заданное на X, а $\succ$ ($\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y})$ и $\urcorner(\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x})$) и $\sim$ ($\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y})$ и $(y \succcurlyeq \mathbf{x})$) — строгое отношение предпочтения и отношение эквивалентности, построенные на его основе. Каким свойствам будут удовлетворять отношения $\succ$ и $\sim$?

1.15 Пусть $X = \mathbb{R}_+$ и $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \geqslant y$ (соответственно, $x \succ y \Leftrightarrow x > y$ и $x \sim y \Leftrightarrow x = y$).

(A) Покажите, что тройка бинарных отношений $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ представляет собой неоклассические предпочтения.

(B) Покажите, что для любых $x \in X$, $y \in X$ выполняется *ровно одно* из трех соотношений: $x \succ y$, $y \succ x$, $x \sim y$.

(C) Докажите, что для любых $x \in X$, $y \in X$ и $z \in X$, таких что $x \succcurlyeq y$ и $y \sim z$, выполнено $x \succcurlyeq z$. Какие еще свойства, аналогичные этому, выполнены для данных предпочтений?

(D) Объясните, почему в многомерном случае ($X = \mathbb{R}^n_+$ при $l \geqslant 2$) нельзя ввести неоклассические предпочтения аналогичным образом.

1.16 Докажите недоказанные в основном тексте пункты Теоремы 1.4.

1.17 Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения. Рассмотрим семейство множеств (кривых) безразличия, построенных на основе $\sim$. Как на основе порядка, задаваемого неоклассическими предпочтениями, корректно и непротиворечиво ввести порядок на этом семействе? Какими свойствами он обладает?

1.18 Докажите Теорему 1.5.

1.19 Изложите формально подход, основанный на «карте кривых безразличия», и продемонстрируйте его связь с неоклассическими предпочтениями.

1.20 Покажите, что если нестрогое и строгое отношения предпочтения связаны соотношением $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y},$ но не $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x})$, то построенные на их основе правила выбора (см. Определение 1.6) совпадут, т. е. $C_{\succ}(A) = C_{\succcurlyeq}(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

1.4 Представление предпочтений функцией полезности

В этом параграфе мы рассмотрим условия, при выполнении которых можно получить числовой индикатор полезности — функцию полезности — с некоторыми наперед заданными свойствами. Под функцией полезности потребителя традиционно понимается некоторая вещественнозначная функция, упорядочивающая альтернативы из множества допустимых альтернатив X таким же образом, как и предпочтения[18]. Функция полезности является удобным инструментом анализа выбора потребителя, особенно в приложениях теории. На-

[18]В философии понятие полезности (пользы) популяризировал английский философ-утилитарист И. Бентам: «Под полезностью понимается то свойство предмета, по которому он имеет стремление приносить благодеяние, выгоду, удовольствие, добро или счастье (все это в настоящем случае сводится к одному), предупреждать вред, страдание, зло или несчастье той стороны, об интересе которой идет речь: если эта сторона есть целое общество, то счастье общества; если это отдельное лицо, то счастье этого отдельного лица.» (J. Bentham · *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, London: T. Payne, 1789).

Модели потребительского выбора, основанные на функции полезности, ввели маржиналисты. Прежде всего здесь стоит упомянуть Г. Госсена (см. сноску 4 пример, с ее помощью удобно изучать вопросы сравнительной статики: как изменяется потребительский выбор при изменении ситуации, в которой осуществляется выбор (цен, дохода, механизма формирования дохода и т. д.).

Определение 1.7:

Будем говорить, что функция $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ является функцией полезности, соответствующей предпочтениям $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ (другими словами, представляющей эти предпочтения), если для всякой пары потребительских наборов $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ выполнено тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. ◀

Замечание: Следует понимать, что если некоторые предпочтения могут быть представлены функцией полезности $u(\cdot)$, то данные предпочтения могут быть представлены также и суперпозицией $f(u(\cdot))$, где $f(\cdot)$ — некоторая возрастающая функция, определенная на множестве значений функции $u(\cdot)$ (см. задачу 1.28). То есть при наличии хотя бы одной функции, представляющей предпочтения потребителя, мы автоматически имеем бесконечное множество функций полезности, таким же точно образом упорядочивающих потребительские наборы, и соответственно эквивалентных с точки зрения описания потребительских предпочтений. Некоторые из этого бесконечного множества функций полезности могут быть более удобными для анализа, чем другие, например, обладать такими свойствами, как непрерывность, дифференцируемость, вогнутость, квазилинейность, сепарабельность и т. п. (см. далее).

В связи с приведенным определением естественно возникает вопрос о том, какие свойства предпочтений (и множества альтернатив, на которых заданы предпочтения) гарантируют существование функции полезности, представляющей эти предпочтения. Вначале приведем утверждение, которое дает нам *необходимое условие существования функции полезности.*

Заметим, прежде всего, что Определение 1.7 намеренно сформулировано таким образом, чтобы учесть возможность того, что предпочтения не являются неоклассическими. Для самых «ходовых» случаев неполной рациональности (см. Приложение 1.B) предпочтения можно описать, если задать нестрогое отношение предпочтения. При этом оно определяется как $\succcurlyeq\, = \,\succ \cup \sim$ («лучше или безразлично»). Если для каждой пары наборов $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполнено не более чем

на с. 106) и Уильяма Джевонса (W. S. Jevons. *The Theory of Political Economy*, London: Macmillan, 1871).

одно из соотношений $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$[19], то, зная $\succcurlyeq$, отношения $\succ$ и $\sim$ можно однозначно восстановить по следующим правилам:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \urcorner(\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}); \tag{P4}$$

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \text{ если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}. \tag{P5}$$

В нижеприведенной теореме будем исходить именно из этих допущений.

Теорема 1.6:

Если существует функция полезности, представляющая предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, заданные на X, то эти предпочтения являются неоклассическими. ⌟

Доказательство: Так как отношение $\geqslant$, заданное на множестве определения функции полезности (подмножестве $\mathbb{R}$), является полным (два числа $u(\mathbf{x})$ и $u(\mathbf{y})$ всегда можно сравнить) и транзитивным (из $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y}) \geqslant u(\mathbf{z})$ следует $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{z})$), то отношение $\succcurlyeq$ на X тоже полно и транзитивно. Кроме того, очевидно, что (P5) совпадает с (P3), а (P4) при полноте $\succcurlyeq$ эквивалентно (P1). Таким образом, согласно пункту {ii} Теоремы 1.3 рассматриваемые предпочтения являются неоклассическими. ■

Как нетрудно понять, если предпочтения являются неоклассическими, то для того, чтобы проверить, представляет ли их данная функция $u(\cdot)$, достаточно проверить, что для всякой пары альтернатив $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ верно тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$.

В дальнейшем в этой главе (за исключением некоторых задач к данному параграфу и Приложения 1.B, посвященного предпочтениям, отличным от неоклассических) мы будем рассматривать только неоклассические предпочтения и во многих случаях не будем оговаривать это особо, называя их просто предпочтениями.

Отметим, что когда множество альтернатив не более чем счетное (например, счетное), условие, что предпочтения являются неоклассическими, является *достаточным* для существования функции полезности. (Множество альтернатив будет счетным, например, когда все блага потребляются только в целых количествах.)

[19] Естественно предположить также в качестве минимального требования рациональности, что нестрогое отношение предпочтения удовлетворяет условию рефлексивности ($\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}$).

Теорема 1.7:

Если множество альтернатив X не более чем счетно, то для любых неоклассических предпочтений на X существует представляющая их функция полезности. ┘

Доказательство: Поскольку множество альтернатив X не более чем счетно, его можно представить в виде последовательности альтернатив $\mathbf{x}^i$, $i = 1, 2, \ldots$. Доказательство утверждения строится в виде правила нумерации альтернатив.

Пусть мы уже присвоили величину полезности первым N альтернативам из данной последовательности. Требуется присвоить величину полезности альтернативе $\mathbf{x}^{N+1}$. Рассмотрим два подмножества множества $A^N = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N\}$, а именно,

$$A_+^N = \{\, \mathbf{x} \in A^N \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}^{N+1} \,\} \quad \text{и} \quad A_-^N = \{\, \mathbf{x} \in A^N \mid \mathbf{x}^{N+1} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}.$$

Обозначим через $\bar{\mathbf{x}}$ такой элемент множества A_+^N, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \bar{\mathbf{x}}$ для всех $\mathbf{x} \in A_+^N$. В случае неединственности такого элемента берем любой из них. Аналогичным образом обозначим через $\tilde{\mathbf{x}}$ такой элемент множества A_-^N, что $\tilde{\mathbf{x}} \succcurlyeq \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in A_-^N$. Существование $\bar{\mathbf{x}}$ (при непустом множестве A_+^N) и $\tilde{\mathbf{x}}$ (при непустом множестве A_-^N) следует из полноты и транзитивности отношения $\succcurlyeq$. Доказательство этого оставляется в качестве упражнения. (См. задачу 1.32, а также Теорему 1.15.)

Возможны следующие случаи:

1. $A_+^N = \varnothing$;
2. $A_-^N = \varnothing$;
3. $A_+^N \neq \varnothing$, $A_-^N \neq \varnothing$, $A_+^N \cap A_-^N = \varnothing$;
4. $A_+^N \neq \varnothing$, $A_-^N \neq \varnothing$, $A_+^N \cap A_-^N \neq \varnothing$.

В первом случае можно взять $u(\mathbf{x}^{N+1}) = u(\tilde{\mathbf{x}}) + 1$, во втором — $u(\mathbf{x}^{N+1}) = u(\bar{\mathbf{x}}) - 1$, в третьем — $u(\mathbf{x}^{N+1}) = (u(\bar{\mathbf{x}}) + u(\tilde{\mathbf{x}}))/2$. В четвертом случае берем $u(\mathbf{x}^{N+1}) = u(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ — произвольный элемент множества $A_+^N \cap A_-^N$ (по построению все элементы множества $A_+^N \cap A_-^N$ имеют одну и ту же полезность).

Чтобы закончить описание алгоритма, положим $A^1 = \{\mathbf{x}^1\}$ и $u(\mathbf{x}^1) = 0$. Заметим, что при таком построении функции полезности свойство

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$$

выполнено для всех $\mathbf{x} \in A^N$, $\mathbf{y} \in A^N$ при произвольном N (см. задачу 1.33). Поэтому построенная таким образом функция $u(\cdot)$ действительно является функцией полезности. ■

Если множество альтернатив не является счетным, то утверждение в общем случае неверно. Это показывает пример предпочтений на основе лексикографического упорядочения потребительских наборов из $\mathbb{R}^2_+$.

Пример 1.4
Лексикографическое упорядочение называется так, поскольку оно ранжирует наборы подобно правилу расположения слов в словаре. Это предпочтения индивидуума, который судит о наборе прежде всего по количеству первого блага в этом наборе. Если для двух наборов эти количества совпадают, их сравнение осуществляется на основе количества второго блага в этих наборах и т. д. В двумерном случае ($X = \mathbb{R}^2_+$) набор $\mathbf{x}$ лучше, чем набор $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \succ^L \mathbf{y}$), если $x_1 > y_1$ или же если $x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$. Такие предпочтения являются неоклассическими, поскольку отношение $\succ^L$ удовлетворяет свойствам асимметричности и отрицательной транзитивности. Однако функция полезности, которая бы их представляла, не существует. Докажем это.

Предположим противное. Пусть существует соответствующая этим предпочтениям функция полезности, т. е. такая функция (принимающая действительные значения), что

$$\mathbf{x} \succ^L \mathbf{y} \Leftrightarrow u_L(x_1, x_2) > u_L(y_1, y_2).$$

Сопоставим каждому неотрицательному *действительному* числу x_1 некоторое *рациональное* число $r(x_1)$, такое что $u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1)$. Такое число $r(x_1)$ найдется, поскольку множество рациональных чисел всюду плотно в множестве действительных чисел.

Если $x_1, x_1' \geqslant 0$ — два числа, таких что $x_1 > x_1'$, то по определению лексикографического упорядочения имеем $u_L(x_1, 1) > u_L(x_1', 2)$. Кроме того, $u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1)$ и $u_L(x_1', 2) > r(x_1') > u_L(x_1', 1)$. В силу этих соотношений имеем

$$r(x_1) > u_L(x_1, 1) > u_L(x_1', 2) > r(x_1').$$

Тем самым из того, что $x_1 > x_1'$ имеем, что $r(x_1) > r(x_1')$. В силу этого $r(\cdot)$ является взаимно однозначной функцией. Область определения этой функции — неотрицательные *действительные* числа (это множество является континуумом), а область значения — некоторое подмножество множества *рациональных* чисел (т. е. счетное множество). Подобное невозможно, так как невозможно построить взаимно однозначное соответствие между счетным множеством и континуумом. Таким образом, мы пришли к противоречию и тем самым доказали, что не существует функции полезности, соответствующей лексикографическому упорядочению. $\triangle$

Существует, однако, ряд случаев, для которых можно гарантировать существование функции полезности, даже если множество альтернатив не является конечным или счетным. Так, например, Жерар Дебре доказал, что функция полезности существует, если предпочтения непрерывны[20]. Существует несколько эквивалентных определений непрерывности. Дадим одно из таких определений, а затем укажем другие возможные определения.

Определение 1.8:

Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ на $X \subset \mathbb{R}^l$, называются непрерывными, если для любых сходящихся последовательностей допустимых наборов $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$ ($\mathbf{x}_n \in X$, $\mathbf{y}_n \in X$), таких что $\mathbf{x}_n \succcurlyeq \mathbf{y}_n$ при всех n, пределы которых $\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ и $\mathbf{y} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n$ являются допустимыми наборами ($\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$), выполнено $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. ◀

Следующая теорема указывает некоторые альтернативные определения непрерывности.

Теорема 1.8:

Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения на $X \subset \mathbb{R}^l$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

{i} Предпочтения непрерывны в смысле Определения 1.8;

{ii} Для любого $\mathbf{x} \in X$ как множество $L^+(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}$, так и множество $L^-(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \,\}$ замкнуты (в $\mathbb{R}^l$).

{iii} Если $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$), то существуют ε-окрестности $V_\mathbf{x}$ и $V_\mathbf{y}$ точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно, такие что для любых $\mathbf{x}' \in V_\mathbf{x} \cap X$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y} \cap X$ выполнено $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$. ┘

Доказательство: Доказательство проведем по схеме {i} ⇒ {ii} ⇒ {iii} ⇒ {i}.

{i} ⇒ {ii} Возьмем произвольный набор $\mathbf{x} \in X$ и любую сходящуюся последовательность $\{\mathbf{y}_n\}$, лежащую в $L^+(\mathbf{x})$. Пусть $\mathbf{y}$ — предел этой последовательности. (Как обычно, предполагается, что X замкнуто, и поэтому $\mathbf{y} \in X$.) По определению $L^+(\mathbf{x})$ для любого n выполнено $\mathbf{y}_n \succcurlyeq \mathbf{x}$. Поскольку предпочтения непрерывны, отсюда следует, что $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$, т. е. $\mathbf{y} \in L^+(\mathbf{x})$. Замкнутость второго множества доказывается аналогично.

{ii} ⇒ {iii} Прежде всего заметим, что множество $L^+(\mathbf{x})$ замкнуто тогда, и только тогда, когда его дополнение в $\mathbb{R}^l$, т. е. множество

[20] G. Debreu. Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in *Decision Processes*, R. M. Thrall et al. (ed.), New York: John Wiley & Sons, 1954.

$\mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{x})$, открыто. Аналогично $L^-(\mathbf{x})$ замкнуто тогда, и только тогда, когда $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{x})$ открыто.

Пусть $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Рассмотрим два возможных случая.

(a) Существует набор $\mathbf{z} \in X$, такой что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$. Тогда $\mathbf{x}$ лежит в открытом множестве $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{z})$, и поэтому существует ε-окрестность этого набора $V_\mathbf{x}$, лежащая в $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{z})$. Аналогично $\mathbf{y}$ лежит в $\mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{z})$ вместе с некоторой окрестностью $V_\mathbf{y}$.

(b) Не существует набора $\mathbf{z} \in X$, такого что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$. Набор $\mathbf{x}$ лежит в $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{y})$ вместе с некоторой окрестностью $V_\mathbf{x}$, а $\mathbf{y}$ лежит в $\mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{x})$ вместе с некоторой окрестностью $V_\mathbf{y}$.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что в каждом из случаев (a), (b) для любых $\mathbf{x}' \in V_\mathbf{x} \cap X$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y} \cap X$ выполнено $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$ (см. задачу 1.39).

{iii} $\Rightarrow$ {i} Возьмем некоторые сходящиеся последовательности допустимых наборов $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$, такие что для всех n выполнено $\mathbf{x}_n \succcurlyeq \mathbf{y}_n$. Если бы $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$, $\mathbf{y} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n$, тогда для точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ нашлись бы окрестности $V_\mathbf{x}$ и $V_\mathbf{y}$, такие что для любых допустимых наборов $\mathbf{x}' \in V_\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y}$ выполнено $\mathbf{y}' \succ \mathbf{x}'$. Это означает, что при достаточно больших значениях n имеем $\mathbf{y}_n \succ \mathbf{x}_n$, что противоречит $\mathbf{x}_n \succcurlyeq \mathbf{y}_n$. Таким образом, получили, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. ■

Замечание: Мы исходим, из того, что X является подмножеством $\mathbb{R}^l$. Однако приведенные альтернативные определения фактически являются более общими и могут быть применены с определенными поправками к множествам допустимых потребительских наборов другой природы. Поправки состоят в том, чтобы рассматривать всё относительно X (как если бы точек вне X не существовало):

- для любого $\mathbf{x} \in X$ как множество $L^+(\mathbf{x})$, так и множество $L^-(\mathbf{x})$ замкнуты в X (аналог определения {ii} из Теоремы 1.8);
- для любого $\mathbf{x} \in X$ как множество $L^{++}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}$, так и множество $L^{--}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \,\}$ открыты в X (очевидная переформулировка предыдущего определения);
- множество $\succ$ открыто в $X \times X$ (аналог определения {iii} из Теоремы 1.8);
- множество $\succcurlyeq$ замкнуто в $X \times X$ (очевидная переформулировка предыдущего определения и аналог исходного определения непрерывности).

Соответственно приведенное доказательство эквивалентности определений подходит практически без изменений.

Приведенные эквивалентные определения непрерывности позволяют выявить содержательный смысл понятия непрерывности: если

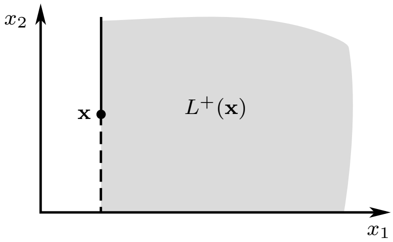


Рис. 1.2. *Верхнее лебегово множество для лексикографического упорядочения*

мы явно предпочитаем один из наборов другому, то при рассмотрении достаточно близких наборов наша ранжировка сохранится. Кроме того, согласно доказанной теореме непрерывность предпочтений можно переформулировать как требование замкнутости верхнего и нижнего лебеговых множеств[21].

Пример 1.5 (продолжение Примера 1.4)
В случае лексикографических предпочтений на $\mathbb{R}^2_+$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+$ множества $L^+(\mathbf{x})$ и $L^-(\mathbf{x})$ не являются замкнутыми. Здесь $\succcurlyeq^L$ задается на основе $\succ^L$ обычным способом. Нетрудно увидеть, что

$$\mathbf{x} \succcurlyeq^L \mathbf{y} \Leftrightarrow ((x_1 > y_1) \text{ или } (x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \geqslant y_2)).$$

На Рис. 1.2 показано одно из верхних лебеговых множеств для лексикографических предпочтений. Очевидно, что изображенное на рисунке множество $L^+(\mathbf{x})$ не является замкнутым, и, таким образом, лексикографические предпочтения не являются непрерывными. (То же самое имеет место и для $L^-(\mathbf{x})$.) $\triangle$

Теперь сформулируем и частично докажем анонсированную выше теорему Дебре о существовании функции полезности, представляющей неоклассические предпочтения.

Теорема 1.9 (Дебре):
Для любых непрерывных неоклассических предпочтений на $X \subset \mathbb{R}^l$ существует представляющая их непрерывная функция полезности. ⌟

[21] Иногда свойство замкнутости верхнего (нижнего) лебегового множества называют полунепрерывностью предпочтений сверху (снизу).

Доказательство: Как уже говорилось, мы не будем полностью доказывать этот результат. Докажем только часть его, а именно существование функции полезности. Доказательство непрерывности заинтересованный читатель может найти в оригинальной работе Т. Радера[22], чей вариант доказательства теоремы Дебре мы здесь приводим.

Рассмотрим систему шаров в $\mathbb{R}^l$ с *рациональными* центрами и радиусами. Очевидно, что эта система шаров составляет счетное множество. На основе этих шаров построим систему множеств $\{O_n\}_{n=1}^{+\infty}$ по следующему принципу: в эту систему попадают непустые пересечения исходной системы шаров с множеством X. Обозначим через $L^{--}(\mathbf{x})$ множество потребительских наборов из X, которые строго хуже $\mathbf{x}$, т. е. $L^{--}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \,\}$. Введем в рассмотрение множество индексов тех множеств O_n, все точки которых хуже $\mathbf{x}$: $N(\mathbf{x}) = \{\, n \mid O_n \subset L^{--}(\mathbf{x}) \,\}$.

Покажем, что $\bigcup_{n \in N(\mathbf{x})} O_n = L^{--}(\mathbf{x})$. Включение $\bigcup_{n \in N(\mathbf{x})} O_n \subset L^{--}(\mathbf{x})$ очевидно, так как для каждого $n \in N(\mathbf{x})$ выполнено $O_n \subset L^{--}(\mathbf{x})$.

Докажем обратное включение $L^{--}(\mathbf{x}) \subset \bigcup_{n \in N(\mathbf{x})} O_n$. Возьмем некоторую точку $\mathbf{y} \in L^{--}(\mathbf{x})$. Множество $\mathbb{R}^l \setminus L^{+}(\mathbf{x})$ открыто (так как $L^{+}(\mathbf{x})$ замкнуто), и ему принадлежит точка $\mathbf{y}$ (так как $L^{--}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^l \setminus L^{+}(\mathbf{x})$). В это множество можно вписать шар с *рациональными* центром и радиусом, содержащий точку $\mathbf{y}$. Другими словами, существует множество O_n, которое содержит $\mathbf{y}$. Следовательно, $\mathbf{y} \in \bigcup_{n \in N(\mathbf{x})} O_n$.

Далее, каждой точке $\mathbf{x} \in X$ сопоставим величину

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n \in N(\mathbf{x})} \frac{1}{2^n}.$$

В случае, когда $N(\mathbf{x}) = \varnothing$, положим $u(\mathbf{x}) = 0$.

Покажем, что определенная таким образом функция $u(\cdot)$ представляет рассматриваемые предпочтения.

Пусть $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Тогда $L^{--}(\mathbf{y}) \subset L^{--}(\mathbf{x})$, откуда $N(\mathbf{y}) \subset N(\mathbf{x})$ и, следовательно, $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$.

Пусть теперь $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. Предположим, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ не выполняется, т. е. $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. В этом случае $L^{--}(\mathbf{x}) \subset L^{--}(\mathbf{y})$, причем $L^{--}(\mathbf{x}) \neq L^{--}(\mathbf{y})$.

[22] На самом деле построенная функция полезности не будет непрерывной. Чтобы получить непрерывную функцию, требуется еще «склеить» разрывы. См.: J. T. Rader. The Existence of a Utility Function to Represent Preferences, *Review of Economic Studies* **30** (1963): 229–232.

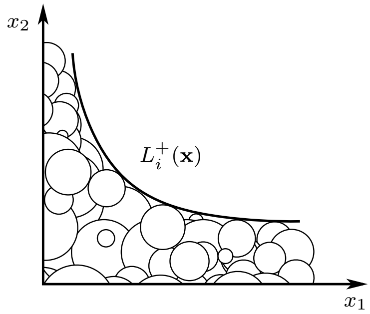


Рис. 1.3. *Построение функции полезности по схеме Радера*

Отсюда заключаем, что $N(\mathbf{x}) \subset N(\mathbf{y})$ и $N(\mathbf{x}) \neq N(\mathbf{y})$, а значит, по определению $u(\cdot)$ имеем $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{y})$. Получили противоречие с $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. Таким образом, доказано, что $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$ влечет $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Тем самым построенная функция $u(\cdot)$ является функцией полезности для исходных предпочтений. ■

Данный вариант доказательства имеет достаточно ясную графическую интерпретацию (Рис. 1.3). Мы заполняем нижнее лебегово множество «шарами» с рациональными радиусами и центрами и берем в качестве функции полезности основанный на этих «шарах» измеритель размера нижнего лебегового множества.

Еще одно элегантное доказательство теоремы Дебре с выразительной графической интерпретацией можно построить при предположении о монотонности предпочтений. Это предположение, состоящее в том, что полезность индивидуума возрастает при росте количества потребляемых благ, т. е. что он предпочитает большее количество блага меньшему, представляется довольно естественным.

Определение 1.9:

Предпочтения на X называются монотонными, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и всех $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. ◀

Определение 1.10:

Предпочтения называются строго монотонными, если из $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. ◀

Докажем ослабленный вариант теоремы Дебре, предполагая строгую монотонность.

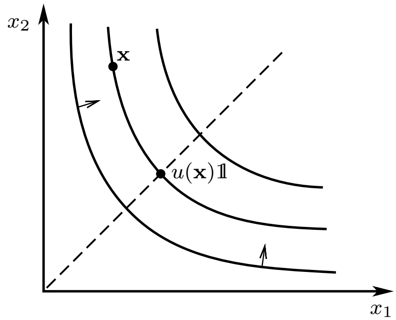


Рис. 1.4. *Построение функции полезности при предположении монотонности предпочтений*

Теорема 1.10:

Для любых непрерывных, строго монотонных предпочтений на $X = \mathbb{R}^l_+$ существует представляющая их непрерывная, строго монотонная функция полезности. ⌟

Доказательство: Требуемую функцию полезности найдем, сопоставив каждому $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+$ число $u(\mathbf{x})$, такое что $\mathbf{x} \sim u(\mathbf{x})\mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — l-мерный вектор, состоящий из единиц. (Идея доказательства проиллюстрирована на Рис. 1.4.)

Покажем, что такое число $u(\mathbf{x})$ всегда существует и единственно. Для этого мы должны найти для каждого набора $\mathbf{x}$ эквивалентный ему набор из множества $U = \{\, u\mathbb{1} \mid u \in \mathbb{R}_+ \,\}$, которое является лучом, выходящим из начала координат. Сопоставим рассматриваемому набору $\mathbf{x}$ множество чисел, соответствующих наборам из U, которые не хуже $\mathbf{x}$:

$$U^+(\mathbf{x}) = \{\, u \in \mathbb{R}_+ \mid u\mathbb{1} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\},$$

и множество чисел, соответствующих наборам из U, которые не лучше $\mathbf{x}$:

$$U^-(\mathbf{x}) = \{\, u \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{x} \succcurlyeq u\mathbb{1} \,\}.$$

Эти множества не пусты, так как из свойства строгой монотонности следует, что $0 \in U^-(\mathbf{x})$ и $\max_k\{x_k\} \in U^+(\mathbf{x})$.

Множество $U^+(\mathbf{x})$ лежит выше множества $U^-(\mathbf{x})$, поскольку из строгой монотонности следует, что $\forall u_1 \in U^-(\mathbf{x})$ и $\forall u_2 \in U^+(\mathbf{x})$ выполнено $u_1 \leqslant u_2$.

Введем обозначения $u^+ = \inf U^+(\mathbf{x})$ и $u^- = \sup U^-(\mathbf{x})$. Эти величины u^+ и u^- конечны, так как множества $U^-(\mathbf{x})$ и $U^+(\mathbf{x})$ ограничены сверху и снизу соответственно. Из непрерывности предпочтений следует, что $u^+ \in U^+(\mathbf{x})$ и $u^- \in U^-(\mathbf{x})$. При этом $u^+ \geqslant u^-$. Покажем, что $u^+ = u^-$. Пусть это не так. Тогда существует число u' такое, что $u^- < u' < u^+$. При этом $u' \notin U^-(\mathbf{x})$ и $u' \notin U^+(\mathbf{x})$. Это невозможно, так как по свойству полноты нестрогого отношения предпочтения мы должны иметь либо $u'\mathbb{1} \succcurlyeq \mathbf{x}$, либо $u'\mathbb{1} \preccurlyeq \mathbf{x}$.

Полученная точка $u = u^+ = u^-$ удовлетворяет требуемому условию $\mathbf{x} \sim u\mathbb{1}$ и единственна.

Заданная таким образом функция $u(\mathbf{x})$ является функцией полезности. Пусть $\mathbf{x}_1 \succcurlyeq \mathbf{x}_2$. По построению $\mathbf{x}_1 \sim u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1}$ и $\mathbf{x}_2 \sim u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$. Значит, $\mathbf{x}_1 \succcurlyeq \mathbf{x}_2$ тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1} \succcurlyeq u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$. Но по строгой монотонности предпочтений $u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1} \succcurlyeq u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$ тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}_1) \geqslant u(\mathbf{x}_2)$.

Функция полезности $u(\mathbf{x})$ является строго монотонной. Пусть $\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Тогда из строгой монотонности предпочтений следует, что $\mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_2$. Отсюда $u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1} \succ u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$ и $u(\mathbf{x}_1) > u(\mathbf{x}_2)$.

Докажем теперь непрерывность функции полезности $u(\cdot)$. Для этого рассмотрим последовательность допустимых наборов $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, такую что $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$. Нам надо показать, что $\lim_{n\to\infty} u(\mathbf{x}_n) = u(\mathbf{x})$.

Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Выберем $\underline{u}$ и $\bar{u}$ такие, что для любого вектора $\mathbf{y}$, такого что $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$, выполнено неравенство $\underline{u}\mathbb{1} \leqslant \mathbf{y} \leqslant \bar{u}\mathbb{1}$. (Например, можно взять $\underline{u} = \min_k x_k - \varepsilon$ и $\bar{u} = \max_k x_k + \varepsilon$.) При этом для любого допустимого набора $\mathbf{y}$, удовлетворяющего условию $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$, имеем $\underline{u} \leqslant u(\mathbf{y}) \leqslant \bar{u}$, поскольку по строгой монотонности предпочтений $\max\{\underline{u}, 0\}\mathbb{1} \preccurlyeq \mathbf{y} \preccurlyeq \bar{u}\mathbb{1}$, и $u(a\mathbb{1}) = a$ для всех $a \geqslant 0$. Найдется достаточно большое число N, такое что для последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ при $n \geqslant N$ выполнено $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$. При этом $u(\mathbf{x}_n)$, начиная с номера N, попадает в интервал $[\underline{u}, \bar{u}]$.

Так как бесконечная последовательность $\{u(\mathbf{x}_n)\}$, начиная с номера N, находится в пределах компакта $[\underline{u}, \bar{u}]$, то она должна иметь точки сгущения. Мы хотим показать, что существует всего одна точка сгущения, и это точка $u(\mathbf{x})$.

Покажем, что любая сходящаяся подпоследовательность из последовательности $\{u(\mathbf{x}_n)\}$ сходится к одному и тому же числу $u(\mathbf{x})$. Предположим, что это не так и некоторая подпоследовательность $\{u(\mathbf{x}_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $u^* \neq u(\mathbf{x})$. Пусть, например, $u^* > u(\mathbf{x})$ (случай $u^* < u(\mathbf{x})$ анализируется схожим образом). Возьмем некоторое число $\hat{u}$, такое что $u^* > \hat{u} > u(\mathbf{x})$. По свойству строгой монотонности имеем, что $\hat{u}\mathbb{1} \succ u(\mathbf{x})\mathbb{1}$. Так как $\{u(\mathbf{x}_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к u^*, то существует M такое, что при $k \geqslant M$ выполнено $u(\mathbf{x}_{n_k}) > \hat{u}$. По определению функции полезности $\mathbf{x}_{n_k} \sim u(\mathbf{x}_{n_k})\mathbb{1}$ и, кроме того, по строгой монотонности $u(\mathbf{x}_{n_k})\mathbb{1} \succ \hat{u}\mathbb{1}$ (для всех $k \geqslant M$), т. е. $\mathbf{x}_{n_k} \sim u(\mathbf{x}_{n_k})\mathbb{1} \succ \hat{u}\mathbb{1}$. Так как предпочтения непрерывны, то $\mathbf{x} \succcurlyeq \hat{u}\mathbb{1}$, но $\mathbf{x} \sim u(\mathbf{x})\mathbb{1}$, поэтому $u(\mathbf{x})\mathbb{1} \succcurlyeq \hat{u}\mathbb{1}$. Однако выше было показано, что $\hat{u}\mathbb{1} \succ u(\mathbf{x})\mathbb{1}$. Получили противоречие и тем самым доказали непрерывность построенной функции полезности. ■

Как видно из приведенных выше вариантов теоремы о существовании функции полезности, требование непрерывности предпочтений достаточно сильное, так как оно обеспечивает не просто существование функции полезности, но существование *непрерывной* функции полезности. Между тем непрерывность функции полезности — это свойство, которое широко используется при анализе поведения потребителя. Оно, в частности, гарантирует[23] существование наилучшего потребительского набора в бюджетном множестве (если это множество «хорошо устроено»), т. е. корректность определения функции (отображения) спроса потребителя в большинстве задач, которые будут нас интересовать.

Замечание: Теоремы 1.9 и 1.10 говорят о том, что если предпочтения непрерывны, то существует представляющая их непрерывная функция полезности. Нетрудно доказать и обратное: если функция полезности, представляющая предпочтения, непрерывна, то предпочтения являются непрерывными (см. задачу 1.38)

Задачи

В нескольких следующих задачах не предполагается, что предпочтения являются неоклассическими (см. пояснения в тексте параграфа).

1.21 Алина Александровна Алексашенко предложила следующее определение функции полезности: «Будем называть $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ функцией полезности, соответствующей предпочтениям $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, если для всякой пары альтернатив $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ выполнено тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$». Будет ли оно эквивалентно определению, приведенному в тексте? Ответ аргументируйте.

1.22 Пусть допустимое множество альтернатив состоит из четырех альтернатив: $X = \{a, b, c, d\}$. На этом множестве задано следующее нестрогое отношение предпочтения: $\succcurlyeq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d),$

[23] Здесь, конечно, подразумевается использование теоремы Вейерштрасса.

Таблица 1.1. *Данные для задачи 1.23*

	a	b	c
a	$\sim$	$\succ$	$\prec$
b	$\prec$	$\sim$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$

	a	b	c	d
a	$\sim$	$\prec$	$\prec$	$\prec$
b	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$
d	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$

$(b, d), (d, c), (b, a), (a, c), (b, c)\}$. Возможно ли построить функцию полезности, представляющую данные предпочтения? Если нет, то почему? Если да, то постройте ее.

1.23 Для каждой из частей Таблицы 1.1 рассмотрите изображенные предпочтения, предполагая, что $\succcurlyeq \; = \; \succ \cup \sim$. Ответьте на вопрос предыдущей задачи.

1.24 Пусть X состоит из l-мерных векторов с неотрицательными компонентами, а нестрогое отношение предпочтения задано следующим образом: $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, если все компоненты вектора $\mathbf{x}$ не меньше соответствующих компонент вектора $\mathbf{y}$. Существует ли функция полезности, представляющая эти предпочтения?

1.25 Рассмотрите следующие предпочтения, заданные на $\mathbb{R}^2_{++}$:

(A) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geqslant 0$;

(B) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} \geqslant \frac{x_2}{y_2}$;

(C) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant y_1 y_2$;

(D) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} \geqslant 0$;

(E) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} - \min\{y_1, y_2\} \geqslant 0$;

(F) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant \min\{y_1, y_2\}$.

Какие из них представимы функцией полезности? Попытайтесь записать такую функцию полезности в явном виде.

1.26 Одна из кривых безразличия для предпочтений на $X = \mathbb{R}^2_+$ описывается уравнением $x_1 x_2 = 1$. Другие кривые безразличия получаются из нее параллельным переносом в направлении $(1, 1)$. Предпочтения предполагаются монотонными. Найдите функцию полезности, соответствующую данным предпочтениям.

1.27 Кривые безразличия для предпочтений на $X = \mathbb{R}^2_+$ являются прямыми, проходящими через точку $(A, -B)$ $(A, B > 0)$. Предпочтения предполагаются монотонными по первому благу. Найдите функцию полезности, соответствующую данным предпочтениям.

1.28 Покажите, что суперпозиция возрастающей функции и функции полезности, представляющей некоторые предпочтения, также является функцией полезности, представляющей эти предпочтения. Приведите пример, показывающий, что требование возрастания не может быть ослаблено до неубывания.

1.29 Определите, какие из приведенных ниже функций могут подходить в качестве преобразования, о котором речь идет в предыдущей задаче, если областью значений исходной функции полезности является $\mathbb{R}_+$:

(A) $f(x) = x^2$; (B) $f(x) = x^3 + x$;
(C) $f(x) = \sqrt{x}$; (D) $f(x) = e^x$.

1.30 Докажите, что если $u(\cdot)$ и $\tilde{u}(\cdot)$ — две функции полезности, представляющие одни и те же предпочтения, то существует возрастающая функция $f(\cdot)$, такая что $\tilde{u}(\cdot)$ является суперпозицией $u(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

1.31 Определите, для каких из нижеприведенных множеств X можно утверждать, что произвольные неоклассические предпочтения (не обязательно непрерывные), заданные на множестве X могут быть представлены некоторой функцией полезности:

(A) $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid x_i$ — целые числа $\}$;
(B) $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \,\}$;
(C) $X = \mathbb{R}^l$;
(D) $X = \mathbb{R}^l_+$;
(E) $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid x_i$ — иррациональные числа $\}$;
(F) $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid x_i = a\sqrt{2} + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Q} \,\}$ (где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел).

1.32 Покажите, что если неоклассические предпочтения заданы на конечном множестве альтернатив, то в этом множестве существуют как наименьшая (наихудшая), так и наибольшая (наилучшая) альтернативы. (Этот факт был использован в доказательстве Теоремы 1.7.)

1.33 В Теореме 1.7 докажите, рассмотрев все возможные случаи, что построенная функция является функцией полезности.

1.34 Докажите, что если множество кривых безразличия для некоторых неоклассических предпочтений счетно, то существует функция полезности, представляющая эти предпочтения.

1.35 Пусть $X = X_1 \times X_2$, где $X_1 = \{1, 2, \ldots\}$, а X_2 — множество всех рациональных чисел между 0 и 1. Пусть на пáрах из X введено лексикографическое упорядочение. Докажите, что существует функция полезности, отвечающая этому упорядочению. Запишите ее *явную* формулу.

1.36 Борис Бенедиктович Бахвалин на основе полного, транзитивного и непрерывного нестрогого отношения предпочтения построил следующую функцию полезности:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 x_2, & \text{если } x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ x_1^2 x_2 + 15, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажите, что эта функция не является непрерывной. Нет ли здесь противоречия с непрерывностью предпочтений? Возможно ли на основе этих же предпочтений построить непрерывную функцию? Если да, то постройте ее, если нет, то поясните, почему построение невозможно.

1.37 Продемонстрируйте, что лексикографические предпочтения на $\mathbb{R}^2_+$ не являются непрерывными, построив конкретные последовательности наборов $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$, которые противоречили бы Определению 1.8.

1.38 Покажите, что если функция полезности $u(\mathbf{x})$ непрерывна, то предпочтения, породившие эту функцию полезности, также являются непрерывными.

1.39 Закончите доказательство Теоремы 1.8, показав, что для построенных окрестностей $V_\mathbf{x}$ и $V_\mathbf{y}$, справедливо, что для любых $\mathbf{x}' \in V_\mathbf{x} \cap X$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y} \cap X$ выполнено $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$.

1.40 Пусть на выпуклом множестве X заданы непрерывные предпочтения и пусть для наборов $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполнено $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Докажите, что найдется набор $\mathbf{z} \in X$, такой что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$.

1.41 Покажите, что функция полезности монотонна тогда и только тогда, когда монотонны представляемые ею предпочтения.

1.5 Свойства предпочтений и функции полезности

В предыдущем параграфе мы уже дали определение ряда важных свойств предпочтений, а именно непрерывности, монотонности и строгой монотонности[24]. При анализе конкретных микроэкономических задач часто возникает необходимость делать дополнительные предположения о предпочтениях или о функциях полезности. В данном параграфе мы обсудим наиболее часто используемые предположения о свойствах предпочтений и покажем их связь с соответствующими свойствами функции полезности, которая представляет эти предпочтения.

[24] Можно также ввести свойство, промежуточное между монотонностью и строгой монотонностью. См. определение *полустрогой монотонности* в сноске 15 в гл. 4.

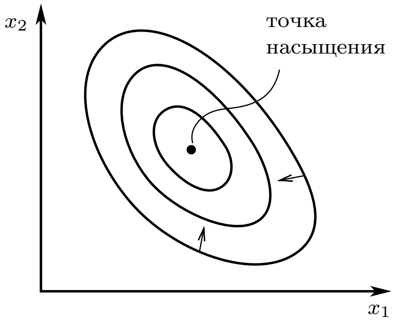


Рис. 1.5. *Предпочтения с точкой (глобального) насыщения*

В ситуациях, когда предположение о строгой монотонности предпочтений выглядит ограничительным, обычно предполагается выполнение более слабого свойства — локальной ненасыщаемости. Выполнение этого свойства во многих случаях оказывается достаточным для доказательства тех свойств выбора, которые следуют из строгой монотонности предпочтений.

Определение 1.11:

Предпочтения называются локально ненасыщаемыми, если для любого допустимого набора $\mathbf{x} \in X$ в любой его окрестности найдется другой допустимый набор $\hat{\mathbf{x}} \in X$, такой что $\hat{\mathbf{x}} \succ \mathbf{x}$. ◀

Отметим, что выполнение свойства локальной ненасыщаемости запрещает два типа предпочтений:

- предпочтения с точкой насыщения, т. е. с потребительским набором, который является *наилучшим* выбором потребителя среди всех ближайших наборов (Рис. 1.5);
- предпочтени с «толстой» кривой безразличия, когда существует окрестность некоторого набора, в которой все наборы эквивалентны для потребителя (Рис. 1.6).

Связь между понятиями строгой монотонности и локальной ненасыщаемости достаточно очевидна. Если предпочтения являются строго монотонными, то они локально ненасыщаемы. Обратное, вообще говоря, неверно.

На Рис. 1.7 иллюстрируется различие между понятиями строгой монотонности и локальной ненасыщаемости предпочтений. Для заданной окрестности набора $\mathbf{x}$ закрашенная область на Рис. 1.7а показывает ту зону, в которой *могут находиться* лучшие наборы при вы-

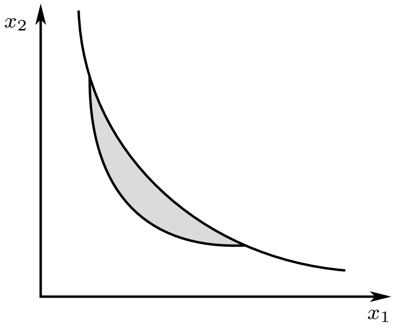


Рис. 1.6. *«Толстая» кривая безразличия*

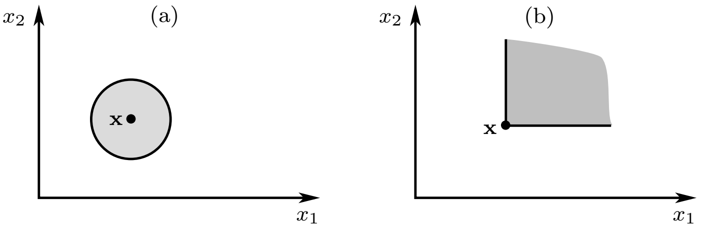


Рис. 1.7. *(a) Область, в которой могут находиться лучшие наборы при локальной ненасыщаемости предпочтений; (b) область, в которой находятся лучшие наборы при строгой монотонности предпочтений*

полнении свойства локальной ненасыщаемости. Аналогично закрашенная область на Рис. 1.7b показывает зону, где *находятся* лучшие наборы для предпочтений, обладающих свойством строгой монотонности.

Следующая группа свойств предпочтений, которую мы рассмотрим, важна для демонстрации «хороших» свойств функции выбора/спроса и доказательства существования равновесия. Здесь и далее будем предполагать, что множество X выпукло.

Определение 1.12:

Предпочтения называются выпуклыми, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, таких что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и числа $\alpha \in [0,1]$, выполнено $\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{y}$.

Предпочтения называются строго выпуклыми, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, таких что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и числа $\alpha \in (0,1)$ выполнено $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succ \mathbf{y}$. ◀

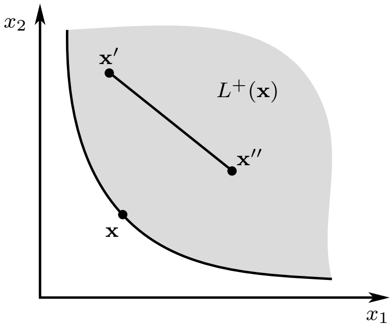


Рис. 1.8. *Выпуклые предпочтения*

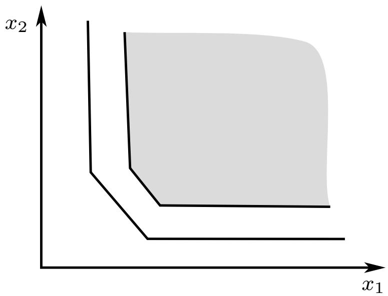


Рис. 1.9. *Пример выпуклых, но не строго выпуклых предпочтений*

Как нетрудно понять, выпуклость предпочтений эквивалентна выпуклости верхнего лебегового множества $L^+(\mathbf{x})$ любого набора $\mathbf{x}$. На Рис. 1.8 как $\mathbf{x}'$, так и $\mathbf{x}''$ лежат в $L^+(\mathbf{x})$. Из выпуклости предпочтений следует, что весь отрезок между $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ лежит в $L^+(\mathbf{x})$.

Остановимся теперь на различии понятий строгой выпуклости от просто выпуклости. Ясно, что строго выпуклые предпочтения являются выпуклыми. Грубо говоря, различие между этими понятиями состоит в том, что при выполнении свойства строгой выпуклости запрещена ситуация, когда граница верхнего лебегового множества (или, что то же самое, кривая безразличия) имеет «линейные» части. На Рис. 1.9 представлен пример выпуклых, но не строго выпуклых предпочтений. Закрашенная область??

С понятием выпуклости предпочтений в случае, когда они представимы функцией полезности, тесно связаны свойства вогнутости и квазивогнутости функции полезности. Оказывается, что для квазивогнутой функции полезности справедлив следующий результат. (Доказательство этого факта несложное и оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 1.53.)

Теорема 1.11:

Функция полезности квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения выпуклы. ⌟

Любая вогнутая функция является квазивогнутой. Таким образом, если функция полезности вогнута, то представляемые ею предпочтения выпуклы. Обратное, вообще говоря, не всегда верно.

Квазивогнутые (и квазивыпуклые), а также вогнутые (выпуклые) функции играют особую роль в микроэкономике. В частности, эти свойства часто фигурируют в условиях, характеризующих решения оптимизационных задач[25]. При этом иногда бывает важно знать не только то, что функция квазивогнута, но и что она вогнута. Заметим, что проверять вогнутость функции, как правило, проще, чем квазивогнутость. При таких проверках часто используются следующие свойства вогнутых и квазивогнутых функций (см. Приложение B):

- сумма вогнутых функций вогнута;
- минимум вогнутых функций — вогнутая функция;
- суперпозиция вогнутой функции и вогнутой неубывающей функции — вогнутая функция;
- если функция вогнута по части аргументов, а по остальным является константой, то она вогнута;
- суперпозиция квазивогнутой функции и неубывающей функции — квазивогнутая функция; в частности, суперпозиция вогнутой функции и возрастающей функции — квазивогнутая функция;
- дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(\cdot)$, определенная на открытом множестве, вогнута тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных (матрица Гессе) $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla^2 u(\mathbf{x})$ отрицательно полуопределена, т. е. $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} \leqslant 0$ при всех $\mathbf{z}$;

[25] Например, вогнутость целевой функции упрощает формулировку прямой теоремы Куна—Таккера (характеристика необходимых условий оптимальности) и является ключевой для справедливости обратной теоремы Куна—Таккера с дифференцируемостью.

- если дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(\cdot)$, определенная на открытом множестве, квазивогнута, то ее матрица вторых производных $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ отрицательно полуопределена на $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$ (другими словами, для каждого $\mathbf{z}$, такого что $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$, выполнено $\mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} \leqslant 0$);
- дважды дифференцируемая функция $u(\cdot)$, определенная на открытом множестве, является квазивогнутой, если ее матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ вторых производных отрицательно определена на $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$ при всех $\mathbf{x}$, таких что $\nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ (другими словами, для каждого $\mathbf{z}$, такого что $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$, выполнено $\mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} < 0$) и отрицательно определена при всех $\mathbf{x}$, таких что $\nabla u(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Сто́ит отметить, что, вообще говоря, свойство вогнутости, в отличие от свойства квазивогнутости, не сохраняется при монотонно возрастающем преобразовании. (Требуется, чтобы преобразующая функция была вогнута.) Например, функция $\sqrt{x}$ вогнута, но после применения к ней монотонного преобразования y^4 (при $y \geqslant 0$) получается функция x^2, которая уже не является вогнутой, хотя и является квазивогнутой (при $x \geqslant 0$).

Достаточно обычна ситуация, когда из квазивогнутой функции можно сделать вогнутую с помощью монотонного преобразования (например, x^2 преобразованием $\sqrt[4]{y}$ превращается в $\sqrt{x}$). При решении типовых задач может сложиться впечатление, что каждая квазивогнутая функция переводится монотонно возрастающим преобразованием в вогнутую функцию и в этом смысле эти два класса функций эквивалентны. Однако это не так. Например, функции $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2^2} + x_2$ $(x_1, x_2 \geqslant 0)$ и $u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{2 - x_1}$ $(x_1 \in [0, 2),\ x_2 \geqslant 0)$ квазивогнуты. Их линии уровня — непараллельные прямые линии. Можно показать, что эти функции не могут быть трансформированы в вогнутые функции возрастающим преобразованием. (См. схему доказательства для второй из указанных функций в задаче 1.54; см. также задачу 1.55.) Несмотря на это, имеет смысл при проверке квазивогнутости функции сначала попытаться преобразовать ее в вогнутую функцию.

Приведем пример, иллюстрирующий технику проверки вогнутости и квазивогнутости функций.

Пример 1.6

Рассмотрим функцию $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$, заданную на неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^2_+$. Покажем, что эта функция квазивогнута, но не является вогнутой.

Способ 1 (по определению). Возьмем два произвольных вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2_+$. Не теряя общности будем считать, что $y_1 y_2 \geqslant x_1 x_2$. Если компоненты вектора $\mathbf{x}$ не равны нулю, то $\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} \geqslant 2\sqrt{\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}} \geqslant 2$, или $x_1 y_2 + x_2 y_1 \geqslant 2x_1 x_2$. Справедливость этого неравенства при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ очевидна. С учетом этого неравенства для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ получим

$$
\begin{aligned}
&(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1)(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2) = \\
&\quad = \alpha^2 x_1 x_2 + (1-\alpha)^2 y_1 y_2 + \alpha(1-\alpha)x_1 y_2 + \alpha(1-\alpha)x_2 y_1 \geqslant \\
&\quad \geqslant (\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha))x_1 x_2 = x_1 x_2 = \min\{x_1 x_2, y_1 y_2\}.
\end{aligned}
$$

Тем самым квазивогнутость функции $x_1 x_2$ доказана.

Покажем теперь, что эта функция не является вогнутой. Пусть, например, $\mathbf{x} = (1,1)$, $\mathbf{y} = (2,2)$, и $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда $u(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \frac{9}{4}$ и $\alpha u(\mathbf{x}) + (1-\alpha)u(\mathbf{y}) = \frac{5}{2}$. Так как $\frac{5}{2} > \frac{9}{4}$, то функция не является вогнутой.

Способ 2 (с использованием матрицы Гессе). Матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ вторых частных производных функции $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ имеет вид

$$
\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Однако данная матрица не является отрицательно полуопределенной. Например, для вектора $\mathbf{z}^\mathsf{T} = (1,1)$ имеем $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{z} = 2 > 0$. Таким образом, функция не является вогнутой.

Покажем, что она квазивогнута. Нетрудно увидеть, что $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{z} = 2z_1 z_2$. Рассмотрим знак этой квадратичной формы при всех $\mathbf{z}$, таких что $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$, т. е. при всех $\mathbf{z}$, таких что $x_2 z_1 + x_1 z_2 = 0$. Умножив это равенство на z_1, получим $x_2(z_1)^2 + x_1 z_1 z_2 = 0$. На внутренности положительного ортанта имеем $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{z} = 2z_1 z_2 = -2\frac{x_2}{x_1}(z_1)^2 \leqslant 0$. Таким образом, доказали квазивогнутость функции $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ на $\mathbb{R}^2_{++}$.

Еще один способ проверки того, что функция $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ является квазивогнутой, состоит в том, чтобы найти преобразование, которое сделало бы ее вогнутой. Например, возрастающее преобразование $\ln(\cdot)$ переводит ее в вогнутую функцию. Действительно, полученная в результате преобразования функция $\ln(x_1) + \ln(x_2)$ вогнута на $\mathbb{R}^2_{++}$, поскольку является суммой вогнутых функций. Кроме того, как нетрудно убедиться, что ее матрица Гессе будет отрицательно определенной:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Конечно, преобразование $\ln(\cdot)$ нельзя применить к значениям функции $u(\mathbf{x})$ в точках, где $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$. В качестве упражнения читатель может проверить, что $\sqrt{\cdot}$ является подходящим преобразованием, дающим вогнутую функцию. △

Рассмотренные выше свойства выпуклости и строгой выпуклости предпочтений тесно связаны с понятием предельной нормы замены[26]. Напомним, что под предельной нормой замены (замещения) i-м благом j-го блага понимается величина

$$MRS^{i/j}(\mathbf{x}) = -\frac{u'_i(\mathbf{x})}{u'_j(\mathbf{x})}.$$

Покажем, что из выпуклости предпочтений следует закон неубывания предельной нормы замены. При этом будем предполагать, что предпочтения потребителя представимы непрерывно дифференцируемой квазивогнутой функцией полезности $u\colon \mathbb{R}^l_+ \mapsto \mathbb{R}$.

Содержательно норма замены указывает на то количество блага j, на которое необходимо сократить потребление этого товара в обмен на увеличение потребления блага i с тем, чтобы уровень полезности потребителя и количество всех остальных товаров оставались неизменными. Таким образом, если количество блага i изменяется на дифференциально малую величину dx_i, то для того, чтобы потребитель остался на той же самой кривой безразличия $u(\mathbf{x}) = \bar{u}$, количество блага j при условии что количество остальных благ остается неизменным должно измениться на величину dx_j такую что

$$u'_i(\mathbf{x})dx_i + u'_j(\mathbf{x})dx_j = 0.$$

Возьмем некоторую кривую безразличия и зафиксируем количества всех благ, кроме i-го и j-го. Уравнение $u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_l) =$

[26]Возможно, что впервые связь между поведением предельной нормы замены и выпуклостью предпочтений было отмечена Джоном Хиксом и Роем Алленом: «Принцип убывающей предельной полезности должен... уступить место *возрастающей предельной норме замены*... Это условие выражается на диаграмме безразличия с помощью кривых безразличия, выгнутых по направлению к осям». См. J. R. Hicks and R. G. D. Allen. A Reconsideration of the Theory of Value: Part I, *Economica, New Series* **1** (1934): 52–76 (рус. пер. Дж. Р. Хикс и Р. Г. Д. Аллен. Пересмотр теории ценности, в кн. *Теория потребительского поведения и спроса*, В. М. Гальперин (ред.), СПб.: Экономическая школа, 1993: 117–141).

$\bar{u}$ задает для данного уровня полезности $\bar{u}$ зависимость x_j от x_i как неявную функцию $x_i(x_j)$. Предельная норма замены равна наклону функции $x_i(x_j)$:

$$\frac{dx_j(x_i)}{dx_i} = -\frac{u_i'(\mathbf{x})}{u_j'(\mathbf{x})} = MRS^{i/j}(\mathbf{x}).$$

Проверим, что закон неубывания предельной нормы замены выполняется, если функция полезности квазивогнута или, что то же самое, предпочтения выпуклы. Для этого докажем, что функция $x_i(x_j)$ выпукла.

Пусть x_i' и x_i'' — некоторые количества i-го блага и пусть $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ — наборы, в которых $x_i = x_i'$, $x_j = x_j(x_i')$ и $x_i = x_i''$, $x_j = x_j(x_i'')$ соответственно. Рассмотрим набор $\mathbf{x}^\alpha$, являющийся выпуклой комбинацией наборов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ ($\alpha \in [0,1]$):

$$\mathbf{x}^\alpha = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}'',$$

а также набор $\mathbf{x}^*$, в котором $x_i = x_i^\alpha = \alpha x_i' + (1-\alpha)x_i''$ и $x_j = x_j(x_i^\alpha)$. По определению функции $x_i(x_j)$ наборы $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}^*$ эквивалентны. Из выпуклости предпочтений следует, что $\mathbf{x}^\alpha \succcurlyeq \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$, поэтому $\mathbf{x}^\alpha \succcurlyeq \mathbf{x}^*$. В наборах $\mathbf{x}^\alpha$ и $\mathbf{x}^*$ все блага, кроме j-го, содержатся в одинаковых количествах. Если предположить, что функция полезности возрастает по j-му благу, то должно быть $x_j^\alpha \geqslant x_j(x_i^\alpha)$ где $x_j^\alpha = \alpha x_j(x_i') + (1-\alpha)x_j(x_i'')$. Этим мы доказали выпуклость функции $x_j(x_i)$.

Производная выпуклой функции не убывает (Рис. 1.10). Таким образом, в случае выпуклости предпочтений имеем выполнение закона неубывания предельной нормы замены («убывания предельной полезности»).

Отметим, что в некотором смысле верно и обратное, т. е. выпуклость предпочтений эквивалентна неубыванию предельной нормы замены[27].

В приложениях экономической теории очень часто рассматриваются также дополнительные свойства предпочтений, которые налагают более сильные требования на функцию полезности. Так, например, в макроэкономике при рассмотрении поведения агрегированного потребителя часто предполагается выполнение свойства гомотетичности.

[27] Доказательство этого факта см. в K. J. Arrow and A. C. Enthoven. Quasi-Concave Programming, *Econometrica* **29** (1961): 779–800.

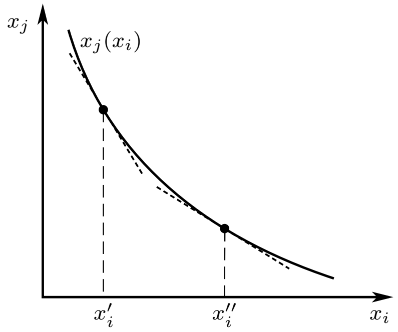


Рис. 1.10. *Неубывание предельной нормы замены для выпуклых предпочтений*

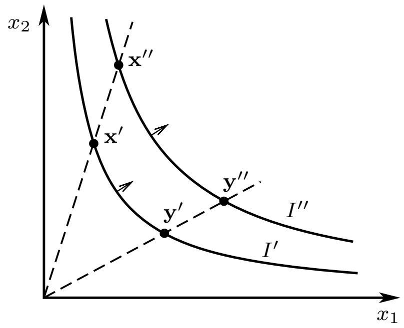


Рис. 1.11. *Монотонные гомотетичные предпочтения*

Определение 1.13:

Предпочтения называются гомотетичными, если

* потребительский набор $t\mathbf{x}$ является допустимым для каждого положительного t тогда и только тогда, когда допустимым является набор $\mathbf{x}$.
* соотношение $t\mathbf{x} \sim t\mathbf{y}$ выполняется для каждого положительного t тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. ◀

Гомотетичные предпочтения называют так, потому что геометрически кривые безразличия гомотетичны относительно начала координат. Понятие гомотетичных предпочтений проиллюстририровано на Рис. 1.11. Наборы $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{y}''$, лежащие на кривой безразличия

I'', получаются из наборов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, лежащих на кривой безразличия I', умножением на одно и то же положительное число t ($\mathbf{x}'' = t\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'' = t\mathbf{y}'$).

Опираясь на схему доказательства существования функции полезности, представляющей строго монотонные предпочтения (см. Теорему 1.10), легко показать, что для строго монотонных и гомотетичных предпочтений существует положительно однородная функция полезности, представляющая эти предпочтения. Особенностью положительно однородной функции полезности является то, что предельная норма замены для любой пары товаров остается неизменной на луче $t\mathbf{x}$. Это полезное свойство эквивалентно тому, что кривые Энгеля[28] являются лучами, выходящими из начала координат. Кроме того, при выполнении этого свойства, свойств локальной ненасыщаемости, непрерывности и выпуклости неоклассические предпочтения допускают представление *вогнутой* функцией полезности[29].

В теории отраслевых рынков и других областях микроэкономики важную роль играют предпочтения, обладающие свойством квазилинейности.

Определение 1.14:

Предпочтения называются квазилинейными по l-му благу, если

* для каждого положительного t из $\mathbf{x} \in X$ следует $\mathbf{x} + t\mathbf{e}_l \in X$;
* для каждого положительного t и $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x} + t\mathbf{e}_l \sim \mathbf{y} + t\mathbf{e}_l$. ◀

В геометрической интерпретации квазилинейность предпочтений означает, что множества безразличия получаются друг из друга сдвигом вдоль оси x_l. (На Рис. 1.12 это свойство проиллюстрировано для $l = 2$.)

Предпочтения, обладающие данным свойством, допускают представление функцией полезности вида $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_{-l}) + ax_l$. Эта функциональная форма задает такую систему функций спроса, что спрос на первые $l-1$ благо не зависит от дохода, и потому для этих благ полностью отсутствует эффект дохода. Данное свойство оказывается полезным при обсуждении агрегирования предпочтений и изучении того, как влияют изменения параметров модели (например, цен и доходов) на благосостояние потребителя.

[28] См. Определение 2.6 на с. 146.

[29] Подробнее см. J. T. Rader. *Theory of Microeconomics*, New York: Academic Press, 1972, с. 166–167.

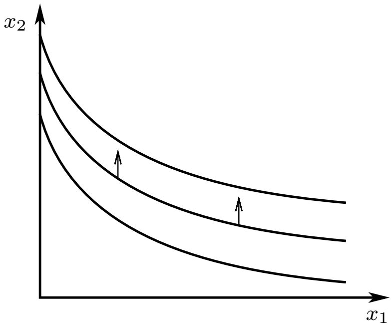


Рис. 1.12. *Квазилинейные предпочтения*

Наконец, в макроэкономике обычно рассматриваются аддитивно-сепарабельные функции полезности, т. е. функции полезности вида $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$. Если предпочтения потребителя описываются функцией такого вида, то они обладают следующим очевидным свойством: Рассмотрим произвольную группу благ N ($N \subset \{1, \ldots, l\}$), а все остальные блага обозначим через $-N$; при этом ранжировка потребительских наборов $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{-N})$ и $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}'_N, \mathbf{x}_{-N})$ не зависит от значения $\mathbf{x}_{-N}$. Данное соображение мотивирует определение сепарабельности предпочтений.

Определение 1.15:

Предпочтения называются сепарабельными (строго сепарабельными), если они удовлетворяют следующим условиям:

- множество допустимых потребительских наборов имеет вид $X = X_1 \times \cdots \times X_l$;
- если для $\mathbf{x}_N \in X_N$, $\mathbf{x}'_N \in X_N$ и $\mathbf{x}_{-N} \in X_{-N}$ выполнено соотношение $(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{-N}) \succcurlyeq (\mathbf{x}'_N, \mathbf{x}_{-N})$, то подобное же соотношение $(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}'_{-N}) \succcurlyeq (\mathbf{x}'_N, \mathbf{x}'_{-N})$ выполнено для всех $\mathbf{x}'_{-N} \in X_{-N}$, где N — произвольное подмножество множества благ, $X_N = \bigtimes_{i \in N} X_i$ и $X_{-N} = \bigtimes_{i \in -N} X_i$. ◀

Известно, что непрерывные предпочтения сепарабельны тогда и только тогда, когда они могут быть представлены непрерывной аддитивно-сепарабельной функцией полезности[30]. Из свойств сепа-

[30] Подробнее о сепарабельности предпочтений см. A. P. Barten and V. Bohm. Consumer Theory, in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, K. J. Arrow and M. D. Intrilligator (ed.), North Holland, 1982, с. 392–394, и содержащиеся там ссылки.

рабельных предпочтений отметим, во-первых, что для них предельная норма замены зависит только от количества двух рассматриваемых благ, во-вторых, что если все элементарные функции $u_i(\cdot)$ являются вогнутыми, то и в целом функция полезности является вогнутой. Кроме того, данный тип предпочтений позволяет гарантировать отсутствие товаров Гиффена и другие полезные свойства функции спроса.

Задачи

1.42 (A) «...выберем $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$. Точка $\mathbf{x}^1$ представляет набор, содержащий „экстремально большую“ долю блага x_1 по сравнению с набором $\mathbf{x}^2$. Набор $\mathbf{x}^2$, наоборот, содержит экстремально большую долю другого блага, x_2, по сравнению с набором $\mathbf{x}^1$. Хотя каждый из наборов содержит относительно высокую долю одного из благ по сравнению с другим набором, для потребителя эти наборы равнозначны. При этом любая выпуклая комбинация $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$, такая как $\mathbf{x}^t$, будет являться набором, содержащим более „сбалансированное“ сочетание x_1 и x_2, чем каждый из „экстремальных“ наборов $\mathbf{x}^1$ или $\mathbf{x}^2$»[31].

(B) «Условие выпуклости... чрезвычайно важно и более ограничительно. Оно означает, что если каждый из двух векторов $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ предпочитается третьему вектору $\mathbf{x}$, то любая их „смесь“ $\alpha\mathbf{x}' + (1 - \alpha)\mathbf{x}''$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ также считается лучше $\mathbf{x}$. Вполне вероятно, что вы любите виноградный и томатный соки больше яблочного, но это вовсе не означает, что вы предпочтете выпить вместо стакана яблочного стакан смеси из виноградного и томатного соков. Однако в теоретических рассуждениях обычно рассматривают потребление за более длительный промежуток времени, например за год. Тогда выпуклость предпочтений в приведенном выше примере означает, что если вы предпочитаете виноградный и томатный соки яблочному, то вы готовы также пить часть года первый из них, а оставшуюся часть — второй вместо яблочного круглый год. Такое допущение вполне правдоподобно, хотя возможны и возражения. Одно из них состоит в том, что предпочтение зависит от способа чередования напитков в течение года. Другое, быть может, более существенное, относится к самому методу описания поведения: мои предпочтения могут меняться в зависимости от многих причин, например от само-

[31] G. A. Jehle and P. J. Reny. *Advanced Microeconomic Theory*, Addison-Wesley, 1998, c. 118.

чувствия, так что говорить о предпочтении одного потребительского набора другому не имеет смысла»[32].

Прокомментируйте эти цитаты. Согласны ли вы с содержащимися в них утверждениями? Если нет, то почему?

1.43 Покажите, что строго монотонные предпочтения локально ненасыщаемы. Приведите пример монотонных предпочтений, не обладающих свойством локальной ненасыщаемости.

1.44 Приведите пример выпуклых локально ненасыщаемых предпочтений, которые не обладают свойством монотонности.

1.45 Покажите, что строго выпуклые монотонные предпочтения локально ненасыщаемы.

1.46 Покажите, что если непрерывные предпочтения заданы на компактном множестве X, то они не могут обладать свойством локальной ненасыщаемости.

1.47 Рассмотрите монотонные предпочтения, которые удовлетворяют следующему свойству: существует по крайней мере одно благо, большее количество которого всегда предпочитается меньшему. Дайте формальное определение таких предпочтений. Как это свойство соотносится со строгой монотонностью? Покажите, что такие предпочтения являются локально ненасыщаемыми.

1.48 Покажите, что предпочтения потребителя выпуклы тогда и только тогда, когда выпукло любое верхнее лебегово множество $L^+(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}$.

1.49 Приведите пример непрерывной квазивогнутой функции полезности, не являющейся монотонной.

1.50 Покажите, что если функция полезности строго вогнута, то представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

1.51 Покажите, что функция полезности строго квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

1.52 Покажите, что если дважды непрерывно дифференцируемая функция полезности строго вогнута, то для этой функции выполняется закон Госсена об убывании предельной полезности. Верно ли утверждение о том, что из закона Госсена не следует выпуклость предпочтений?

1.53 Докажите Теорему 1.11.

[32] В. М. Полтерович. *Экономическое равновесие и хозяйственный механизм*, М.: Наука, 1990, с. 10.

1.54 (A) Покажите, что функция полезности $u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{2-x_1}$ ($x_1 \in [0, 2)$, $x_2 \geqslant 0$) соответствует непрерывным, локально ненасыщаемым, монотонным и выпуклым предпочтениям.

(B) Предположите, что рассматриваемые предпочтения можно описать вогнутой функцией полезности, другими словами, что существует возрастающая функция $f\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, такая что функция $\tilde{u}(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_2}{2-x_1}\right)$ является вогнутой. Пользуясь тем, что точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot 3^{k-1}}\right)$, где $k \geqslant 1$, лежит посередине между точками $(0, 1)$ и $\left(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{k-1}}\right)$, а также выпуклостью функции $\tilde{u}(\cdot)$, покажите, что $a(k) \geqslant 0$, где

$$a(k) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^k}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{k-1}}\right).$$

(C) Пользуясь тем, что $\sum_{k=1}^{n} \frac{a(k)}{2^{n-k}} \geqslant 0$, покажите при тех же предположениях, что

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2^n}\left(f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

(D) Пользуясь тем, что точка $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $(1, 0)$ и $\left(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right)$, покажите при тех же предположениях, что

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{3^n}\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right).$$

(E) Сопоставьте неравенства, полученные в пунктах (C) и (D), убедитесь, что предположение пункта (B) не может быть верным, т. е. данные предпочтения не представимы вогнутой функцией полезности.

1.55 Рассмотрите следующие две функции полезности (с $X = \mathbb{R}_+$ и $X = \mathbb{R}_+^2$ соответственно):

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1, \\ 1, & x \in [1, 2], \\ x - 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

и

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 x_2 < 1 \text{ или } (x_1 x_2 = 1 \text{ и } x_1 < 1), \\ x_1 x_2 + 1, & x_1 x_2 > 1 \text{ или } (x_1 x_2 = 1 \text{ и } x_1 \geqslant 1). \end{cases}$$

(А) Покажите, что задаваемые этими функциями предпочтения являются выпуклыми. Какими еще свойствами обладают (или не обладают) эти предпочтения?

(В) Докажите, что данные предпочтения нельзя представить вогнутой функцией полезности.

1.56 Покажите, что предпочтения, задаваемые положительно однородной (первой степени) функцией полезности, являются гомотетичными.

1.57 Покажите, что предпочтения, задаваемые квазилинейной функцией полезности, являются квазилинейными.

1.58 Покажите, что предпочтения, задаваемые аддитивно-сепарабельной функцией полезности, являются сепарабельными.

1.59 Покажите, что непрерывные гомотетичные предпочтения представимы однородной функцией полезности.

1.60 Известно, что непрерывные и гомотетичные предпочтения на $\mathbb{R}^n_+$ представимы аддитивно-сепарабельной функцией полезности (т. е. $u(\mathbf{x}) = \sum u_i(x_i)$). Покажите, что функция вида $u(\mathbf{x}) = \sum a_i x_i^\rho$ — единственная (с точностью до монотонно возрастающего преобразования) функция, удовлетворяющая этим требованиям. Каковы ограничения на параметры a_i и ρ в случае, если, кроме того, предпочтения обладают свойством строгой монотонности? Докажите, что функция полезности (CES-функция)

$$u^*(\mathbf{x}) = \left(\sum \alpha_i x_i^\rho\right)^{1/\rho},$$

где $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, соответствует тем же предпочтениям, что и $u(\mathbf{x}) = \sum a_i x_i^\rho$[33].

1.61 Покажите, что функция полезности

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho \to 0} \left(\sum \alpha_i x_i^\rho\right)^{1/\rho}$$

(предельный случай CES-функции) представляет те же предпочтения, что и функция Кобба—Дугласа.

[33] Функция полезности, которой посвящено данное упражнение, имеет специальное название — функция с постоянной эластичностью замены или CES-функция (*constant elasticity of substitution*). Впервые в контексте микроэкономической теории она была рассмотрена в работе K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, and R. M. Solow. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *Review of Economics and Statistics* **43** (1961): 225–250.

1.62 Покажите, что функция полезности

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho \to -\infty} \left(\sum \alpha_i x_i^\rho \right)^{1/\rho}$$

(предельный случай CES-функции) представляет те же предпочтения, что и функция $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

1.63 Используя полученные в предыдущих задачах результаты, найдите в явной форме функции, представляющие те же предпочтения, что и функции

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho \to 0} \left(\sum (\alpha_i x_i)^\rho \right)^{1/\rho}$$

и

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho \to -\infty} \left(\sum (\alpha_i x_i)^\rho \right)^{1/\rho}.$$

1.64 Пусть предпочтения представимы дифференцируемой функцией $u(\mathbf{x})$. Покажите, что предельная норма замены инвариантна относительно возрастающего преобразования функции полезности. Как связаны $MRS^{i/j}(\mathbf{x})$ и $MRS^{j/i}(\mathbf{x})$?

1.65 В случае двух товаров покажите, что дважды непрерывно дифференцируемая функция полезности аддитивно-сепарабельна (имеет вид $u(\mathbf{x}) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$) тогда и только тогда, когда

$$MRS^{1/2}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial^2 MRS^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial MRS^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial MRS^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_2}.$$

1.66 Функция полезности аддитивно-сепарабельна: $u(\mathbf{x}) = \sum u_i(x_i)$, причем каждая из элементарных функций $u_i(\cdot)$ вогнута. Покажите, что соответствующие предпочтения являются выпуклыми.

1.67 Пусть выпуклые неоклассические предпочтения, заданные на $\mathbb{R}^2_+$, представляются непрерывной аддитивно-сепарабельной функцией вида $u(\mathbf{x}) = v(x_1) + v(x_2)$. Покажите, что функция $v(\cdot)$ вогнута. (*Указание:* Покажите сначала, что

$$v\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geqslant \frac{1}{2}(v(x) + v(y)).$$

Далее покажите по индукции, что для любых натуральных m и n, таких что $m < 2^n$, справедливо соотношение

$$v\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)y\right) \geqslant \frac{m}{2^n}v(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)v(y),$$

и воспользуйтесь непрерывностью.)

1.68 Укажите, какими свойствами (монотонность, строгая монотонность, локальная ненасыщаемость, выпуклость, строгая выпуклость, гомотетичность, квазилинейность, сепарабельность) обладают предпочтения на $\mathbb{R}_+^2$, представимые следующими функциями полезности:

(A) $u(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$; (B) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
(C) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + x_2$; (D) $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$;
(E) $u(\mathbf{x}) = \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$; (F) $u(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$;
(G) $u(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$; (H) $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$;
(I) $u(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$;
(J) $u(\mathbf{x}) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$;
(K) $u(\mathbf{x}) = 28x_1 + 28x_2 - 2x_1^2 - 3x_1 x_2 - 2x_2^2$;
(L) $u(\mathbf{x}) = \ln(x_1 - 1) - 2\ln(2 - x_2)$.

Какие из этих функций являются вогнутыми? какие квазивогнутыми? Для каждой из этих функций постройте эскизы кривых безразличия.

Приложение 1.A Связь выбора и предпочтений. Выявленные предпочтения

Вернемся теперь от рассмотрения потребителя и его функции полезности к общей теории выбора.

Обычно в микроэкономике описание предпочтений с помощью бинарных отношений используется в качестве отправной точки анализа выбора потребителя. В то же время другой подход, отправной точкой которого является непосредственно выбор индивидуума, может показаться более удачным, поскольку мы можем наблюдать сам выбор индивидуума, но не то, как он упорядочивает альтернативы. Однако существуют веские причины для сложившейся в микроэкономике традиции.

Во-первых, как и бинарные отношения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, полная функция выбора ненаблюдаема, т. е. является точно такой же умозрительной конструкцией. Наблюдаться могут только отдельные случаи выбора, что не дает возможности предсказывать поведение индивидуума в произвольной ситуации выбора. Кроме того, по конечному числу наблюдений за выбором можно построить объясняющие их неоклассические предпочтения (если только выполнено одно естественное предположение). Этому вопросу посвящен первый пункт данного приложения.

Во-вторых, в некотором достаточно широком классе случаев подход, основанный на функции выбора, полностью эквивалентен подходу, основанному на бинарных отношениях, в том смысле, что возможно по известной функции выбора построить неоклассические предпочтения, которые порождают этот выбор. Для этого надо наложить на функцию выбора и множество ситуаций выбора определенные ограничения. (Об этом речь идет во втором пункте данного приложения.) Если же не накладывать таких ограничений, то подход, основанный на функции выбора, становится бессодержательным и не позволяет построить такую же богатую теорию, как традиционный подход, основанный на бинарных отношениях.

Заметим однако, что хотя, как правило, выбор не используют в качестве отправной точки, но во многих моделях можно «забыть», что в основе выбора лежат неоклассические предпочтения и соответствующая функция полезности. Так, потребительский спрос фактически представляет собой функцию выбора, но он часто рассматривается сам по себе, без ссылок на породившие его предпочтения.

1.A.1 Рационализация наблюдаемого выбора

Пусть даны наблюдения в виде набора ситуаций выбора и альтернатив, которые были выбраны:

$$\{(A^1, \mathbf{x}^1), (A^2, \mathbf{x}^2), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\},$$

где предполагается, что $\mathbf{x}^i \in C(A^i)$ $(i = 1, \ldots, N)$ для некоторой функции выбора $C(\cdot)$. Рассмотрим вопрос о том, возможно ли по этим данным подобрать неоклассические предпочтения, которые бы им не противоречили, другими словами, рационализовать наблюдаемый выбор.

Упрощенное определение рационализации состоит в следующем.

> Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ рационализуют выбор $\{(A^1, \mathbf{x}^1), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\}$, если для всех наблюдаемых выборов $(A^i, \mathbf{x}^i)$ из того, что $\mathbf{x} \in A^i$, следует, что $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}$.

Однако при анализе рационализации обычно на основе имеющихся наблюдений делают дополнительные выводы, исходя из того, что ситуации выбора A^i и предпочтения обладают определенными свойствами. А именно, в определенных случаях делается вывод, что альтернатива $\mathbf{x}$ *не могла быть выбрана в ситуации выбора* A^i, несмотря на то, что она допустима. Если рассматривается выбор потребителя и A^i — бюджетное множество потребителя, то основанием для подобных выводов могут служить следующие рассуждения.

> Если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и $\mathbf{x}$ лежит внутри области, задаваемой бюджетным ограничением A^i, то альтернатива $\mathbf{x}$ хуже для потребителя, чем альтернатива $\mathbf{x}^i$, и, следовательно, не может быть выбрана в данной ситуации ($\mathbf{x} \notin C(A^i)$).

> Предпочтения потребителя и бюджетное ограничение A^i таковы, что $\mathbf{x}^i$ — единственный возможный выбор. Другими словами, $\mathbf{x} \notin C(A^i)$ для всех альтернатив $\mathbf{x} \in A^i$, отличных от $\mathbf{x}^i$.

Смысл этих рассуждений будет ясен из материала гл. 2. Пока же для нас важно только то, что для некоторых альтернатив $\mathbf{x} \in A^i$ можно сделать вывод, что $\mathbf{x} \notin C(A^i)$[34]. В дальнейшем мы будем всюду предполагать, не оговаривая это особо, что такого рода сведения содержатся в рассматриваемых данных о выборе. Наличие такой дополнительной информации заставляет переформулировать определение рационализации.

Определение 1.16:

Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ рационализуют выбор $\{(A^1, \mathbf{x}^1), \ldots, ($
если

* для всех наблюдаемых выборов $(A^i, \mathbf{x}^i)$ из того, что $\mathbf{x} \in A^i$ следует, что $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}$;
* для всех наблюдаемых выборов $(A^i, \mathbf{x}^i)$ из того, что $\mathbf{x} \in A^i$ и $\mathbf{x} \notin C(A^i)$ следует, что $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}$. ◀

Посмотрим, какие выводы можно сделать об отношениях между альтернативами $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^N$ по имеющимся данным.

В соответствии с вышесказанным для любой пары альтернатив $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^j$, таких что $\mathbf{x}^j \in A^i$, должно быть выполнено $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$. (Так как в ситуации A^i выбрана альтернатива $\mathbf{x}^i$, а альтернатива $\mathbf{x}^j$ была при этом доступна, то $\mathbf{x}^j$ не лучше $\mathbf{x}^i$.) В подобном случае принято говорить, что $\mathbf{x}^j$ *непосредственно* выявленно не лучше $\mathbf{x}^i$.

Далее, если по цепочке для альтернатив $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k, \ldots, \mathbf{x}^q, \mathbf{x}^r$ выполнена цепочка соотношений $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\ldots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, то

[34] Если бы таких сведений не было, то задача рационализации стала бы неинтересной, поскольку достаточно было бы положить, что все альтернативы из X эквивалентны.

$\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$, $\mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k$, $\dots$ $\mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$, т. е. каждая альтернатива не лучше предыдущей, откуда по транзитивности $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^r$. В этом случае говорят, что $\mathbf{x}^i$ *косвенным образом* выявленно не хуже, чем $\mathbf{x}^r$. Мы будем обозначать этот факт следующим образом: $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^r$.

Аналогично для любой пары альтернатив $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^j$ из наблюдаемых данных, таких что $\mathbf{x}^j \in A^i$ и $\mathbf{x}^j \notin C(A^i)$, должно быть выполнено $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$. (Так как в ситуации A^i выбрана альтернатива $\mathbf{x}^i$, а альтернатива $\mathbf{x}^j$ была при этом доступна, но заведомо не могла быть выбрана, то $\mathbf{x}^j$ хуже $\mathbf{x}^i$.) В подобном случае принято говорить, что $\mathbf{x}^i$ *непосредственно* выявленно лучше, чем $\mathbf{x}^j$.

Если же по цепочке для альтернатив $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k, \dots, \mathbf{x}^q, \mathbf{x}^r$ выполнены соотношения $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\dots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, причем одна из альтернатив не могла быть выбрана в предшествующей ситуации выбора (например, $\mathbf{x}^j \notin C(A^i)$), то $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$, $\mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k$, $\dots$ $\mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$ и одно из соотношений строгое (например, $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$), откуда $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^r$. В этом случае говорят, что $\mathbf{x}^i$ *косвенным образом* выявленно лучше, чем $\mathbf{x}^r$. По аналогии с нестрогим отношением выявленного предпочтения $\underline{\rhd\!\rhd}$ будем обозначать этот факт следующим образом: $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^r$.

Предположим теперь, что мы имеем цепочку альтернатив $i, j, k, \dots, q, r$ и опять i, такую что $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\dots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, $\mathbf{x}^i \in A^r$. Другими словами, в этой цепочке по кругу каждая альтернатива выявленно не хуже последующей. Из этого следует, что каждая из альтернатив может быть выбрана в предыдущей по циклу ситуации выбора, т. е. $\mathbf{x}^j \in C(A)^i$, $\mathbf{x}^k \in C(A)^j$, $\dots$ $\mathbf{x}^r \in C(A)^q$, $\mathbf{x}^i \in C(A)^r$. Действительно, пусть, например, $\mathbf{x}^i \notin C(A^r)$. Но это влекло бы $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^i$, т. е. $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^i$ (альтернатива лучше самой себя), что невозможно. Можно сказать это и по-другому: одновременное выполнение для двух альтернатив $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^r$ соотношений $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^r$ и $\mathbf{x}^r \rhd\!\rhd \mathbf{x}^i$ невозможно.

Предположение, что альтернатива по цепочке не может быть выявленно лучше самой себя, называется обобщенной аксиомой выявленных предпочтений (*Generalized Axiom of Revealed Preference*, GARP).

Определение 1.17:

Говорят, что набор данных о сделанном выборе $\{(A^1, \mathbf{x}^1), (A^2, \mathbf{x}^2), \dots, (A^N, \mathbf{x}^N)\}$ удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленных предпочтений, если ни для одной из выбранных альтернатив не выполнено соотношение $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^i$. ◀

Как видим, если потребитель рационален, то наличие «нестрогого» цикла $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\dots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, $\mathbf{x}^i \in A^r$ означает, что все альтернативы здесь эквивалентны для потребителя: $\mathbf{x}^i \sim \mathbf{x}^j \sim \mathbf{x}^k \sim$

$\cdots \sim \mathbf{x}^r$. Будем говорить, что эти альтернативы выявленно эквивалентны.

Рассмотрим сначала вопрос о том, можно ли набор данных $(A^i, \mathbf{x}^i)$, $i = 1, \ldots, n$ рационализовать в случае, когда множество допустимых альтернатив совпадает с наблюдаемыми выборами: $X = X(n) = \{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$. Требуется найти неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ на $X(n)$, которые могли бы породить такой набор данных.

Отметим, что данное выше определение рационализуемости эквивалентно следующим двум требованиям:

$$\mathbf{x}^i \ \underline{\rhd\!\rhd}\ \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}; \qquad (\underline{\rhd\!\rhd})$$

$$\mathbf{x}^i \ \rhd\!\rhd\ \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}. \qquad (\rhd\!\rhd)$$

(Доказательство эквивалентности двух определений рационализуемости довольно простое и оставлено в качестве упражнения; см. задачу 1.71.)

Итак, если мы найдем неоклассические предпочтения на $X(n)$, которые удовлетворяют условиям ($\underline{\rhd\!\rhd}$) и ($\rhd\!\rhd$), то они рационализуют наблюдаемый нами выбор потребителя. Оказывается, что найти такие предпочтения можно тогда и только тогда, когда наблюдаемый набор данных удовлетворяет требованиям обобщенной аксиомы выявленных предпочтений. (То, что это необходимое условие, мы уже видели. Нетривиальным утверждением здесь является достаточность.)

Теорема 1.12:

Набор данных $\{(A^1, \mathbf{x}^1), (A^2, \mathbf{x}^2), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\}$ удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленных предпочтений тогда и только тогда, когда на $X(n) = \{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$ существуют предпочтения, рационализующие эти данные. ┘

Доказательство: Поскольку необходимость очевидна, докажем только достаточность.

Докажем менее общее утверждение, предположив для упрощения, что в наших данных нет выявленно эквивалентных альтернатив, т. е. циклы выявленного предпочтения отсутствуют (даже нестрогие; наличие строгих циклов прямо противоречит GARP). При наличии в наборе данных выявленно эквивалентных альтернатив приходится вводить множества безразличия и строить отношения между ними. Это только делает рассуждения несколько более громоздкими, не меняя их сути (см. задачу 1.72).

Пользуясь этим упрощением, будем конструировать такие предпочтения на $X(n)$, что любые две различные альтернативы из $X(n)$

находятся в отношении $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$ или $\mathbf{x}^j \succ \mathbf{x}^i$. Требуется упорядочить имеющиеся наблюдения, присвоив им порядковые номера от 1 до n, таким образом, чтобы $\mathbf{x}^{[1]} \succ \mathbf{x}^{[2]} \succ \cdots \succ \mathbf{x}^{[n]}$, где $\mathbf{x}^{[s]}$ — s-е по порядку наблюдение, и чтобы новый порядок соответствовал выявленным предпочтениям, т. е. чтобы для любой пары альтернатив, такой что $\mathbf{x}^i \,\underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j$ $(\mathbf{x}^i \neq \mathbf{x}^j)$, выполнялось $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$.

Будем рассуждать по индукции. На m-м шаге имеем две группы альтернатив: m нумерованных альтернатив, составляющих последовательность $\mathbf{x}^{[1]} \succ \mathbf{x}^{[2]} \succ \cdots \succ \mathbf{x}^{[m]}$, и $n-m$ ненумерованных. Процедура сортировки построена так, что среди нумерованных альтернатив нет таких, которые были бы выявленно хуже одной из ненумерованных. Найдем среди ненумерованных альтернатив такую альтернативу, чтобы не нашлось другой альтернативы, еще ненумерованной, которая была бы выявленно не хуже ее. Такая альтернатива всегда найдется, поскольку, по предположению, выполнена GARP, и выявленно эквивалентных альтернатив тоже нет. (Это доказывается от противного. Начнем с произвольной ненумерованной альтернативы и найдем ненумерованную альтернативу, которая выявленно не хуже ее. Для найденной альтернативы найдем ненумерованную альтернативу, которая выявленно не хуже ее. Так как у нас конечное число альтернатив, то этот поиск в конце концов закончится, иначе получим цикл вида $\mathbf{x}^i \,\underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j \,\underline{\rhd\!\rhd}\, \cdots \,\underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^r \,\underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^i$, которого, как мы предположили, быть не может.) Присвоим найденной альтернативе номер $m+1$, т. е. переведем ее в разряд нумерованных. Продолжаем эту процедуру, пока не пронумеруем все альтернативы.

По сути, присвоив указанным образом каждой альтернативе порядковый номер, мы построили на $X(n)$ функцию полезности, такую что $u(\mathbf{x}^{[i]}) = -i$. По построению для любой пары альтернатив, такой что $\mathbf{x}^i \,\underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j$, выполняется соотношение $u(\mathbf{x}^i) > u(\mathbf{x}^j)$. Значит, эта функция полезности и соответствующие предпочтения рационализуют данные[35]. ■

[35] Фактически мы доказали для конечного множества альтернатив следующее утверждение (теорему о продолжении, см., напр., П. Фишбёрн. *Теория полезности для принятия решений*, М.: Наука, 1978, с. 31):

> Если отношение $\mathcal{R}_0$ транзитивно и иррефлексивно (т. е. представляет собой так называемое *строгое частичное упорядочение*), то существует его продолжение $\mathcal{R}$, являющееся также транзитивным и иррефлексивным, причем такое, что если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, то либо $\mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{y}$, либо $\mathbf{y} \,\mathcal{R}\, \mathbf{x}$ (другими словами, продолжение $\mathcal{R}$ является *строгим упорядочением*).

Продолжением $\mathcal{R}_0$ называется такое отношение $\mathcal{R}$, что $\mathbf{x} \,\mathcal{R}_0\, \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \,\mathcal{R}\, \mathbf{y}$.

Мы сконструировали предпочтения на конечном множестве точек $X(n) = \{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$. Если множество допустимых альтернатив X более широкое, то нужно каким-то образом непротиворечиво распространить найденные предпочтения на остальные альтернативы из X. Важный пример такого построения в частном случае модели поведения потребителя представляет собой теорема Африата (см. п. 2.B.2). Есть и более простой, но содержательно менее интересный способ достроить предпочтения — разделить оставшиеся альтернативы $X \setminus X(n)$ на несколько «больших» множеств безразличия и упорядочить их и альтернативы из $X(n)$ соответствующим образом (см. задачу 1.73).

1.A.2 Построение неоклассических предпочтений по функции выбора

Перейдем к рассмотрению вопроса о том, при каких условиях можно рационализовать не отдельные наблюдения за выбором индивидуума, а в целом функцию выбора $C(A)$, заданную на некотором достаточно «богатом» множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$, другими словами, при каких условиях можно сказать, что эта функция выбора могла быть порождена неоклассическими предпочтениями[36].

Определение 1.18:

Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ рационализуют правило выбора $C(\cdot)$ на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$, если множество выбора $C^*(\cdot)$, порожденное этими предпочтениями, совпадает с исходным:

$$C(A) = C^*(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{A}. \qquad \blacktriangleleft$$

Если потребитель имеет неоклассические предпочтения и делает выбор на их основе, то соответствующая функция выбора обладает следующими очевидными свойствами:

- все альтернативы из $C(A)$ эквивалентны:

$$\mathbf{x} \in C(A), \mathbf{y} \in C(A) \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

- если альтернативы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат ситуации выбора A, причем $\mathbf{x}$ может быть выбрана, а $\mathbf{y}$ нет, то $\mathbf{x}$ лучше, чем $\mathbf{y}$, т. е.

$$\mathbf{x} \in C(A), \mathbf{y} \in A, \mathbf{y} \notin C(A) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y};$$

[36] См. K. J. Arrow. Rational Choice Functions and Orderings, *Economica* **26** (1959): 121–127.

По аналогии с п. 1.A.1 можно ввести понятие выявленных предпочтений. Идея этого понятия состоит в том, что если была выбрана альтернатива $\mathbf{x}$ в ситуации выбора, когда была доступна также альтернатива $\mathbf{y}$, значит, $\mathbf{x}$ не может быть хуже $\mathbf{y}$. Если же дополнительно известно, что альтернатива $\mathbf{y}$ не могла быть выбрана, значит, $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$.

Определение 1.19:

Альтернатива $\mathbf{x}$ непосредственно нестрого выявленно предпочитается альтернативе $\mathbf{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in C(A)$.

Альтернатива $\mathbf{x}$ непосредственно строго выявленно предпочитается альтернативе $\mathbf{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in C(A)$, но $\mathbf{y} \notin C(A)$. ◄

Нам понадобятся здесь только *непосредственные* выявленные предпочтения (в отличие от многошаговых косвенных, которые использовались ранее). Для обозначения непосредственных выявленных предпочтений будем использовать символы $\trianglerighteq$ и $\triangleright$.

Если $C(A)$ — неоклассическое правило выбора, то оно должно удовлетворять ряду свойств. В частности, как обсуждалось выше, отношения $\trianglerighteq$ и $\triangleright$ обладают следующими очевидными свойствами:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y} \quad \text{влечет} \quad \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}; \\ &\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y} \quad \text{влечет} \quad \mathbf{x} \succ \mathbf{y}. \end{aligned} \tag{♎}$$

Интуитивно ясно, что если бы для произвольной функции выбора $C(A)$ мы нашли неоклассические предпочтения, удовлетворяющие этим свойствам, то тем самым мы бы «почти рационализовали» $C(A)$. Следующая теорема подтверждает эту интуицию.

Теорема 1.13:

Пусть неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ связаны с правилом выбора $C(A)$ условиями (♎). Тогда правило выбора $C^*(A)$, порожденное этими предпочтениями, совпадает с правилом выбора $C(A)$ на всех ситуациях выбора из $\mathcal{A}$, для которых выбор согласно $C(A)$ не пуст, т. е.

$$C^*(A) = C(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{A}, \text{ таких что } C(A) \neq \varnothing. \quad \lrcorner$$

Доказательство: Докажем, что $C(A) \subset C^*(A)$. Пусть $\mathbf{x} \in C(A)$. Тогда по определению нестрогого выявленного предпочтения $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in A$. Следовательно, $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in A$. Отсюда видно, что $\mathbf{x} \in C^*(A)$.

Теперь докажем, что $C^*(A) \subset C(A)$. Пусть $\mathbf{x} \in C^*(A)$, где $C(A)$ непусто, и пусть $\mathbf{y}$ — некоторая альтернатива из $C(A)$. Так как $\mathbf{y} \in A$, то из условия $\mathbf{x} \in C^*(A)$ следует, что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и поэтому $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Выполнение соотношения $\mathbf{x} \notin C(A)$ означало бы, что $\mathbf{y} \triangleright \mathbf{x}$ (так как $\mathbf{y} \in C(A)$), т. е. что $\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а этого быть не может. Значит, $\mathbf{x} \in C(A)$. ∎

Одним из непосредственных следствий неоклассической рациональности выбора является так называемая слабая аксиома выявленных предпочтений (*Weak Axiom of Revealed Preference*, WARP), являющаяся ослабленным вариантом обобщенной аксиомы выявленных предпочтений сформулированной в Определении 1.17[37].

Определение 1.20:

Говорят, что правило выбора $C(\cdot)$, заданное на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$, удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если для любых двух ситуаций выбора A и A' из $\mathcal{A}$ и любой пары альтернатив $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, которые принадлежат как A, так и A' из $\mathbf{x} \in C(A)$ и $\mathbf{y} \in C(A')$ следует, что $\mathbf{x} \in C(A')$. ◀

То, что неоклассическое правило выбора действительно должно удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений, следует из (⌓). Для того чтобы это показать, переформулируем слабую аксиому выявленных предпочтений в терминах выявленных предпочтений:

> Если $\mathbf{x}$ (непосредственно) выявленно не хуже $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ не может быть (непосредственно) выявленно лучше $\mathbf{x}$, т. е. соотношения $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \triangleright \mathbf{x}$ не могут быть верными одновременно.

Для того чтобы данное условие было выполнено, на самом деле достаточно менее строгой рациональности (см. Приложение 1.B на

[37] «...Если индивидуум выбирает комплект один, отвергая комплект два, то он не может одновременно выбирать второй комплект, отвергая первый» (P. A. Samuelson. A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour, *Economica* **5** (1938): 61–71). Фактически требование Самуэльсона несколько слабее слабой аксиомы выявленных предпочтений, как она здесь сформулирована вслед за Эрроу, поскольку он предполагает, что выбор потребителя однозначен. Самуэльсон говорит о том, что соотношения $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \triangleright \mathbf{x}$ не могут быть верными одновременно.

с. 88). А именно, достаточно, чтобы нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ было транзитивным, как демонстрирует следующая теорема.

Теорема 1.14:

Пусть правило выбора задано на основе нестрогого отношения предпочтения $\succcurlyeq$ следующим образом (так же, как выше для неоклассических предпочтений; см. Определение 1.6):

$$C(A) = \{\, \mathbf{x} \in A \mid \forall \mathbf{y} \in A \ \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \,\},$$

и пусть отношение $\succcurlyeq$ транзитивно. Тогда это правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. ⌟

Доказательство: Пусть в некоторой ситуации выбора A как $\mathbf{x}$, так и $\mathbf{y}$ можно было выбрать ($\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in C(A)$), другими словами, пусть $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$. По определению правила выбора $C(A)$ это влечет $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Пусть в некоторой другой ситуации выбора A' как $\mathbf{x}$, так и $\mathbf{y}$ можно было выбрать ($\mathbf{x} \in A'$, $\mathbf{y} \in A'$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} \in C(A')$). По определению правила выбора это означает, что $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}$ для всех $\mathbf{z} \in A'$. Из транзитивности следует, что то же самое должно быть верным для $\mathbf{x}$, т. е. $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$ для всех $\mathbf{z} \in A'$. Таким образом, $\mathbf{x} \in C(A')$. Это означает, что для $C(\cdot)$ выполнена слабая аксиома выявленных предпочтений. ■

Другое следствие того, что выбор делается на основе неоклассических предпочтений, состоит в том, что *из конечного набора альтернатив индивидуум всегда может сделать выбор.* Другими словами, выполнено следующее утверждение. (Доказательство его оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 1.32 на с. 56.)

Теорема 1.15:

Если ситуация выбора $A \in \mathcal{A}$ ($A \neq \varnothing$) состоит из конечного числа альтернатив, то для правила выбора $C(\cdot)$, соответствующего неоклассическим предпочтениям, выполнено $C(A) \neq \varnothing$. ⌟

Таким образом, выполнение «слабой аксиомы выявленных предпочтений» и непустота выбора из конечного числа альтернатив являются необходимыми условиями рационализуемости функции выбора.

Следующая теорема указывает возможный набор условий, достаточных для рационализуемости в смысле условий ($\frown$). В ней указанные необходимые условия рационализуемости функции выбора дополняются предположением, что множество ситуаций выбора является достаточно «богатым»[38].

Теорема 1.16:

Пусть правило выбора $C(\cdot)$ определено на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$ и при этом

- если ситуация выбора $A \in \mathcal{A}$ состоит из конечного числа альтернатив, то множество $C(A)$ непусто;
- $C(A)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений;
- множество ситуаций выбора $\mathcal{A}$ содержит все двух- и трехэлементные подмножества X.

Далее, пусть на основе этого правила выбора задано нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$, так что оно совпадает с нестрогим отношением выявленного предпочтения $\trianglerighteq$, а на основе нестрогого отношения предпочтения определены обычным образом предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$.

Тогда предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ являются неоклассическими и связаны с $C(A)$ соотношениями (⚖). ┘

Доказательство: Для того чтобы доказать, что предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ являются неоклассическими, достаточно доказать, что бинарное отношение $\trianglerighteq$ (и следовательно, $\succcurlyeq$) является полным и транзитивным.

Полнота. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — две альтернативы из X. Ситуация выбора $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это двухэлементное подмножество X. Так как по условию $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$ непусто, то либо $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$, либо $\mathbf{y} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$. То есть выполнено хотя бы одно из соотношений $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \trianglerighteq \mathbf{x}$.

Транзитивность. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — три альтернативы из X, такие что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \trianglerighteq \mathbf{z}$. Ситуация выбора $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это трехэлементное подмножество X.

[38] В частности, предполагается, что оно содержит все двухэлементные подмножества X. Это предположение в определенном смысле естественно. Действительно, если известно, что неоклассические предпочтения рационализуют правило выбора $C(\cdot)$, и все двухэлементные подмножества X входят в $\mathcal{A}$, то можно восстановить предпочтения по $C(\cdot)$ по следующему принципу:

$$C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y},$$
$$C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y}.$$

Покажем, что $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$. Если $\mathbf{y} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$, то из слабой аксиомы выявленных предпочтений следует, что $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$, поскольку $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$. Если же $\mathbf{z} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$, то аналогично $\mathbf{y} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$ и поэтому опять $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$. Так как $C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$ непусто, то в любом случае $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\})$. Это влечет за собой, что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{z}$.

Условие, что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ влечет $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, выполнено по определению $\succcurlyeq$. Докажем, что $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y}$ влечет $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

Из $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y}$ по слабой аксиоме выявленных предпочтений следует, что $\mathbf{y} \trianglerighteq \mathbf{x}$ не может выполняться, т. е. не может быть $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$. Как только что доказано, отношение $\succcurlyeq$ полное, поэтому $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, откуда по обычному определению отношения $\succ$ следует $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. ■

Сформулированные утверждения (Теоремы 1.13 и 1.16) показывают, что при определенных условиях подход, использующий в качестве отправной точки правило выбора, эквивалентен подходу, использующему в качестве отправной точки предпочтения, т. е. правило выбора можно рационализовать неоклассическими предпочтениями. Для этого достаточно предположить, что множество ситуаций выбора $\mathcal{A}$, на котором определено правило выбора, достаточно «богато», правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений и выбор на $\mathcal{A}$ непуст.

Теорема 1.17:

Пусть правило выбора $C(\cdot)$ определено на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$ и при этом

- множество $C(A)$ непусто для всех ситуаций выбора $A \in \mathcal{A}$;
- $C(A)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений;
- множество ситуаций выбора $\mathcal{A}$ содержит все двух- и трехэлементные подмножества X.

Тогда существуют неоклассические предпочтения которые рационализуют это правило выбора. ┘

Задачи

1.69 Множество альтернатив имеет вид $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Имеется четыре ситуации выбора:

$$A_1 = \left\{a, c^{[-]}, d^{[-]}, f^{[+]}\right\}, \qquad A_2 = \left\{a^{[-]}, b^{[-]}, c, d^{[+]}\right\},$$
$$A_3 = \left\{b, c^{[-]}, e^{[+]}\right\}, \qquad A_4 = \left\{a^{[-]}, b^{[+]}, e\right\}.$$

Здесь индекс $[+]$ означает, что соответствующая альтернатива могла быть выбрана в данной ситуации, а индекс $[-]$ — что она не могла быть выбрана.

(A) Найдите неоклассические предпочтения и, по возможности, функцию полезности, рационализующие эти данные.

(B) Является ли ответ на предыдущий вопрос единственным?

(C) Удовлетворяет ли этот набор данных обобщенной аксиоме выявленных предпочтений?

1.70 Объясните, почему косвенные отношения выявленного предпочтения $\underline{\rhd\!\rhd}$ и $\rhd\!\rhd$ обладают следующими свойствами:

$$(\mathbf{x} \mathrel{\underline{\rhd\!\rhd}} \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \mathrel{\underline{\rhd\!\rhd}} \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \mathrel{\underline{\rhd\!\rhd}} \mathbf{z}, \quad (\mathbf{x} \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \mathrel{\underline{\rhd\!\rhd}} \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{z},$$
$$(\mathbf{x} \mathrel{\underline{\rhd\!\rhd}} \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{z}, \quad (\mathbf{x} \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{z}.$$

Объясните, почему непосредственные отношения выявленного предпочтения $\trianglerighteq$ и $\rhd$ могут, вообще говоря, не обладать этими свойствами, если для их построения используется конечный набор наблюдений за выбором. Приведите соответствующие примеры.

1.71 Объясните, почему условия ($\underline{\rhd\!\rhd}$) и ($\rhd\!\rhd$) эквивалентны Определению 1.16.

1.72 Измените доказательство Теоремы 1.12 так, чтобы оно учитывало случай наличия в наборе данных выявленно эквивалентных альтернатив.

1.73 Опишите, каким способом можно с учетом выявленных предпочтений распространить предпочтения, заданные для конечного числа альтернатив (полученные так, как описано в Теореме 1.12), на все множество X.

1.74 Определите, какими из следующих свойств и при каких условиях обладает непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения (построенное по некоторой функции выбора):

- полнота; • транзитивность; • рефлексивность.

1.75 Пусть множество альтернатив X конечно. Тогда функция выбора $C(\cdot)$, определенная на всех подмножествах множества X, удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если... (выберите правильный ответ)

- правило выбора всегда непусто;
- выбор индивидуума может быть описан полным и транзитивным нестрогим отношением предпочтения;
- правило выбора удовлетворяет условию $C(A) \neq A$ при всех A.

1.76 Множество альтернатив X состоит из трех элементов — $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$. Индивидуум осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $A_2 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Его выбор описывается правилом выбора $C(\cdot)$. Определите, какие из нижеприведенных правил выбора не удовлетворяют слабой аксиоме выявленных предпочтений:

- $C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}\}$, $C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = \{\mathbf{x}\}$;
- $C_2(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}\}$, $C_2(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = \{\mathbf{y}\}$;
- $C_3(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $C_3(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

1.77 Множество альтернатив X состоит из трех элементов — $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$. Индивидуум осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $A_2 = \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, $A_3 = \{\mathbf{x}, \mathbf{z}\}$. Его выбор описывается следующим правилом выбора: $C(A_1) = \{\mathbf{x}\}$, $C(A_2) = \{\mathbf{y}\}$, $C(A_3) = \{\mathbf{z}\}$.

(А) Верно ли, что выбор удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений?

(В) Верно ли, что выбор индивидуума представи́м некоторыми неоклассическими предпочтениями?

1.78 Какому из приведенных ниже утверждений эквивалентна слабая аксиома выявленных предпочтений?

- Пусть $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in A'$, $\mathbf{y} \in A'$. Тогда из того, что $\mathbf{x} \in C(A)$ и $\mathbf{y} \in C(A')$ следует $\mathbf{x} \in C(A)$, $\mathbf{y} \in C(A)$ и $\mathbf{x} \in C(A')$, $\mathbf{y} \in C(A')$.
- Из $\mathbf{x} \in A$ и $\mathbf{y} \in A'$ следует $\mathbf{x} \in A'$ и $\mathbf{y} \in A$.
- Пусть $\mathbf{x} \in C(A)$ и $\mathbf{y} \in C(A')$. Тогда $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in A'$, $\mathbf{y} \in A'$.

1.79 Непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения обладает свойством полноты, если... (выберите правильный ответ)

- правило выбора задано на множестве всех подмножеств множества допустимых альтернатив;
- строгое отношение выявленного предпочтения отрицательно транзитивно;
- правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

1.80 Пусть множество альтернатив X состоит из трех элементов — $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Индивидуум осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $A_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Выбор индивидуума описывается некоторой функцией выбора $C(\cdot)$, а $\trianglerighteq$ и $\triangleright$ — соответствующие нестрогое и строгое непосредственные отношения выявленного предпочтения. Выберите правильный ответ:

- соотношения $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \triangleright \mathbf{x}$ не могут быть верными одновременно для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$;
- $\trianglerighteq$ не будет полным;
- $\trianglerighteq$ будет транзитивным.

1.81 Одно из необходимых условий того, что непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения, построенное по некоторым правилу выбора $C(\cdot)$ и ситуации выбора $\mathcal{A}$, транзитивно, состоит в том, что... (выберите верный ответ)

- правило выбора всегда имеет значением единственную альтернативу;
- непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения рефлексивно;
- $\mathcal{A}$ содержит все трехэлементные подмножества множества альтернатив.

Приложение 1.B Не вполне рациональные предпочтения

На первый взгляд введенное в параграфе 1.3 определение неоклассических предпочтений и выводы из него кажутся естественными и соответствующими интуиции в качестве основы для моделирования выбора. Однако в действительности есть ряд примеров, заставляющих относиться к традиционному неоклассическому подходу достаточно осторожно. Укажем лишь некоторые из них.

↯ *Проблемы с определением эквивалентности.* Отношение безразличия можно определять по-разному. Об эквивалентности двух альтернатив можно говорить, в частности, в следующих случаях:

- потребитель считает, что сравниваемые альтернативы для него на самом деле *эквивалентны* («Ну не гурман я, мне все равно, что есть — судака по-гасконски или лапшу по-китайски»);
- потребитель *ничего не знает* ни об одной из предложенных альтернатив, и потому не может их сравнивать («Что вы предпочитаете: дурианы или рамбутаны?»);

- предлагаемые альтернативы в принципе *несравнимы* с точки зрения потребителя, так что если он сталкивается с выбором из этих альтернатив, то предпочитает уклониться от выбора («Ты кого больше любишь — папу или маму?»);

В связи с этим возникает вопрос о том, что мы подразумеваем в действительности, когда говорим о безразличии в выборе между несколькими альтернативами. Должны ли мы при моделировании различать эквивалентность в зависимости от причин ее породивших? На эти вопросы трудно ответить однозначно, и такая проблематика выходит далеко за пределы данного учебника. (Мы здесь придерживаемся скорее первого из приведенных толкований.) Отметим еще, что содержательная сложность понятия эквивалентности также наследуется отношением $\succcurlyeq$, заданным как $\succcurlyeq = \succ \cup \sim$.

↯ *Проблемы с транзитивностью.* Рассмотрим следующий пример. Если мы предложим индивидууму на выбор стакан чая, куда положили один кристалл сахара, и стакан чая с двумя кристаллами, то практически всегда получим ответ о его безразличии в выборе. Такой же ответ получим при сравнении стаканов чая с двумя и тремя кристаллами сахара. Продолжим наш опрос достаточно долго и, если будем настаивать на транзитивности, придем к выводу, что для индивидуума совершенно безразлично, что пить, стакан чая с одним кристаллом или же с пятью ложками сахара. Очевидно, что мы получили абсурдный вывод, причина которого кроется в принципиальной невозможности объективного сравнения количеств благ, которые различаются незначительно. Этот пример заставляет задуматься об обоснованности предположения о транзитивности предпочтений.

Помимо указанных проблем существует также ряд моментов, которые необходимо учитывать при анализе предпочтений и/или выбора экономического субъекта, поскольку невнимание к ним также может привести к нарушению обычно делаемых предположений.

↯ *Зависимость предпочтений от контекста.* Довольно часто отсутствие транзитивности в реальности вызвано тем, что исследователь не учитывает контекста ситуации. Под контекстом понимаются все внешние, явным образом не входящие в описание альтернатив обстоятельства. Укажем несколько примеров, в которых небанальным образом сказывается влияние контекста на предпочтения индивидуума: цена блага в случае демонстративного потребления[39], количе-

[39] Вспомним бородатый анекдот:
— Ты почем галстук брал?
— Да не дорого, 2500 баксов отслюнил.

ство других экономических субъектов, потребляющих данное благо (рынок мобильных телефонов) и т. д. Все указанные факторы явным образом должны быть учтены при рассмотрении соответствующих ситуаций, если они интересуют потребителя. Если же рассматривать предпочтения, игнорируя важные дополнительные переменные, то, естественно, при непостоянстве контекста можно будет наблюдать явления, которые можно принять за нарушение предположений о рациональном поведении.

ϟ *Зависимость от постановки вопроса*[40]. Зависимость предпочтений от контекста тесно связана по смыслу с феноменом, известным как зависимость предпочтений и выбора от постановки вопроса. Рассмотрим классический эксперимент, проведенный Дэниелом Канеманом и Амошом Тверским[41]. Группе интервьюируемых было предложено ответить на следующий вопрос.

> Предположим, что в некоторой стране ожидается вспышка гепатита. Ожидается, что в результате данного заболевания погибнет 600 человек. Для борьбы с этим заболеванием предлагаются две альтернативные программы, со следующими результатами реализации.
>
> Программа A: в случае реализации программы будет сохранена жизнь 200 человек.
>
> Программа B: в случае реализации программы с вероятностью $1/3$ будет сохранена жизнь 600 человек, с вероятностью $2/3$ ни одна жизнь не будет спасена.
>
> Какую из двух программ вы выберете?

Большинство интервьюируемых (72%) предпочли альтернативу A альтернативе B. Далее был проведен опрос о той же ситуации, но с другими вариантами ответов.

> Программа C: в случае реализации погибнут 400 человек из 600.
>
> Программа D: в случае реализации с вероятностью $1/3$ никто не погибнет, с вероятностью $2/3$ программа не будет иметь успеха и погибнут 600 человек.

— Ну, ты и лох, за соседним углом его же за 5000 зеленых толкают.
В этом случае оценка галстука напрямую зависит от его цены.

[40] Англ. *framing*.

[41] D. Kahneman and A. Tversky. Choices, Values, and Frames, *American Psychologist* **39** (1984): 341–350.

В результате этого опроса 78% интервьюируемых выбрали альтернативу D. Как несложно убедиться, что программы A и C эквивалентны и различие заключается только в формулировке. То же самое касается программ B и D. Варианты A и B сформулированы в позитивном ключе (количество спасенных жизней), тогда как варианты C и D — в негативном ключе (число умерших). Очевидно, что наличие данного феномена также может нарушать наши предположения[42]. (Попробуйте определить, возможность нарушения какого свойства демонстрирует данный пример.)

ϟ *Склонность сохранять статус-кво.* Одно из возможных объяснений расхождения в результатах, казалось бы, одинаковых опросов состоит в том, что на сравнение альтернатив может влиять тот факт, что одна из альтернатив соответствует текущей ситуации. Другими словами, люди часто проявляют склонность сохранять статус-кво.

Примером такой склонности является следующий эксперимент. Между участниками случайным образом распределили одинаковое количество конфет и кружек, так что каждому достался ровно один предмет. Ясно, что если бы каждый участник предпочитал либо одно, либо другое, то примерно половина участников (если их количество достаточно большое) остались бы недовольны полученным и согласились бы отдать свой предмет и получить вместо него другой. В реальном же эксперименте только 10% участников соглашались на обмен[43].

ϟ *Изменение предпочтений во времени.* При рассмотрении предпочтений важно помнить, что, вообще говоря, предпочтения изменяются во времени. Если вы сегодня предпочитаете яблоки грушам, то далеко не факт, что ваши предпочтения останутся неизменными на протяжении всей вашей жизни. Естественно, этот факт также демонстрирует нарушение наших аксиом при рассмотрении реального выбора/предпочтений.

Этот перечень можно продолжать и продолжать. Так, в литературе много внимания при обсуждении предпочтений и выбора уделяется вопросам *инверсии предпочтений*, *несостоятельности предпочтений во времени* и др. Но мы не будем здесь их обсуждать

[42] Хотя в данном примере затрагиваются вопросы выбора в условиях неопределенности, являющиеся предметом рассмотрения другой главы, он ясно указывает на важную черту, присущую реальным ситуациям выбора, и поэтому приведен в данной главе.

[43] J. L. Knetsch. The Endowment Effect and Evidence of Nonreversible Indifference Curves, *American Economic Review* **79** (1989): 1277–1284.

и отсылаем заинтересованного читателя к соответствующей литературе.

1.B.1 Непротиворечивые, но неполные предпочтения

Что если индивидуум не всегда может попарно сравнить альтернативы? Для описания подобных предпочтений, кроме отношений «лучше», «хуже» и «безразлично» между парами альтернатив следует еще ввести отношение «неизвестно». При этом нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ может быть понято двояко: как отрицание отношения $\prec$ («не хуже») или же как отношение «лучше или эквивалентно». Удобнее (и принято в посвященной этому вопросу литературе) использовать его во втором значении. Этой традиции будем следовать и мы, предполагая, что

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y})$$

Во всех остальных отношениях наш индивидуум может быть рациональным и последовательным. Введем определение подобных предпочтений.

Определение 1.21:

Назовем предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ непротиворечивыми, если они удовлетворяют следующим предположениям:

* для любых $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполняется не более чем одно из следующих трех соотношений:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \prec \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

* выполнено $\succcurlyeq \, = \, \succ \cup \sim$ (т. е. $\succcurlyeq$ является отношением «лучше или эквивалентно»);
* отношение $\succcurlyeq$ транзитивно;
* отношение $\sim$ рефлексивно. ◀

Здесь имеется близкая аналогия с ситуацией, когда индивидуум имеет неоклассические предпочтения, но полная информация о таких предпочтениях у нас отсутствует. Фактически выше мы уже частично рассмотрели соответствующую теорию для случая конечного числа альтернатив (см. п. 1.A.1)[44].

[44]Существенное отличие состоит в том, что аналог отношения «выявленно не хуже» здесь не вводится.

Заметим, что данное определение предполагает не только непротиворечивость предпочтений, но и полное использование имеющейся информации. Рассмотрим свойства непротиворечивых предпочтений. (Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.)

Теорема 1.18:

Если предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ непротиворечивы, то они обладают следующими свойствами:

{i} нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ рефлексивно;

{ii} строгое отношение предпочтения $\succ$ транзитивно и иррефлексивно;

{iii} отношение безразличия $\sim$ транзитивно и симметрично;

{iv} для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполнено

$$(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \urcorner(\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x})) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \quad \text{и}$$

$$(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

{v} для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{z} \in X$ выполнено

$$(\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z} \quad \text{и} \quad (\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succ \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z};$$

{vi} если по цепочке для альтернатив $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k, \ldots, \mathbf{x}^q, \mathbf{x}^r$ имеют место отношения $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$, $\mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k$, ..., $\mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$, $\mathbf{x}^r \succcurlyeq \mathbf{x}^i$, то эти альтернативы попарно эквивалентны и, следовательно, ни одна из них не может быть лучше другой (аналог «обобщенной аксиомы выявленных предпочтений»). ⌋

Следующее утверждение говорит о том, что непротиворечивые предпочтения можно «достроить» до неоклассических.

Теорема 1.19:

Если предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ непротиворечивы, то существуют неоклассические предпочтения $\langle \succ', \succcurlyeq', \sim' \rangle$, являющиеся их продолжением в том смысле, что

- $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succ' \mathbf{y}$;
- $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \sim' \mathbf{y}$. ⌋

В случае конечного числа альтернатив данная теорема является очевидным следствием пункта {vi} предыдущей теоремы и Теоремы 1.12. В общем случае доказательство довольно трудоемкое и выходит далеко за рамки данного учебника[45].

[45] На основе отношения безразличия можно определить множества безразличия и не полностью заданное на этих множествах безразличия строгое отно-

Возникает вопрос о том, каким будет правило выбора, основанное на таких предпочтениях. Можно предложить вариант $C_{\succcurlyeq}(A)$ (см. Определение 1.6):

$$C(A) = \{\, \mathbf{x} \in A \mid \forall \mathbf{y} \in A \; \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid \forall \mathbf{y} \in A \; \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \,\}.$$

Как показано выше (см. Теорему 1.14), если предпочтения непротиворечивы, то данное правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений (см. Определение 1.20). Другое его свойство заключается в том, что из-за неполноты предпочтений это правило может приводить к тому, что ни одна альтернатива не может быть выбрана даже в «хорошо устроенных» ситуациях выбора A (например, когда имеется конечное число альтернатив).

Указанная проблема не возникает, если правило выбора имеет вид $C_{\succ}(A)$, т. е.

$$C(A) = C_{\succ}(A) = \{\, \mathbf{x} \mid \nexists \mathbf{y} \in A\colon \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}.$$

Однако не очень правдоподобно, что индивидуум может действовать в соответствии с таким правилом. Например, если индивидуум не может сравнить альтернативу $\mathbf{x}$ с другими допустимыми альтернативами, то $\mathbf{x}$ может быть выбрана в соответствии с таким правилом; в то же время данная альтернатива фактически может оказаться хуже всех остальных.

Как промежуточный вариант, позволяющий избежать указанных крайностей, можно предположить, что выбор делается исходя из некоторого статус-кво $\mathbf{x}_0$. Если нет альтернатив $\mathbf{x} \in A$, таких что $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}_0$, то индивидуум выбирает $\mathbf{x}_0$ (т. е. $C(A) = \{\mathbf{x}_0\}$), если же такие альтернативы имеются, то можно считать, что функция выбора имеет вид

$$C(A) = \{\, \mathbf{x} \in A \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{x}_0 \text{ и } \nexists \mathbf{y} \in A\colon\; \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}.$$

В качестве примера подобного выбора укажем на голосование на основе консенсуса, такое что каждый из участников голосования имеет неоклассические предпочтения. Заметим, что построенное так правило выбора может не удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений.

шение предпочтения. Затем можно распространить это отношение, полностью упорядочив кривые безразличия (см. сноску 35).

1.B.2 Полные, но противоречивые (нетранзитивные) предпочтения

В самом общем смысле под полнотой предпочтений можно понимать то, что индивидуум всегда может определить, как он относится к паре альтернатив: является ли альтернатива $\mathbf{x}$ для него более предпочтительной, чем альтернатива $\mathbf{y}$, или $\mathbf{y}$ для него более предпочтительна, чем $\mathbf{x}$, или эти альтернативы эквивалентны. При этом можно не накладывать ограничения, что эти ситуации несовместны, т. е. для двух альтернатив $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выполняется *хотя бы одно* из трех соотношений: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. Тогда отношение «лучше или эквивалентно», вообще говоря, может не совпадать с отрицанием отношения $\prec$ (т. е. с отношением «не хуже»), но уже не по причине неполноты, как это было в п. 1.B.1.

Мы не обсуждаем здесь это (слишком серьезное) отклонение от рациональности и будем в дальнейшем исходить из того, что всегда выполнено *ровно одно* из трех соотношений: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. В таком случае смысл нестрогого отношения предпочтения становится однозначным. Будем рассматривать предпочтения, которые могут быть нетранзитивными, т. е. такими что, например, возможно выполнение соотношений $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$ и $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$ для несовпадающих альтернатив $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.

Определение 1.22:

Назовем предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ полными, если они удовлетворяют следующим предположениям:

* для любых $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполняется *ровно одно* из следующих трех соотношений:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \prec \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

* выполнено $\succcurlyeq \,=\, \succ \cup \sim$. ◄

Некоторые очевидные свойства полных предпочтений указывает следующее утверждение. (Его доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.)

Теорема 1.20:

Если предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ полные, то они обладают следующими свойствами:

{i} нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ является полным и рефлексивным;

{ii} строгое отношение предпочтения $\succ$ является иррефлексивным и асимметричным;

{iii} отношение безразличия $\sim$ является рефлексивным и симметричным. ┘

Такие предпочтения можно использовать для моделирования коллективного выбора, например голосования простым большинством в случае, если каждый из участников голосования имеет неоклассические предпочтения[46].

Как обсуждалось выше, условие транзитивности является ограничительным при моделировании поведения потребителя. Поэтому представляется вполне естественным задаваться вопросом о свойствах предпочтений и о существовании функции полезности в случае, если строгое отношение предпочтения $\succ$ не обладает свойством отрицательной транзитивности или, что эквивалентно, нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ не обладает свойством транзитивности.

При полноте предпочтений правила выбора $C_{\succ}(A)$ и $C_{\succcurlyeq}(A)$ совпадают и поэтому не возникает проблем с определением правила выбора. В то же время нетранзитивность предпочтений, так же как и неполнота, может приводить к тому, что правило выбора может быть пустым, даже если ситуация выбора A «хорошо устроена». Например, при выборе из трех альтернатив, таких что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, значение правила выбора будет пустым.

Как следует из приведенной выше Теоремы 1.6 (с. 44), при нетранзитивности не существует функции полезности в смысле Определения 1.7 (с. 43), т. е. показателя, заданного на *отдельных альтернативах* и оценивающего уровень благосостояния при выборе данной альтернативы. Тем не менее даже в этом случае можно построить некоторый индикатор, который давал бы полное описание рассматриваемых предпочтений. Такой индикатор может быть задан на *парах альтернатив* и позволяет сравнивать две альтернативы между собой.

Идея состоит в том, чтобы подобный индикатор $(\Delta(\cdot))$ удовлетворял следующим условиям:

(Δ1) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$;
(Δ2) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$;
(Δ3) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$;
(Δ4) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

[46] Парадокс Кондорсе демонстрирует, что процедура голосования большинством голосов может приводить к нетранзитивности и к тому, что значение правила выбора будет пустым. См. сноску 19 на с. 672.

Так построенная функция может считаться обобщенной функцией полезности. Нетрудно понять, что если предпочтения представимы обычной функцией полезности $u(\cdot)$, то в качестве $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно взять функцию $u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})$.

Следующая теорема дает условия существования «обобщенной функции полезности», соответствующей полным, но, возможно, нетранзитивным предпочтениям. Для доказательства существования такой функции используется некоторый аналог условия непрерывности предпочтений (замкнутость $\succcurlyeq$). Пары альтернатив в доказательстве обозначаются $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$. Типичная пара альтернатив имеет структуру $\mathbf{p} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Порядок альтернатив в паре при этом существен.

Теорема 1.21:

Пусть на $X \subset \mathbb{R}^l$ заданы полные предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, такие что бинарное отношение $\succcurlyeq$ замкнуто (в $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$). Тогда существует непрерывная функция $\Delta\colon X \times X \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (Δ1)–(Δ4). ┘

Доказательство: Рассмотрим отношение безразличия $\sim$. Так как предпочтения полные, то оно рефлексивно. Таким образом, оно непусто, если рассматривать его как подмножество множества $X \times X$ (в него входят все пары вида $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$). Кроме того, из замкнутости $\succcurlyeq$ следует замкнутость $\sim$.

Пусть $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ — евклидово расстояние на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$. Определим функцию $d^*\colon X \times X \mapsto \mathbb{R}$ так, чтобы паре альтернатив $\mathbf{p} \in X \times X$ она сопоставляла наименьшее расстояние между $\mathbf{p}$ и парой эквивалентных друг другу альтернатив (т. е. $\mathbf{q} \in \sim$):

$$d^*(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{q} \in \sim} d(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Инфимум конечен, поскольку расстояние ограничено снизу нулем. Покажем, что так определенная функция является непрерывной. Рассмотрим две произвольные пары альтернатив $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in X \times X$. Для любой пары эквивалентных между собой альтернатив $\mathbf{r} \in \sim$ в силу неравенства треугольника имеем $d(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r})$. Следовательно,

$$d^*(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{s} \in \sim} d(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r}).$$

Так как левая часть последнего неравенства не зависит от $\mathbf{r}$, то

$$d^*(\mathbf{p}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \inf_{\mathbf{s} \in \sim} d(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d^*(\mathbf{q}).$$

По аналогии можно доказать, что выполнено

$$d^*(\mathbf{q}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d^*(\mathbf{p}).$$

Комбинируя последние два неравенства, находим

$$|d^*(\mathbf{q}) - d^*(\mathbf{p})| \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

откуда очевидным образом следует непрерывность функции $d^*(\cdot)$.

Расстояние неотрицательно и поэтому $d^*(\mathbf{p}) \geqslant 0$. Кроме того, данная функция обладает тем свойством, что $d^*(\mathbf{p}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{p}$ представляет собой пару эквивалентных альтернатив ($\mathbf{p} \in \sim$). Действительно, если $\mathbf{p} \in \sim$, то $d^*(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$. Обратно, пусть для пары альтернатив выполнено $\mathbf{p} \notin \sim$. В силу замкнутости $\sim$ дополнение к $\sim$ является открытым множеством, и, значит, точка $\mathbf{p}$ содержится в этом дополнении вместе с некоторой ε-окрестностью. Так как около $\mathbf{p}$ нет пар эквивалентных альтернатив, расстояние до которых от $\mathbf{p}$ было бы менее ε, то по определению $d^*(\cdot)$ должно быть выполнено $d^*(\mathbf{p}) \geqslant \varepsilon > 0$.

Определим функцию $\Delta(\cdot)$ следующим образом:

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \text{если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}, \\ -d^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}. \end{cases}$$

Непрерывность $\Delta(\cdot)$ следует из непрерывности $d^*(\cdot)$. Проверку того, что так определенная функция $\Delta(\cdot)$ удовлетворяет условиям (Δ1)–(Δ4), оставляем читателю в качестве упражнения. ■

Очевидно, что если в качестве базового индикатора полезности взять функцию $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то возможно систематическое построение микроэкономической теории на основе полных предпочтений, которые не обязательно являются транзитивными[47].

Задачи

1.82 Докажите Теорему 1.18.

1.83 Пусть $X = \mathbb{R}^n_+$, бинарное отношение $\mathcal{R}$ задано следующим образом:

$$\mathbf{x} \, \mathcal{R} \, \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i \ \forall i,$$

[47] См., напр., W. J. Shafer. The Nontransitive Consumer, *Econometrica* **42** (1974): 913–919. См. также задачу 2.31 на с. 134.

а на его основе построены следующие бинарные отношения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}'\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}) \text{ и } (\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}),\\
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}''\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}),\\
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}'''\,\mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}) \text{ и } (\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}),\\
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}''''\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}) \text{ и } \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Охарактеризуйте эти бинарные отношения. Как связаны между собой $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}''$? Дайте интерпретацию всех этих отношений в контексте теории не вполне рациональных предпочтений.

1.84 Пусть отношение $\mathcal{R}$ рефлексивно и транзитивно. Рассмотрим задаваемые на его основе отношения $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{R}^{**}$, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{x}\,\mathcal{R}^*\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x}\,\mathcal{R}^{**}\,\mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}) \text{ и } (\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}).$$

Покажите, что $\mathcal{R}^*$ иррефлексивно, отрицательно транзитивно, а $\mathcal{R}^{**}$ рефлексивно, транзитивно и симметрично. Дайте интерпретацию всех этих отношений в контексте теории не вполне рациональных предпочтений.

1.85 Докажите Теорему 1.20.

1.86 Решите задачу 1.83, предположив, что исходное бинарное отношение $\mathcal{R}$ задано следующим образом:

$$\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \ \exists i\colon x_i \geqslant y_i.$$

1.87 Дополните доказательство Теоремы 1.21, продемонстрировав, что определенная в нем функция $\Delta(\cdot)$ удовлетворяет условиям (Δ1)–(Δ4).

1.88 Для предпочтений, описанных в задачах 1.22 и 1.23 из параграфа 1.4 (с. 54), определите, являются ли они непротиворечивыми и являются ли они полными.

Приложение 1.C Альтернативный подход к описанию предпочтений: стохастические предпочтения

Выше мы рассматривали предпочтения как детерминированные объекты, полагая, что наш потребитель всегда при выборе между яблоком и грушей предпочитал что-то одно — либо яблоко, либо грушу. Но реальный выбор экономических субъектов бывает определен далеко не столь однозначно: например, в половине случаев потребитель предпочитает яблоко, а в половине — грушу.

Как можно моделировать такого рода явления?

Пусть, как и ранее, X — множество возможных альтернатив. Назовем стохастическими предпочтениями распределение вероятностей над обычными неоклассическими предпочтениями, заданными на X. Назовем стохастическим правилом выбора функцию, сопоставляющую каждой ситуации выбора A из данного множества ситуаций выбора $\mathcal{A}$ распределение вероятностей над элементами из A. Вероятностное распределение, соответствующее ситуации выбора A, указывает для каждой альтернативы из A вероятность того, что она будет выбрана.

Рассмотрим, как можно построить правило выбора по стохастическим предпочтениям. Пусть $\gimel$ — множество возможных предпочтений на X. Для упрощения будем полагать, что множество X конечно и что для всех предпочтений из $\gimel$ отношение безразличия $\sim$ представляет собой пустое множество (отношение $\succ$ является полным). При этом будем предпочтения отождествлять со строгим отношением предпочтения $\succ$. Каждым предпочтениям $\succ \in \gimel$ соответствует (обычное) правило выбора $C(\succ, \cdot)$. При сделанных предположениях выбор всегда непуст и однозначен. Стохастические предпочтения сопоставляют каждым предпочтениям $\succ \in \gimel$ соответствующую вероятность $p(\succ)$. Стохастическое правило выбора $\tilde{C}(\cdot)$ определяется следующим образом. Для ситуации выбора $A \in \mathcal{A}$ значение стохастического правила выбора $\tilde{C}(A)$ — это дискретное распределение, которое альтернативе $\mathbf{x} \in A$ сопоставляет вероятность того, что эта альтернатива будет выбрана, т. е. сумму вероятностей $p(\succ)$ предпочтений $\succ \in \gimel$, таких что $C(\succ, A) = \{\mathbf{x}\}$.

Следующий пример иллюстрирует этот стохастический взгляд на предпочтения.

Пример 1.7

Пусть множество X состоит из трех альтернатив — $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, а множество ситуаций выбора имеет вид $\mathcal{A} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}\}$.

Между тремя альтернативами, содержащимися в множестве X, можно задать шесть разных неоклассических предпочтений (без учета предпочтений с эквивалентными альтернативами):

1	2	3	4	5	6
$\mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$	$\mathbf{z} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z}$	$\mathbf{z} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$	$\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$	$\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$

Сопоставим каждым из этих предпочтений вероятность того, что на них базируется выбор потребителя: $p_1, \ldots, p_6$. С учетом этих вероятностей находим

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) &= (p_2 + p_3 + p_6, p_1 + p_4 + p_5),\\
\tilde{C}(\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}) &= (p_1 + p_3 + p_5, p_2 + p_4 + p_6),\\
\tilde{C}(\{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}) &= (p_3 + p_5 + p_6, p_1 + p_2 + p_4).
\end{aligned}$$

Разберем более подробно вычисление $\tilde{C}(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$. В приведенных выше равенствах p_2, p_3 и p_6 — это вероятности тех предпочтений, согласно которым $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Их сумма и равна вероятности того, что из $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ будет выбрана альтернатива $\mathbf{x}$. Соответственно p_1, p_4 и p_5 — это вероятности тех предпочтений, согласно которым $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. $\triangle$

Будем говорить, что стохастическое правило выбора $C(\cdot)$ рационализуется неоклассическими предпочтениями, если найдутся стохастические предпочтения, согласующиеся со стохастическим правилом выбора.

Пример 1.8 (продолжение Примера 1.7)
Рассмотрим, например, вопрос о том, может ли быть рационализовано предпочтениями стохастическое правило выбора

$$C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = C(\{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить, найдутся ли такие вероятности $(p_1, p_2, \ldots, p_6)$, которые бы согласовывались с данным правилом выбора. Фактически необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\\ p_5\\ p_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что решение данной системы уравнений существует, причем не единственное (так как матрица вырождена). Приведем в качестве примера два решения: $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Правило выбора $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = C(\{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ могло бы наблюдаться в действительности, если бы, например, в первом квартале потребитель имел предпочтения $\mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, во втором квартале — предпочтения $\mathbf{z} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, а в третьем и четвертом кварталах — $\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$ и $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$ соответственно. Тогда, опрашивая его в течение года, мы бы вывели второе из двух указанных стохастических правил выбора.

Аналогично непосредственной проверкой устанавливается, что, скажем, правило выбора $C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}) = C(\{\mathbf{z},\mathbf{x}\}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ не может быть рационализовано предпочтениями, поскольку подходящих вероятностей подобрать не удается (не существует *неотрицательного* решения соответствующей системы уравнений). $\triangle$

Задачи к главе

1.89 Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения, заданные на $X \subset \mathbb{R}^n$, а $C(\cdot)$ — соответствующее правило выбора, заданное на некотором множестве ситуаций выбора $\mathcal{A} \subset 2^X$.

(А) Докажите, что если предпочтения выпуклы, то для любого выпуклого множества $A \in \mathcal{A}$ множество $C(A)$ выпукло.

(В) Докажите, что если предпочтения строго выпуклы, то для любого выпуклого множества $A \in \mathcal{A}$ множество $C(A)$ содержит не более одной альтернативы.

Глава 2

Поведение потребителя

В гл. 1 на основе нескольких достаточно разумных предположений о свойствах индивидуальных предпочтений были получены условия существования функции полезности. Были также рассмотрены условия на предпочтения, гарантирующие такие ее естественные свойства, как монотонность, квазивогнутость и т. д. Тем самым был описан способ, которым потребитель упорядочивает потребительские наборы. В этой главе мы воспользуемся полученными результатами и конкретизируем рассмотренную ранее абстрактную модель выбора для случая потребительского выбора в условиях рынка. В теории потребительского поведения дополнительные предположения относительно предпочтений и ситуаций выбора (ситуациями выбора являются бюджетные множества) позволяют получить дополнительные результаты относительно такого выбора, которые (вместе с уже полученными в гл. 1) и составляют содержание теории поведения потребителя.

2.1 Модель поведения потребителя: основные понятия и свойства

2.1.1 Бюджетное множество

Ранее в модели рационального поведения было введено понятие множества альтернатив и ситуаций выбора. В модели поведения потребителя множество альтернатив — это множество допустимых потребительских наборов X, которое отражает все *физические* (и некоторые *институциональные*) ограничения, налагаемые на выбор потребителя. Например, индивидуум физически не может работать более 24 часов в сутки или потреблять какое-то благо в отрицательных количествах. Ограничения этого типа задают первичные границы, очерчивающие область, в которой осуществляется потребительский выбор.

Помимо этого, действия потребителя подчинены разного рода *экономическим* ограничениям. В условиях рынка *расходы* потребителя ограничены его *доходами* при данных рыночных ценах. Это так называемое бюджетное ограничение. Предполагается, что потребитель рассматривает свои доходы и рыночные цены как данные (т. е. является ценополучателем). Множество потребительских наборов из X, удовлетворяющих бюджетному ограничению, называют бюджетным множеством. Эти бюджетные множества описывают ситуации выбора в модели поведения потребителя.

В наиболее простом случае, когда доходы потребителей фиксированы, а расходы представлены затратами на покупку потребительского набора, бюджетное множество имеет вид

$$B(\mathbf{p}, R) = \{\, \mathbf{x} \in X \mid \mathbf{p}\mathbf{x} \leqslant R \,\},$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$ — вектор цен рассматриваемых благ, а R — доход потребителя.

Альтернативный вариант предполагает, что изначально потребитель владеет некоторым начальным запасом благ — набором (вектором) благ $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$. Если предположить, что у потребителя нет иных форм дохода, кроме начального запаса, то в этом случае его бюджетное множество представляется в виде

$$B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = \left\{\, \mathbf{x} \in X \;\middle|\; \mathbf{p}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}) \leqslant 0 \,\right\} = \{\, \mathbf{x} \in X \mid \mathbf{p}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}\boldsymbol{\omega} \,\},$$

т. е. стоимость покупок не может превышать стоимость продаж. Возможна двоякая интерпретация данного бюджетного множества. С одной стороны, его можно понимать как продажу *всего* запаса $\boldsymbol{\omega}$ с последующей покупкой набора $\mathbf{x}$. С другой стороны, данное ограничение можно интерпретировать как покупку/продажу только некоторого недостающего/избыточного относительно $\boldsymbol{\omega}$ количества благ. Последней интерпретации мы и будем придерживаться.

Аналогичные, по сути, бюджетные множества возникают в ситуации, когда потребитель помимо фиксированного дохода (или начальных запасов) получает некоторый доход, например от принадлежащих ему акций предприятий или из других источников. Естественно, что в конкретных экономических моделях бюджетное множество может принимать довольно причудливый вид. Оно может сильно отличаться (формально, но не содержательно) от приведенных выше вариантов, но многие результаты и методы рассуждения, которые мы проиллюстрируем в дальнейшем, с некоторыми изменениями могут быть перенесены и на эти более сложные модели.

Сформулируем ряд свойств бюджетных множеств, которые нам понадобятся в дальнейшем. (Доказательство этих фактов несложно и оставляется читателю в качестве упражнения.)

Теорема 2.1:

Пусть множество X — множество допустимых альтернатив и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$. Тогда выполнены следующие свойства бюджетных множеств:

{i} бюджетное множество $B(\mathbf{p}, R) = \{\, \mathbf{x} \in X \mid \mathbf{px} \leqslant R \,\}$ непусто, если[1] $R > \inf_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{px}$;

{ii} бюджетное множество $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = \{\, \mathbf{x} \in X \mid \mathbf{px} \leqslant \mathbf{p}\boldsymbol{\omega} \,\}$ непусто, если $\boldsymbol{\omega} \in X$;

{iii} бюджетные множества $B(\mathbf{p}, R)$ и $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ замкнуты и выпуклы в $\mathbb{R}^l$;

{iv} бюджетные множества $B(\mathbf{p}, R)$ и $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ ограничены тогда и только тогда, когда $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$;

{v} $B(\mathbf{p}, R) = B(\lambda\mathbf{p}, \lambda R)$ и $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = B'(\lambda\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;

{vi} если $R^* \geqslant R$, тогда $B(\mathbf{p}, R) \subset B(\mathbf{p}, R^*)$;

{vii} если $\mathbf{p}^* \geqslant \mathbf{p}$, тогда $B(\mathbf{p}^*, R) \subset B(\mathbf{p}, R)$. ┘

Как уже говорилось, для того чтобы было возможно анализировать и предсказывать поведение индивидуума, необходимо описать способ упорядочения потребительских наборов и ограничения, которым должны удовлетворять допустимые выборы. Теперь, имея эти составляющие, мы можем приступить к описанию потребительского выбора и его свойств.

2.1.2 Задача потребителя, маршаллианский спрос, непрямая функция полезности

Как уже отмечалось, гипотеза рациональности предполагает, что потребитель, ориентируясь на свои предпочтения (вкусы, оценки), выбирает наилучший вариант из числа доступных ему альтернатив, причем на предпочтения накладываются определенные ограничения, связанные с тем, что потребитель может сравнивать между собой любые возможные альтернативы и что он последователен в своих оценках. Модель поведения потребителя представляет собой конкретизацию модели выбора применительно к ситуации, когда потребитель выбирает набор из бюджетного множества. В дальнейшем

[1] Если $X = \mathbb{R}^l_+$ и цены положительны, то это условие выполняется тогда и только тогда, когда $R > 0$.

везде, не оговаривая это особо, будем исходить из рациональности потребителя, т. е. из того, что он обладает неоклассическими предпочтениями.

Пусть $B \subset X$ — бюджетное множество. Задача потребителя[2] состоит в том, чтобы подобрать такой набор $\bar{\mathbf{x}} \in B$, который был бы не хуже любого другого набора из B. Результат решения задачи потребителя (множество оптимальных потребительских наборов) называется его спросом.

Определение 2.1:

Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — предпочтения на X, $\mathcal{B}$ — совокупность бюджетных множеств $B \subset X$. Тогда отображение $\mathbf{x} \colon \mathcal{B} \rightrightarrows X$, определяемое как

$$\mathbf{x}(B) = \{\, \mathbf{x} \in B \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \ \forall \mathbf{y} \in B \,\}$$

или (что эквивалентно) как

$$\mathbf{x}(B) = \left\{\, \mathbf{x} \in B \;\middle|\; \text{если } \mathbf{y} \succ \mathbf{x}, \ \text{то } \mathbf{y} \notin B \,\right\},$$

называется спросом Ма́ршалла. В случае, если $\mathbf{x}(B)$ — одноэлементное множество для каждого $B \in \mathcal{B}$, $\mathbf{x}(B)$ называется функцией спроса Маршалла[3]. ◀

Если предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u \colon X \mapsto \mathbb{R}$, то задачу потребителя можно записать как задачу максимизации полезности при бюджетном ограничении:

$$u(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in B}.$$

Значение спроса для бюджетного множества B при этом задается следующим образом:

$$\mathbf{x}(B) = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{x} \in B} u(\mathbf{x}).$$

Если потребитель имеет фиксированный доход и осуществляет выбор среди наборов из $B(\mathbf{p}, R)$, то задача потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R принимает следующий вид:[4]:

[2] Ср. с Определением 1.6 на с. 41.

[3] Спрос как функцию цены впервые ввел и использовал, по-видимому, Антуан Огюстен Курно (A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris: Hachette, 1838).

[4] Впервые поставил задачу такого вида и охарактеризовал ее решение Герман Генрих Госсен (H. H. Gossen. *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln*, Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, 1854).

Задача потребителя

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\to \max_{\mathbf{x}\in X} \\ \mathbf{px} &\leqslant R. \end{aligned} \tag{$\mathcal{C}$}$$

Для удобства будем записывать спрос, соответствующий такой задаче, в виде $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ (вместо общего обозначения $\mathbf{x}(B)$, которое использовали выше).

В качестве иллюстрации найдем функцию спроса для лексикографических предпочтений на $X = \mathbb{R}^2_+$ (их свойства обсуждались в Примере 1.4 на с. 46 и Примере 1.5 на с. 49).

Пример 2.1

Пусть $R > 0$ и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2_{++}$. Рассмотрим потребительский набор $\left(\frac{R}{p_1}, 0\right)$ и покажем, что он представляет собой спрос потребителей при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R. Для любого потребительского набора $\tilde{\mathbf{x}}$ из бюджетного множества, в который второе благо входит в положительном количестве, справедливо, что первая компонента вектора $\tilde{\mathbf{x}}$ строго меньше, чем $\frac{R}{p_1}$. Таким образом, по определению лексикографических предпочтений потребительский набор $\left(\frac{R}{p_1}, 0\right)$ предпочтительнее любого другого потребительского набора, принадлежащего бюджетному множеству $B(\mathbf{p}, R)$. $\triangle$

Как известно из вводного курса микроэкономики, задача нахождения спроса потребителя имеет достаточно прозрачную геометрическую интерпретацию. В типичном случае[5] спрос представляет собой точку касания кривой безразличия и бюджетной линии, как это показано на Рис. 2.1. Таким образом, для того чтобы найти спрос потребителя, необходимо изобразить бюджетный треугольник и одну из кривых безразличия, двигая которую (на самом деле переходя от одной кривой безразличия к другой) найти точку касания ее и бюджетной линии.

Перейдем к рассмотрению свойств функции спроса и задачи потребителя ($\mathcal{C}$) в целом. Для определенности будем рассматривать случай, когда потребитель имеет фиксированный доход. Отметим, что многие из получаемых в дальнейшем результатов, без труда могут быть перенесены и на бюджетные множества общего вида.

[5] Как станет ясно из дальнейшего, здесь неявно предполагается локальная ненасыщаемость предпочтений.

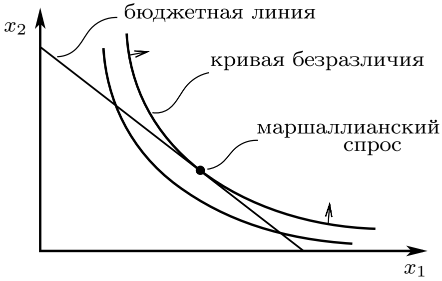


Рис. 2.1. *Маршаллианский спрос*

Теорема 2.2 (свойства маршаллианского спроса):

Пусть $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, $R > \inf_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{px}$ и потребитель имеет непрерывные предпочтения. Тогда

{i} решение задачи потребителя существует, т. е. $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \neq \varnothing$;

{ii} если предпочтения потребителя выпуклы, то $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — выпуклое множество;

{iii} если предпочтения потребителя строго выпуклы, то $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — непрерывная функция;

{iv} отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ положительно однородно нулевой степени[6], т. е. $\mathbf{x}(\lambda\mathbf{p}, \lambda R) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ $(\lambda > 0)$;

{v} если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, то $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса, т. е. $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$ для всех $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$;

{vi} если потребительский набор $\mathbf{x}$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R $(\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$ и допусти́м при ценах $\mathbf{p}'$ и доходе R' $(\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}', R'))$, набор $\mathbf{x}'$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}'$ и доходе R' $(\mathbf{x}' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R'))$ и допусти́м при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R $(\mathbf{x}' \in B(\mathbf{p}, R))$, то набор $\mathbf{x}$ является решением задачи потребителя[7] при ценах $\mathbf{p}'$ и доходе R' $(\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R'))$. ⌟

Доказательство: {i} На основе Теоремы 2.1, получаем, что $B(\mathbf{p}, R)$ — компакт. В силу того что непрерывные предпочтения представимы

[6] В дальнейшем, говоря об однородности, будем всюду предполагать положительную однородность, даже если это не указано особо.

[7] А набор $\mathbf{x}'$ является соответственно решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R.

непрерывной функцией полезности, по теореме Вейерштрасса имеем $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \neq \varnothing$.

{ii} Пусть предпочтения индивидуума выпуклы, $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ непусто и $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ — два элемента из множества $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, т. е. $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Рассмотрим потребительский набор $\mathbf{x}_\alpha = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}''$, где $0 < \alpha < 1$. В силу сделанных предположений множество $B(\mathbf{p}, R)$ выпукло. Отсюда с учетом того, что $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in B(\mathbf{p}, R)$, получаем $\mathbf{x}_\alpha \in B(\mathbf{p}, R)$, т. е. набор $\mathbf{x}_\alpha$ является допустимым в задаче потребителя. Так как $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, то по определению отображения спроса имеем $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$. Из $\mathbf{x}' \succcurlyeq \mathbf{x}''$ по свойству выпуклости предпочтений имеем[8] $\mathbf{x}_\alpha \succcurlyeq \mathbf{x}''$. Таким образом, $\mathbf{x}_\alpha$ принадлежит бюджетному множеству и не хуже любого набора из этого множества. Значит, $\mathbf{x}_\alpha \in B(\mathbf{p}, R)$.

{iii} Доказательство того, что $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — одноэлементное множество, несложно и оставляется читателю в качестве упражнения. Докажем только непрерывность.

Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{p}^n, R^n\}_{n=1}^{\infty} \to \{\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}\}$, где $R^n > \inf_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{p}^n\mathbf{x}$ для каждого n и $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) > (\mathbf{0}, \inf_{\mathbf{x}\in X} \bar{\mathbf{p}}\mathbf{x})$, такую что порождаемая последовательность $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ решений задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^n$ и доходе R^n (т. е. $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}(\mathbf{p}^n, R^n)$) сходится, т. е. $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{\mathbf{x}}$. Переходя в неравенствах $\mathbf{p}^n\mathbf{x}^n \leqslant R^n$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}} \leqslant \bar{R}$. Для доказательства непрерывности функции спроса необходимо показать, что $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$, т. е. что $\bar{\mathbf{x}}$ является оптимальным выбором потребителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{R}$.

Предположим противное, т. е. что существует набор $\hat{\mathbf{x}}$, такой что $\hat{\mathbf{x}} \succ \bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} \leqslant \bar{R}$. В силу замкнутости множества допустимых альтернатив X справедливо равенство

$$\inf_{\mathbf{x}\in X} \bar{\mathbf{p}}\mathbf{x} = \min_{\mathbf{x}\in X} \bar{\mathbf{p}}\mathbf{x},$$

Пусть $\mathbf{z}$ — допустимый потребительский набор, соответствующий минимуму. Он удовлетворяет неравенству $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{z} < \bar{R}$. Рассмотрим выпуклые комбинации $\mathbf{x}_\alpha = \alpha\mathbf{z} + (1-\alpha)\hat{\mathbf{x}}$ $(0 < \alpha < 1)$. При достаточно малых значениях α в силу непрерывности имеем, что $\mathbf{x}_\alpha \succ \bar{\mathbf{x}}$, и при этом $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}_\alpha < \bar{R}$. Обозначим один из таких наборов через $\tilde{\mathbf{x}}$.

Далее, найдется достаточно большое N такое, что при $n > N$ выполнено неравенство $\mathbf{p}^n\tilde{\mathbf{x}} < R^n$. Пусть это не так, т. е. существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что для любого k выполняется $\mathbf{p}^{n_k}\tilde{\mathbf{x}} \geqslant R^{n_k}$. Тогда, перейдя к пределу, мы получили бы $\bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{x}} \geqslant \bar{R}$, что противоречит выбору $\tilde{\mathbf{x}}$. Для каждого n, такого что $\mathbf{p}^n\tilde{\mathbf{x}} < R^n$, в силу оптимальности $\mathbf{x}^n$ мы долж-

[8] Ясно, что $\mathbf{x}_\alpha \sim \mathbf{x}''$.

ны иметь $\mathbf{x}^n \succ \tilde{\mathbf{x}}$. Так как предпочтения непрерывны, то, переходя к пределу, получаем $\bar{\mathbf{x}} \succcurlyeq \tilde{\mathbf{x}}$. Тем самым мы пришли к противоречию. Это означает, что набор $\bar{\mathbf{x}}$ оптимален при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{R}$, т. е. $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$. Таким образом, доказана непрерывность функции спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ по ценам и доходу.

Замечание: В общем случае выпуклых предпочтений, используя с незначительными изменениями предложенную схему доказательства, можно продемонстрировать, что отображение спроса имеет замкнутый график. См. также задачу 2.96.

{iv} Доказательство несложно и оставляется читателю в качестве упражнения.

{v} Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — отображение спроса, для которого не выполнен закон Вальраса, т. е. существует $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, такой что $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} < R$. Тогда по свойству локальной ненасыщаемости в любой окрестности точки $\bar{\mathbf{x}}$ должен существовать набор $\tilde{\mathbf{x}}$, такой что $\tilde{\mathbf{x}} \succ \bar{\mathbf{x}}$. Если выбрать достаточно малую окрестность, то $\tilde{\mathbf{x}}$ будет удовлетворять бюджетному ограничению ($\mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} \leqslant R$), что противоречит оптимальности набора $\bar{\mathbf{x}}$.

{vi} Так как $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{p}, R)$, то $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}'$. Аналогично из того, что $\mathbf{x}' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R')$ и $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}', R')$, следует $\mathbf{x}' \succcurlyeq \mathbf{x}$. Таким образом, $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$, откуда $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R')$. ■

Поясним содержание данного утверждения. Пункты {i}–{v} достаточно прозрачны и являются стандартными свойствами задач математического программирования. В них показаны существование решения задачи потребителя и базовые свойства, которым удовлетворяет отображение спроса: однородность, выпуклость, выполнение закона Вальраса (в точке оптимума бюджетное ограничение выходит на равенство).

Свойство {vi} является вариантом слабой аксиомы выявленных предпочтений (см. Определение 1.20 на с. 82). Если в некоторой ситуации потребителю были доступны потребительские наборы $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ и был выбран (однозначно[9]) потребительский набор $\mathbf{x}$, то тем самым выбор явно указывает, что набор $\mathbf{x}$ лучше набора $\mathbf{x}'$. Таким образом, если в какой либо другой ситуации *рациональный* потребитель выбирает набор $\mathbf{x}'$, то, следовательно, набор $\mathbf{x}$ ему недоступен (не удовлетворяет бюджетному ограничению). Данное свойство говорит о невозможности существования двух ситуаций выбора, в одной

[9] Иначе говоря, мы имеем функцию спроса, а не многозначное отображение.

из которых потребитель своим выбором сигнализирует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}'$, а в другой ему доступны и $\mathbf{x}$, и $\mathbf{x}'$, но он выбирает $\mathbf{x}'$.

Следующий пример иллюстрирует дополнительные свойства, которым удовлетворяет спрос, порожденный гомотетичными предпочтениями.

Пример 2.2

Будем исходить из того, что рассматриваемые гомотетичные предпочтения являются непрерывными. В этом случае их можно представить положительно однородной первой степени функцией полезности. Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$ — отображения спроса при ценах $\mathbf{p}$ и доходах R и 1 соответственно. Покажем, что $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$, т. е. спрос однороден первой степени по доходу.

Докажем, что $R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1) \subset \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Для этого нужно доказать, что если $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$, то $R\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Очевидно, что $R\bar{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{p}, R)$. Покажем, что в $B(\mathbf{p}, R)$ нет наборов более предпочтительных, чем $R\bar{\mathbf{x}}$. Пусть это не так и существует $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, такой что $u(\hat{\mathbf{x}}) > u(R\bar{\mathbf{x}})$. Для набора $\frac{1}{R}\hat{\mathbf{x}}$ выполнено $\frac{1}{R}\hat{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{p}, 1)$, и, поскольку функция полезности однородна, $u\left(\frac{1}{R}\hat{\mathbf{x}}\right) > u(\bar{\mathbf{x}})$. Но существование такого набора противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$. Поэтому, $R\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$.

Обратное включение, а именно $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \subset R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$, доказывается аналогично. Тем самым показано, что для случая положительно однородной функции полезности кривые Энгеля представляют собой конусы, выходящие из начала координат. Если спрос однозначен, то кривые Энгеля являются лучами. Доказательство несложно перестроить для общего случая (не обязательно непрерывных) гомотетичных предпочтений. $\triangle$

Теперь получим свойства спроса для предпочтений, представимых квазилинейной функцией полезности.

Пример 2.3

Функция полезности вида $u(\mathbf{x}) = s(x_1, \ldots, x_{l-1}) + x_l = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$ называется квазилинейной[10]. Здесь через $\mathbf{x}_{-l}$ мы обозначили вектор потребления всех благ, кроме l-го. Предположим, что соответствующее множество потребительских наборов имеет вид $X = \mathbb{R}_{+}^{l-1} \times \mathbb{R}$, т. е. не накладывается ограничение неотрицательности потребления l-го блага. Оказывается, что для такой функции полезности спрос на первые $l - 1$ благо не зависит от дохода, т. е. $\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R) = \mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R')$ при любых ценах $\mathbf{p}$ и доходах R, R'.

[10] Свойства экономики, в которой функции полезности всех потребителей квазилинейны, рассматриваются в гл. 5.

Действительно, пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Докажем, что $(\mathbf{x}_{-l}, (R'-R)/p_l + x_l) \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R')$. Пусть это не так и в бюджетном множестве $B(\mathbf{p}, R')$ существует вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, который имеет более высокую полезность, чем $(\mathbf{x}_{-l}, (R' - R)/p_l + x_l)$. Другими словами, существует вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, для которого

$$\mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} \leqslant R' \quad \text{и} \quad s(\tilde{\mathbf{x}}_{-l}) + \tilde{x}_l > s(\mathbf{x}_{-l}) + \frac{R' - R}{p_l} + x_l.$$

В таком случае потребительский набор $(\tilde{\mathbf{x}}_{-l}, (R - R')/p_l + \tilde{x}_l)$ принадлежит бюджетному множеству $B(\mathbf{p}, R)$ и имеет более высокую полезность, чем $\mathbf{x}$, т. е.

$$\mathbf{p}_{-l}\tilde{\mathbf{x}}_{-l} + R - R' + p_l\tilde{x}_l \leqslant R \quad \text{и} \quad s(\tilde{\mathbf{x}}_{-l}) + \frac{R - R'}{p_l} + \tilde{x}_l > s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l,$$

а это противоречит выбору $\mathbf{x}$.

Таким образом, $\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R) \subset \mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R')$. Обратное включение доказывается по аналогии.

Если множество потребительских наборов имеет вид $X = \mathbb{R}^l_+$, то указанное свойство выполняется не всегда. Если функция $s(\cdot)$ является вогнутой, $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, $x_l > 0$ (ограничение неотрицательности неактивно) и $(R' - R)/p_l + x_l \geqslant 0$, то $(\mathbf{x}_{-l}, (R' - R)/p_l + x_l) \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R')$ (см. задачу 2.13). $\triangle$

Выше мы рассмотрели основные свойства маршаллианского спроса. Теперь остановимся на вопросе непосредственного нахождения спроса при заданных предпочтениях (функции полезности) при положительных ценах и доходе. Техника нахождения спроса потребителя опирается на применение теоремы Куна—Таккера к задаче потребителя ($\mathcal{C}$) в предположении, что функция полезности $u(\cdot)$ является дифференцируемой. Лагранжиан для этой задачи имеет следующий вид:

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda(R - \mathbf{p}\mathbf{x}),$$

где λ — множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению.

Рассмотрим сначала случай, когда спрос потребителя $\bar{\mathbf{x}}$ является внутренней точкой его множества допустимых потребительских наборов ($\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$). В этом случае согласно теореме Куна—Таккера найдется множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такой что выполнено

$$\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda\mathbf{p}.$$

(Предполагается, что $\mathbf{p} > 0$, поэтому градиент единственного ограничения задачи не равен нулю и, следовательно, выполнены условия регулярности, требуемые для справедливости теоремы Куна—Таккера.) Кроме того, согласно той же теореме Куна—Таккера, должно быть выполнено следующее условие дополняющей нежесткости:

$$(R - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}})\lambda = 0.$$

Если $\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, то множитель Лагранжа положителен и поэтому выполняется закон Вальраса $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$.

Рассмотрим теперь случай, когда спрос не обязательно является внутренним. Предположим, что множество допустимых потребительских наборов X задается неравенствами $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. Предположим также, что функция полезности задана на некотором открытом множестве, включающем в себя X (например, на $\mathbb{R}^l$). Условия Куна—Таккера для набора $\bar{\mathbf{x}}$ и множителя Лагранжа λ имеют в таком случае следующий вид:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \nabla u(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda\mathbf{p} \leqslant 0; & (2)\ (\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda\mathbf{p})\bar{\mathbf{x}} = 0; \\ (3)\ \lambda(R - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}) = 0; & (4)\ \lambda \geqslant 0. \end{array}$$

Если $\bar{\mathbf{x}}$ является спросом потребителя, то согласно теореме Куна—Таккера найдется λ, такой что $(\bar{\mathbf{x}}, \lambda)$ удовлетворяют приведенным условиям.

В задаче имеются l ограничений на неотрицательность потребления и бюджетное ограничение. При положительных ценах и доходах хотя бы одно из них не является активным. Очевидно, что градиенты остальных ограничений будут линейно независимыми. Градиент бюджетного ограничения равен $-\mathbf{p} < \mathbf{0}$, градиенты остальных ограничений имеют вид $\mathbf{e}^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (i-й орт). Таким образом, выполнены условия регулярности Куна—Таккера[11].

Величины $\bar{\mathbf{x}}$ и λ, удовлетворяющие условиям Куна—Таккера, можно искать перебором, рассматривая все возможные варианты: каждая из переменных $\bar{x}_i$ может быть положительной либо равной нулю; то же самое верно и для множителя Лагранжа λ. Всего имеется 2^{l+1} вариантов (часть из которых заведомо невозможны). Для каждого из вариантов следует рассмотреть, являются ли условия совместными, и, если да, то найти соответствующее множество решений.

[11] Здесь можно применить и условие регулярности Слейтера. Действительно, бюджетное множество выпукло; при положительных ценах и доходе оно имеет внутренние точки. (На самом деле в рассматриваемом случае наличия внутренних точек даже и не требуется, поскольку все ограничения линейны.)

Рассмотрим свойства решений. Если функция полезности такова, что для всех допустимых наборов $\mathbf{x}$ хотя бы для одного блага x_i выполняется неравенство $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$, то, как следует из условия (1), для найденных решений $\lambda > 0$. По условию дополняющей нежесткости (3) из $\lambda > 0$ следует, что $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$ (закон Вальраса). Выполнение закона Вальраса для оптимальных потребительских наборов гарантировано также в случае, когда предпочтения локально ненасыщаемы (см. Теорему 2.2). Поскольку цены и доходы положительны, из $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$ следует, что хотя бы одно благо должно потребляться в положительном количестве.

Условие (1) означает, что для каждого из благ должно быть выполнено неравенство

$$\frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \leqslant \lambda p_i.$$

Для тех же благ, которые потребляются в положительном количестве ($\bar{x}_i > 0$), из условия дополняющей нежесткости (2) следует, что выполнено равенство

$$\frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_i} = \lambda p_i.$$

Предположим, что $\lambda > 0$ и k — такое благо, что $\bar{x}_k > 0$, а i — любое другое благо. Исключая множитель Лагранжа из условий Куна—Таккера, получим

$$\frac{p_i}{p_k} \geqslant \frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_i}{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_k} = MRS^{i/k}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Если благо i таково, что $x_i > 0$, то это условие выполняется как равенство:

$$\frac{p_i}{p_k} = \frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_i}{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_k} = MRS^{i/k}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Данное свойство должно быть известно читателю из вводного курса микроэкономики и означает, что решение задачи потребителя характеризуется равенством предельной нормы замены (замещения) любых двух благ отношению цен этих благ.

Можно использовать и несколько иной способ отыскания спроса потребителя, если он не обязательно является внутренним. Каждая из переменных $\bar{x}_i$ может быть либо положительной, либо равной нулю. Если «забыть» про блага, потребление которых нулевое, то по остальным благам потребительский набор является внутренним и можно приравнять производные Лагранжиана к нулю. Всего при таком переборе имеется 2^l вариантов. Для каждого из вариантов можно вычислить решение, а потом выбрать из этих решений то, которому соответствует наибольшее значение полезности.

Пусть нашлись некоторые $\bar{\mathbf{x}}$ и λ, удовлетворяющие условиям Куна—Таккера. Условия Куна—Таккера являются достаточными для того, чтобы потребительский набор $\bar{\mathbf{x}}$ был решением задачи потребителя ($\mathcal{C}$), если функция полезности $u(\cdot)$ вогнута. Условие вогнутости можно заменить на условие квазивогнутости, если выполнено $\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$.

Проиллюстрируем на примере применение достаточных условий оптимальности для нахождения функции спроса.

Пример 2.4

Пусть множество допустимых альтернатив $X = \mathbb{R}^l_+$ и предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$, где $a > 0$. Данная функция строго вогнута (как сумма строго вогнутых функций). (Отметим также, что $u(\mathbf{x})$ строго монотонна.) Предположим, что решение внутреннее. Тогда оно подпадает под условия теоремы Куна—Таккера; при этом условия Куна—Таккера являются достаточными условиями оптимальности, коль скоро функция полезности вогнута. Таким образом, если найдутся вектор $\mathbf{x} > 0$ и множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такие что для них выполнены условия Куна—Таккера, то такой $\mathbf{x}$ является решением задачи. Из строгой вогнутости целевой функции следует, что $\mathbf{x}$ — единственное решение задачи.

Функция Лагранжа для задачи потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ имеет вид

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2} + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Условия Куна—Таккера имеют вид

$$\frac{\partial\mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0, \qquad \frac{\partial\mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_2} = \frac{a}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0,$$
$$\frac{\partial\mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda} = R - p_1x_1 - p_2x_2 \geqslant 0, \qquad \frac{\partial\mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda}\lambda = (R - p_1x_1 - p_2x_2)\lambda = 0.$$

Из этих условий заключаем, что $\lambda > 0$, т. е. бюджетное ограничение выполняется как равенство:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{\sqrt{x_2}}{a\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{или} \quad x_2 = \left(a\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1.$$

Подставляя полученное выражение для x_2 в бюджетное ограничение, получим

$$\left(p_1 + a^2\frac{(p_1)^2}{p_2}\right)x_1 = R,$$

откуда

$$x_1 = \frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}$$

и

$$x_2 = \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}.$$

Таким образом, функция маршаллианского спроса имеет вид

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}\right).$$

Легко видеть, что полученная нами функция спроса удовлетворяет всем свойствам функции спроса, установленным в Теореме 2.2 (проверьте это самостоятельно). $\triangle$

Перейдем теперь к рассмотрению другого понятия, относящегося к потребительскому выбору, а именно понятия непрямой функции полезности[12].

Определение 2.2:

Непрямой функцией полезности[13] называется функция, которая ценам $\mathbf{p}$ и доходу R сопоставляет значение полезности $u(\bar{\mathbf{x}})$, где $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи потребителя (т. е. $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$). ◀

Естественно, область определения непрямой функции полезности — это такие пары цен и доходов $(\mathbf{p}, R)$, при которых существует решение задачи потребителя. Рассматриваемая нами функция определена, например, при всех положительных ценах и доходах $R > \inf_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{px}$ в случае, когда предпочтения непрерывны.

Следующая теорема устанавливает основные свойства непрямой функции полезности. Эти свойства позволяют, в частности, делать выводы об изменении полезности потребителя при изменении бюджетного множества.

[12] Английский термин *indirect utility function* также иногда переводят на русский язык как «косвенная функция полезности».

[13] Непрямая функция полезности впервые рассматривалась в работе G. B. Antonelli. *Sulla teoria matematica della economia politica*, Pisa: Tipografia del Falchetto, 1886.

Теорема 2.3 (свойства непрямой функции полезности):
Пусть выполнены предположения Теоремы 2.2. Тогда

{i} функция $v(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по $(\mathbf{p}, R)$: $v(\lambda\mathbf{p}, \lambda R) = v(\mathbf{p}, R)$ $(\lambda > 0)$;
{ii} функция $v(\mathbf{p}, R)$ не убывает по доходу ($v(\mathbf{p}, R') \geqslant v(\mathbf{p}, R)$ при $R' > R$), причем строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы;
{iii} функция $v(\mathbf{p}, R)$ не возрастает по ценам ($v(\mathbf{p}, R) \leqslant v(\mathbf{p}', R)$ при $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{p}'$), причем строго убывает по ценам, если предпочтения локально ненасыщаемы;
{iv} функция $v(\mathbf{p}, R)$ квазивыпукла по $(\mathbf{p}, R)$;
{v} функция $v(\mathbf{p}, R)$ непрерывна. ⌟

Доказательство: {i} Однородность нулевой степени следует из определения непрямой функции полезности и однородности нулевой степени функции спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ (см. Теорему 2.2).

{ii} Покажем, что $v(\mathbf{p}, R)$ не убывает по R. Рассмотрим непрямую функцию полезности при двух разных уровнях дохода R' и R, таких что $R' > R$. Нестрогое неравенство $v(\mathbf{p}, R') \geqslant v(\mathbf{p}, R)$ следует из того, что при $R' > R$ бюджетное множество $B(\mathbf{p}, R')$ содержит бюджетное множество $B(\mathbf{p}, R)$[14]. Если бы при $R' > R$ мы имели $v(\mathbf{p}, R') = v(\mathbf{p}, R)$, то наборы из $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ принадлежали бы $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R')$, но для них не выполнялся бы закон Вальраса. Этого при локальной ненасыщаемости предпочтений быть не может, значит, должно выполняться строгое неравенство $v(\mathbf{p}, R') > v(\mathbf{p}, R)$.

{iii} Доказательство данного пункта в целом повторяет доказательство предыдущего и оставляется читателю в качестве упражнения.

{iv} Мы хотим доказать, что для любого $\alpha \in [0, 1]$ выполнено соотношение[15]

$$v(\alpha\mathbf{p}^1 + (1-\alpha)\mathbf{p}^2, \alpha R^1 + (1-\alpha)R^2) \leqslant \max\{v(\mathbf{p}^1, R^1), v(\mathbf{p}^2, R^2)\}.$$

Пусть $\mathbf{x}$ — решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^\alpha = \alpha\mathbf{p}^1 + (1-\alpha)\mathbf{p}^2$ и доходе $R^\alpha = \alpha R^1 + (1-\alpha)R^2$, т. е. $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^\alpha, R^\alpha)$. Очевидно, что $\mathbf{x}$ является допустимым либо при ценах $\mathbf{p}^1$ и доходе R^1, либо при ценах $\mathbf{p}^2$ и доходе R^2. Действительно, если бы это было неверно, тогда выполнялись бы неравенства $\mathbf{p}^1\mathbf{x} > R^1$ и $\mathbf{p}^2\mathbf{x} > R^2$. Взяв

[14] Отметим, что случай $B(\mathbf{p}, R') = B(\mathbf{p}, R)$ не исключен.

[15] Напомним, что функция $f(\mathbf{x})$ называется квазивыпуклой, если функция $-f(\mathbf{x})$ является квазивогнутой.

первое неравенство с весом α, а второе — с весом $(1-\alpha)$ и сложив, получаем $\mathbf{p}^\alpha \mathbf{x} > R^\alpha$. Это противоречит тому, что $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^\alpha, R^\alpha)$. Таким образом, выполнено либо $\mathbf{p}^1\mathbf{x} \leqslant R^1$, либо $\mathbf{p}^2\mathbf{x} \leqslant R^2$. Без потери общности предположим, что $\mathbf{p}^1\mathbf{x} \leqslant R^1$. Из того, что $v(\mathbf{p}^1, R^1)$ есть по определению значение целевой функции на оптимальном решении задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^1$ и доходе R^1, следует что $v(\mathbf{p}^1, R^1) \geqslant u(\mathbf{x})$, так как $\mathbf{x}$ — допустимое решение этой задачи. Тем более должно выполняться и требуемое соотношение

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{p}^\alpha, R^\alpha) \leqslant \max\{v(\mathbf{p}^1, R^1), v(\mathbf{p}^2, R^2)\}.$$

{v} В предположении строгой выпуклости предпочтений непрерывность непрямой функции полезности следует из определения функции спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и ее непрерывности, которую мы установили в Теореме 2.2. Для доказательства непрерывности в общем случае следует воспользоваться компактностью бюджетного множества, непрерывностью бюджетного множества по ценам (Теорема B.46 в Приложении B на с. 1129) и теоремой Бержа (Теорема B.60 на с. 1134). ■

Проиллюстрируем понятие непрямой функции полезности на примерах. Первый из них относится к гомотетичным предпочтениям.

Пример 2.5 (продолжение Примера 2.2)
Выше мы показали, что функция маршаллианского спроса при гомотетичности предпочтений (другими словами, при однородности функции полезности) однородна первой степени по доходу, т. е. $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$. Таким образом, $v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = u(R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1))R = a(\mathbf{p})R$, где в качестве $a(\mathbf{p})$ выступает $u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1))$. △

Второй пример относится к квазилинейным предпочтениям.

Пример 2.6 (продолжение Примера 2.3)
Для квазилинейной функции полезности $u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$, заданной на $X = \mathbb{R}_+^{l-1} \times \mathbb{R}$, мы вывели, что спрос на первые $l-1$ благо не зависит от дохода. Введем в рассмотрение функцию $\mathbf{x}_{-l}^*(\cdot)$ («функцию спроса»), такую что она вектору цен $\mathbf{p}$ ставит в соответствие спрос на все блага, кроме l-го: $\mathbf{x}_{-l}^*(\mathbf{p}) \in \mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R)$. Функция полезности возрастает по l-му благу, поэтому бюджетное ограничение выполняется как равенство в точке спроса. Подставляя бюджетное ограничение в функцию полезности, получаем следующее выражение для непрямой функции полезности:

$$v(\mathbf{p}, R) = s(\mathbf{x}_{-l}^*(\mathbf{p})) + \frac{R - \mathbf{p}_{-l}\mathbf{x}_{-l}^*(\mathbf{p})}{p_l}.$$ △

Пример 2.7 (продолжение Примера 2.4)
Непрямая функция полезности будет иметь вид:

$$v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}} + a\sqrt{\frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{R}{p_2 + a^2p_1}}\left(\frac{p_2 + a^2p_1}{\sqrt{p_1p_2}}\right) = \sqrt{\frac{R(p_2 + a^2p_1)}{p_1p_2}}.$$

Проверим выполнение свойств непрямой функции полезности, установленных нами в Теореме 2.3.

Возрастание непрямой функции полезности по доходу очевидно в силу возрастания функции $\sqrt{x}$.

Убывание непрямой функции полезности по ценам следует из того факта, что функции $\frac{1}{p_1}$ и $\frac{a^2}{p_2}$ убывают по ценам и $v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{R\left(\frac{1}{p_1} + \frac{a^2}{p_2}\right)}$.

Проверка квазивогнутости непрямой функции полезности достаточно громоздка, и мы ее проводить не будем. Желающие могут проделать это самостоятельно. $\triangle$

2.1.3 Задача минимизации расходов и хиксианский спрос

Рассмотрим вопрос о том, какие денежные средства требуются потребителю при данных ценах для достижения заданного уровня благосостояния и какие потребительские наборы обеспечивают минимальное значение потребительских расходов. Ответы на эти вопросы можно получить с помощью следующей задачи:

Задача минимизации потребительских расходов

$$\begin{aligned} \mathbf{ph} &\to \min_{\mathbf{h}\in X} \\ \mathbf{h} &\succcurlyeq \mathbf{x}. \end{aligned} \qquad (\mathcal{H})$$

В этой задаче требование к минимально допустимому уровню благосостояния задается потребительским набором $\mathbf{x}$. В верхнем лебеговом множестве набора $\mathbf{x}$, т. е. в $L^+(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}$, ищется самый дешевый (в ценах $\mathbf{p}$) набор. На основе этой задачи приходим к понятию хиксианского спроса.

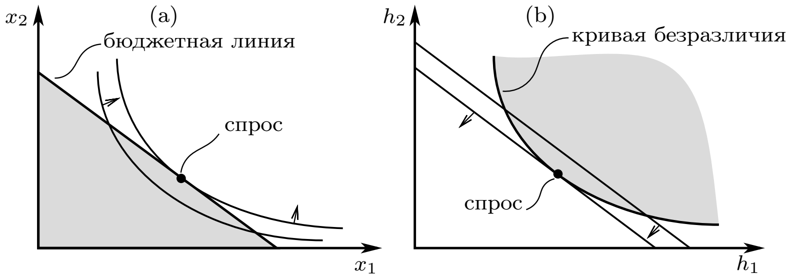


Рис. 2.2. *(a) Маршаллианский и (b) хиксианский спрос*

Определение 2.3:

Отображение

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{h} \in L^+(\mathbf{x})} \mathbf{ph}$$

называется спросом по Хиксу (хиксианским спросом)[16]. В случае если данное отображение является однозначным, $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ называется функцией спроса по Хиксу[17]. ◀

Таким образом, хиксианский спрос при заданных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$ — это *самый дешевый* (в ценах $\mathbf{p}$) потребительский набор среди всех наборов, которые *не хуже*, чем $\mathbf{x}$, в то время как обычный (маршаллианский) спрос — это *наилучший* с точки зрения предпочтений индивидуума набор в *бюджетном* множестве. Рис. 2.2 иллюстрирует различие понятий маршаллианского спроса и хиксианского спроса в случае двух благ.

[16]Приведенное здесь определение хиксианского спроса не является классическим. В большинстве учебников хиксианский спрос определяется как набор, который дает заданный уровень *полезности*. Преимуществом данного здесь определения является то, что в нем не используются понятия и термины, ассоциирующиеся с кардиналистским подходом.

Наше изложение следует в русле ординалистского подхода к теории потребительского спроса, развитого Лайонелем Мак-Кензи (L. McKenzie▪Demand Theory Without a Utility Index, *Review of Economic Studies* **24** (1957): 183–189). Поскольку исходными при ординалистском подходе являются предпочтения, желательно по возможности вводить такие понятия, которые не опираются непосредственно на функцию полезности.

[17]Понятие хиксианского спроса появилось и получило развитие в работах Джона Хикса (J. R. Hicks▪*Value and Capital*, Oxford University Press, 1939, рус. пер. Дж. Р. Хикс▪*Стоимость и капитал*, М.: Прогресс, 1993), Пола Самуэльсона (P. A. Samuelson▪*Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947) и Лайонеля Мак-Кензи (см. сноску 16).

Если предпочтения представимы функцией полезности $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$, отображение хиксианского спроса может быть найдено как решение параметрического семейства задач математического программирования:

$$\begin{aligned} \mathbf{ph} &\to \min_{\mathbf{h}\in X} \\ u(\mathbf{h}) &\geqslant u(\mathbf{x}), \end{aligned} \qquad (\mathcal{H}_u)$$

каждая из которых называется двойственной (взаимной) к соответствующей задаче потребителя (задаче поиска маршаллианского спроса).

Следующая теорема устанавливает основные свойства отображения (функции) хиксианского спроса.

Теорема 2.4 (свойства хиксианского спроса):

Пусть $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, предпочтения потребителя являются непрерывными. Тогда

{i} решение задачи $(\mathcal{H})$ существует, т. е. $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}) \neq \varnothing$ для любого $\mathbf{x} \in X$;

{ii} если предпочтения потребителя выпуклы, то $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ — выпуклое множество;

{iii} если предпочтения потребителя строго выпуклы, то $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ — непрерывная функция;

{iv} отображение $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ однородно нулевой степени по $\mathbf{p}$, т. е. $\mathbf{h}(\lambda\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ $(\lambda > 0)$;

{v} если $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$, то $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}') = \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}'')$;

{vi} для каждого $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ справедливо $\mathbf{h} \sim \mathbf{x}$. ┘

Доказательство: Доказательство в общих чертах соответствует схеме доказательства Теоремы 2.2 и оставляется читателю в качестве упражнения. ■

Обсудим, как и в случае с маршаллианским спросом, необходимые и достаточные условия оптимума задачи минимизации расходов (поиска хиксианского спроса)

$$\begin{aligned} \mathbf{ph} &\to \min_{\mathbf{h}\geqslant\mathbf{0}} \\ u(\mathbf{h}) &\geqslant u(\mathbf{x}), \end{aligned}. \qquad (\mathcal{H}_u^+)$$

Здесь предполагается, что $X = \mathbb{R}^l_+$, т. е. $\mathbf{h} \geqslant \mathbf{0}$ — условие того, что $\mathbf{h}$ — допустимый набор и что функция полезности $u(\cdot)$ определена на более широком, чем $X = \mathbb{R}^l_+$, открытом множестве (например, на $\mathbb{R}^l$) и является дифференцируемой.

Условия Куна—Таккера для задачи ($\mathcal{H}_u^+$) в точке $\hat{\mathbf{h}}$ имеют вид

$$
\begin{array}{ll}
-\mathbf{p} + \lambda \nabla u(\hat{\mathbf{h}}) \leqslant 0, & (-\mathbf{p} + \lambda \nabla u(\hat{\mathbf{h}}))\hat{\mathbf{h}} = 0, \\
\lambda(u(\hat{\mathbf{h}}) - u(\mathbf{x})) = 0, & \lambda \geqslant 0.
\end{array}
$$

Если набор $\hat{\mathbf{h}}$, допустимый в задаче ($\mathcal{H}_u^+$), удовлетворяет этим условиям при некотором множителе Лагранжа λ и функция полезности квазивогнута (предпочтения выпуклы), то по обратной теореме Куна—Таккера $\hat{\mathbf{h}}$ является решением этой задачи. Действительно, целевая функция $\mathbf{ph}$ линейна, поэтому она вогнута; ограничение же задается квазивогнутой функцией $u(\mathbf{h}) - u(\mathbf{x})$.

Далее, если $\hat{\mathbf{h}}$ — решение рассматриваемой задачи, то (при выполнении условий регулярности) найдется множитель Лагранжа λ, такой что для $(\hat{\mathbf{h}}, \lambda)$ выполнены условия Куна—Таккера. Предположение $\nabla u(\hat{\mathbf{h}}) \neq \mathbf{0}$ обеспечивает выполнение условий регулярности в форме Куна—Таккера.

Таким образом, приведенные условия являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы набор $\hat{\mathbf{h}}$ ($\hat{\mathbf{h}} \succcurlyeq \mathbf{x}$) был решением задачи минимизации расходов.

Для внутреннего набора $\hat{\mathbf{h}} \in \operatorname{int} X$ в более общей задаче ($\mathcal{H}_u$) условия Куна—Таккера принимают более простой вид:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{p} + \lambda \nabla u(\hat{\mathbf{h}}) = 0, & \\
\lambda(u(\hat{\mathbf{h}}) - u(\mathbf{x})) = 0, & \lambda \geqslant 0.
\end{array}
$$

Заметим попутно, что, как нетрудно видеть, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и доходе $R > 0$ и λ — множитель Лагранжа, отвечающий этому решению, такой что $\lambda > 0$, то множитель Лагранжа в соответствующей задаче поиска хиксианского спроса λ должен быть равен $\frac{1}{\lambda}$. (О взаимосвязи двух задач речь пойдет ниже; см. Теорему 2.6.)

Используя условия Куна—Таккера, найдем теперь функцию хиксианского спроса для случая, рассматривавшегося в Примере 2.4.

Пример 2.8 (продолжение Примера 2.4)
Для функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ хиксианский спрос является решением следующей задачи:

$$
p_1 h_1 + p_2 h_2 \to \min_{\mathbf{h} \geqslant 0}
$$

$$
\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} \geqslant u(\mathbf{x}).
$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$
\mathbb{L}(\mathbf{h}, \lambda) = -p_1 h_1 - p_2 h_2 + \lambda(\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} - u(\mathbf{x})).
$$

Предположим, что решение является внутренним, т. е. $h_1 > 0$, $h_2 > 0$. При этом из условий Куна—Таккера получим, что

$$-p_1 + \lambda \frac{1}{2\sqrt{h_1}} = 0, \quad -p_2 + \lambda a \frac{1}{2\sqrt{h_2}} = 0.$$

Нетрудно заметить, что из этих двух равенств следует $\lambda > 0$, а значит, $\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} = u(\mathbf{x})$.

Отсюда имеем $\frac{\sqrt{h_2}}{a\sqrt{h_1}} = \frac{p_1}{p_2}$ или $h_2 = \left(a\frac{p_1}{p_2}\right)^2 h_1$. Так как $\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} = u(\mathbf{x})$, то $\sqrt{h_1} + a^2\frac{p_1}{p_2}\sqrt{h_1} = u(\mathbf{x})$ или $h_1 = \left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2+a^2p_1}\right)^2$, откуда $h_2 = \left(\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2+a^2p_1}\right)^2$.

Читатель может проверить, что невнутренние наборы, удовлетворяющие ограничению задачи, дают более высокое значение расходов, чем найденный набор, т. е. найденный набор является оптимумом, причем единственным, что, впрочем, очевидно, так как решение задачи минимизации расходов при строго вогнутой функции полезности (строго выпуклых предпочтениях) единственно, а условия Куна—Таккера в данном случае являются не только необходимыми, но и достаточными. Таким образом, хиксианский спрос равен

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2, \left(\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2\right).$$

Проиллюстрируем теперь свойства функции хиксианского спроса, установленные в Теореме 2.4. То, что хиксианский спрос однороден нулевой степени по ценам, очевидно. Действительно,

$$\mathbf{h}(t\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{tp_2 u(\mathbf{x})}{tp_2 + a^2 tp_1}\right)^2, \left(\frac{atp_1 u(\mathbf{x})}{tp_2 + a^2 tp_1}\right)^2\right) = \\ = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2, \left(\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2\right) = t^0 \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Проверим, что $u(\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$. Подставив хиксианский спрос в функцию полезности, получим, что

$$u(\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \sqrt{h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x})} + a\sqrt{h_2(\mathbf{p}, \mathbf{x})} = \\ = \frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1} + a\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1} = u(\mathbf{x}). \qquad \triangle$$

Аналогом непрямой функции полезности для задачи минимизации расходов является функция расходов[18].

Определение 2.4:

Функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{ph}$, где $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — хиксианский спрос при данных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$, называется функцией расходов (затрат). ◀

Другими словами, функция расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — значение целевой функции двойственной задачи в точке оптимума при данных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$. Согласно определению для каждого достижимого уровня полезности функция расходов указывает минимальный уровень расходов (дохода), обеспечивающий такой уровень полезности.

Теорема 2.5 (свойства функции расходов):

Пусть выполнены предположения Теоремы 2.4. Тогда

{i} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ однородна первой степени по ценам: $e(\lambda\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \lambda e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ $(\lambda > 0)$;

{ii} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ не убывает по ценам: $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$ при $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{p}'$;

{iii} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — вогнутая функция цен $\mathbf{p}$;

{iv} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ непрерывна;

{v} $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. ┘

Доказательство: {i} Первый пункт утверждения следует из того, что множества решений задачи $(\mathcal{H})$ при векторе цен $\mathbf{p}$ и векторе цен $\lambda\mathbf{p}$ совпадают.

{ii} Пусть $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{h}' \in \mathbf{h}(\mathbf{p}', \mathbf{x})$. Набор $\mathbf{h}'$ является допустимым в задаче $(\mathcal{H})$ с параметрами $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, поэтому $\mathbf{ph}' \geqslant \mathbf{ph} = e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Кроме того, умножив неравенство $\mathbf{p}' \geqslant \mathbf{p}$ на неотрицательный вектор $\mathbf{h}'$, получим $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) = \mathbf{p}'\mathbf{h}' \geqslant \mathbf{ph}'$. (Заметим, что если $\mathbf{h}' > \mathbf{0}$ и $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$, то $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) > e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$.)

{iii} Мы должны показать, что для двух произвольных векторов $\mathbf{p}^1$ и $\mathbf{p}^2$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполняется соотношение $e(\alpha\mathbf{p}^1 + (1-\alpha)\mathbf{p}^2, \mathbf{x}) \geqslant \alpha e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}) + (1-\alpha)e(\mathbf{p}^2, \mathbf{x})$. Пусть $\tilde{\mathbf{h}}$ — решение двойственной задачи при ценах $\mathbf{p}^\alpha = \alpha\mathbf{p}^1 + (1-\alpha)\mathbf{p}^2$, т.е. $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x})$. Отметим, что $\mathbf{p}^\alpha\tilde{\mathbf{h}} = e(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x})$. Допустимое множество $\{\, \mathbf{h} \in X \mid \mathbf{h} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}$ не зависит от $\mathbf{p}$, поэтому потребительский набор $\tilde{\mathbf{h}}$ допусти́м в двойственной задаче как при ценах $\mathbf{p}^1$, так и при ценах $\mathbf{p}^2$. Из определения функции расходов и допустимости $\tilde{\mathbf{h}}$ имеем $e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}^1\tilde{\mathbf{h}}$

[18]Опять же, как и в случае хиксианского спроса (см. сноску 16), мы здесь используем нетрадиционное определение функции расходов. Используемый нами вариант называется измеряемой в деньгах функцией полезности.

и $e(\mathbf{p}^2, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}^2\tilde{\mathbf{h}}$. Отсюда

$$\alpha e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}) + (1-\alpha)e(\mathbf{p}^2, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}^\alpha \tilde{\mathbf{h}} = e(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x}).$$

{iv} Доказательство непрерывности оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим только, что непрерывность функции расходов по ценам следует из того, что она является вогнутой (как функция цен) и определена на открытом множестве (а любая вогнутая функция непрерывна во внутренности своей области определения).

{v⇒} Покажем, что из $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ следует $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Так как $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, то все потребительские наборы, допустимые в двойственной задаче при наборе параметров $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, являются допустимыми в этой задаче при наборе параметров $(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. В том числе допустимыми являются наборы, принадлежащие $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, а это и означает, что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$.

{v⇐} Покажем, что из $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ следует $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Предположим противное, т. е. что $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. При этом $e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и, значит, $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \subset \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Возьмем $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. В силу непрерывности предпочтений и того, что X — выпуклое множество и $\mathbf{0} \in X$, существует такое число $\alpha < 1$, что $\alpha\tilde{\mathbf{h}} \succcurlyeq \mathbf{x}$. В этом случае $\mathbf{p} \cdot (\alpha\tilde{\mathbf{h}}) = \alpha e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) < e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, что противоречит определению $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. ■

На основании пункта {v} доказанной теоремы можно говорить о функции $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, как о функции полезности, которая представляет исходные предпочтения. Это свойство — одно из самых важных свойств функции расходов и является ключевым при обсуждении вопроса о восстановлении предпочтений по наблюдаемой функции спроса (см. Приложение 2.C).

Проиллюстрируем на примере нахождение функции расходов.

Пример 2.9 (продолжение Примера 2.4)

Найдем функцию расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, соответствующую функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$. Как было показано выше, функция хиксианского спроса для рассматриваемого потребителя равна $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2, \left(\frac{a p_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2\right)$. Из определения функции расходов имеем:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= p_1 h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + p_2 h_2(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \\ &= p_1 \left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2 + p_2 \left(\frac{a p_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2 (p_2 + a^2 p_1) p_1 p_2 = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}. \end{aligned}$$

На примере данной функции проиллюстрируем выполнение свойств, установленных в Теореме 2.5.

Покажем, что полученная функция однородна первой степени по ценам:

$$e(t\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{tp_1 tp_2 (u(\mathbf{x}))^2}{tp_2 + a^2 tp_1} = t\frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} = te(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Проверим свойство неубывания по ценам. Отметим, что

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} = \frac{(u(\mathbf{x}))^2}{\frac{1}{p_1} + \frac{a^2}{p_2}}.$$

Действительно при росте p_1 величина $\frac{1}{p_1}$ убывает, что, в свою очередь, влечет рост значения дроби $\frac{(u(\mathbf{x}))^2}{\frac{1}{p_1}+\frac{a^2}{p_2}}$ и тем самым рост функции расходов.

Проверим теперь вогнутость функции расходов по ценам. Матрица вторых частных производных для функции расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}$ равна

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{2a^2 p_2^2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2+a^2p_1)^3} & \frac{2a^2 p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2+a^2p_1)^3} \\ \frac{2a^2 p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2+a^2p_1)^3} & -\frac{2a^2 p_1^2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2+a^2p_1)^3} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что первый главный последовательный минор отрицателен, а второй равен нулю. Значит, главные последовательные миноры чередуют свой знак, начиная с первого, который отрицателен. Таким образом, матрица $\mathbf{H}$ отрицательно полуопределена и соответственно функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ вогнута.

Наконец, проверим, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Действительно, в силу положительности цен имеем $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2+a^2p_1} \geqslant \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{y}))^2}{p_2+a^2p_1} \Leftrightarrow (u(\mathbf{x}))^2 \geqslant (u(\mathbf{y}))^2$. Так как функция $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ принимает только неотрицательные значения, то условие $(u(\mathbf{x}))^2 \geqslant (u(\mathbf{y}))^2$ эквивалентно условию $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. То есть $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$, откуда по определению функции полезности имеем, что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. △

Рассмотрим теперь вопрос о взаимосвязи прямой и двойственной задач потребителя. Следующая теорема, называемая теоремой взаимности (двойственности), устанавливает условия совпадения решений прямой и двойственной задач потребителя.

Теорема 2.6 (теорема взаимности /двойственности/):

{i} Если предпочтения локально ненасыщаемы, то $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ влечет $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$;

{ii} Пусть $X = \mathbb{R}^l_+$ и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, а предпочтения потребителя непрерывны. Тогда для любого $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, где $\bar{\mathbf{x}} \in X$, выполнено $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\bar{\mathbf{h}})$. ┘

Доказательство: {i} Предположим противное. Пусть $\bar{\mathbf{x}} \notin \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, т. е. в двойственной задаче существует потребительский набор $\mathbf{h}' \succcurlyeq \bar{\mathbf{x}}$, такой что $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{p}\mathbf{h}'$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что существует набор $\mathbf{h}''$, такой что $\mathbf{h}'' \succ \mathbf{h}' \succcurlyeq \bar{\mathbf{x}}$, и при этом $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{p}\mathbf{h}''$. А это противоречит оптимальности $\bar{\mathbf{x}}$ в прямой задаче потребителя.

{ii} Случай $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$ очевиден, поэтому будем исходить из того, что $\bar{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ (и следовательно, $\mathbf{p}\bar{\mathbf{h}} > 0$). Набор $\bar{\mathbf{h}}$ допусти́м в прямой задаче потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\mathbf{p}\bar{\mathbf{h}}$. Предположим, что он не является решением этой задачи. Тогда существует потребительский набор $\mathbf{x} = \mathbf{p}\bar{\mathbf{h}} \in B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\bar{\mathbf{h}}))$, такой что $\mathbf{x}' \succ \bar{\mathbf{h}}$. В силу непрерывности предпочтений найдется $0 < \alpha < 1$ такое, что $\alpha\mathbf{x}' \succcurlyeq \bar{\mathbf{h}}$. Набор $\alpha\mathbf{x}'$ сто́ит дешевле набора $\bar{\mathbf{h}}$ в ценах $\mathbf{p}$, а это противоречит оптимальности $\bar{\mathbf{h}}$ в двойственной задаче потребителя. ■

Следующая теорема является следствием предыдущей и устанавливает другие связи между характеристиками прямой и взаимной задачи потребителя.

Теорема 2.7 (соотношения двойственности, следствие Теоремы 2.6):

Пусть выполнены все предположения Теоремы 2.6. Тогда верны следующие тождества:

{i} для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) = R$;
{ii} для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$;
{iii} $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = u(\bar{\mathbf{x}})$;
{iv} $\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. ┘

Доказательство: {i} Теорема 2.6 показывает, что для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. Отсюда по определению функции расходов $e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}$. В силу локальной ненасыщаемости предпочтений $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$.

{ii} То, что для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, является тривиальным следствием пунктов {i} и {iv}.

{iii} Пусть $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ при некотором $\bar{\mathbf{x}} \in X$. Согласно пункту {vi} Теоремы 2.4 при непрерывности предпочтений должно выполняться $u(\bar{\mathbf{h}}) = u(\bar{\mathbf{x}})$. Кроме того, по доказанной теореме двойственности $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))$, т. е. набор $\bar{\mathbf{h}}$ оптимален в прямой задаче при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. Таким образом, по определению непрямой функции полезности $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = u(\bar{\mathbf{h}})$, откуда $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = u(\bar{\mathbf{x}})$.

{iv} Включение $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) \subset \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))$ доказано в теореме двойственности. Докажем обратное включение. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))$. Из пункта {i} Теоремы 2.6 следует, что $\mathbf{x} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, а из пункта {i} доказываемой теоремы — что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}})$. Из пункта {v} Теоремы 2.5 следует, что $\mathbf{x} \sim \bar{\mathbf{x}}$. Таким образом, $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, и поэтому $\mathbf{x} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. ■

Проиллюстрируем полезность установленных соотношений двойственности. Пусть, решив задачу потребителя, мы нашли функцию спроса и непрямую функцию полезности. Как демонстрируют приведенные ниже примеры, этой информации достаточно для того, чтобы найти функцию хиксианского спроса и функцию расходов, не решая соответствующую двойственную задачу.

Пример 2.10

Как показано в Примерах 2.4 и 2.7, функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ соответствует маршаллианская функция спроса

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2}; \frac{a^2 R p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2} \right)$$

и непрямая функция полезности

$$v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{\frac{R(p_2 + a^2 p_1)}{p_2 p_1}}.$$

Из соотношения $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$ имеем $\sqrt{\frac{e(\mathbf{p},\mathbf{x})(p_2 + a^2 p_1)}{p_2 p_1}} = u(\mathbf{x})$. Отсюда несложно выразить расходы через полезность: $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}$. С учетом этого легко найти хиксианский спрос:

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \mathbf{x}\left(\mathbf{p}, \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}\right) = \\ = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1} \right)^2; \left(\frac{a p_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1} \right)^2 \right).$$

Эти формулы совпадают с теми, которые получены в Примерах 2.9 и 2.8. △

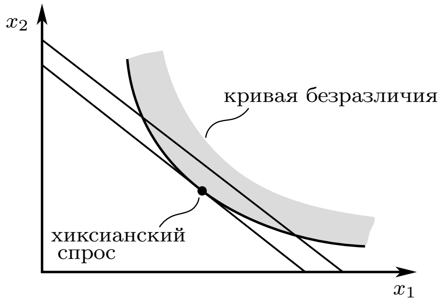


Рис. 2.3. *«Толстая» кривая безразличия*

Пример 2.11
Для гомотетичных предпочтений (однородной функции полезности) непрямая функция полезности и спрос имеют следующий вид: $v(\mathbf{p}, R) = a(\mathbf{p})R$ и $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$ (см. Примеры 2.2 и 2.5). С учетом соотношений двойственности нетрудно увидеть, что функция расходов и хиксианская функция спроса имеют вид

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x})}{a(\mathbf{p})}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \frac{u(\mathbf{x})}{a(\mathbf{p})}\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1).$$ △

Рассмотрим теперь пример, когда хиксианский и маршаллианский спросы не совпадают. Для построения этого примера достаточно рассмотреть предпочтения, не обладающие свойством локальной ненасыщаемости. В качестве таковых рассмотрим предпочтения, порождающие «толстую» кривую безразличия (такие кривые безразличия появятся, например, если взять в качестве функции полезности целую часть какой-нибудь «нормальной» функции полезности). Хиксианский спрос всегда будет лежать (в случае двух благ) на левой границе «толстой» кривой безразличия. На Рис. 2.3 эта граница изображена сплошной черной линией. Маршаллианский же спрос может лежать внутри «толстой» кривой безразличия, показанной серым. (Найдите его на приведенном рисунке.)

В этом параграфе мы рассмотрели прямую и двойственную задачи потребителя, изучили их свойства и рассмотрели некоторые основные соотношения, связывающие эти задачи. В следующем параграфе мы продолжим исследование свойств данных задач, используя аппарат дифференциального исчисления.

Задачи

2.1 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid x_1 x_2 + x_1 \geqslant 1 \,\},$$

потребитель имеет фиксированный доход $R > 0$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя при разных значениях $(\mathbf{p}, R)$. Является ли оно выпуклым? замкнутым? ограниченным? При каких значениях $(\mathbf{p}, R)$ бюджетное множество пусто?

2.2 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid x_1 x_2 \geqslant 2 \,\},$$

потребитель имеет начальный запас $\boldsymbol{\omega} = (1, 1)$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя при разных значениях $\mathbf{p}$. Является ли оно выпуклым? замкнутым? ограниченным? При каких значениях $\mathbf{p}$ бюджетное множество непусто?

2.3 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid x_1, x_2 \text{ — целые} \,\},$$

потребитель имеет фиксированный доход $R > 0$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите на графике бюджетное множество потребителя.

2.4 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид $X = \mathbb{R}^l_+$, потребитель обладает начальным запасом $\boldsymbol{\omega} = (1, 1)$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя для случая, когда в экономике имеется налог с продаж, взимаемый как процент от цены. Является ли бюджетное множество выпуклым?

2.5 Пусть в экономике наличествует один потребительский товар, продаваемый по цене p. Доход потребителя складывается из фиксированной части $R > 0$ и заработной платы wh, где h — время, которое потребитель посвящает работе, а w — почасовая ставка оплаты труда. Потребитель не может работать больше 24 часов в сутки. Запишите бюджетное множество для этой задачи. Постройте его эскиз. Является ли оно выпуклым? Что произойдет, если в модель ввести налог с заработной платы? с дохода? Предложите схему налогообложения, когда бюджетное множество невыпукло.

2.6 Предположим, что потребитель живет бесконечное число периодов времени (время дискретно). В каждый период t он в соответствии с вогнутой производственной функцией $f(k_t)$ производит некоторый товар, используя имеющийся у него капитал k_t. Произведенный товар он может либо потребить (c_t), либо направить на увеличение своего капитала (i_t). Капитал предполагается убывающим от периода к периоду с постоянной нормой выбытия $0 < \delta < 1$. Начальный запас капитала в нулевой момент времени равен k_0. Предположим также, что величины c_t, i_t, k_t могут принимать только неотрицательные значения. Запишите бюджетное множество для этой задачи. Покажите, что оно выпукло.

2.7 Для случая двух товаров изобразите эскиз бюджетного множества, если цена первого товара зависит от объема, а цена второго постоянна, причем цена первого товара убывает при росте объема. Доход потребителя предполагаем фиксированным. Является ли данное бюджетное множество выпуклым?

2.8 Докажите Теорему 2.1.

2.9 При каких условиях в пунктах {vi} и {vii} Теоремы 2.1 нестрогие неравенства и включения могут быть заменены строгими? Покажите, что без дополнительных предположений соответствующий факт, вообще говоря, неверен.

2.10 Для каждой из нижеприведенных функций найдите функцию маршаллианского спроса, функцию хиксианского спроса, непрямую функцию полезности и функцию расходов. Проиллюстрируйте соотношения двойственности между функциями маршаллианского спроса и хиксианского спроса, а также между непрямой функцией полезности и функцией расходов. Основываясь на полученных результатах, проверьте теоретические свойства этих функций.

(A) $u(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$; (B) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
(C) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + x_2$; (D) $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$;
(E) $u(\mathbf{x}) = \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$; (F) $u(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$;
(G) $u(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$; (H) $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$;
(I) $u(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$;
(J) $u(\mathbf{x}) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$;
(K) $u(\mathbf{x}) = 28x_1 + 28x_2 - 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2$;
(L) $u(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 + 6$.

2.11 Приведите пример функции полезности, для которой...

(A) средства, расходуемые потребителем на приобретение каждого блага, составляют постоянную (и положительную) долю совокупных расходов потребителя;

(B) спрос потребителя на любое благо зависит лишь от относительной цены данного блага и совокупных потребительских расходов;

(C) спрос потребителя на первые $l-1$ благ зависит лишь от относительной цены этих благ;

(D) спрос потребителя на первые $l-1$ благо зависит лишь от цены данного блага;

(E) структура спроса потребителя постоянна (отношение величины покупок блага j к величине блага 1, $j=1,\ldots,l$);

(F) множество оптимальных потребительских наборов при некоторых значениях цен и доходов не является выпуклым множеством.

2.12 Покажите, что если функция полезности потребителя однородна, то отношение функций спроса на любые два товара не зависит от уровня дохода.

2.13 Квазилинейная функция полезности $u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$ с вогнутой функцией $s(\cdot)$ определена на $X = \mathbb{R}^l_+$. Докажите, что если $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, $x_l > 0$ и $(R' - R)/p_l + x_l \geqslant 0$, то $(\mathbf{x}_{-l}, (R' - R)/p_l + x_l) \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R')$. Дайте содержательную интерпретацию этого свойства.

2.14 Для квазилинейной функции полезности $u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$, заданной на $X = \mathbb{R}^{l-1}_+ \times \mathbb{R}$, покажите, что непрямая функция полезности имеет форму Гормана $v(\mathbf{p}, R) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R$.

2.15 Предположим, что функция полезности потребителя квазилинейна и зависит от двух благ: $u(x) = s(x_1) + x_2$. Первое благо может потребляться лишь в дискретных (целых неотрицательных) количествах, а второе благо («деньги, используемые на приобретение других благ») — в любых количествах, возможно, отрицательных. Пусть $r(i) = s(i) - s(i-1)$ (оценка потребителем i-й единицы первого блага). Цена второго блага равна единице.

(A) Покажите, что $r(i)$ равна такой цене первого блага, при которой потребитель безразличен в выборе между потреблением первого блага в количестве $i-1$ и в количестве i.

(B) Покажите, что если потребитель приобретает n единиц первого блага, то выполнено соотношение $r(n) \geqslant p_1 \geqslant r(n-1)$, где p_1 — цена первого блага. При каких условиях верно и обратное утверждение?

(C) Какова величина компенсации в форме второго блага («в деньгах»), при которой потребитель будет готов полностью отказаться от потребления первого блага (увеличив тем самым потребление второго блага на величину компенсации)?

2.16 Покажите, что если функция полезности квазилинейна, причем l-е благо входит в нее линейно, то хиксианский спрос на первые $l-1$ благо не зависит от выбора кривой безразличия. Каков вид функции расходов в этом случае? При каких предположениях это справедливо?

2.17 Покажите, что если функция полезности квазилинейна, то непрямая функция полезности — выпуклая функция цен.

2.18 Докажите Теорему 2.4.

2.19 Рассмотрите функцию полезности $u = \frac{\sqrt{x_1}}{A-x_2}$ $(A > 0)$, где $x_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant x_2 < A$.

(A) Является ли эта функция полезности вогнутой? квазивогнутой? Изобразите на графике кривые безразличия.

(B) Найдите функцию спроса. Какими свойствами она обладает?

2.20 [[ABB]] Рассмотрите функцию полезности вида $u(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + y + z/(1+z)$.

(A) Покажите, что функция полезности строго монотонна, строго вогнута и непрерывна.

(B) Покажите, что если $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$ и $z > 0$, то $(x, y+z, 0) \succ (x, y, z)$.

(C) Пусть $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ и $p_2 = p_3$. Покажите, что для вектора спроса выполнено равенство $z(\mathbf{p}, R) = 0$.

(D) Рассмотрите последовательность цен $\mathbf{p}_n = (1, 1/n, 1/n)$. Чему равны пределы $z(\mathbf{p}_n, R)$ и $y(\mathbf{p}_n, R)$?

2.21 В случае, когда в экономике наличествуют всего два товара, найдите, если это возможно (или докажите, что это невозможно), маршаллианский, хиксианский спросы, непрямую функцию полезности и функцию расходов для потребителя с лексикографическими предпочтениями.

2.22 Сформулируйте и докажите аналоги Теорем 2.2–2.6 для случая, когда доход потребителя формируется за счет продажи начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$.

2.23 Сформулируйте и докажите аналоги Теорем 2.2–2.6 для случая, когда доход потребителя формируется за счет заработной платы. Почасовая ставка заработной платы равна w, потребитель располагает 24 часами времени в сутки. Время отдыха является одним из благ, количество потребления которого выбирает потребитель.

2.24 Пусть непрямая функция полезности имеет вид $a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R$. Какими свойствами должны обладать функции $a(\mathbf{p})$ и $b(\mathbf{p})$, для того чтобы данная функция была непрямой функцией полезности рационального потребителя?

2.25 Функция полезности называется псевдовогнутой, если из условия $\nabla u(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \leqslant 0$ следует, что $u(\mathbf{y}) \leqslant u(\mathbf{x})$. Покажите, что если функция полезности псевдовогнута, то условия Куна—Таккера являются достаточными условиями для нахождения решения задачи потребителя. Покажите, что любая вогнутая функция является псевдовогнутой, а любая псевдовогнутая функция — квазивогнутой.

2.26 Пусть функция полезности равна $u(\mathbf{x}) = (x_1+x_2-2)^3$. Цена на первый товар равна 1, а на второй — 2. Доход потребителя равен 3. Проверьте, что целевая функция квазивогнута и локально ненасыщаема. Покажите, что точка $(1,1)$ удовлетворяет условиям Куна—Таккера задачи потребителя, но не является оптимальной.

2.27 Пусть функция спроса некоторого потребителя равна $\mathbf{x}(\mathbf{p},R) = \left(\frac{\alpha R}{p_1}, \frac{(1-\alpha)R}{p_2}\right)$, а непрямая функция полезности равна $v(\mathbf{p},R) = \frac{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)}R}{p_1^\alpha p_2^{(1-\alpha)}}$. Найдите функцию расходов и хиксианский спрос.

2.28 Покажите, что функция $v(\mathbf{p},R) = \frac{R}{p_1} + \frac{R}{p_2}$ удовлетворяет всем свойствам непрямой функции полезности и вычислите на ее основе функцию расходов и функции спроса (маршаллианского и хиксианского).

2.29 Проверьте выполнение соотношений двойственности (взаимности) в случае, когда поведение потребителя описывается функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \lfloor x_1 x_2 \rfloor$, где $\lfloor\cdot\rfloor$ — оператор взятия целой части.

2.30 Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна, т. е. имеет вид $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$. Запишите достаточные условия оптимальности для задачи потребителя в предположении, что потребитель имеет выпуклые, локально ненасыщаемы предпочтения. Покажите, что если $u_i'(x_i) \to +\infty$ при $x_i \to 0$, то потребитель покупает все блага в положительных количествах.

2.31 Пусть обобщенная функция полезности, представляющая некоторые нетранзитивные предпочтения, имеет вид $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = y_1^{-1/2}x_2^{1/2} + \ln(x_3) - x_1^{-1/2}y_2^{1/2} - \ln(y_3)$. Найдите маршаллианский спрос данного потребителя. (Определение обобщенной функции полезности см. в п. 1.B.2 гл. 1.)

2.2 Дифференциальные свойства задачи потребителя

В данном параграфе дополнительно предполагается, что функция спроса, непрямая функция полезности и функция расходов потребителя являются дифференцируемыми. (Условия, гарантирующие дифференцируемость этих функций, приведены в Приложении 2.A). При выполнении условия дифференцируемости непрямой функции полезности, функции расходов и функций маршаллианского спроса и хиксианского спроса выполняются три важных свойства теории потребителя: лемма Шепарда, тождество Роя и уравнение Слуцкого.

Связь между функциями расходов и (хиксианского) спроса описывается леммой Шепарда[19]. Учитывая значение этого результата для теории потребления, укажем несколько его обоснований. Из леммы Шепарда следует, что по функции расходов всегда можно построить функцию (хиксианского) спроса. Отметим также, что из нее следует, что функция расходов является *дважды* непрерывно дифференцируемой, если непрерывно дифференцируемым является хиксианский спрос.

Теорема 2.8 (лемма Шепарда — первый вариант):

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16 на с. 171, тогда

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p},\mathbf{x})$$

и

$$\nabla_p e(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_{+}$. ┘

Доказательство: По определению функции расходов $e(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{p}\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$. Продифференцировав это тождество по p_i, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p},\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{l} p_j \frac{\partial h_j(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i}.$$

Остается доказать, что второе слагаемое равно нулю.

Замечание: Данное свойство стóит проинтерпретировать. Хотя при изменении цен рассматриваемых благ потребитель меняет свое поведение, предпочитая, вообще говоря, другой потребительский набор, при расчете изменения расходов на приобретение нового набора это изменение спроса потребителя в первом приближении можно не учитывать. Другими словами, новые расходы в первом приближении

[19] R. W. Shephard. *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, 1970.

рассчитываются, как если бы оптимальный выбор остался неизменным, т. е. эти новые расходы равны стоимости старого набора в новых ценах. Изменение спроса проявляется лишь во втором приближении.

Докажем это. Пусть второе слагаемое не равно нулю, например положительно, т. е. $\mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial p_i} > 0$. Рассмотрим наборы вида $\mathbf{h}_\varepsilon = \mathbf{h}(\mathbf{p} - \varepsilon\mathbf{e}^i, \mathbf{x})$, где $\mathbf{e}^i$ — i-й орт, $\varepsilon > 0$. Согласно пункту {vi} Теоремы 2.4 из непрерывности предпочтений следует, что $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \sim \mathbf{x}$ и $\mathbf{h}_\varepsilon \sim \mathbf{x}$. Из $\mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial p_i} > 0$ следует, что при достаточно малом ε будет выполнено неравенство $\mathbf{p}(\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - \mathbf{h}_\varepsilon) > 0$. Но это противоречит тому, что $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ минимизирует расходы.

Второе соотношение следует из того факта, что в условиях теоремы градиент функции расходов по ценам, $\nabla_p e$, есть вектор частных производных этой функции по ценам. ■

Теорема 2.9 (лемма Шепарда — второй вариант):

Если функция расходов $e(\cdot)$, рассматриваемая как функция цен при данном наборе $\mathbf{x} \in X$, определена в окрестности вектора цен $\tilde{\mathbf{p}}$ и дифференцируема в точке $\tilde{\mathbf{p}}$, то

$$\nabla_p e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}).$$ ┘

Доказательство: Рассмотрим в окрестности точки $\tilde{\mathbf{p}}$ функцию

$$\gamma(\mathbf{p}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{h}},$$

где $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$. В точке $\tilde{\mathbf{p}}$ по определению функции расходов данная функция равна нулю ($\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = 0$). В произвольной точке из рассматриваемой окрестности точки $\tilde{\mathbf{p}}$ ее значение не превосходит ноль:

$$\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) \leqslant 0.$$

Действительно, набор $\tilde{\mathbf{h}}$ при ценах $\tilde{\mathbf{p}}$ требует минимальных расходов на приобретение из наборов, обеспечивающих тот же уровень благосостояния, что и потребительский набор $\mathbf{x}$. При любых других ценах он допусти́м, но, вообще говоря, не минимизирует расходы. Таким образом, в точке $\tilde{\mathbf{p}}$ достигается максимум функции $\gamma(\cdot)$ и выполняется условие первого порядка

$$\nabla\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\nabla_p e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{h}}.$$ ■

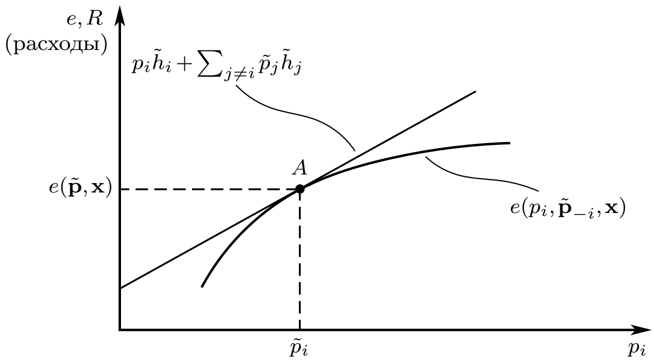


Рис. 2.4. *Иллюстрация доказательства леммы Шепарда*

Для большей наглядности повторим это доказательство в «одномерном» варианте. Рассмотрим некоторый вектор цен $\tilde{\mathbf{p}}$ и зафиксируем все цены, кроме цены i-го блага: $\mathbf{p}_{-i} = \tilde{\mathbf{p}}_{-i}$. По определению функции расходов справедливо следующее неравенство:

$$e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) = p_i h_i(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) + \sum_{j\neq i} \tilde{p}_j h_j(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) \leqslant$$
$$\leqslant p_i h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) + \sum_{j\neq i} \tilde{p}_j h_j(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}).$$

При $p_i = \tilde{p}_i$ здесь выполнено равенство. Таким образом, максимум функции $\gamma(p_i) = e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) - p_i h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$ достигается в точке $\tilde{p}_i$. Из необходимого условия максимума ($\gamma'(p_i) = 0$) следует, что

$$\frac{\partial e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}).$$

Идея данного доказательства леммы Шепарда фактически заключается в построении касательной к графику функции расходов (см. Рис. 2.4). Кривая $e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x})$ лежит под прямой

$$p_i\tilde{h}_i + \sum_{j\neq i}\tilde{p}_j\tilde{h}_j$$

и имеет с ней общую точку ($\tilde{p}_i$, $e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$) (точка A на рисунке). Значит, эта прямая является касательной к кривой $e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x})$. Наклон прямой равен $\tilde{h}_i = h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$. Таким образом, производная функции $e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x})$ в точке $\tilde{p}_i$ равна $\tilde{h}_i$.

Замечание: Заметим, что функция $-e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ является так называемой *опорной функцией*[20] множества допустимых элементов задачи. Наиболее простой вариант леммы Шепарда можно получить на основе теоремы об опорной функции[21]: если при данных ценах $\mathbf{p}$ и данном наборе $\mathbf{x}$ спрос по Хиксу определен однозначно (т. е. решение задачи ($\mathcal{H}$) единственно), то функция расходов дифференцируема и имеет место соотношение

$$\nabla_p e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Пример 2.12

Выше (в Примере 2.9) мы установили, что для потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ функция расходов равна

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2 (\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{p_2 + a^2 p_1}.$$

Убедимся для данной функции расходов в выполнении леммы Шепарда для первого товара. Продифференцируем функцию расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ по p_1:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_1} = \frac{p_2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2(p_2 + a^2 p_1) - a^2 p_1 p_2 (\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2 p_1)^2} =$$
$$= \frac{p_2^2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2 p_1)^2} = h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Вполне естественно, что в качестве результата дифференцирования мы получили найденный нами ранее (см. Пример 2.8) хиксианский спрос. △

Теорема 2.10 (тождество Роя[22]):

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16. Тогда при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $R > 0$ справедливо равенство

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = x_i(\mathbf{p}, R).$$
┘

[20] См. Определение B.25 на с. 1126 в Приложении B.

[21] Теорема B.43 в Приложении B.

[22] Французский экономист Рене Руа указал на это соотношение в работе R. Roy · La Distribution du Revenu Entre Les Divers Biens, *Econometrica* **15** (1947): 205–225. К сожалению, в России уже закрепилось неправильное произношение его имени.

Доказательство: Для доказательства этого тождества воспользуемся одним из тождеств взаимности:

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x}).$$

Продифференцируем это тождество по p_i:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))}{\partial p_i} + \frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, U))}{\partial R}\frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = 0.$$

По лемме Шепарда $\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, следовательно, выполнено

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))}{\partial p_i} + \frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))}{\partial R}h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0.$$

В качестве $\mathbf{x}$ возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Воспользуемся тождествами $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = R$. Из них следует, что верно соотношение

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i}\bigg/\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = x_i(\mathbf{p}, R).$$

. ■

Пример 2.13
Как показано ранее, для потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1}+a\sqrt{x_2}$ непрямая функция полезности равна $v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{\frac{R(p_2+a^2p_1)}{p_2p_1}}$. Проиллюстрируем тождество Роя для первого товара. Для этого найдем $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial R}$ и $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial p_1}$:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p_2 + a^2p_1)}{Rp_2p_1}}$$

и

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2p_1}{R(p_2 + a^2p_1)}}\frac{a^2p_1p_2R - p_2R(p_2 + a^2p_1)}{(p_2p_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2p_1}{R(p_2 + a^2p_1)}}\frac{-R}{(p_1)^2}.$$

Тогда

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i}\bigg/\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = \frac{Rp_2}{p_1(p_2 + a^2p_1)}.$$

Как и ожидалось, найденная функция представляет собой спрос на первый товар для функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$. △

Теорема 2.11 (уравнение Слуцкого[23]):

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16. Тогда при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $R > 0$ выполнено равенство

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p}, R).$$

⌟

Доказательство: Для доказательства воспользуемся одним из тождеств взаимности: $\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. Продифференцируем его по p_j:

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))}{\partial R} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial p_j}.$$

Воспользуемся леммой Шепарда, согласно которой $\frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. В качестве потребительского набора $\mathbf{x}$ возьмем $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. При этом в силу соотношений взаимности имеем $h_j(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = x_j(\mathbf{p}, R)$ и $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = R$. Следовательно,

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p}, R).$$

■

Пример 2.14

Проиллюстрируем уравнение Слуцкого для первого товара и второй цены для рассмотренной функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$. Функция спроса для этой функции полезности равна $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}\right)$. Функция хиксианского спроса равна $h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_2^2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2p_1)^2}$. Найдем $\frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R)}{\partial p_2}$, $\frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R)}{\partial R} x_2(\mathbf{p}, R)$ и $\frac{\partial h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))}{\partial p_2}$:

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R)}{\partial p_2} = \frac{R(p_1p_2 + a^2(p_1)^2) - Rp_1p_2}{(p_1p_2 + a^2(p_1)^2)^2} =$$
$$= \frac{a^2R(p_1)^2}{(p_1)^2(p_2 + a^2p_1)^2} = \frac{a^2R}{(p_2 + a^2p_1)^2};$$

[23] E. Slutsky. Sulla teoria del bilancio del consumatore, *Giornali degli economisti e rivista di statistica* **51** (1915): 1–26, рус. пер. Е. Е. Слуцкий. К теории сбалансированного бюджета потребителя, в кн. *Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления*, М.: Изд-во АН СССР, 1963

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R)}{\partial R} x_2(\mathbf{p}, R) = \frac{p_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2} \cdot \frac{a^2 R p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2} = \\ = \frac{a^2 R p_1 p_2}{p_2 p_1 (p_2 + a^2 p_1)^2} = \frac{a^2 R}{(p_2 + a^2 p_1)^2};$$

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_2} = \frac{2p_2(p_2 + a^2 p_1)^2 - 2(p_2)^2(p_2 + a^2 p_1)}{(p_2 + a^2 p_1)^4} (\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2 = \\ = \frac{2a^2 p_1 p_2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} (\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2;$$

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))}{\partial p_2} = \frac{2a^2 p_1 p_2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} (v(\mathbf{p}, R))^2 = \\ = \frac{2a^2 p_1 p_2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} \cdot \frac{R(p_2 + a^2 p_1)}{p_2 p_1} = \frac{2a^2 R}{(p_2 + a^2 p_1)^2}.$$

Проверка уравнения Слуцкого для первого товара и второй цены состоит в проверке равенства

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))}{\partial p_2} = \frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R)}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R) x_2(\mathbf{p}, R)}{\partial R}.$$

Подставляя вычисленные производные, получим

$$\frac{2a^2 R}{(p_2 + a^2 p_1)^2} = \frac{a^2 R}{(p_2 + a^2 p_1)^2} + \frac{a^2 R}{(p_2 + a^2 p_1)^2}.$$

Очевидно, что это равенство верно. △

Теорема 2.12 (свойства матрицы замены):

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16. Тогда матрица $\mathbf{S} = \{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\}$ эффектов замены (матрица Слуцкого) является симметричной, отрицательно полуопределенной и вырожденной при всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+$. ⌟

Доказательство: Как было отмечено выше при обсуждении леммы Шепарда, при сделанных нами предположениях функция расходов является дважды непрерывно дифференцируемой. Тогда в силу теоремы Юнга[24] ее смешанные вторые производные совпадают, т. е.

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i \partial p_j}.$$

[24]См. Теорему B.51 на с. 1131 в Приложении B.

С учетом продифференцированного тождество Шепарда получаем отсюда, что

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i}.$$

Таким образом, матрица коэффициентов замены (матрица вторых производных функции расходов) симметрична. Кроме того, так как функция расходов $e(\mathbf{p},\mathbf{x})$ — вогнутая функция цен, то матрица коэффициентов замены является отрицательно полуопределенной. (Вырожденность матрицы $\mathbf{S}$ читатель может доказать самостоятельно (см. задачу 2.36).) ■

Теперь получим основные соотношения, которые связывают производные спроса по ценам и доходу. (Доказательство этого утверждения предоставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 2.41.)

Теорема 2.13:

Предположим, что предпочтения локально ненасыщаемы и функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p},R)$ дифференцируема в точке $(\mathbf{p},R)$. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + x_j(\mathbf{p},R) = 0 \text{ для всех } j;$$

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} = 1;$$

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_k(\mathbf{p},R)}{\partial p_i} + R\frac{\partial x_k(\mathbf{p},R)}{\partial R} = 0 \text{ для всех } k.$$

┘

Данные соотношения должны быть знакомы читателю по курсам микроэкономики промежуточного уровня. Обычно они переформулируются в терминах эластичностей спроса по доходу и ценам.

Определение 2.5:

Эластичностью спроса на i-е благо по доходу называется величина

$$E_i^R = E_i^R(\mathbf{p},R) = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R}\frac{R}{x_i(\mathbf{p},R)}.$$

Эластичностью спроса на i-е благо по цене i-го называется величина

$$E_{ij}^p = E_{ij}^p(\mathbf{p},R) = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i(\mathbf{p},R)}.$$

◄

Доля дохода, затрачиваемого на покупку i-го блага,— это

$$\mu_i(\mathbf{p}, R) = \frac{p_i x_i(\mathbf{p}, R)}{\mathbf{p}\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)} = \frac{p_i x_i(\mathbf{p}, R)}{R}.$$

В этих обозначениях свойства функции спроса из Теоремы 2.13 могут быть переформулированы следующим образом:

$$\begin{gathered}\sum_i \mu_i E_{ij}^p(\mathbf{p}, R) = -\mu_j(\mathbf{p}, R) \text{ для всех } j;\\ \sum_i \mu_i(\mathbf{p}, R) E_i^R(\mathbf{p}, R) = 1;\\ E_k^R(\mathbf{p}, R) = -\sum_i E_{ki}^p(\mathbf{p}, R) \text{ для всех } k.\end{gathered} \tag{E}$$

Их доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 2.41).

Рассмотренные в данном параграфе соотношения важны для характеристики спроса, порожденного моделью рационального поведения потредителя. В частности, полученные свойства функции расходов (и матрицы Слуцкого) вместе с некоторыми из тех, которые указаны в Теореме 2.5 на с. 124, являются не только необходимыми (как мы только что установили), но и достаточными (как покажем далее) условиями того, что некоторая функция цен и уровней полезности является функцией расходов рационального потребителя. Это дает возможность проверять согласованность наблюдаемого потребительского поведения с моделью рационального поведения и восстанавливать предпочтения потребителя на основе его рыночного поведения (см. Прилодение 2.C).

Задачи

2.32 Сформулируйте и докажите аналог уравнения Слуцкого для случая, когда доход потребителя формируется за счет продажи начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$.

2.33 Сформулируйте и докажите аналог уравнения Слуцкого для случая, когда доход потребителя формируется за счет заработной платы. Почасовая ставка заработной платы равна w, потребитель располагает 24 часами времени в сутки. Время отдыха является одним из благ, количество потребления которого выбирает потребитель.

2.34 Проверьте выполнение леммы Шепарда, тождества Роя и уравнения Слуцкого для следующих функций полезности: (А) Кобба—

Дугласа, (B) CES, (C) Леонтьева ($\min\{a_i x_i\}$), (D) линейной, (E) квазилинейной.

2.35 Пусть выполнен закон Вальраса и функция спроса однородна нулевой степени. Пусть, кроме того, в экономике обращается только два товара. Докажите симметричность матрицы Слуцкого, не пользуясь предположением о максимизации полезности потребителем.

2.36 Пусть $\mathbf{S}$ — матрица коэффициентов замены. Докажите, что $\mathbf{Sp} = \mathbf{0}$.

2.37 В экономике обращается два товара. Известно, что в матрице замены $S_{11} = -2$ и $S_{22} = -1$. Чему равен элемент S_{21}?

2.38 Матрица замены при ценах $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 6$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -10 & ? & ? \\ ? & -4 & ? \\ 3 & ? & ? \end{pmatrix}.$$

Найдите пропущенные элементы. Может ли эта матрица быть матрицей замены для спроса рационального потребителя?

2.39 Пусть в экономике представлено три блага. Функции спроса на первое и второе блага имеют следующий вид:

$$x_1(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{2p_1(1 + \sqrt{p_2/p_1})}, \quad x_2(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{2p_2(1 + \sqrt{p_2/p_1})}.$$

Проверьте выполнение уравнения Слуцкого.

2.40 [[MWG]] В экономике с тремя благами потребитель имеет положительный доход $R > 0$ и его функции спроса на первое и второе блага равны

$$x_1(\mathbf{p}, R) = 100 - 5\frac{p_1}{p_3} + \beta\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{R}{p_3}, \quad x_2(\mathbf{p}, R) = \alpha + \beta\frac{p_1}{p_3} + \gamma\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{R}{p_3},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$.

(A) Объясните, как можно рассчитать спрос на третье благо (вычисления делать не надо).

(B) Являются ли функции спроса для x_1 и x_2 однородными требуемой степени?

(C) Какие ограничения на параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ должны выполняться, чтобы данные функции спроса могли быть порождены задачей максимизации полезности?

(D) Используя результаты предыдущего пункта для фиксированного значения спроса на третий товар, изобразите кривые безразличия в пространстве координат (x_1, x_2).

(E) Что можно сказать о свойствах функции полезности этого потребителя? (Используйте результаты предыдущего пункта.)

2.41 Докажите Теорему 2.13 и соотношения (E).

2.42 Покажите, что если функция полезности потребителя однородна, то функции спроса удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(p, R)}{\partial p_i}.$$

2.43 Пусть для некоторого потребителя значения эластичности спроса по доходу равны по всем товарам. Найдите, чему равно это значение.

2.44 Пусть функция полезности однородна первой степени. Чему равны эластичности спроса по доходу?

2.45 Используя теорему об огибающей, докажите, что $h_i(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}$ (тождество Роя).

2.46 Используя теорему об огибающей, докажите, что $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial R}$ («предельная полезность денег») равна значению множителя Лагранжа для задачи потребителя.

2.47 Проверьте выполнение свойства, указанного в предыдущей задаче, для функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ (см. Примеры 2.7 и 2.4).

2.3 Влияние изменения цен и дохода на поведение потребителя

Данный параграф посвящен изучению того, как изменения условий, при которых рациональный потребитель осуществляет выбор, более конкретно — изменения его бюджетного множества, влияют на этот выбор и благосостояние потребителя.

2.3.1 Сравнительная статика: зависимость спроса от дохода и цен. Закон спроса

Здесь мы обсудим, как меняется выбор потребителя при изменении цен благ и дохода, и установим условия, при которых зависимость спроса от цен и дохода соответствует обычным представлениям (например, спрос на благо растет при росте дохода или снижении цены этого блага). При этом спрос будет рассматриваться либо как функция, либо как отображение. Что именно имеется в виду должно быть понятно из контекста.

Пусть спрос представляет собой дважды дифференцируемую функцию, такую что ее значения представляют собой внутренние потребительские наборы ($\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \in \operatorname{int} X$). Пусть, кроме того, для таких наборов матрица Гессе функции полезности ($\mathbf{H}(\mathbf{x})$) является отрицательно определенной и выполнено неравенство $\mathbf{x}^\intercal \nabla u(\mathbf{x}) > 0$. Следующая система уравнений характеризует спрос и множитель Лагранжа бюджетного ограничения при данных ценах и доходе:

$$\nabla u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = \lambda(\mathbf{p}, R)\mathbf{p},$$
$$\mathbf{p}^\intercal \mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R.$$

Эти уравнения можно рассматривать как тождества. Дифференцируя их по ценам и доходу и преобразуя, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R} = \lambda \frac{\mathbf{H}^{-1}\nabla u}{\nabla u^\intercal \mathbf{H}^{-1} \nabla u} \tag{$\circ$}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \lambda \left(\mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-1}\nabla u \mathbf{x}^\intercal + \mathbf{H}^{-1}\nabla u \nabla u^\intercal \mathbf{H}^{-1}}{\nabla u^\intercal \mathbf{H}^{-1} \nabla u} \right), \tag{$\circ\circ$}$$

где $\lambda = \nabla u^\intercal \mathbf{x}/R$. Вычисления здесь несколько громоздкие, но не очень сложные. Читатель может попробовать провести их самостоятельно (см. задачу 2.48). Полученные соотношения выражают производные функции спроса через производные функции полезности в данной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Заметьте, что в эти формулы не входят цены, а доход влияет только на множитель Лагранжа λ, но не на знак и структуру производных.

Обсудим сначала влияние изменения дохода. Обычные предположения о предпочтениях потребителя (локальная ненасыщаемость, монотонность, выпуклость) мало что говорят о характере этого влияния. Фактически мы можем дать только определения, которые могут быть полезными в дальнейших рассуждениях.

Определение 2.6:

Кривой Энгеля для заданного вектора цен $\bar{\mathbf{p}}$ называется функция $\phi(R) = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}},\ R)$, сопоставляющая доходу R спрос на блага. ◀

Как правило, ожидается, что если доход потребителя растет, то потребление благ тоже растет. Блага, которые соответствуют таким ожиданиям, принято называть нормальными.

Определение 2.7:

Благо i называется нормальным при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, если спрос на него растет в точке $(\mathbf{p}, R)$ при увеличении дохода потребителя.

Благо i называется нормальным, если оно является нормальным при всех ценах и доходах, для которых определен спрос. ◀

Однако вполне можно вообразить такое благо, спрос на которое снижается при увеличении дохода потребителя (по крайней мере, в некоторой области сочетаний цен и дохода).

Определение 2.8:

Благо i называется малоценным при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, если спрос на него падает в точке $(\mathbf{p}, R)$ при увеличении дохода потребителя. ◀

Влияние дифференциально малых изменений дохода характеризует производная маршаллианского спроса по доходу (если спрос представляет собой дифференцируемую функцию). Если доход меняется на величину dR, то в результате спрос должен измениться на величину

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)}{\partial R} dR.$$

Если $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} > 0$, то благо i следует назвать нормальным при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, а если $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} < 0$, то малоценным.

Согласно уравнению (○) (с учетом того, что $\nabla u^{\intercal} \mathbf{H}^{-1} \nabla u < 0$), поведение спроса при изменении дохода определяется вектором $\mathbf{H}^{-1} \nabla u$. Если i-й элемент этого вектора отрицателен, то i-е благо является нормальным, а если положителен, то малоценным.

Далее рассмотрим влияние изменения цен. Напомним, что согласно стандартному определению функция спроса удовлетворяет закону спроса, если спрос на благо снижается при росте его цены. Естественное обобщение этого свойства приводит к следующему определению.

Определение 2.9:

Будем говорить, что отображение спроса $\mathbf{x}(\cdot)$ удовлетворяет закону спроса, если для $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{p}', R)$ выполнено соотношение[25]

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \leqslant 0. \quad ◀$$

[25] В отечественной традиции закон спроса иногда называют свойством монотонности спроса.

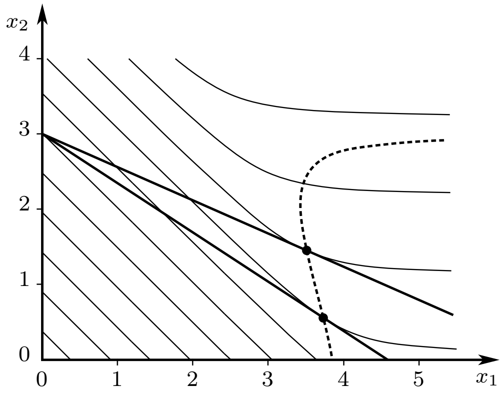


Рис. 2.5. *Пример эффекта Гиффена*

Действительно, данное свойство тесно связано с ожидаемым свойством спроса: если цена i-го товара выросла при неизменности остальных цен, то приведенное неравенство означает, что спрос на i-й товар не может возрасти.

Как известно, закон спроса выполняется не для всех функций спроса, порожденных задачей максимизиции полезности потребителя. Теоретически можно вообразить так называемые товары Гиффена, спрос на которые растет при росте цены.

Эффект Гиффена наблюдается, например, в случае следующей функции полезности:

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - \sqrt{(2x_1 + x_2 - 8)^2 + 1}.$$

Отметим, что эта функция является строго монотонной и строго квазивогнутой. На Рис. 2.5 изображены кривые безразличия для этой функции. Пунктирной линией показано, как меняется спрос потребителя при постоянных доходе и цене второго блага ($R = 3$, $p_2 = 1$). Точками показан спрос для двух разных бюджетных ограничений; при более высокой цене первого блага потребитель предъявляет на него более высокий спрос.

Более слабое, чем закон спроса, свойство, используемое при изучении влияния изменения цен на потребительский выбор, называется законом спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому. Приведем его формулировку.

Пусть $\mathbf{x}^0$ — потребительский набор, который является спросом при некоторых заданных ценах $\mathbf{p}^0$, т. е. в предположении локальной ненасыщаемости предпочтений $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)$. Отображение, задаваемое формулой

$$\mathbf{x}^s(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0),$$

называется компенсированным спросом по Слуцкому. Закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому заключается в следующем.

Определение 2.10:

Будем говорить, что отображение спроса $\mathbf{x}(\cdot)$ удовлетворяет закону спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому, если для $\mathbf{x} \in \mathbf{x}^s(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0)$ выполнено соотношение

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leqslant 0.$$

Если спрос является функцией, то это соотношение можно записать в виде

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x}^s(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^s(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)) \leqslant 0. \qquad \blacktriangleleft$$

Отметим очевидное отличие формулировки этого свойства от обычного закона спроса: данное свойство должно выполняться при компенсированном, а не фиксированном доходе.

В отличие от обычного закона спроса, закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому выполняется при естественных предположениях относительно предпочтений, что показывает следующее утверждение.

Теорема 2.14:

Предположим, что предпочтения потребителя непрерывны и локально ненасыщаемы. Тогда выполняется закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому. ┘

Доказательство: Так как предпочтения локально ненасыщаемы, то бюджетное ограничение выходит на равенство для набора $\mathbf{x}$, являющегося спросом потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\mathbf{p}\mathbf{x}^0$, т. е. $\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathbf{x}^0$. Аналогично $\mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 = R$. С учетом этого получим

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{p}\mathbf{x} - \mathbf{p}\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}^0\mathbf{x} + \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}^0\mathbf{x} = R - \mathbf{p}^0\mathbf{x}.$$

Очевидно, что $\mathbf{x}^0 \in B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0)$. Таким образом, если $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}^0, R)$, то два набора выявленно эквивалентны и $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R)$ (см. пункт {vi} Теоремы 2.2 на с. 108), и поэтому с учетом локальной ненасыщаемости $\mathbf{p}^0\mathbf{x} = R$, т. е. рассматриваемая величина равна нулю. Доказываемое неравенство будет строгим, если $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{p}^0, R)$. Действительно,

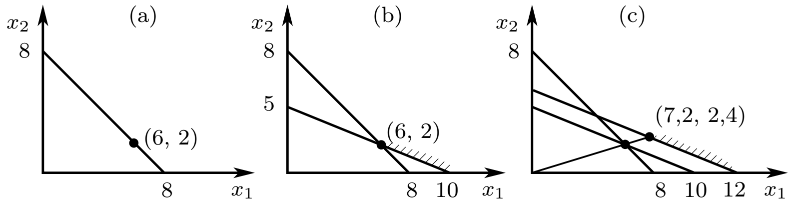


Рис. 2.6. *Оценка спроса при изменении цен и дохода в случае однородной функции полезности*

если $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{p}^0, R)$, то $\mathbf{p}^0\mathbf{x} > R$, т. е. рассматриваемая величина отрицательна. ■

Замечание: Доказанное свойство тесно связано с теорией выявленных предпочтений (см. Приложение 2.B). Действительно, набор $\mathbf{x}^0$ — спрос при ценах $\mathbf{p}^0$, а набор $\mathbf{x}$ — спрос при ценах $\mathbf{p}$. По слабой аксиоме выявленных предпочтений (см. Определение 1.20 на с. 82) неравенства $\mathbf{p}\mathbf{x}^0 \leqslant \mathbf{p}\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}^0\mathbf{x} < \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ не могут быть верными одновременно (не может быть, чтобы одновременно набор $\mathbf{x}$ был выявленно не хуже $\mathbf{x}^0$, а $\mathbf{x}^0$ — выявленно лучше $\mathbf{x}$). Поскольку первое неравенство выполнено (по определению компенсированного спроса по Слуцкому), второе неравенство неверно. Значит, $\mathbf{p}^0\mathbf{x} \geqslant \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$.

Исходя из доказанной теоремы, мы можем утверждать только то, что закон спроса выполняется при условии компенсирующего изменения дохода, т. е. при условии, что доход изменился таким образом, чтобы компенсировать рост цены и позволить потребителю покупать прежний потребительский набор. Тем не менее данное свойство достаточно информативно и может служить полезным инструментом анализа, как показывает, в частности, следующий пример.

Пример 2.15

Рассмотрим экономику с двумя благами. В первом периоде времени вектор цен был равен $\mathbf{p}^0 = (1, 1)$, а доход потребителя — $R^0 = 8$. Спрос потребителя в первом периоде времени был равен $\mathbf{x}^0 = (6, 2)$ (Рис. 2.6a). Во втором периоде цены изменились и стали равны $\mathbf{p}^1 = (1, 2)$, а доход стал равен $R^1 = 12$. Известно, что спрос порождается монотонной положительно однородной первой степени функцией полезности. Попробуем найти все возможные значения, которые может принимать спрос во втором периоде.

В данном примере у нас изменились сразу два параметра: цена второго блага и доход потребителя. Разложим это изменение на два последовательных: (1) изменение цены при компенсирующем доходе; (2) изменение дохода. Компенсированный доход, отвечающий изменению цен от $(1, 1)$ до $(1, 2)$, равен 10 $(1 \cdot 6 + 2 \cdot 2)$. В силу закона спроса при компенсирующем изменении дохода и в силу локальной ненасыщаемости предпочтений спрос потребителя при таком изменении, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, должен удовлетворять двум условиям:

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 10, \quad (1-1)(\tilde{x}_1 - 6) + (2-1)(\tilde{x}_2 - 2) = \tilde{x}_2 - 2 \leqslant 0,$$

или

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 10, \qquad \tilde{x}_2 \leqslant 2$$

(см. Рис. 2.6b).

Теперь можно воспользоваться свойством отображения спроса для однородной функции полезности, установленным нами в Примере 2.2. Точнее, мы установили, что если доход потребителя увеличивается в α раз, то и спрос в этом случае также увеличится в α раз. С учетом этого свойства получаем, что спрос во втором периоде подчинен следующим ограничениям:

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 12, \quad \tilde{x}_2 \leqslant 2{,}4$$

(см. Рис. 2.6c). △

Аналогичное свойство спроса выполняется и при компенсации дохода по Хиксу, т. е. при таком изменении дохода, при котором выборы характеризуются заданным уровнем полезности. Это свойство будем называть законом спроса при компенсирующем изменении дохода по Хиксу. Заметим, что хиксианский спрос часто называют *компенсированным спросом*, поскольку это спрос при компенсирующем изменении дохода по Хиксу.

Определение 2.11:

Будем говорить, что отображение спроса $\mathbf{x}(\cdot)$ удовлетворяет закону спроса при компенсирующем изменении дохода по Хиксу, если для любого допустимого набора $\mathbf{x}$ и любых цен $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^l_{++}$ при $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{h}' \in \mathbf{h}(\mathbf{p}', \mathbf{x})$ справедливо неравенство

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{h}' - \mathbf{h}) \leqslant 0. \qquad ◀$$

Если спрос является функцией, то приведенное в определении соотношение можно записать в виде

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{h}(\mathbf{p}', \mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \leqslant 0.$$

Теорема 2.15:

Если предпочтения потребителя непрерывны, то для отображения спроса рационального потребителя выполняется закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Хиксу. ⌟

Доказательство: При непрерывности предпочтений $\mathbf{h} \sim \mathbf{h}' \sim \mathbf{x}$. Утверждение непосредственно следует из двух очевидных неравенств

$$\mathbf{p}\mathbf{h} \leqslant \mathbf{p}\mathbf{h}' \quad \text{и} \quad \mathbf{p}'\mathbf{h}' \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{h}. \qquad \blacksquare$$

Сравним теперь два полученных нами варианта закона спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому и по Хиксу. Пусть $\mathbf{x}^0$ — оптимальное решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^0$ и доходе $R = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ и пусть цены становятся равными $\mathbf{p}^1$. Тогда рассматриваемые свойства спроса можно переформулировать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{по Слуцкому:} \quad & (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0) \leqslant 0; \\ \text{по Хиксу:} \quad & (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)) - \mathbf{x}^0) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, различие между двумя этими свойствами состоит, по сути, только в величине компенсации.

Пусть, например, цена первого блага упала, а цены остальных благ остались неизменными. Рассматриваемые компенсирующие изменения дохода делают новую ситуацию в определенном смысле схожей с исходной. Поскольку падение цены расширяет бюджетное множество потребителя, доход должен упасть, т. е. следует произвести *вычет* из дохода, чтобы сделать новую ситуацию схожей с исходной. Величина компенсирующего вычета по Слуцкому равна $\Delta^s = R - \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0$, а величина компенсирующего вычета по Хиксу равна $\Delta^h = R - e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$. Несложно понять, что $\Delta^s \leqslant \Delta^h$. Действительно, это неравенство эквивалентно тому, что $\mathbf{p}^1\mathbf{x}^0 \geqslant e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0) = \mathbf{p}^1\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$. Последнее неравенство непосредственно следует из определения функции расходов (потребительский набор $\mathbf{x}^0$ допусти́м в соответствующей двойственной задаче, и его стоимость не может быть меньше минимума $e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$).

Обе указанные формы компенсирующего изменения дохода имеют достаточно ясную графическую интерпретацию. Предположим, что в исходной ситуации цены равны $p^0 = (p_1^0, 1)$, а доход составляет R. Предположим, что упала цена первого блага, а цена второго блага и доход остались неизменными, т. е. $p^1 = (p_1^1, 1)$, $p_1^0 > p_1^1$. Рис. 2.7 иллюстрирует различие в определениях компенсирующего изменения дохода по Слуцкому и по Хиксу. На Рис. 2.7а показан

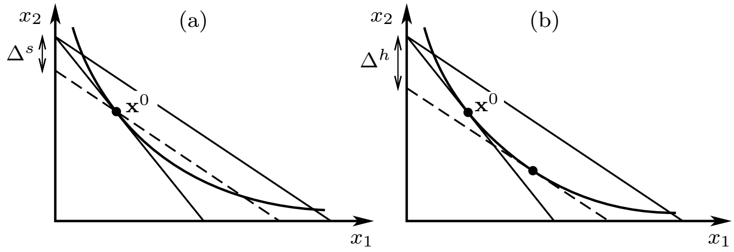


Рис. 2.7. *Компенсирующие изменения дохода по Слуцкому и по Хиксу при* $p_1^0 > p_1^1$, $p_2^0 = p_2^1 = 1$

способ нахождения компенсирующего изменения дохода по Слуцкому. Строим обе бюджетные линии. Находим спрос в исходной ситуации. После этого сдвигаем новую бюджетную линию так, чтобы она *проходила через точку исходного спроса.* Разница между доходом, отвечающим этому положению, и исходным доходом и будет компенсирующим изменением по Слуцкому.

На Рис. 2.7b показан способ нахождения компенсирующего изменения дохода по Хиксу. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что в этот раз мы сдвигаем бюджетную линию до *точки касания с исходной кривой безразличия.*

Заметим, что хотя изменения спроса по Хиксу и по Слуцкому, вообще говоря, различаются, они совпадают при дифференциально малом изменении цен, а именно,

$$\frac{\partial \mathbf{x}^s(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} = \left.\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0)}{d\mathbf{p}}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial R}\mathbf{x}^0$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} = \left.\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0))}{d\mathbf{p}}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial R}\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0).$$

Приведенные выражения равны между собой, поскольку набор $\mathbf{x}^0$ является спросом при ценах $\mathbf{p}^0$ и, следовательно,

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)) = \mathbf{x}^0.$$

Оба выражения равны матрице замены $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)$. Таким образом, если цены меняются на дифференциально малую величину $d\mathbf{p}$, то компенсированный спрос меняется на величину $d\mathbf{x} = \mathbf{S}d\mathbf{p}$. Видим, что закон спроса при компенсирующем изменении дохода для дифференциально малых изменений будет иметь вид $d\mathbf{p}^\intercal d\mathbf{x} = d\mathbf{p}^\intercal \mathbf{S} d\mathbf{p} \leqslant 0$. Очевидно, что это свойство тесно связано с тем, что матрица замены $\mathbf{S}$ отрицательно полуопределена[26].

Вернемся к обсуждению собственно закона спроса. В случае его выполнения мы получаем информацию об изменении спроса, обусловленную только изменением цен, без компенсирующего изменения дохода. В частности, в этом случае при определенных предположениях можно сделать вывод об отсутствии товаров Гиффена, т. е. товаров, спрос на которые растет при росте цены.

Если цены меняются на дифференциально малую величину $d\mathbf{p}$, то маршаллианский спрос меняется на величину $d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}$. Как следует из уравнения ($\circ\circ$),

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \lambda \mathbf{T},$$

где через $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ мы обозначили следующую матрицу:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-1}\nabla u \mathbf{x}^\intercal + \mathbf{H}^{-1}\nabla u \nabla u^\intercal \mathbf{H}^{-1}}{\nabla u^\intercal \mathbf{H}^{-1} \nabla u}.$$

«Локальный» закон спроса ($d\mathbf{p}^\intercal d\mathbf{x} \leqslant 0$) эквивалентен тому, что $d\mathbf{p}^\intercal \mathbf{T} d\mathbf{p} \leqslant 0$ для любого изменения $d\mathbf{p}$, т. е. тому, что матрица $\mathbf{T}$ является отрицательно полуопределенной. Как можно показать, отрицательная полуопределенность матрицы $\mathbf{T}$ эквивалентна тому, что в данной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено неравенство

$$\frac{\nabla u^\intercal \mathbf{x}}{\nabla u^\intercal \mathbf{H}^{-1} \nabla u} - \frac{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{H} \mathbf{x}}{\nabla u^\intercal \mathbf{x}} \leqslant 4. \tag{Ʊ}$$

Для выполнения «глобального» закона спроса (см. Определение 2.9) необходимо и достаточно, чтобы это неравенство было выполнено для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$, где $\bar{X}$ — область значений функции спроса. Мы не станем приводить здесь доказательство данного утверждения (которое достаточно длинно и технично) и более точную его формулировку[27].

---

[26]Матрица замены не может быть отрицательно *определенной*, поскольку, как мы видели ранее, она вырождена.

[27]Заинтересованный читатель сможет найти эти сведения в кн. В. М. Полтерович. *Экономическое равновесие и хозяйственный механизм*, М.: Наука, 1990, с. 69–77. Некоторый вариант этого утверждения в терминах непрямой функции полезности можно найти в работе J. K. Quah. The Weak Axiom and Comparative Statics, Working Paper, No. W15, Oxford: Nuffield College, 1999.

Отметим, что прямая проверка выполнения сформулированного неравенства даже в случае двух товаров достаточно трудоемка, а в пространствах большей размерности вряд ли представляется возможной, кроме как в простых случаях (например, когда предпочтения гомотетичны, см. задачу 2.59). Но оно может служить полезным источником для получения *достаточных* условий выполнения закона спроса. В частности, в рамках сделанных предположений первое слагаемое отрицательно, поэтому закон спроса будет заведомо выполнен в случае справедливости для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$ следующего неравенства:

$$-\frac{\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\nabla u(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} \leqslant 4.$$

(Это условие можно использовать для решения задачи 2.58). Другое, еще более слабое, но более удобное для проверки условие состоит в том, что $-\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x} \leqslant 4\nabla u(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$.

Уравнение Слуцкого (см. Теорему 2.11) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}.$$

Получаем, что изменение спроса вследствие дифференциально малого изменения цен $d\mathbf{p}$ равно

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}}d\mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p} = \mathbf{S}d\mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}.$$

Данное уравнение показывает, что изменение спроса на благо в результате бесконечно малого изменения цен $d\mathbf{p}$ можно разложить на две составляющие: эффект замены $\mathbf{S}d\mathbf{p}$ и эффект дохода $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}$. Чтобы выяснить, выполнен ли в данной точке закон спроса, следует изучить знак величины $d\mathbf{p}^{\mathsf{T}}d\mathbf{x} = d\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}d\mathbf{p} - d\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}$. Как мы уже видели, первое слагаемое, соответствующее эффекту замены, неотрицательно. Таким образом, вывод зависит от величины $d\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}$, соответствующей эффекту дохода. В частности, если благо нормальное в том смысле, что $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R} > \mathbf{0}$, то эффект дохода будет положительным и как следствие будет выполнен (локально) закон спроса.

Для приведенного разложения на эффект дохода и эффект замены можно предложить аналог в случае, когда изменения цен не являются бесконечно малыми. Пусть, как и выше, $\mathbf{x}^0$ — оптимальное решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^0$ и доходе $R = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ и пусть цены становятся равными $\mathbf{p}^1$. Тогда разложение на эффект дохода и эффект замены при компенсирующем изменении дохода по

Слуцкому будет иметь следующий вид:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = [\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0)] + [\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0].$$

Первое слагаемое соответствует эффекту дохода (изменению дохода от $R = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ до $\mathbf{p}^1\mathbf{x}^0$), а второе слагаемое — эффекту замены. Аналогично, с использованием компенсирующего изменения дохода по Хиксу получим следующее разложение:

$$\Delta\mathbf{x} = [\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0))] + [\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)) - \mathbf{x}^0].$$

Заметим, что еще два подобных разложения можно получить, поменяв в приведенных формулах местами $\mathbf{p}^0$ и $\mathbf{p}^1$ (и соответственно $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$). Таким образом, имеем четыре различных естественных разложения на эффект дохода и эффект замены. Очевидно, что в пределе, при малых приращениях, эти четыре разложения становятся идентичными.

2.3.2 Оценка изменения благосостояния.

Экономисты часто сталкиваются с задачей оценки изменений в благосостоянии потребителей при проведении мероприятий экономической политики. Рассмотрим две ситуации: до проведения мероприятий экономической политики и после. В первой ситуации потребитель сталкивается с ценами $\mathbf{p}^0$ и доходом R^0, во второй — с ценами $\mathbf{p}^1$ и доходом R^1. Поскольку рассматривается только выбор на классических бюджетных множествах, здесь можно использовать введенное ранее понятие непрямой функции полезности $v(\mathbf{p}, R)$. В то время как обычная функция полезности $u(\mathbf{x})$ соответствует оценке потребителем потребительских наборов $\mathbf{x}$, непрямая функция полезности соответствует оценке потребителем самих ситуаций выбора. Если $v(\mathbf{p}^0, R^0) < v(\mathbf{p}^1, R^1)$, то вторая ситуация более благоприятна для потребителя, а если $v(\mathbf{p}^0, R^0) > v(\mathbf{p}^1, R^1)$, то менее благоприятна.

Вообще говоря, мы можем говорить лишь о направлении изменения благосостояния, а не оценивать его величину. Тем не менее при расчетах издержек и выгод мероприятий экономической политики пытаются получить количественные оценки таких изменений. При этом используется так называемая непрямая денежная функция полезности.

Определение 2.12:

Непрямая денежная функция полезности $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, R)$ — это доход, который требуется, чтобы при ценах $\mathbf{q}$ потребитель мог бы иметь тот же уровень полезности, что и при ценах $\mathbf{p}$, располагая доходом R, т. е. $\mu(\mathbf{q};\mathbf{p},R)=e(\mathbf{q},\mathbf{x}(\mathbf{p},R))$. ◀

Другими словами, непрямая денежная полезность $\mu(\mathbf{q};\mathbf{p},R)$ определяется как непрямая функция полезности для функции расходов $e(\mathbf{q},\mathbf{x})$, рассматриваемой как функция полезности. Опишем, как ее можно использовать и какие проблемы при этом возникают.

Непрямая денежная функция полезности определяется на основе некоторого (произвольного) «эталонного» вектора цен $\mathbf{q}>\mathbf{0}$. Оценка изменения благосостояния при этом будет равна

$$\begin{aligned}\Delta\mu(\mathbf{q}) &= \mu(\mathbf{q},\mathbf{p}^1,R^1)-\mu(\mathbf{q},\mathbf{p}^0,R^0)=\\ &= e(\mathbf{q},\mathbf{x}(\mathbf{p}^1,R^1))-e(\mathbf{q},\mathbf{x}(\mathbf{p}^0,R^0))=e(\mathbf{q},\mathbf{x}^1)-e(\mathbf{q},\mathbf{x}^0),\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}^0$ — спрос потребителя в исходном состоянии, а $\mathbf{x}^1$ — спрос потребителя в новом состоянии. Значение $\Delta\mu(\mathbf{q})$, вообще говоря, может быть различным для разных векторов $\mathbf{q}$, и поэтому соответствующие оценки изменения благосостояния содержат элемент субъективизма. Исключением являются квазилинейные предпочтения (предпочтения, которые можно описать квазилинейной функцией полезности).

В случае квазилинейности предпочтений все меры благосостояния эквивалентны с точностью до постоянного множителя, а в случае, когда цена последнего блага равна единице (единица «квазилинейного» блага является единицей измерения, *numeraire*), они совпадают. Покажем это, вычислив $\Delta\mu(\mathbf{q})$ для квазилинейной функции полезности $u(x_1,\ldots,x_l)=s(x_1,\ldots,x_{l-1})+x_l$ в предположении, что $p_l=1$. В этом случае непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\mathbf{p}_{-l},1,R)=s(x_1(\mathbf{p}_{-l}),\ldots,x_{l-1}(\mathbf{p}_{-l}))+R-\sum_{i=1}^{l-1}p_ix_i(\mathbf{p}_{-l})$$

(см. Пример 2.6). Используя соотношения двойственности, получаем, что функция расходов в случае квазилинейных предпочтений имеет вид $e(\mathbf{p},\mathbf{x})=u(\mathbf{x})-s(\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}_{-l}))+\mathbf{p}_{-l}\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}_{-l})$. По определению непрямой денежной функции полезности $\mu(\mathbf{q},\mathbf{p},R)=e(\mathbf{q},\mathbf{x}(\mathbf{p},R))$, поэтому

$$\mu(\mathbf{q},\mathbf{p},R)=v(\mathbf{p},R)-s(\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{q}_{-l}))+\mathbf{q}_{-l}\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{q}_{-l}).$$

Как видим, при любом фиксированном векторе цен $\mathbf{q}$ непрямая денежная функция полезности совпадает с точностью до константы (зависящей от $\mathbf{q}$) с той непрямой функцией полезности, которая определяется естественной для квазилинейных предпочтений нормировкой. Отсюда по определению $\Delta\mu(\mathbf{q})$ получаем

$$\Delta\mu(\mathbf{q}) = \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}^1, R^1) - \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}^0, R^0) = v(\mathbf{p}^1, R^1) - v(\mathbf{p}^0, R^0).$$

В общем случае, когда значение $\Delta\mu(\mathbf{q})$ зависит от выбора $\mathbf{q}$, естественными кандидатами на роль вектора цен $\mathbf{q}$ представляются $\mathbf{p}^0$ и $\mathbf{p}^1$ (соответственно цены до изменений и цены после изменений). В первом случае получим меру изменения благосостояния, называемую эквивалентным изменением дохода (EV), а во втором — меру изменения благосостояния, называемую компенсирующим изменением дохода (CV).

Определение 2.13:

Эквивалентное изменение дохода (эквивалентная вариация) — это такое приращение исходного дохода, которое обеспечивает в исходных ценах тот же уровень благосостояния, что и после изменений:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R^0 + EV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1)) \sim \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, R^1). \qquad \blacktriangleleft$$

Нетрудно убедиться, что

$$EV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1) - R^0 = \Delta\mu(\mathbf{p}^0).$$

Действительно, доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\mathbf{p}^0$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации после изменений (т. е. при ценах $\mathbf{p}^1$ и доходе R^1), по определению непрямой денежной функции полезности равен $\mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1)$. Поэтому требуемое изменение дохода по сравнению с исходным доходом R_0 равно

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1) - R^0 &= e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1) - e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = \\ &= \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R^1) - \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0, R^0) = \Delta\mu(\mathbf{p}^0), \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что если $\mathbf{x}^0$ — спрос потребителя при ценах $\mathbf{p}^0$, то $e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = R^0$.

Пример 2.16

Пусть функция спроса и функция расходов потребителя равны

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2} \right)$$

и

$$e(\mathbf{p}, x) = \frac{p_1 p_2 (\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{p_2 + a^2 p_1}$$

соответственно. Найдем эквивалентную вариацию, отвечающую изменению цен от $\mathbf{p}^0 = (2, 1)$ до $\mathbf{p}^1 = (1, 2)$ при условии, что доход оставался неизменным и был равен R. Непрямая денежная функция полезности для данного потребителя будет иметь вид

$$\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, R) = \frac{q_1 q_2 (p_2 + a^2 p_1)}{p_2 p_1 (q_2 + a^2 q_1)} R.$$

Таким образом,

$$EV(\mathbf{p}^0, R, \mathbf{p}^1, R) = \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R) - R = \frac{p_1^0 p_2^0 (p_2^1 + a^2 p_1^1)}{p_2^1 p_1^1 (p_2^0 + a^2 p_1^0)} R - R.$$

Подставляя $\mathbf{p}^0 = (2, 1)$ и $\mathbf{p}^1 = (1, 2)$, получаем $EV = \frac{1-a^2}{1+2a^2} R$. △

Определение 2.14:

Компенсирующее изменение дохода (компенсирующая вариация) — это такое уменьшение дохода в новой ситуации, которое позволяет при новых ценах достичь уровня полезности, соответствующего исходной ситуации:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R^0) \sim \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, R^1 - CV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1)). \quad ◀$$

По определению денежной непрямой функции полезности доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\mathbf{p}^1$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации до изменений (т. е. при ценах $\mathbf{p}^0$ и доходе R^0), равен $\mu(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, R^0) = e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$. Кроме того, $\mu(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1) = R^1$. Поэтому компенсирующая вариация равна изменению непрямой денежной функции полезности при $\mathbf{q} = \mathbf{p}^1$:

$$CV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0) - R^1 = \Delta\mu(\mathbf{p}^1).$$

Отметим, что введенное понятие компенсирующей вариации — это то же самое изменение дохода, с которым мы сталкивались при рассмотрении закона спроса (см. с. 152).

Пример 2.17 (продолжение Примера 2.16)

В рассматриваемом случае при постоянном доходе компенсирующая вариация равна

$$CV(\mathbf{p}^0, R, \mathbf{p}^1, R) = R - \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R) = R - \frac{p_1^1 p_2^1 (p_2^0 + a^2 p_1^0)}{p_2^0 p_1^0 (p_2^1 + a^2 p_1^1)} R.$$

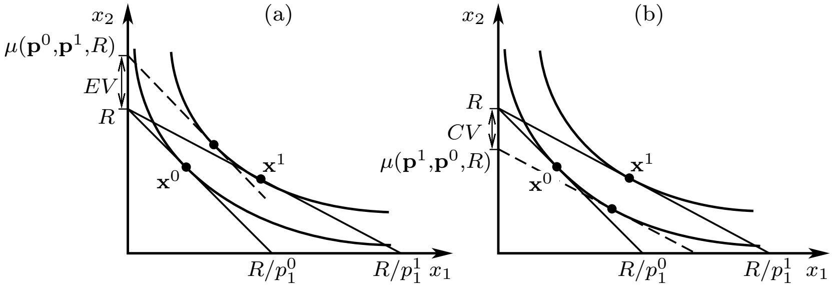


Рис. 2.8. *(a) Эквивалентная и (b) компенсирующая вариации при $R^0 = R^1 = R$, $p_1^0 > p_1^1$, $p_2^0 = p_2^1 = 1$*

При $\mathbf{p}^1 = (1, 2)$ и $\mathbf{p}^0 = (2, 1)$ компенсирующая вариация равна $CV = \frac{(1-a^2)}{(2+a^2)}R$. △

Рассмотрим соотношение между этими мерами изменения благосостояния в простом случае, когда изменяется только цена одного блага (случай, который интересует нас при анализе последствий налогообложения): $R^0 = R^1 = R$, $p_1^0 > p_1^1$, $\mathbf{p}_{-1}^0 = \mathbf{p}_{-1}^1 = \mathbf{p}_{-1}$. Очевидно, что потребитель при таком изменении не может ухудшить свое положение, поскольку множество доступных ему потребительских наборов расширяется: $v(\mathbf{p}^0, R) \leqslant v(\mathbf{p}^1, R)$. Введем следующие упрощенные обозначения:

$$EV = EV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1), \quad CV = CV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1),$$
$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R), \quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, R).$$

Кроме того, так как в данном случае меняется только цена первого блага, то для упрощения записи не будем в дальнейшем указывать остальные цены $\mathbf{p}_{-1}$ и доход R в качестве аргументов функций.

На Рис. 2.8 дана геометрическая интерпретация эквивалентной и компенсирующей вариаций для случая двух благ, когда цена второго блага равна единице ($p_2^0 = p_2^1 = 1$).

Проинтегрировав тождество $\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_1} = h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ (лемма Шепарда для теории потребления) по цене первого блага от p_1^1 до p_1^0, получим

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, \mathbf{x})dt = e(p_1^0, \mathbf{x}) - e(p_1^1, \mathbf{x}).$$

Эквивалентную и компенсирующую вариации можно представить в аналогичном виде (как уменьшение значения функции расходов для одной и той же кривой безразличия при падении цены первого блага с p_1^0 до p_1^1, см. Рис. 2.8):

$$EV = e(p_1^0, \mathbf{x}^1) - R = e(p_1^0, \mathbf{x}^1) - e(p_1^1, \mathbf{x}^1),$$

$$CV = R - e(p_1^1, \mathbf{x}^0) = e(p_1^0, \mathbf{x}^0) - e(p_1^1, \mathbf{x}^0).$$

Таким образом,

$$EV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, \mathbf{x}^1) dt, \quad CV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, \mathbf{x}^0) dt.$$

Как известно из курсов микроэкономики начального и промежуточного уровней, изменение потребительского излишка вычисляется по формуле[28]

$$\Delta CS = \Delta CS(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t) dt.$$

Из того, что $p_1^0 > p_1^1$, следует, что в данном случае все три величины неотрицательны (они положительны, если спрос строго положителен):

$$EV \geqslant 0, \quad CV \geqslant 0, \quad \Delta CS \geqslant 0.$$

Если эффект дохода неотрицателен (рассматриваемое благо — нормальное), то

$$h_1(t, \mathbf{x}^0) \leqslant x_1(t) \leqslant h_1(t, \mathbf{x}^1) \text{ при } p_1^1 \leqslant t \leqslant p_1^0.$$

Докажем эти неравенства формально. Спрос потребителя на первое благо при цене t (где $p_1^1 \leqslant t \leqslant p_1^0$) и доходе R равен $x_1(t) = x_1(t, R)$. Пусть теперь доход потребителя составляет $e(t, \mathbf{x}^0)$. Нетрудно заметить, что доход потребителя уменьшился на неотрицательную величину $CV(p_1^0, t) = R - e(t, \mathbf{x}^0)$. В силу нормальности блага имеем, что $x_1(t, e(t, \mathbf{x}^0)) \leqslant x_1(t, R)$. Из соотношений взаимности имеем, что $x_1(t, e(t, \mathbf{x}^0)) = h_1(t, \mathbf{x}^0)$. Таким образом, мы доказали левое из требуемых неравенств.

Аналогично доказывается правое неравенство. Предположим, что доход потребителя изменился от R до $e(t, \mathbf{x}^1)$, т. е. увеличился на неотрицательную величину $EV(t, p_1^1) = e(t, \mathbf{x}^1) - R$. При этом $x_1(t, R) \leqslant x_1(t, e(t, \mathbf{x}^1)) = h_1(t, \mathbf{x}^1)$.

Эти неравенства (для случая двух благ) проиллюстрированы на Рис. 2.9.

[28] См. также гл. 5.

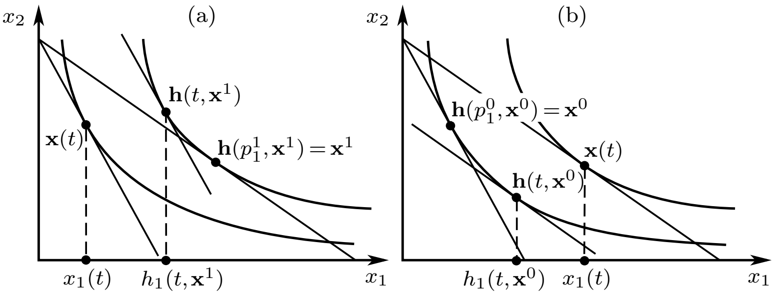


Рис. 2.9. *Соотношения между (a) хиксианским спросом и (b) маршаллианским спросом, используемые при доказательстве взаимосвязи эквивалентного, компенсирующего изменений дохода и потребительского излишка*

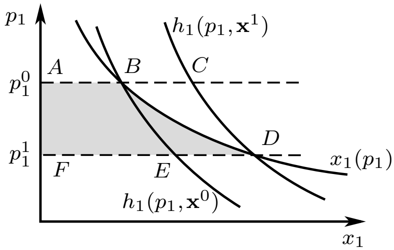


Рис. 2.10. *Связь между потребительским излишком, эквивалентной и компенсирующей вариациями*

Интегрируя доказанные неравенства по t от p_1^1 до p_1^0, получаем, что имеет место соотношение

$$CV \leqslant \Delta CS \leqslant EV.$$

На Рис. 2.10 величине CV соответствует площадь фигуры $ABEF$, величине EV — площадь фигуры $ACDF$, а величине ΔCS — площадь фигуры $ABDF$ (закрашенной области).

Пример 2.18 (продолжение Примеров 2.16 и 2.17)
Положим $p_2^0 = p_2^1 = 1$ в формулах для эквивалентной и компенсирующей вариаций:

$$CV = R - \frac{p_1^1(1 + a^2 p_1^0)}{p_1^0(1 + a^2 p_1^1)} R = \frac{p_1^0 - p_1^1}{p_1^0(1 + a^2 p_1^1)} R,$$

$$EV = \frac{p_1^0(1+a^2p_1^1)}{p_1^1(1+a^2p_1^0)}R - R = \frac{p_1^0 - p_1^1}{p_1^1(1+a^2p_1^0)}R.$$

Найдем также изменение потребительского излишка. Для этого требуется проинтегрировать спрос на первое благо, равный $x_1(p_1) = \frac{R}{p_1(1+a^2p_1)}$. Как несложно проверить,

$$\left(\ln\left(\frac{t}{1+a^2t}\right)\right)' = \frac{1}{t(1+a^2t)}.$$

С учетом этого

$$\Delta CS = R\int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t,1,R)dt = R\ln\left(\frac{p_1^0}{1+a^2p_1^0}\right) - R\ln\left(\frac{p_1^1}{1+a^2p_1^1}\right)$$

или

$$\Delta CS = R\ln\left(\frac{p_1^0(1+a^2p_1^1)}{p_1^1(1+a^2p_1^0)}\right).$$

Заметим, что изменение потребительского излишка можно представить через эквивалентную и компенсирующую вариации следующим образом:

$$\Delta CS = R\ln\left(1+\frac{EV}{R}\right) = -R\ln\left(1-\frac{CV}{R}\right).$$

При малых t верно приближение $\ln(1+t) \approx t$, поэтому при малых изменениях цены все три измерителя изменения благосостояния примерно равны. Кроме того, $\ln(1+t) < t$ при $t \neq 0$, поэтому, в подтверждение теории, выполнены неравенства $CV < \Delta CS < EV$. △

В случае квазилинейных предпочтений (если можно не учитывать ограничение на неотрицательность потребления того блага, которое входит в функцию полезности линейно, например, при достаточно большом доходе) отсутствует эффект дохода для товара, который входит в функцию полезности нелинейно. В этом случае записанные выше неравенства, связывающие маршаллианский и хиксианский спрос, выполняются как равенства и, следовательно,

$$EV(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1) = \Delta CS(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1) = CV(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1).$$

В геометрической интерпретации это означает что все три кривые спроса, изображаемые на диаграмме, совпадают; следовательно, совпадают и три рассмотренные меры благосостояния.

Вообще говоря, полезности разных потребителей несравнимы друг с другом, и их бессмысленно складывать. Однако на основе денежных мер изменения благосостояния можно получать некоторые оценки мероприятий экономической политики.

Предположим, что существуют n потребителей с функциями полезности $u_i(x_i)$ и доходами R_i. Пусть цены изменились с $\mathbf{p}^0$ до $\mathbf{p}^1$. Пусть, кроме того, в результате этого изменения цен суммарная величина компенсирующей вариации положительна, т. е.

$$\sum_i CV_i(\mathbf{p}^0, R_i, \mathbf{p}^1, R_i) > 0.$$

Покажем, что существует такое перераспределение доходов R'_i, $i = 1, \ldots, n$, где $\sum_i R'_i = \sum_i R_i$, что $v_i(\mathbf{p}^1, R'_i) > v_i(\mathbf{p}^0, R_i)$ для вех i, т. е. возможно компенсировать изменение цен каждому потребителю.

По определению компенсирующей вариации имеем, что

$$CV_\Sigma = \sum_i CV_i(\mathbf{p}^0, R_i, \mathbf{p}^1, R_i) = \sum_i (R_i - e_i(\mathbf{p}^1, x_i(\mathbf{p}^0, R_i))) > 0.$$

Мы можем выбрать R'_i так, что для всех потребителей $R'_i > e_i(\mathbf{p}^1, x_i(\mathbf{p}^0, R_i))$ (достаточно взять $R'_i = e_i(\mathbf{p}^1, x_i(\mathbf{p}^0, R_i)) + CV_\Sigma/n$). При этом, поскольку непрямая функция полезности возрастает по доходу,

$$v_i(\mathbf{p}^1, R'_i) > v_i(\mathbf{p}^1, e_i(\mathbf{p}^1, x_i(\mathbf{p}^0, R_i))).$$

По свойству двойственности между $v_i(\cdot,\cdot)$ и $e_i(\cdot,\cdot)$ правое выражение в этом неравенстве равно $v_i(\mathbf{p}^0, R_i)$. Значит, при таком выборе доходов $v_i(\mathbf{p}^1, R'_i) > v_i(\mathbf{p}^0, R_i)$ для всех потребителей i.

Содержательно это можно интерпретировать следующим образом: мероприятие экономической политики, характеризующееся положительной суммарной компенсирующей вариацией, может привести к росту полезности всех затронутых потребителей, если дополнить его соответствующим перераспределением дохода[29]. Однако следует отметить, что данная интерпретация предполагает, что такое перераспределение доходов *не вызовет* изменения цен. В рамках концепции общего равновесия такое предположение оказывается, вообще говоря, некорректным.

Задачи

2.48 Выведите формулы (○) и (○○) (см. с. 146).

[29] Ср. с Теоремой 5.3 из гл. 5 на с. 350.

2.49 Покажите, что если функция полезности имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = \min_{i=1,\ldots,l} \{a_i x_i\}$$

(леонтьевская функция полезности), т. е. блага абсолютно комплементарны, то отсутствует эффект замены, а если предпочтения квазилинейны, то отсутствует эффект дохода для всех благ, кроме одного.

2.50 Покажите, что любой товар Гиффена является малоценным. Справедливо ли обратное?

2.51 Могут ли все блага быть малоценными, если предпочтения локально ненасыщаемы?

2.52 Во вводных курсах микроэкономики обычно вводят следующие определения благ-заменителей и комплементарных благ (в терминах функций спроса Маршалла):

- «Благо 1 называется субститутом блага 2, если $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$».
- «Благо 1 называется комплементарным для блага 2, если $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$».

(A) Покажите, что такие определения ведут к парадоксам. Например, возможна ситуация, когда благо 1 является субститутом блага 2, а обратное неверно.

(B) Покажите также, что, аналогичные определения в терминах функции хиксианского спроса (приведите их) свободны от парадоксов такого типа.

2.53 Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна: $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$, причем элементарные функции $u_i(\cdot)$ дважды дифференцируемы, имеют положительные первые и отрицательные вторые производные. Блага i и j ($i \neq j$) могут быть взаимодополняющими (комплементарными) или взаимозаменяемыми для этого потребителя в смысле знака производной $\partial x_i / \partial p_j$. Покажите, что это зависит от свойств функции $u_j(\cdot)$, более конкретно — от соотношения величины $|u_j''(x_j)|\, x_j / u_j'(x_j)$ (эластичности предельной полезности по потреблению) и единицы. (*Указание:* Конкретизируйте для аддитивно-сепарабельной функции полезности необходимые условия максимума полезности при бюджетном ограничении. Рассматривая эти уравнения как тождества, продифференцируйте их по p_j.)

2.54 Пусть все исходные данные те же, что и в Примере 2.15. Укажите геометрическое место точек, среди которых может находиться спрос потребителя, обладающего квазилинейными предпочтениями.

2.55 В экономике обращаются два товара. Потребитель имеет локально ненасыщаемые предпочтения. Функция спроса на первый товар имеет вид $x_1(\mathbf{p}, R) = \frac{3R}{3p_1+4\sqrt{p_1p_2}}$. Найдите компенсирующее изменение дохода по Слуцкому при $\mathbf{p} = (1, 1)$, $\mathbf{p}' = (1, 4)$ и $R = 121$.

2.56 Пусть непрямая функция полезности некоторого потребителя имеет вид $v(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{\min\{p_1,p_2\}}$. Найдите компенсирующее изменение дохода по Хиксу при $\mathbf{p} = (1, 1)$, $\mathbf{p}' = (1, 4)$ и $R = 121$.

2.57 Пусть потребитель имеет однородную первой степени функцию полезности. При ценах $\mathbf{p} = (1, 1)$ и доходе $R = 5$ его функция спроса была равна $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = (2, 3)$.

(A) Определите геометрическое место точек, которые могут представлять спрос потребителя, если на покупку первого товара ввели налог в размере 20% от цены, а доход потребителя остался неизменным.

(B) Ставка налога изменилась с 20% до 40%. Ответьте на тот же вопрос.

2.58 Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна, т. е. имеет вид $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$. Кроме того, предположим, что каждое слагаемое $u_i(x_i)$ положительно однородно степени $\alpha_i \geqslant 0$. Покажите, что спрос данного потребителя удовлетворяет закону спроса.

2.59 Пусть набор $\mathbf{x}$ является внутренним в потребительском множестве, и является спросом потребителя при некоторых ценах и доходе.

(A) Докажите, используя формулу Эйлера, что если предпочтения потребителя задаются положительно однородной степени α ($0 < \alpha < 1$) функцией полезности, то левая часть в неравенстве (℧) равна нулю.

(B) Дайте интерпретацию полученных результатов в их связи с законом спроса.

(C) Докажите, пользуясь предыдущими результатами, что если предпочтения потребителя задаются положительно однородной первой степени функцией полезности, принимающей положительные значения, то выполнен закон спроса.

2.60 Проверьте выполнение упоминавшихся в данном параграфе достаточных условий закона спроса в случае функции полезности вида

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{A}$ — симметричная положительно определенная матрица.

2.61 Функция полезности Андрея Экономова $u(\cdot)$ зависит от потребления двух благ. Его доход — R^0, цена первого и второго блага — 1. Его начальник предлагает ему работу без изменения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цена второго в два раза выше. Экономов еще в университете ознакомился с понятиями компенсирующей и эквивалентной вариаций. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю A в доходе. Однако он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на B. Чему равны A и B?

(A) Решите задачу при $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$ и $R^0 = 240$.

(B) Решите задачу при $u(\mathbf{x}) = 4x_1x_2$ и $R^0 = 10$.

2.62 Николай Здоровяков потребляет только два блага — кофе и сигареты, причем может потреблять их только так, чтобы на чашку кофе приходилось три сигареты. Цена чашки кофе — 9, а цена сигареты — 2. Доход Николая составляет 180. Правительство ввело 50%-й налог на сигареты. Найдите изменение потребительского излишка, компенсирующую и эквивалентную вариации. Сравните их (по абсолютной величине) с налоговыми доходами правительства, полученными от Николая.

2.63 На потребление одного из благ (первого) введен налог, так что цена блага для потребителя стала равной $p_1 + t$, где p_1 — исходная рыночная цена. Цены остальных благ и доход потребителя остались неизменными. Пусть EV — эквивалентная вариация, связанная с соответствующим увеличением цены блага, а T — поступление от налога, $x_1(p_1)$ — функция спроса.

(A) Объясните, почему величину $-EV - T$ можно назвать чистыми потерями от налога.

(B) Запишите формулы для EV и T и покажите, что чистые потери неотрицательны.

(C) Предложите аналогичный измеритель чистых потерь, основанный на компенсирующей вариации. Совпадают ли эти два измерителя?

2.64 Сформулируйте определение компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка непосредственно в терминах функции спроса и функции полезности и вычислите на основе этого определения их величины при $l = 2, R^0 = R^1 = 100, \mathbf{p}^0 = (1, 1), \mathbf{p}^1 = (2, 1)$, когда...

(A) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;

(B) блага совершенно заменимы (предпочтения представимы линейной функцией полезности);

(C) блага абсолютно комплементарны (предпочтения представимы леонтьевской функцией полезности);

(D) предпочтения описываются функцией Кобба—Дугласа.

2.65 Проделайте то же, что и в предыдущей задаче, в случае, когда цена на первое благо падает ($R^0 = R^1 = 100$, $\mathbf{p}^0 = (0{,}5; 1), \mathbf{p}^1 = (1; 1)$). Сравните результаты.

2.66 В ситуациях, рассмотренных в двух предыдущих задачах, проиллюстрируйте на графике поведение кривых хиксианского спрроса и маршаллианского спроса (на первое благо), и укажите соответствующие фигуры, площади которых измеряют компенсирующую, эквивалентную вариации и потребительский излишек.

2.67 В экономике два блага. Цена второго блага и доход потребителя остаются неизменными.

(A) Для заданной на плоскости (x_1, p) системы кривых хиксианского спроса на первое благо изобразите возможное положение кривых маршаллианского спроса на это благо.

(B) Укажите на графике соответствующие компенсирующую, эквивалентную вариации и потребительский излишек при (i) падении и (ii) росте цены первого блага.

(C) Каковы соотношения между величинами компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка в ситуациях, различающихся gj типе благ (нормальное/малоценное благо) и характером изменения цен (падение/рост)?

2.68 Пусть в экономике обращаются два товара. В результате некоторого мероприятия экономической политики изменилась цена первого блага. При этом цена второго блага и доход потребителя остались неизменными. Определите, как соотносятся компенсирующая, эквивалентная вариации и потребительский излишек в случае если…

(A) цена первого блага выросла и первый товар нормальный;

(B) цена первого блага выросла и первый товар — товар Гиффена;

(C) цена первого блага упала и первый товар малоценный;

(D) цена первого блага упала и первый товар — товар Гиффена.

Докажите соответствующие неравенства.

2.69 Покажите, что при изменении цены только одного блага ΔCS обладает свойством аддитивности.

2.70 ⟦Laffont⟧ Предположим, что цены на все блага, кроме первого, постоянны, доход постоянен и равен R^0, а цена первого блага меняется с p_1^0 до p_1^1. Эластичность спроса потребителя на первое благо по доходу постоянна и равна η.

(A) Проинтерпретируйте условие постоянства эластичности спроса по доходу как дифференциальное уравнение для спроса (рассматриваемого как функция дохода). Решите это уравнение и покажите, что

$$x_1(p_1, R) = x_1(p_1, R^0)\left(\frac{R}{R^0}\right)^\eta.$$

(B) Объясните, почему из леммы Шепарда следует следующее дифференциальное уравнение для функции расходов (рассматриваемой как функция цены первого блага):

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = x_1(p_1, e).$$

Подставив в это дифференциальное уравнение соотношение из пункта (A), решите его, исходя из того, что $\eta < 1$, и покажите, что

$$e(p_1^0, \mathbf{x})^{1-\eta} - e(p_1^1, \mathbf{x})^{1-\eta} = (1-\eta)(R^0)^{-\eta}\Delta CS,$$

где $\Delta CS = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, R^0)dt$ — изменение потребительского излишка, связанное с рассматриваемым изменением цены первого блага.

(C) Выразите $e(p_1^0, \mathbf{x}^1)$ и $e(p_1^1, \mathbf{x}^1)$ через R^0 и эквивалентную вариацию, связанную с рассматриваемым изменением. Покажите, что при $\eta < 1$ эквивалентная вариация является следующего вида функцией эластичности, дохода и изменения потребительского излишка:

$$EV = R^0\left[1 + \frac{1-\eta}{R^0}\Delta CS\right]^{\frac{1}{1-\eta}} - R^0.$$

(D) Получите аналогичную формулу для компенсирующей вариации при $\eta < 1$, выразив для этого $e(p_1^0, \mathbf{x}^0)$ и $e(p_1^1, \mathbf{x}^0)$ через R^0 и компенсирующую вариацию.

(E) Получите формулы для эквивалентной и компенсирующей вариаций при $\eta = 1$.

2.71 [[Laffont]] Предположим, что цены на все блага, кроме первого, постоянны, доход постоянен и равен R^0, а цена первого блага меняется с p_1^0 до p_1^1. Непрямая функция полезности потребителя имеет форму Гормана

$$v(\mathbf{p}, R) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R.$$

(A) Записав определение компенсирующей вариации CV с помощью непрямой функции полезности, покажите, что

$$v(p_1^1, R^0) - v(p_1^1, R^0 - CV) = v(p_1^1, R^0) - v(p_1^0, R^0).$$

Выведите отсюда формулу

$$\int_{R^0-CV}^{R^0} \frac{\partial v(p_1^1, R)}{\partial R} dR = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, R^0) \frac{\partial v(t, R^0)}{\partial R} dt,$$

воспользовавшись тождеством Роя.

(B) Приняв во внимание форму непрямой функции полезности, покажите, что

$$CV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, R^0) \frac{b(t)}{b(p_1^1)} dt.$$

(C) Применяя тождество Роя и меняя порядок дифференцирования ($\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial}{\partial p_1}$), покажите, что для непрямой функции полезности указанного вида выполнено равенство

$$\frac{\partial b(p_1)}{\partial p_1} = -\frac{\partial x_1(p_1, R)}{\partial R} b(p_1).$$

Решите соответствующее дифференциальное уравнение и выразите $\frac{b(p_1)}{b(p_1^1)}$ через $\int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial x_1(t,R^0)}{\partial R} dt$.

(D) Покажите, пользуясь предыдущими результатами, что компенсирующая вариация вычисляется по следующей формуле (формуле Сида):

$$CV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \exp\left\{-\int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial x_1(t, R^0)}{\partial R} dt\right\} x_1(p_1, R^0) dp_1.$$

(E) Покажите, что если в рассматриваемом случае эластичность спроса на первое благо по доходу постоянна и равна η, то формула Сида примет вид

$$CV = \frac{R^0}{\eta}\left[1 - e^{-\frac{\eta}{R^0}\Delta CS}\right].$$

Указание: Введите обозначение

$$I(p_1) = \Delta CS(p_1^1, p_1) = \int_{p_1^1}^{p_1} x_1(t, R^0) dt$$

и воспользуйтесь тем, что $x_1(p_1, R^0) = I'(p_1)$.

(F) С использованием формулы, выведенной в предыдущем пункте, продемонстрируйте, что компенсирующая вариация и потребительский излишек должны совпадать в случае квазилинейных предпочтений.

Приложение 2.A Дифференцируемость функций спроса

В этом приложении мы приведем условия (в терминах свойств функции полезности), гарантирующие дифференцируемость функции спроса и связанных с ней функций, характеризующих поведение потребителя.

Теорема 2.16:

Пусть $X = \mathbb{R}^l_+$ и, кроме того, пусть

- функция полезности $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^l_{++}$;
- $\nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ при всех $\mathbf{x} > \mathbf{0}$;
- матрица вторых частных производных функции полезности $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является отрицательно определенной при всех $\mathbf{x} > \mathbf{0}$;
- спрос потребителя положителен ($\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) > \mathbf{0}$) при всех ценах $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и доходах $R > 0$.

Тогда

{i} функция маршаллианского спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и непрямая функция полезности $v(\mathbf{p}, R)$ непрерывно дифференцируемы по ценам и доходу при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, $R > 0$;

{ii} функция хиксианского спроса $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и функция расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемы по ценам и по $\mathbf{x}$ при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+$. ⌟

Доказательство: Как было показано в п. 2.1.2, приведенные предположения гарантируют, что условия Куна—Таккера являются необходимыми и достаточными условиями того, что внутренний потребительский набор является решением задачи потребителя. Также было показано, что при выполнении этих условий множитель Лагранжа положителен. Таким образом, потребительский спрос при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R определяется следующими уравнениями:

$$\nabla u(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0};$$
$$\mathbf{p}\mathbf{x} - R = 0.$$

По теореме о неявной функции[30] функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и множитель Лагранжа как функция цен и дохода $\lambda = \lambda(\mathbf{p}, R)$ будут непре-

[30] См. Теорему B.52 в Приложении B на с. 1131.

рывно дифференцируемыми, если матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

является невырожденной. Невырожденность этой матрицы при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R эквивалентна невырожденности матрицы

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \nabla u(\mathbf{x})^{\mathsf{T}} \\ \nabla u(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

при $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ (см. задачу 2.87).

Покажем, что при сделанных нами предположениях матрица $\tilde{\mathbf{H}}$ является невырожденной. Предположим противное. Тогда существуют вектор $\mathbf{y}$ и число z, такие что $\mathbf{H}\mathbf{y} + z\nabla u(\mathbf{x}) = 0$ и $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{y} = 0$, где $(\mathbf{y}, z) \neq \mathbf{0}$. Случай $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ и $z \neq 0$ невозможен, поскольку $\nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Если же $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{y} + \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\nabla u(\mathbf{x})^{\mathsf{T}} z = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{y} = 0$, что противоречит тому, что матрица $\mathbf{H}$ отрицательно определенная.

Таким образом, доказано, что функция маршаллианского спроса и множитель Лагранжа λ являются непрерывно дифференцируемыми по ценам и доходу. Далее, непрямая функция полезности определяется как $v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$, а функция полезности и функция спроса непрерывно дифференцируемы. Значит, непрямая функция полезности непрерывно дифференцируема по ценам и доходу. В силу свойств взаимности $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$. С учетом монотонности непрямой функции полезности по доходу и непрерывной дифференцируемости непрямой функции полезности имеем непрерывную дифференцируемость функции расходов по ценам. Наконец, в силу соотношения $\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, непрерывной дифференцируемости функции спроса по доходу и непрерывной дифференцируемости функции расходов по ценам имеем непрерывную дифференцируемость хиксианского спроса по ценам.

В задаче 2.88 читателю предлагается доказать непрерывную дифференцируемость функции расходов и хиксианского спроса по $\mathbf{x}$. ■

Отрицательная определенность матрицы Гессе функции полезности (и являющаяся следствием строгая вогнутость функции полезности) в этой теореме является слишком ограничительным условием, не имеющим содержательной экономической интерпретации. Это условие несложно заменить на более слабое — некоторый вариант квазивогнутости функции полезности (см. задачу 2.90).

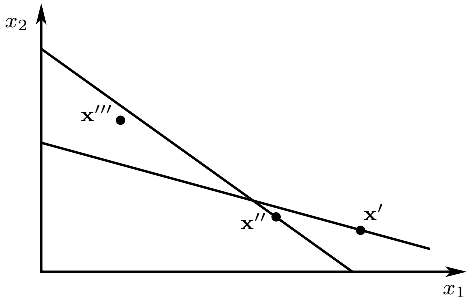


Рис. 2.11. *Косвенное отношение выявленного предпочтения*

Приложение 2.B Выявленные предпочтения в модели потребителя

Рассмотрим потребителя, в основе поведения которого лежат неоклассические предпочтения. Предположим, что при некоторых ценах $\mathbf{p}'$ он выбрал набор $\mathbf{x}'$ и что для некоторого допустимого набора $\mathbf{x} \in X$ выполнено неравенство $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$. Набор $\mathbf{x}$ был доступен в данной ситуации выбора, поэтому если бы он был лучше $\mathbf{x}'$, то это противоречило бы рациональности потребителя. Поэтому должно быть выполнено $\mathbf{x} \precsim \mathbf{x}'$. Таким образом, если при ценах $\mathbf{p}'$ выбран набор $\mathbf{x}'$ и выполняется соотношение $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, то это означает, что набор $\mathbf{x}$ *выявленно не хуже*, чем набор $\mathbf{x}'$.

Пусть, далее, при ценах $\mathbf{p}'$ потребитель выбрал набор $\mathbf{x}'$, а при ценах $\mathbf{p}''$ — набор $\mathbf{x}''$, причем $\mathbf{p}'\mathbf{x}'' \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$. Если для некоторого допустимого набора $\mathbf{x} \in X$ выполнено $\mathbf{p}''\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}''\mathbf{x}''$, то должно быть выполнено $\mathbf{x} \precsim \mathbf{x}'$, поскольку $\mathbf{x} \precsim \mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'' \precsim \mathbf{x}'$. Если бы при этом выполнялось $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, то из этого непосредственно следовало бы, что $\mathbf{x} \precsim \mathbf{x}'$. В этом случае можно сказать, что $\mathbf{x}$ *непосредственно* выявленно не лучше, чем $\mathbf{x}'$. В противном случае ($\mathbf{p}'\mathbf{x} > \mathbf{p}'\mathbf{x}'$) требуется проводить рассуждения по цепочке. В этом случае $\mathbf{x}$ *косвенным образом* (через посредство $\mathbf{x}''$) выявленно не лучше, чем $\mathbf{x}'$.

На Рис. 2.11 иллюстрируется случай косвенного выявления предпочтений. Здесь $\mathbf{p}'\mathbf{x}'' < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$ и поэтому $\mathbf{x}'' \precsim \mathbf{x}'$, $\mathbf{p}''\mathbf{x}''' < \mathbf{p}''\mathbf{x}''$, а значит, $\mathbf{x}''' \precsim \mathbf{x}''$. Следовательно, $\mathbf{x}''' \precsim \mathbf{x}'$. Однако мы не можем установить этот факт сразу, поскольку $\mathbf{x}'''$ не попадает в бюджетный треугольник, заданный сочетанием $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$.

При локальной ненасыщаемости предпочтений, если для некоторого допустимого набора $\mathbf{x}$ выполнено строгое неравенство $\mathbf{p}'\mathbf{x} < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, то должно быть выполнено $\mathbf{x} \prec \mathbf{x}'$. Поскольку $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{x}'$, достаточно показать, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$ невозможно. Действительно, можно найти такую окрестность набора $\mathbf{x}$, что любой набор из нее можно купить, имея доход $\mathbf{p}'\mathbf{x}'$ (это следует из непрерывности функции $\mathbf{p}'\mathbf{x}$). В этой окрестности набора $\mathbf{x}$ по локальной ненасыщаемости можно найти набор $\tilde{\mathbf{x}}$, который лучше $\mathbf{x}$, и следовательно, лучше эквивалентного ему набора $\mathbf{x}'$. Получаем $\mathbf{x}' \succ \tilde{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{p}'\tilde{\mathbf{x}} < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, но это невозможно при рациональности потребителя. Соотношение $\mathbf{p}'\mathbf{x} < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, таким образом, означает, что набор $\mathbf{x}'$ *выявленно лучше* набора $\mathbf{x}$[31].

Несложно распространить эти рассуждения на случай произвольного количества наблюдений за ценами и поведением потребителя при этих ценах. Рассмотрим $(\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^i)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\mathbf{p}^i$ — вектор цен, а $\mathbf{x}^i$ — выбранный при этих ценах потребительский набор.

Если имеется цепочка $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$, $\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, ..., $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^q \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$ для подмножества нашего набора данных — $i, j, k, \ldots, q, r$, то должно выполняться $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq \mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$. В этом случае набор $\mathbf{x}^i$ выявленно не хуже, чем набор $\mathbf{x}^r$. Такое определение подразумевает, что $\mathbf{x}^i$ может быть непосредственно (если цепочка включает только $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^r$) или же косвенно (если цепочка более длинная) выявленно не хуже, чем набор $\mathbf{x}^r$. Это многошаговый (усиленный) вариант выявленного отношения предпочтения. Мы будем использовать именно усиленный вариант и обозначать его $\mathbf{x}^i \mathrel{\underline{\rhd\!\rhd}} \mathbf{x}^r$.

Если имеется цепочка $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$, $\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, ..., $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^q \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$, где одно из неравенств строгое, то должно быть $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^r$. Значит, здесь набор $\mathbf{x}^i$ выявленно лучше набора $\mathbf{x}^r$. Здесь (и ниже) мы используем термин «выявленно лучше» тоже в усиленном смысле. Будем обозначать это усиленное отношение через $\mathbf{x}^i \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{x}^r$.

2.B.1 Оценки для верхнего лебегового множества

Как следует из предыдущего обсуждения выявленных предпочтений, для произвольного допустимого потребительского набора $\mathbf{x} \in X$, имея совокупность данных $(\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^i)$, $i = 1, \ldots, n$, мы в некоторых случаях можем сказать, что он выявленно не лучше или выявленно хуже набора $\mathbf{x}^i$ из наших данных ($\mathbf{x}^i \mathrel{\underline{\rhd\!\rhd}} \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^i \mathrel{\rhd\!\rhd} \mathbf{x}$ соот-

[31] Другой классический вариант строгого отношения выявленного предпочтения основан на свойствах предпочтений, гарантирующих единственность оптимального набора в задаче потребителя. При однозначности выбора неравенство $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$ означает, что набор $\mathbf{x}'$ выявленно лучше набора $\mathbf{x}$, если эти два набора не совпадают.

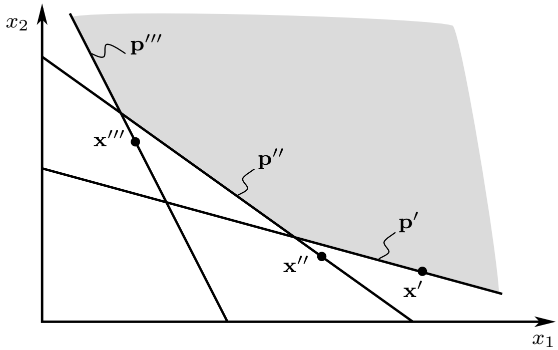


Рис. 2.12. *Оценка сверху для верхнего лебегового множества* $\bar{L}^+(\mathbf{x}')$

ветственно). Это позволяет получать оценку сверху для множества $L^+(\mathbf{x}^i)$ (множества наборов, которые не хуже, чем $\mathbf{x}^i$). Построим множество $\bar{L}^+(\mathbf{x}^i)$ из всех таких наборов, которые не являются выявленно худшими, чем $\mathbf{x}^i$. Тогда, очевидно, выполнено $L^+(\mathbf{x}^i) \subset \bar{L}^+(\mathbf{x}^i)$, т. е. настоящее верхнее лебегово множество будет лежать внутри нашей оценки.

На Рис. 2.12 показано, как можно по данным парам $(\mathbf{p}', \mathbf{x}'), (\mathbf{p}'', \mathbf{x}''), (\mathbf{p}''', \mathbf{x}''')$ получить указанную оценку для множества $\bar{L}^+(\mathbf{x}')$. Здесь $\mathbf{x}'$ выявленно лучше, чем $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'''$, поэтому требуется отсечь все точки, которые лежат хотя бы в одном из трех бюджетных треугольников $\mathbf{p}'\mathbf{x} < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, $\mathbf{p}''\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}''\mathbf{x}''$ или $\mathbf{p}'''\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'''\mathbf{x}'''$.

Если не привлекать дополнительную информацию о виде предпочтений, то оценка снизу для верхнего лебегового множества будет состоять из тех наблюдаемых наборов, которые выявленно не хуже данного набора. Так, в случае, показанном на Рис. 2.12, мы знаем только, что $\mathbf{x}' \in L^+(\mathbf{x}')$. О множестве $L^+(\mathbf{x}''')$ мы можем сказать только, что ему принадлежат $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'''$.

Если предположить, что предпочтения выпуклы, то верхнее лебегово множество будет включать не только сами выявленно не худшие точки, но и их выпуклую оболочку. Например, в случае, показанном на Рис. 2.12, оценка снизу для $L^+(\mathbf{x}''')$ должна включать треугольник с вершинами в точках $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'''$.

Если предположить, что предпочтения монотонны, то вместе с каждой точкой $\mathbf{x}^j$, которая выявленно не хуже $\mathbf{x}^i$ ($\mathbf{x}^j \trianglerighteq\!\!\trianglerighteq \mathbf{x}^i$), оценка снизу для $L^+(\mathbf{x}^i)$ должна включать и точки, которые не хуже, чем $\mathbf{x}^j$, по монотонности, т. е. наборы из множества $\mathbf{x}^j + \mathbb{R}^l_+$.

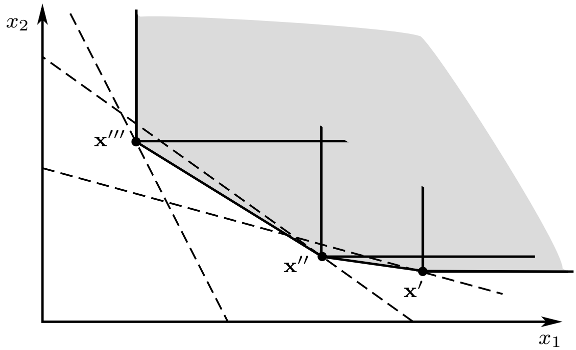


Рис. 2.13. *Оценка снизу для верхнего лебегового множества* $L^+(\mathbf{x}''')$ *в предположении выпуклости и монотонности предпочтений*

В предположении выпуклости и монотонности предпочтений оценка снизу для $L^+(\mathbf{x}^i)$ должна включать вместе с каждой точкой $\mathbf{x}^j$, которая выявленно не хуже $\mathbf{x}^i$, также множество $\mathbf{x}^j + \mathbb{R}^l_+$ и, кроме того, все выпуклые комбинации таких множеств (см. Рис. 2.13).

2.B.2 Рационализация. Теорема Африата[32].

Мы рассмотрели получение по совокупности данных $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1), \ldots, (\mathbf{p}^n, \mathbf{x}^n)$ оценки для множества $L^+(\mathbf{x}^i)$, соответствующего одному из наборов, $\mathbf{x}^i$. Можно поставить более сложную задачу рационализации данного набора наблюдений: найти предпочтения, которые могли бы порождать такие наблюдения. Ясно, что такая задача не имеет однозначного решения, но хотелось бы получить хотя бы одно подходящее решение. Если мы не уверены, что данные получены на основе рационального выбора, то решения у данной задачи может не быть. Поэтому желательно иметь алгоритм, который позволял бы определить, можно ли рационализовать имеющиеся данные.

Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ на X рационализуют наблюдения за выбором $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1), \ldots, (\mathbf{p}^n, \mathbf{x}^n)$ $(\mathbf{x}^i \in X\ \forall i)$, если $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и всех $\mathbf{x} \in X$, таких что $\mathbf{p}^i\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$.

[32] См. S. N. Afriat. The Construction of a Utility Function from Expenditure Data, *International Economic Review* **8** (1967): 67–77; A. Fostel, H. E. Scarf, and M. J. Todd. Two New Proofs of Afriat's Theorem, *Economic Theory* **24** (2004): 211–219

Это уточнение Определения 1.16 для случая потребительского выбора. При этом потребитель выбирает из бюджетного множества. Неявно предполагается, что предпочтения локально ненасыщаемы, так что если при ценах $\mathbf{p}^i$ был выбран набор $\mathbf{x}^i$, то доход потребителя был равен $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$.

Предположим, что мы имеем цепочку наборов $i, j, k, \ldots, r$ и опять i, такую что $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i, \mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j, \ldots, \mathbf{p}^r\mathbf{x}^i \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$. Другими словами, в этой цепочке по кругу каждый набор непосредственно выявленно не хуже последующего. В этой цепочке ни одно неравенство не может быть строгим. Действительно, например, $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^i < \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$ влекло бы $\mathbf{x}^i \rhd\!\!\rhd \mathbf{x}^i$, т. е. $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^i$ (набор лучше самого себя), что невозможно. Невозможность существования подобных циклов, т. е. невозможность того, чтобы набор по цепочке был выявленно лучше самого себя, по аналогии с общим определением, данным в гл. 1 (см. Определение 1.17 на с. 77) следует назвать *обобщенной аксиомой выявленных предпочтений* (*generalized axiom of revealed preference*, GARP). Таким образом, имеем следующую переформулировку GARP для модели поведения потребителя[33]:

> Совокупность данных $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1), \ldots, (\mathbf{p}^n, \mathbf{x}^n)$ удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленных предпочтений, если не существует циклов вида $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$, $\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, …, $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^i \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$, где одно из неравенств строгое.

Найти предпочтения, рационализующие набор данных, можно только тогда, когда он удовлетворяет требованиям обобщенной аксиомы выявленных предпочтений. Теорема 1.12 в гл. 1 (см. с. 78) демонстрирует, как при выполнении GARP сконструировать предпочтения на конечном множестве точек $\{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$. Если множество допустимых наборов X более широкое, то нужно каким-то образом непротиворечиво распространить найденные предпочтения на остальные наборы из X.

Теорема Африата предлагает такое продолжение предпочтений на все множество X. Более того, согласно этой теореме, тот факт,

[33] Данное требование впервые было сформулировано в несколько более слабом виде Хаутеккером (см. H. S. Houthakker. Revealed Preference and the Utility Function, *Economica,* **17** (1950): 159–174) в предположении, что выбор потребителя однозначен, и получило название «усиленной аксиомы выявленных предпочтений» (SARP). Ср. со сноской 37 на с. 82, где сравниваются две формулировки «слабой аксиомы выявленных предпочтений» (Самуэльсона и Эрроу). GARP в приведенном здесь виде сформулирована Африатом под названием «циклическая непротиворечивость».

что наблюдаемый выбор удовлетворяет GARP, эквивалентен существованию «хорошей» функции полезности, рационализующей данный выбор.

Теорема 2.17 (теорема Африата):

Набор данных удовлетворяет GARP, тогда и только тогда, когда существует кусочно-линейная, непрерывная и вогнутая функция полезности, которая его порождает. ⌟

Доказательство: То, что это необходимое условие, мы уже видели. Нетривиальным утверждением здесь является достаточность.

Предположим, что мы сконструировали предпочтения на множестве точек $\{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$ так, что выполнены необходимые условия рациональности

$$\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd} \mathbf{x}^j \Rightarrow \mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j,$$
$$\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^j \Rightarrow \mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j,$$

и отсортировали свой набор данных согласно этим предпочтениям так, что $\mathbf{x}^1 \succcurlyeq \mathbf{x}^2 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq \mathbf{x}^n$.

Введем обозначение $a_{ij} = \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)$. Выполнение неравенства $a_{ij} \leq 0$ означает, что $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd} \mathbf{x}^j$, если же неравенство строгое, то $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^j$.

Для упрощения доказательства предположим, что $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, т. е. что в наших данных нет совпадений и на каждой бюджетной гиперплоскости $\mathbf{p}_i\mathbf{x}$ лежит только один из наблюдаемых наборов — $\mathbf{x}_i$. Теорема верна и без этого предположения, но оно несколько упрощает рассуждения.

Чтобы доказать теорему, надо показать, что существует набор чисел $u^1, \ldots, u^n$ и $\lambda^1, \ldots, \lambda^n > 0$, которые удовлетворяли бы следующей системе линейных неравенств (назовем их неравенствами Африата):

$$u^j \leqslant u^i + \lambda^i a_{ij} \text{ для всех } i, j$$

или, поскольку $a_{jj} = 0$,

$$u^j + \lambda^j a_{jj} \leqslant u^i + \lambda^i a_{ij} \text{ для всех } i, j.$$

Если такие числа найдутся, то функцию полезности можно построить по формуле

$$u(\mathbf{x}) = \min_i \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)\}.$$

Несложно проверить, что u^i — значение этой функции в точке $\mathbf{x}^i$:

$$u(\mathbf{x}^j) = \min_i \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)\} = \min_i \{u^i + \lambda^i a_{ij}\} = u^j + \lambda^j a_{jj} = u^j.$$

Далее, пусть $\mathbf{x}^j$ — некоторый набор из нашей совокупности. Если для произвольного вектора $\mathbf{x}$ выполнено неравенство $\mathbf{p}^j\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, то $u(\mathbf{x}) \leqslant u(\mathbf{x}^j)$. Действительно,

$$u(\mathbf{x}) \leqslant u^j + \lambda^j \mathbf{p}^j(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j) \leqslant u^j = u(\mathbf{x}^j).$$

Первое неравенство здесь следует из определения $u(\mathbf{x})$, а второе — из положительности λ^j. Тем самым, как мы видим, существование решения неравенств Африата гарантирует существование «хорошей» функции полезности, которая могла бы породить эти данные (любой набор, доступный в i-й ситуации выбора, не лучше $\mathbf{x}^i$ по этой функции полезности).

Существование решения неравенств Африата докажем по индукции. При $n = 1$ величины u^1 и λ^1 можно выбрать произвольным образом; требуется только, чтобы $\lambda^1 > 0$.

Пусть существуют $u^1, \ldots, u^{n-1}$ и $\lambda^1, \ldots, \lambda^{n-1} > 0$, являющиеся решением неравенств Африата для наборов $i = 1, \ldots, n-1$. Найдем решение в случае n наборов.

Выберем u^n так, чтобы

$$u^n \leqslant \min_{i=1,\ldots,n-1} \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^i)\} = \min_{i=1,\ldots,n-1} \{u^i + \lambda^i a_{in}\}.$$

Затем выберем λ^n так, чтобы

$$u^j \leqslant u^n + \lambda^n a_{nj} \ \text{ для } j = 1, \ldots, n-1.$$

Требуется показать, что такая величина λ^n существует.

Наборы упорядочены так, что среди $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{n-1}$ нет ни одного, который был бы выявленно хуже, чем $\mathbf{x}^n$. Поэтому $\mathbf{p}^n\mathbf{x}^j > \mathbf{p}^n\mathbf{x}^n$ при $j = 1, \ldots, n-1$, т. е. $a_{nj} = \mathbf{p}^n(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^n) > 0$ при $j = 1, \ldots, n-1$. (Как сказано выше, мы делаем упрощающее предположение, что $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$.) Так как $a_{nj} > 0$ при $j = 1, \ldots, n-1$, то найдется достаточно большое число λ^n, которое удовлетворяло бы всем этим неравенствам[34]. Это такое λ^n, что

$$\lambda^n \geqslant \max_{j=1,\ldots,n-1} \frac{u^j - u^n}{a_{nj}}.$$

Таким образом, мы доказали, что неравенства Африата имеют решение и тем самым — что $u(\mathbf{x})$ рационализует наблюдаемый выбор.

В формуле

$$u(\mathbf{x}) = \min_i \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)\}$$

[34] Если бы здесь при каком-то j было $a_{nj} = 0$, то не всегда можно было бы добиться выполнения данных неравенств увеличением λ^n.

каждая из функций $u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)$ является линейной, а потому непрерывной и вогнутой. Следовательно, их поточечный минимум $u(\mathbf{x})$ — кусочно-линейная, непрерывная и вогнутая функция. ■

Поясним смысл неравенств Африата. Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи потребителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}$. Функция Лагранжа, соответствующая задаче потребителя имеет вид

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda \bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}).$$

Если выполнены условия регулярности ($\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$), то существует множитель Лагранжа $\bar{\lambda} \geqslant 0$, такой что $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа. (Если предпочтения локально ненасыщаемы, то здесь $\bar{\lambda} > 0$.) Отсюда следует, что $\bar{\mathbf{x}}$ максимизирует функцию $u(\mathbf{x}) + \bar{\lambda}\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$. Пользуясь этим условием, получаем, что если существует функция полезности $u(\cdot)$, которая рационализует имеющиеся наблюдения, то $\mathbf{x}^i$ должен максимизировать функцию $u(\mathbf{x}) + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x})$ при некотором множителе Лагранжа $\lambda^i > 0$. В частности, при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^j$ должно быть выполнено

$$u(\mathbf{x}^i) = u(\mathbf{x}^i) + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^i) \geqslant u(\mathbf{x}^j) + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j).$$

Замечание: Если дополнительно предположить, что $\mathbf{p}^i > 0$ при всех i и $X = \mathbb{R}^l_+$, то функция $u(\mathbf{x})$, определяемая данной теоремой, является также строго монотонной, поскольку строго монотонна каждая из функций $u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)$. Соответственно $u(\mathbf{x})$ будет также локально ненасыщаемой.

Замечание: Следствием этой теоремы является то, что непрерывность, монотонность и вогнутость функции полезности (непрерывность, монотонность и выпуклость предпочтений) нельзя опровергнуть на основе конечного набора данных о выборе потребителя на обычных бюджетных множествах.

Замечание: То, что теорема Африата основана на конструировании «хорошей» функции полезности, ни в коем случае не означает, что данные нельзя рационализовать какой-то другой функцией, не обладающей указанными свойствами.

Задачи

2.72 Индивидуум при ценах $(4, 6)$ выбирает набор $(6, 6)$, а при ценах $(6, 3)$ он выбирает набор $(10, 0)$. Удовлетворяют ли эти наблюдения аксиоме выявленных предпочтений?

2.73 При ценах $(1, 4)$ выбор потребителя был $(2, 3)$. Укажите, какой из следующих наборов выявленно лучше, чем этот набор: (A) (5, 2), (B) (8, 1), (C) (15, 0) .

2.74 При ценах $(2, 1)$ выбор потребителя был $(2, 2)$. Укажите, какой из следующих наборов выявленно лучше, чем этот набор: (A) (1, 5), (B) (5, 0), (C) (0, 5) .

2.75 Совместимы ли с моделью рационального поведения с локально ненасыщаемой функцией полезности следующие наблюдения за рыночным поведением потребителя:

$$\mathbf{x}(10, 10, 10) = (10, 10, 10); \quad \mathbf{x}(10, 1, 2) = (9, 25, 15/2);$$

$$\mathbf{x}(1, 1, 10) = (15, 5, 9)$$

(т. е. спрос при ценах $(10, 10, 10)$ равен соответственно $(10, 10, 10)$ и т. д.).

2.76 Рациональный потребитель в базовом периоде при ценах $\mathbf{p}^b$ выбрал объем потребления $\mathbf{x}^b$, а в периоде t при ценах $\mathbf{p}^t$ — объем потребления $\mathbf{x}^t$. Индексы физического объема потребления Пааше и Ласпейреса по определению равны

$$P_q = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^b}, \quad L_q = \frac{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^b}.$$

Какой из наборов $\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^b$ лучше для потребителя, если (A) $P_q > 1$? (B) $L_q > 1$?

2.77 Индексы цен Пааше и Ласпейреса по определению равны

$$P_p = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^t}, \quad L_p = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^b}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^b}.$$

Пусть M — отношение потребительских расходов в период t к потребительским расходам в базовом периоде, т. е. $M = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^b}$. Какой из наборов $\mathbf{x}^t$, $\mathbf{x}^b$ лучше для потребителя, если (A) $P_p > M$? (B) $L_p > M$?

2.78 Имеются следующие наблюдения за выбором потребителя: $\mathbf{x}^1 = (5, 3)$, $\mathbf{p}^1 = (1, 4)$, $\mathbf{x}^2 = (2, 2)$, $\mathbf{p}^2 = (1, 3)$, $\mathbf{x}^3 = (2, 5)$, $\mathbf{p}^3 = (3, 1)$.

(A) Продемонстрируйте, что эти наблюдения удовлетворяют обобщенной аксиоме выявленных предпочтений.

(в) Предложите функцию полезности, рационализующую эти наблюдения.

2.79 Пусть при одних и тех же ценах $\mathbf{p}$ потребитель выбирал разные наборы $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$.

(А) Объясните, почему эти наблюдения не могут не удовлетворять обобщенной аксиоме выявленных предпочтений, если не предполагается, что выбор единствен.

(в) Предложите простую функцию полезности, рационализующую такие наблюдения.

Приложение 2.C Интегрируемость функций спроса: восстановление предпочтений

Пусть в нашем распоряжении имеется система функций спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ потребителя (например, оцененная эконометрическими методами). Можно поставить перед собой две близкие, но несколько различающиеся по смыслу задачи. Во-первых, можно по спросу *восстанавливать* функцию полезности (если предполагается, что такая функция у потребителя есть). Во-вторых, можно пытаться по спросу сконструировать ее (если не предполагается, что такая функция у потребителя есть), т. е. *рационализовать* наблюдаемый спрос некоторой функцией полезности. При решении этой второй задачи желательно уметь определять, возможно ли в принципе ее решить (если потребитель ведет себя непоследовательно, то, значит, в основе его поведения не может лежать функция полезности).

Традиционные подходы к решению данных задач опираются на то, что решение задачи потребителя характеризуется некоторыми соотношениями, которые можно рассматривать как дифференциальные уравнения. Решая эти дифференциальные уравнения (что, как правило, связано с вычислением интеграла), можно получить непосредственно функцию полезности либо тесно связанные с ней функции. Поэтому в микроэкономике в этом контексте принято говорить об интегрировании и интегрируемости.

Ясно, что задача восстановления функции полезности не имеет однозначного решения, поскольку существует бесконечно много функций полезности, соответствующих одним и тем же предпочтениям. Поэтому речь может идти только о восстановлении такой функции полезности, которая чем-то уникальна. Если известно (или берется в качестве предположения), что предпочтения принадлежат некоторому классу, то, возможно, для этого класса предпочтений существует некоторая уникальная нормировка. Классический пример — так называемые квазилинейные предпочтения.

2.C.1 Восстановление квазилинейных предпочтений

Рассмотрим, как можно по спросу восстановить квазилинейную функцию полезности

$$u(x_1, \ldots, x_l) = s(x_1, \ldots, x_{l-1}) + x_l.$$

Очевидно, что две разные квазилинейные функции полезности, соответствующие одним и тем же предпочтениям, должны совпадать с точностью до константы. Таким образом, в данном случае уникальность нормировки определяется самим видом функции. Дополнительно, для нахождения константы, можно потребовать, чтобы выполнялось условие $s(\mathbf{0}) = 0$.

Предположим, что $s(\cdot)$ — строго вогнутая дифференцируемая функция и что выбор потребителя при некоторых ценах и доходе содержит все продукты в положительном количестве, т. е. $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) > \mathbf{0}$. Тогда согласно теореме Куна—Таккера при некотором положительном λ верны соотношения $\frac{\partial s}{\partial x_i} = \lambda p_i$ $(i \neq l)$ и $p_l \lambda = 1$. Без потери общности будем предполагать, что $p_l = 1$. Тогда $\lambda = 1$, и $\frac{\partial s(x_1,\ldots,x_{l-1})}{\partial x_i} = p_i$, $i \neq l$. Из этих уравнений следует, что спрос на все блага, кроме последнего, не зависит от дохода[35]:

$$x_i = x_i(p_1, \ldots, p_{l-1}) = x_i(\mathbf{p}_{-i}), \quad i \neq l.$$

Кроме того, можно заметить, что эти уравнения фактически задают обратные функции спроса вида $p_i(\mathbf{x}_{-l})$ для всех благ, кроме l-го.

Эти рассуждения приводят к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = p_i(x_1, \ldots, x_{l-1}), \quad i = 1, \ldots, l-1.$$

Решая их, восстановим функцию $s(\cdot)$.

Пример 2.19
Пусть $l = 3$ и спрос на первые два блага задается следующими функциями:

$$x_1(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{p_1^3 p_2}}, \quad x_2(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2^3}}.$$

[35] См. также Пример 2.3.

Соответствующие обратные функции спроса имеют вид

$$p_1(x_1, x_2) = x_1^{-3/4} x_2^{1/4}, \quad p_2(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{-3/4}.$$

Решив дифференциальные уравнения (их можно решать по аналогии с приводимым нижеПримером 2.20.)

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = x_1^{-3/4} x_2^{1/4}, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = x_1^{1/4} x_2^{-3/4},$$

получим

$$s(x_1, x_2) = 4 x_1^{1/4} x_2^{1/4} + \text{const}.$$

Чтобы выполнялось условие $s(0, 0) = 0$, константа должна быть равна нулю. Окончательно получаем следующую квазилинейную функцию полезности:

$$u(x_1, x_2, x_3) = 4 x_1^{1/4} x_2^{1/4} + x_3. \qquad \triangle$$

Особенно простой задача восстановления предпочтений оказывается, если известно (дополнительно к квазилинейности), что функция полезности сепарабельна, т. е.

$$u(x_1, \ldots, x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i) + x_l.$$

Условия первого порядка для задачи потребителя в предположении, что потребитель при рассматриваемых ценах и доходах предъявляет спрос на все блага ($\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) > \mathbf{0}$), а цена последнего блага равна единице, имеют вид

$$s_i'(x_i(\mathbf{p})) = p_i.$$

Эти уравнения фактически задают обратную функцию спроса вида $p_i(x_i)$. При этом спрос на каждое благо зависит только от его цены, т. е. $x_i(\mathbf{p}) = x_i(p_i)$. Проинтегрировав уравнения $s_i' = p_i(x_i)$, получим следующие выражения для функций $s_i(\cdot)$:

$$s_i(x_i) = \int_0^{x_i} p_i(t) dt + s_i(0).$$

Интеграл в этом соотношении является так называемым потребительским излишком, поэтому

$$s_i(x_i) = CS_i(x_i) + s_i(0)$$

и

$$u(x_1, \ldots, x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} CS_i(x_i) + x_l + \text{const}.$$

Таким образом, если предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности, то по спросу (предварительно обратив его) можно восстановить непосредственно функцию полезности.

Другой подход к восстановлению квазилинейной функции полезности состоит в восстановлении соответствующей непрямой функции полезности. При таком подходе тождество Роя

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = x_i(\mathbf{p}, R)$$

рассматривается как система дифференциальных уравнений.

Непрямая функция полезности для квазилинейной функции полезности имеет вид (см. Пример 2.6)

$$v(\mathbf{p}_{-l}, 1, R) = s(x_1(\mathbf{p}_{-l}), \ldots, x_{l-1}(\mathbf{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\mathbf{p}_{-l}).$$

При этом $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial R} = 1$, и $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial p_i}$ не зависит от R. Поэтому, интегрируя $l-1$ уравнение тождества Роя по $p_1, \ldots, p_{l-1}$ соответственно, мы можем получить (с точностью до константы интегрирования) искомую функцию $v(\cdot, \cdot)$. Соответствующие интегралы будут равны изменению потребительского излишка как функции цен.

Если предпочтения квазилинейные и сепарабельные, то непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\mathbf{p}, R) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i(p_i)) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(p_i).$$

Из тождества Роя получаем соотношение:

$$x_i(p_i) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} = -\frac{\partial v_i(p_i)}{\partial p_i},$$

где $v_i(p_i) = s_i(x_i(p_i)) - p_i x_i(p_i)$, и, следовательно,

$$-\int_{p_i}^{+\infty} \frac{\partial v_i(t)}{\partial p_i} dt = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t) dt,$$

откуда

$$v_i(p_i) - \lim_{p_i \to +\infty} v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t) dt$$

или

$$v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt + \text{const}.$$

Интеграл в последнем соотношении есть по определению потребительский излишек как функция цены:

$$CS_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt.$$

Отсюда

$$v(p, R) = \sum_{i=1}^{l-1} v_i(p_i) + R = \sum_{i=1}^{l-1} CS_i(p_i) + R + \text{const}.$$

Знание непрямой функции полезности и системы функций спроса позволяет нам сопоставить каждому потребительскому набору, который может быть выбран как наилучший при некоторых ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, значение полезности по следующему правилу: $u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = v(\mathbf{p}, R)$. Однако данное правило задает полезность не для всех наборов, а только для наборов из области значений функции спроса. Эту проблему мы еще обсудим ниже применительно к функции полезности общего вида.

2.C.2 Восстановление предпочтений на основе функции расходов

Существует простой способ выбора уникальной функции полезности, представляющей данные предпочтения. Если зафиксировать некоторый вектор цен $\mathbf{p}$, то можно поставить следующую задачу: для данного набора $\mathbf{x} \in X$ подобрать эквивалентный ему набор $\mathbf{h} \in X$, который стоил бы как можно меньше в ценах $\mathbf{p}$. Тогда набору $\mathbf{x}$ в качестве величины полезности можно сопоставить стоимость набора $\mathbf{h}$ в ценах $\mathbf{p}$, т. е. $\mathbf{ph}$.

На Рис. 2.14 представлена иллюстрация этой идеи. Набор $\mathbf{x}'$ определяет кривую безразличия. Среди наборов на этой кривой $\mathbf{h}'$ имеет наименьшую стоимость в ценах $\mathbf{p}$ (наклон штриховой линии, проходящей через $\mathbf{h}'$, соответствует отношению цен). Аналогично $\mathbf{h}''$ при тех же ценах имеет наименьшую стоимость среди наборов, эквивалентных $\mathbf{x}''$. Поскольку $\mathbf{x}'$ лежит на более высокой кривой безразличия, чем $\mathbf{x}''$, его полезность $\mathbf{ph}'$ будет выше, чем полезность $\mathbf{x}''$, равная $\mathbf{ph}''$.

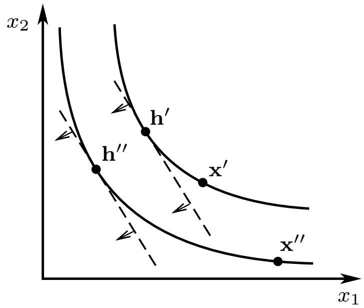


Рис. 2.14. *Функция расходов как функция полезности*

Очевидно, что выбранная указанным способом функция полезности является функцией расходов (см. Определение 2.4 на с. 124). Действительно, нам известно (см. Теорему 2.5), что при фиксированных ценах $\mathbf{p}$ функция расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))$ представляет собой функцию полезности:

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}).$$

Далее мы покажем, что знание системы функций спроса позволяет восстановить функцию расходов, а следовательно, и предпочтения на множестве потребительских наборов, которые могут быть выбраны потребителем при некоторых значениях цен и доходов, т. е. на множестве значений спроса. В последующем мы обсудим, как имеющаяся информация о спросе потребителя позволяет восстановить (оценить) предпочтения и для остальных потребительских наборов.

Заметим сначала, что по лемме Шепарда (см. Теорему 2.8)

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}),$$

где по определению $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))$. Тем самым мы имеем систему дифференциальных уравнений относительно функции расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ при фиксированном значении $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))$$

или

$$\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})). \qquad (\boxtimes)$$

К ней следует добавить граничные условия $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) = R$, где $\mathbf{p}'$ — вектор цен, который при доходе R может породить спрос $\mathbf{x}$, т. е. такой вектор цен, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}', R)$.

Решая эти уравнения, мы для каждого набора $\mathbf{x}$ из области значений функции спроса найдем значение функции расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ при всех возможных ценах $\mathbf{p}$, т. е. минимальное значение расходов потребителя, достаточное, чтобы при ценах $\mathbf{p}$ обеспечить ему не меньший уровень полезности, чем тот, который обеспечивается набором $\mathbf{x}$.

Будем предполагать в дальнейшем, что функция спроса является непрерывно дифференцируемой (и по ценам, и по доходу). Можно заметить следующее. Если функция $e(\mathbf{p})$ является решением системы дифференциальных уравнений (☒), то она является дважды непрерывно дифференцируемой. Кроме того, $l \times l$ матрица $\mathbf{S}(\mathbf{p}, R)$ с элементами $S_{ij}(\mathbf{p}, R) = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p}, R)$ («матрица замены») должна быть симметричной. Действительно, продифференцировав уравнения (☒) по ценам, увидим, что матрица $\mathbf{S}$ совпадает с матрицей вторых производных по ценам функции $e(\cdot)$. Но последняя матрица должна быть симметричной (согласно теореме Юнга).

Оказывается, симметричность матрицы $\mathbf{S}$ является не только необходимым, но и достаточным условием существования и единственности решения системы уравнений (☒). Это классический результат теории дифференциальных уравнений в частных производных (так называемая теорема Фробениуса). Кроме того, известно, что решение будет непрерывно дифференцируемой функцией параметров $\mathbf{p}', R$, задающих граничные условия. Заметим, однако, что эти результаты гарантируют существование только локального решения. Для того чтобы гарантировать существование глобального решения, нужны дополнительные предположения[36].

Пример 2.20

Продемонстрируем восстановление функции расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ из функции спроса вида $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2} ; \frac{a^2 R p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2} \right)$. Мы не проверяем выполнение требуемых условий, так как выше все это уже фактически было сделано. Нам требуется решить следующую систему

[36]См. L. Hurwicz and H. Uzawa · On the Integrability of Demand Functions, in *Preferences, Utility and Demand: A Minnesota Symposium*, J. S. Chipman et al. (ed.), New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, 1971: 174–214. В этой классической работе делается предположение, что производные функций спроса по доходу равномерно ограничены на множествах цен и доходов вида $\{ \mathbf{p} \mid \mathbf{p}' \leqslant \mathbf{p} \leqslant \mathbf{p}'' \} \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbf{p}' < \mathbf{p}''$, $\mathbf{p}', \mathbf{p}'' \in \mathbb{R}^l_{++}$, и что при нулевом доходе спрос равен нулю вне зависимости от цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$.

дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{ep_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{a^2ep_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}$$

Решим первое уравнение, рассматривая p_1 как переменную, а p_2 и $\mathbf{x}$ — как параметры. Заметим, что оно представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Кроме того, дробь $\frac{p_2}{p_1p_2+a^2(p_1)^2}$ допускает разложение $\frac{p_2}{p_1p_2+a^2(p_1)^2} = \frac{1}{p_1} - \frac{a^2}{p_2+a^2p_1}$. Используя это, можем записать

$$\int \frac{de}{e} = \int \frac{dp_1}{p_1} - \int \frac{a^2dp_1}{p_2 + a^2p_1} + \text{const}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln(e) = \ln(p_1) - \ln(p_2 + a^2p_1) + \text{const}$$

или

$$e = A\frac{p_1}{p_2 + a^2p_1},$$

где A зависит от p_2 и $\mathbf{x}$, которые мы при решении рассматривали как неизменные параметры: $A = A(p_2, \mathbf{x})$.

Подставим полученное выражение для $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ во второе уравнение и получим дифференциальное уравнение для A:

$$\frac{\partial A}{\partial p_2} \cdot \frac{p_1}{p_2 + a^2p_1} - A\frac{p_1}{(p_2 + a^2p_1)^2} = A\frac{a^2p_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2} \cdot \frac{p_1}{p_2 + a^2p_1}$$

или

$$\frac{\partial A}{\partial p_2} = A\frac{a^2p_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2} + A\frac{1}{p_2 + a^2p_1} = A\frac{1}{p_2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dA}{A} = \int \frac{dp_2}{p_2} + \text{const}.$$

Интегрируя, получим решение следующего вида: $A(p_2) = Bp_2$, где B — множитель, который зависит от набора $\mathbf{x}$, который мы в данном случае рассматривали как постоянный параметр, т. е. $A(p_2, \mathbf{x}) = B(\mathbf{x})p_2$.

Таким образом, мы получили следующее выражение для функции расходов:

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\frac{p_1p_2}{p_2 + a^2p_1}.$$

Для вычисления $B(\mathbf{x})$ требуется использовать граничные условия. Для этого сначала найдем цены, при которых потребитель предъявит спрос на данный набор $\mathbf{x}$ (другими словами, найдем обратную функцию спроса $\mathbf{p}(\mathbf{x}, R)$). Уравнения спроса

$$x_1 = \frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}$$

при этом следует рассматривать как систему уравнений относительно цен p_1 и p_2. Данную систему несложно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}} = \dfrac{p_2}{ap_1}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R. \end{cases}$$

Это дает линейные уравнения относительно p_1 и p_2, решая которые найдем

$$p_1 = \frac{R}{\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})} \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{aR}{\sqrt{x_2}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})}.$$

При подстановке этих цен в функцию расходов, мы должны получить доход R:

$$B(\mathbf{x})\frac{p_1p_2}{p_2 + a^2p_1} = R.$$

Отсюда найдем выражение для $B(\mathbf{x})$:

$$B(\mathbf{x}) = \frac{R(p_2 + a^2p_1)}{p_1p_2} = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}.$$

Окончательно получим следующую функцию расходов:

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1p_2}{p_2 + a^2p_1}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}).$$

Как мы уже говорили, функция расходов при фиксированных ценах есть функция полезности. Так как первый множитель здесь не зависит от потребительского набора $\mathbf{x}$, то он не представляет интереса при восстановлении предпочтений. Более простая функция $B(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ тоже является функцией полезности, порождающей рассматриваемый спрос.

Заметим, что предложенное здесь решение можно упростить, положив (без потери общности) $p_2 = 1$ и интегрируя только по первой цене. △

2.C.3 Проблема восстановимости предпочтений на всем множестве потребительских наборов

Из проведенного выше анализа следует, что знание системы функций спроса (полученной на основе максимизации полезности) позволяет восстановить предпочтения (представляющие эти предпочтения функции полезности) на каждом потребительском наборе, который может быть выбран как наилучший при некоторых ценах $\mathbf{p}$ и доходе R.

Вообще говоря, не все возможные потребительские наборы принадлежат области значений системы функций спроса. Так, функции полезности $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$ соответствует система функций спроса, для которой $x_1(\mathbf{p}, R) = x_2(\mathbf{p}, R)$. Как несложно понять, предложенное правило не позволяет задать полезность для таких наборов (x_1, x_2), что $x_1 \neq x_2$.

Заметим, что хотя, вообще говоря, нам не удалось построить полностью функцию полезности, но зато мы фактически построили полностью непрямую функцию полезности $v(\mathbf{p}, R) = e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$. Непрямую функцию полезности такого вида принято называть денежной непрямой функцией полезности (см. Определение 2.12 на с. 156). Денежная непрямая полезность $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, R)$ — это непрямая функция полезности для функции расходов $e(\mathbf{q}, \mathbf{x})$, если рассматривать последнюю как функцию полезности.

Мы столкнулись здесь с частным проявлением общей проблемы: хотя каждая функция полезности однозначно определяет непрямую функцию полезности, но обратное, вообще говоря, неверно. По непрямой функции полезности $v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$ не всегда можно восстановить обычную функцию полезности.

Тем не менее по информации, содержащейся в функции спроса или непрямой функции полезности, можно построить некоторую аппроксимацию для соответствующей прямой функции полезности. Эта аппроксимация оказывается достаточно хорошей в том смысле, что совпадает с функцией полезности всюду на множестве значений функции спроса и порождает, по существу, тот же спрос, что и данная функция полезности. Покажем это.

Пусть нам известна функция спроса, определенная на $P \times \mathbb{R}^{++}$, где P — некоторое множество цен, и пусть $\bar{X}$ — множество значений этой функции спроса. В общем случае $\bar{X}$ — некоторое подмножество множества допустимых потребительских наборов X. Можно доопределить функцию полезности на множестве $X \setminus \bar{X}$, причем так, что полученная функция даст нам оценку сверху для функции полезности во всех точках множества $X \setminus \bar{X}$.

Приведем соответствующее построение. Рассмотрим некоторый набор $\hat{\mathbf{x}}$ из $\bar{X}$. По определению $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ при некоторых ценах $\mathbf{p}$ и доходе R. Если при этих ценах и доходах рассматриваемый набор $\mathbf{x}$ мог быть куплен, то можно с уверенностью сказать, что набор $\mathbf{x}$ не может быть лучше, чем $\hat{\mathbf{x}}$. По аналогии с анализом выявленных предпочтений можно сказать, что набор $\mathbf{x}$ *выявленно не лучше*, чем $\hat{\mathbf{x}}$. Таким образом, для рассматриваемой функции полезности должно выполняться соотношение $u(\mathbf{x}) \leqslant u(\hat{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$. Следовательно, $u(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{p}, R)$ при всех ценах и доходах, таких что $\mathbf{px} \leqslant R$. Это дает следующую оценку для $u(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x}) \leqslant \inf \left\{ v(\mathbf{p}, R) \;\middle|\; \mathbf{p} \in P,\ \mathbf{px} \leqslant R \right\}.$$

(Поскольку непрямая функция полезности $v(\mathbf{p}, R)$ положительно однородна нулевой степени, в качестве дохода R здесь можно взять произвольное положительное число, например $R = 1$.)

Возникает идея рассматривать в качестве аппроксимации функции полезности эту оценку, полученную на основе выявленных предпочтений, а именно

$$u^*(x) = \inf \left\{ v(\mathbf{p}, R) \;\middle|\; \mathbf{p} \in P,\ \mathbf{px} \leqslant R \right\}.$$

Другими словами, в качестве полезности набора $\mathbf{x}$ выбираем значение следующей задачи:

$$\begin{gathered} v(\mathbf{p}, R) \to \inf_{\mathbf{p} \in P} \\ \mathbf{px} \leqslant R. \end{gathered} \tag{$\heartsuit$}$$

Заметим, что в общем случае речь должна идти об инфимуме, а не о минимуме. Это объясняется тем, что оптимизация ведется на множестве, которое не обязательно является замкнутым. В частности, целевая функция (непрямая функция полезности) может быть не определена в случае, когда хотя бы одна из цен обращается в ноль. В силу этого замена инфимума на минимум невозможна, так как последний может, вообще говоря, не существовать. В то же время, инфимум существует, хотя при некотором значении параметров и может быть равен $-\infty$.

В принципе данная процедура позволяет построить «функцию полезности» $u^*(\mathbf{x})$ на множестве всех наборов благ. Однако ясно, что она может не везде совпадать с исходной функцией полезности. Мы можем быть уверены только, что $u^*(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{x})$, поскольку это непосредственно следует из определения функции $u^*(\cdot)$. Если $\mathbf{x}$ — вектор, который не реализуется как спрос потребителя ни при каких ценах и доходе (при которых $\mathbf{x}$ является допустимым в задаче потребителя), то $u(\mathbf{x})$ может быть меньше $u^*(\mathbf{x})$.

Приведем соответствующий пример.

Пример 2.21

Рассмотрим упоминавшуюся выше функцию полезности

$$u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\},$$

определенную на $X = \mathbb{R}^2_+$. Соответствующая непрямая функция полезности (как и в случае леонтьевской функции полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$) имеет вид $v(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{\max\{p_1, p_2\}}$. Найдем значение $u^*(x)$ при $P = \mathbb{R}^2_{++}$, т. е. значение задачи

$$\frac{R}{\max\{p_1, p_2\}} \to \inf_{p_1, p_2 > 0}$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant R.$$

Рассмотрим сначала случай положительного потребительского набора ($x_1, x_2 > 0$). Из «бюджетного ограничения» следует что $p_i \leqslant \frac{R}{x_i}$, откуда $\max\{p_1, p_2\} \leqslant \frac{R}{\min\{x_1, x_2\}}$. Таким образом, $u^*(x_1, x_2) \geqslant \min\{x_1, x_2\}$. Покажем, что это — точная нижняя граница, построив соответствующую последовательность цен. Пусть, например, $x_1 \geqslant x_2$. Рассмотрим последовательность $\{(p_1^n, p_2^n)\}$, где

$$p_1^n = \frac{R}{x_1} \frac{1}{2n}, \quad p_2^n = \frac{R}{x_2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Для этой последовательности цен $p_1^n \leqslant p_2^n$, поэтому

$$v(\mathbf{p}^n, R) = \frac{R}{\max\{p_1^n, p_2^n\}} = \frac{R}{p_2^n} = \frac{x_2}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}.$$

Таким образом, $u^*(x_1, x_2) = x_2 = \min\{x_1, x_2\}$. Аналогично при $x_1 \leqslant x_2$ выполнено $u^*(x_1, x_2) = x_1 = \min\{x_1, x_2\}$.

Если $x_i = 0$, то найдется допустимая последовательность с $p_i^n = n$, которая обеспечивает $u^*(x_1, x_2) = 0 = \min\{x_1, x_2\}$. Таким образом, $u^*(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ при любом допустимом наборе $\mathbf{x}$. △

Несмотря на возможность несовпадения, данная аппроксимация обладает свойствами, делающими ее полезной для моделирования поведения потребителя: во-первых, $u^*(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ для всех точек $\mathbf{x}$ из области значений функции спроса, во-вторых, функция $u^*(\cdot)$ порождает по существу тот же спрос, что и исходная функция полезности.

Теорема 2.18:

Пусть $u(\cdot)$ — исходная функция полезности, $v(\cdot,\cdot)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности, а функция $u^*(\cdot)$ построена на основе задачи (♡) указанным выше способом. Предположим, что $\bar{\mathbf{x}}$ — оптимальный потребительский набор при ценах $\bar{\mathbf{p}} \in P$ и доходе $\bar{R} > 0$, т. е. $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$. Тогда верно следующее:

{i} вектор цен $\bar{\mathbf{p}}$ является решением задачи (♡) с $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и $R = \bar{R}$ и выполнено $u(\bar{\mathbf{x}}) = v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) = u^*(\bar{\mathbf{x}})$;

{ii} набор $\bar{\mathbf{x}}$ является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(\cdot)$ при при ценах $\bar{\mathbf{p}} \in P$ и доходе $\bar{R} > 0$.⌟

Доказательство: {i} Пусть $\mathbf{p} \in P$ — произвольный вектор, являющийся допустимым в задаче (♡) с $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и $R = \bar{R}$, т. е. $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} \leqslant \bar{R}$. Вместе с тем это неравенство означает, что $\bar{\mathbf{x}}$ допусти́м в задаче потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\bar{R}$. Этот набор не может иметь бо́льшую полезность, чем набор $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, \bar{R})$, являющийся оптимальным в задаче потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\bar{R}$, т. е. $u(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant u(\hat{\mathbf{x}})$, или $v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) \leqslant v(\mathbf{p}, \bar{R})$. Отсюда следует, что вектор $\bar{\mathbf{p}}$ оптимален в задаче (♡) с $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и $R = \bar{R}$. Таким образом, мы получили, что $v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) = u^*(\bar{\mathbf{x}})$.

{ii} Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — произвольный потребительский набор, удовлетворяющий бюджетному ограничению при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{R}$: $\bar{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} \leqslant \bar{R}$. Рассмотрим задачу (♡) с $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ с и $R = \bar{R}$. Цены $\bar{\mathbf{p}}$ являются допустимыми в этой задаче, а $u^*(\hat{\mathbf{x}})$ — значение этой задачи. Поэтому $v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) \geqslant u^*(\hat{\mathbf{x}})$. Как только что доказано, $u^*(\bar{\mathbf{x}}) = v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$, поэтому $u^*(\bar{\mathbf{x}}) \geqslant u^*(\hat{\mathbf{x}})$. ■

2.C.4 Интегрируемость (рационализуемость) спроса

Выше мы предполагали, что рассматриваемые функции спроса порождены задачей максимизации некоторой функции полезности. Теперь мы откажемся от данного априорного предположения и укажем на те свойства функций спроса, которые позволяют построить предпочтения, приводящие к тем же функциям спроса (т. е. рационализовать рассматриваемый спрос). Предположим, что функция $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ определена на $P \times \mathbb{R}_{++}$, где $P \subset \mathbb{R}^l_{++}$ — некоторое открытое выпуклое множество векторов цен (например, $P = \mathbb{R}^l_{++}$), и что

$\bar{X} \subset \mathbb{R}^l$ — область значений этой функции. Необходимые условия того, что данная функция порождена моделью рационального поведения, нам известны:

- функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу;
- функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса $(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = R$ (если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы);
- матрица замены
$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,j}$$
является симметричной и отрицательно полуопределенной[37].

Можно ли рационализовать эту «функцию спроса» некоторой функцией полезности на X? Оказывается, что перечисленные условия являются не только необходимыми, но и достаточными, т. е. любая функция, удовлетворяющая этим условиям (а также некоторым техническим предположениям), может быть порождена моделью рационального поведения.

Заметим, что приведенные условия не являются независимыми, поскольку из последних двух следует первое, так что фактически выполнение закона Вальраса для данных функций спроса и симметричность и отрицательная полуопределенной матрицы коэффициентов замены являются достаточными условиями существования предпочтений, порождающих эти функции спроса. Покажем это.

Теорема 2.19:

Пусть функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ дифференцируема по ценам и доходу, удовлетворяет закону Вальраса ($\mathbf{px}(\mathbf{p}, R) = R$), а матрица коэффициентов замены $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,j}$ является симметричной.

Тогда функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу. ⌟

Доказательство: Рассмотрим вектор-функцию $f_i(t) = x_i(t\mathbf{p}, tR)$, где i — одно из благ. В силу дифференцируемости функции спроса по ценам и доходу для любого $t > 0$ имеем, что (при проведении этих выкладок для упрощения записи аргументы $(t\mathbf{p}, tR)$ функции спроса и ее

[37] Отрицательная полуопределенность матрицы замены является следствием закона спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому, который, в свою очередь, следует из слабой аксиомы выявленных предпочтений (см. п. 2.3.1). Поэтому отрицательную полуопределенность матрицы замены здесь можно заменить на требование выполнения для спроса слабой аксиомы выявленных предпочтений.

производных будем опускать)

$$
\begin{aligned}
f_i'(t) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i}{\partial R} R = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i}{\partial R} \mathbf{p}\mathbf{x} = \\
= \sum_j p_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j \right) = \sum_j p_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j}{\partial R} x_i \right) = \\
= \sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial R} = -x_i + x_i = 0.
\end{aligned}
$$

При проведении этих преобразований мы воспользовались тождествами $\sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i = 0$ и $\sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial R} = 1$, которые получаются путем дифференцирования уравнения закона Вальраса (см. Теорему 2.13 на с. 142). Таким образом, $f_i(t)$ — константа, и тем самым для любого t верно, что $f_i(t) = f_i(1)$, откуда $\mathbf{x}(t\mathbf{p}, tR) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = t^0 \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Последнее и означает, что функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу. ■

Перейдем теперь к построению предпочтений, рационализующих данные «функции спроса». По аналогии с рассмотренной выше ситуацией, когда априорно предполагается, что данный спрос порожден задачей максимизации полезности, для этих функций можно определить «функцию расходов» на $P \times \bar{X}$, так что она удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$
\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))
$$

с граничными условиями $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) = R$, где $\mathbf{p}'$ — вектор цен, такой что $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R)$.

При этом полученная функция $e(\cdot, \cdot)$ обладает следующими свойствами:

- функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ дифференцируема по $\mathbf{p}$;
- функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ однородна первой степени по $\mathbf{p}$;
- функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ не убывает по $\mathbf{p}$, если функция спроса неотрицательна;
- функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ вогнута по $\mathbf{p}$ в силу отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого;
- если для некоторого $\mathbf{p}$ верно соотношение $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x}')$, то оно также верно и для любого $\mathbf{p}'$, т. е. $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) = e(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$.

(Последнее свойство не что иное, как следствие единственности решения предложенного дифференциального уравнения.)

Покажем, что при любом фиксированном векторе цен $\mathbf{q} \in P$ для функции полезности $u(\mathbf{x}) = e(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ функция $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ задает спрос потребителя. Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений. Первое из них показывает, что упорядочение потребительских наборов на основе полученных таким образом «функций расходов» не зависит от выбора конкретной функции расходов, т. е. фиксированного вектора цен, используемого для расчета стоимости потребительских наборов.

Теорема 2.20:

Пусть $\mathbf{x} \in \bar{X}$, $\mathbf{x}' \in \bar{X}$ и при некотором векторе цен $\mathbf{p} \in P$ выполнено неравенство

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{x}').$$

Тогда аналогичное соотношение выполняется для любого другого вектора цен $\mathbf{q} \in P$:

$$e(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{q}, \mathbf{x}'). \quad \lrcorner$$

Доказательство: Случай, когда для некоторого $\mathbf{p} \in P$ справедливо соотношение $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x}')$, очевиден, в силу упоминавшейся выше единственности решения. Поэтому рассмотрим только случай, когда для некоторых цен $\mathbf{p} \in P$ выполнено строгое неравенство $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) > e(\mathbf{p}, \mathbf{x}')$. Предположим противное, а именно, что нашлись такие цены $\mathbf{q} \in P$, для которых $e(\mathbf{q}, \mathbf{x}) < e(\mathbf{q}, \mathbf{x}')$. Рассмотрим функцию $f(t) = e(\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \mathbf{x}) - e(\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \mathbf{x}')$. Эта функция непрерывна, так как непрерывна по ценам функция $e(\cdot, \cdot)$. Кроме того, $f(0) > 0 > f(1)$, откуда в силу непрерывности следует существование такого $\tilde{t}$, что $f(\tilde{t}) = 0$. Другими словами найдется такой вектор $\tilde{\mathbf{q}} \in P$, что для него справедливо равенство $e(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{x}) = e(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{x}')$. Но это означает, что равенство должно выполняться и для первоначального вектора цен, т. е. $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x}')$. Получили противоречие. ■

Заметим теперь, что так как $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ однородна первой степени по $\mathbf{p}$, то по формуле Эйлера $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$ и $\mathbf{p} \in P$. По построению функции $e(\cdot, \cdot)$, если набор $\mathbf{x}$ является значением спроса при ценах $\mathbf{p}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x})$, то $\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ (откуда следует, что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}\mathbf{x}$). Данные свойства функции $e(\cdot, \cdot)$ позволяют установить следующее утверждение.

Теорема 2.21:

Для каждого набора $\mathbf{x} \in \bar{X}$ и вектора цен $\mathbf{p}' \in P$ выполнено $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}$. $\lrcorner$

Доказательство: Так как $\mathbf{x} \in \bar{X}$, то этот набор представи́м в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ при некоторых $\mathbf{p} \in P$ и $R > 0$. Вогнутость функции $e(\cdot,\cdot)$ по ценам влечет, что $e(\cdot,\cdot)$ как функция цен лежит ниже своей касательной, поэтому выполнено неравенство

$$e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}),$$

откуда, сократив $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, получим

$$e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Подставляя вместо градиента $\mathbf{x}$, получаем требуемое неравенство.■

Поясним смысл доказываемого неравенства. Пусть $e(\cdot,\cdot)$ — функция расходов рационального потребителя. По определению $e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$ — это минимальные расходы в ценах $\mathbf{p}'$ на достижение по крайней мере того уровня благосостояния, который обеспечивается вектором $\mathbf{x}$. Сам вектор $\mathbf{x}$ может не минимизировать расходы, поэтому, вообще говоря, $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}$.

Другими словами, выполнение неравенства $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}$ — это одно из свойств функции расходов рационального потребителя. Таким образом, Теорема 2.21 фактически устанавливает, что сконструированная как решение дифференциального уравнения «функция расходов» не противоречит одному из естественных требований, связанных с рациональностью. Более того, как тривиальное следствие Теоремы 2.21 получаем, что данная «функция расходов», рассматриваемая как функция полезности, действительно рационализует предпочтения, т. е. порождает точно такой же спрос, как тот, на основе которого она построена.

Пусть $\mathbf{x}'$ — некоторый набор из $\bar{X}$. Для этого набора найдутся цены $\mathbf{p}' \in P$, такие что $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'\mathbf{x}')$. Из доказанной только что теоремы следует, что если взять $\bar{X}$ в качестве множества потребительских наборов, $e(\cdot,\cdot)$ как функцию второго аргумента — в качестве функции полезности, $\mathbf{p}'$ — в качестве вектора цен, а $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ — в качестве дохода, то $\mathbf{x}'$ является решением соответствующей задачи потребителя. Другими словами, $\mathbf{x}'$ является решением задачи

$$\begin{gathered} e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in \bar{X}} \\ \mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x}'). \end{gathered}$$

Действительно, возьмем произвольный набор $\mathbf{x} \in \bar{X}$, такой что $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$. По доказанной теореме для него выполнено $\mathbf{p}'\mathbf{x} \geqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$, и, следовательно, $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}') \geqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$.

Заметим далее, что в качестве функции полезности в задаче потребителя мы могли бы взять $e(\mathbf{q}, \cdot)$ с любым вектором цен $\mathbf{q} \in P$. Отсюда следует, что функция $e(\mathbf{q}, \cdot)$ рационализует $\mathbf{x}(\cdot, \cdot)$ на $\bar{X}$. А именно, при всех ценах и доходах $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ является решением соответствующей задачи потребителя:

$$e(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in \bar{X}}$$
$$\mathbf{px} \leqslant R.$$

Отметим, что в данном случае условие симметричности «матрицы замены» $\mathbf{S}$ — это условие *математической интегрируемости* (т. е. условие существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений), а ее отрицательная полуопределенность — условие *экономической интегрируемости*, которое гарантирует, что найденное решение рационализует спрос.

Задачи

2.80 Пусть $u(\cdot)$ — функция полезности, представляющая строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, заданные на $\mathbb{R}^l_+$, $v(\cdot)$ — соответствующая непрямая функция полезности. Покажите, что если функция $u^*(\cdot)$ построена на основе задачи (♡), то

$$u^*(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_{++}.$$

Указание: Используйте теорему отделимости (см. доказательство утверждения о восстановлении технологического множества по функции прибыли — Теоремы 3.10 на с. 230). Множество $L^{++}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}$ можно отделить от точки $\mathbf{x}$. Так как предпочтения строго монотонны, то нормаль $\mathbf{p}$ к отделяющей гиперплоскости — вектор с положительными коэффициентами. Тогда $\mathbf{p}$ — решение задачи (♡).

2.81 Пусть $u(x)$ — функция полезности. Вычислите для нее непрямую функцию полезности, решите задачу (♡) и вычислите «восстановленную» функцию полезности $u^*(x)$. Совпадает ли она с исходной функцией полезности? Решите задачу для следующих функций полезности:

(A) $u(x) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \ln(x_k)$; (B) $u(x) = \min_k\{\alpha_k x_k\}$;
(C) $u(x) = x_1^2 + x_2^2$; (D) $u(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2} + x_3$.

2.82 Для функций полезности предыдущей задачи найдите функцию расходов и непрямую денежную функцию полезности.

2.83 Для функций полезности предыдущей задачи найдите спрос, восстановите функцию расходов (или, что то же самое, непрямую денежную функцию полезности), и постройте «восстановленную» функцию полезности $u^*(x)$. Правильно ли восстановлены исходные предпочтения? Найдите спрос, соответствующий функции полезности $u^*(x)$. Совпадает ли он с исходным спросом?

2.84 Функция спроса потребителя на первое из двух имеющихся в экономике благ равна $x_1(p_1, p_2) = a - bp_1/p_2$ (не зависит от дохода). Найдите соответствующую функцию полезности.

2.85 Найдите функцию полезности, которая рационализует спрос, полученный на основе лексикографических предпочтений.

2.86 ⟦MWG⟧ Рассмотрите функцию расходов следующего вида:

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \exp\left\{\sum_{k\in K} \alpha_k \ln(p_k) + \left(\prod_{k\in K} p_k^{\beta_k}\right) u(\mathbf{x})\right\}.$$

(A) При каких ограничениях на параметры α_k, β_k данная функция является функцией расходов?

(B) С учетом ответа на вопрос предыдущего пункта найдите отвечающую данной функции расходов непрямую функцию полезности.

Задачи к главе

2.87 Покажите, что невырожденность матрицы

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \nabla u(\mathbf{x}) \\ \nabla u(\mathbf{x})^{\mathsf{T}} & 0, \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, $\mathbf{H}$ — матрица вторых производных функции полезности, является (наряду с другими предположениями) достаточным условием дифференцируемости функции спроса (см. Теорему 2.16).

2.88 Восполните доказательство Теоремы 2.16, доказав, что при сделанных предположениях функция расходов и функция хиксианского спроса являются непрерывно дифференцируемыми по $\mathbf{x}$.

2.89 Является ли дифференцируемой на положительном ортанте функция спроса потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$? (Данный пример показывает, что для дифференцируемости спроса недостаточно строгой квазивогнутости, дважды непрерывно дифференцируемости и строгой монотонности.)

2.90 Усильте Теорему 2.16, заменив условие отрицательной определенности матрицы Гессе функции полезности $\mathbf{H}(\cdot)$ на сильную квазивогнутость функции полезности. Квазивогнутая функция $u(\mathbf{x})$ называется сильно квазивогнутой, если для каждого $\mathbf{x}$ из области определения и для каждого $\mathbf{z}$, такого что $\mathbf{z}\nabla u(\mathbf{x}) = 0$ и $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, выполнено $\mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} < 0$, где $\mathbf{H}(\cdot) = \nabla^2 u(\cdot)$ — матрица вторых частных производных.

2.91 Покажите на примере, что функция совокупного спроса, полученная на основе суммирования конечного числа маршаллианских функций спроса, вообще говоря, не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

2.92 Покажите, что если предпочтения потребителей одинаковы, а представляющая их функция полезности — непрерывная строго вогнутая и положительно однородная первой степени, то функция совокупного спроса удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

2.93 Для случая трех товаров спрос задается следующими функциями:

$$x_1 = \frac{p_2}{p_3}, \quad x_2 = -\frac{p_1}{p_3}, \quad x_3 = \frac{R}{p_3}.$$

(A) Проверьте что данная система функций спроса удовлетворяет закону Вальраса и однородна нулевой степени по ценам и доходу.

(B) Покажите, что для данной системы функций спроса не выполняется слабая аксиома выявленных предпочтений

2.94 Докажите, что если предпочтения потребителя монотонны и строго вогнуты, то его функция спроса удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

2.95 Пусть $X = [0,2]\times[0,2]$, $\beta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega} = (1, 0)$. Покажите, что отображение спроса не является полунепрерывным в точке $\mathbf{p} = (0,1)$ для любой строго монотонной функции полезности.

2.96 Докажите следующие четыре утверждения, которые являются следствиями теоремы Бержа (Теорема B.60 в Приложении B на с. 1134). Все они относятся к задаче потребителя следующего вида:

$$\begin{gathered} u(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}\in X} \\ \mathbf{p}\mathbf{x} \leqslant \beta(\mathbf{p}). \end{gathered} \tag{$\asymp$}$$

(A) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое и ограниченное множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция $u(\cdot)$ непрерывна и строго квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ является однозначным и непрерывным в точке $\bar{\mathbf{p}}$ (непрерывной в точке $\bar{\mathbf{p}}$ функцией).

(B) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция

$u(\cdot)$ непрерывна и строго квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ однозначно и непрерывно в точке $\bar{\mathbf{p}}$ ($\mathbf{x}(\mathbf{p})$ является функцией, непрерывной в точке $\bar{\mathbf{p}}$).

(C) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое и ограниченное множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция $u(\cdot)$ непрерывна и квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ выпуклозначно и полунепрерывно сверху в точке $\bar{\mathbf{p}}$.

(D) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое и множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция $u(\cdot)$ непрерывна и квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ выпуклозначно и полунепрерывно сверху в точке $\bar{\mathbf{p}}$.

Глава 3

Поведение производителя (неоклассическая теория фирмы)

Теория рационального поведения потребителя используется для характеристики спроса на товары и услуги, производимые в экономике. Анализом же того, как *производятся* товары и услуги, занимается теория поведения производителя (теория фирмы). В этой главе будут представлены результаты неоклассической теории фирмы. Для неоклассической теории фирмы характерны следующие посылки. При выборе варианта своего функционирования фирма (производитель) принимает во внимание

- технологические ограничения, представимые производственной функцией или, в более общем виде, описанием всех технологически возможных векторов чистого выпуска;
- ограничения, накладываемые на функционирование фирмы потребителями ее продукции;
- ограничения, возникающие в силу существования других производителей, прежде всего возможных непосредственных конкурентов этой фирмы, производящих аналогичные блага или близкие их заменители.

Далее, для неоклассической теории фирмы характерна следующая поведенческая гипотеза: фирма при всех возможных обстоятельствах выбирает допустимый вариант своего функционирования, максимизирующий ее прибыль. В данной главе мы обсудим влияние на функционирование фирмы прежде всего технологических ограничений, определим различные характеристики поведения фирмы (функции прибыли, функции издержек и т. д.) и установим взаимосвязь между ними. Как правило, знание одной из характеристик позволяет получить хорошие оценки всех других, а в ряде интересных случаев (прежде всего, в случае выпуклости технологического множества) точно восстановить их. Цены производимых и используемых при их производстве благ при этом предполагаются заданными. Поведение фирмы в условиях, когда она влияет на формирование цен на продукцию, обсуждается в других главах.

3.1 Технологическое множество и его свойства

Как и ранее, рассматривается экономика с l благами. Для конкретной фирмы естественно рассматривать часть из этих товаров как факторы производства и часть — как выпускаемую продукцию. Ясно, что такое разделение довольно условно, так как фирма обладает достаточной свободой в выборе ассортимента производимой продукции и структуры затрат. В частности, одно и то же благо может при одной технологии затрачиваться, а при другой — производиться. В связи с этим в формальных микроэкономических моделях принято описывать производство с помощью векторов чистых выпусков. Если продукт производится, то он входит в вектор чистых выпусков со знаком плюс, а если затрачивается в производстве,— со знаком минус. Если продукт, производимый фирмой, также потребляется ею в процессе производства, то чистый выпуск данного продукта — это его выпуск минус затраты. Все допустимые технологии (технологически допустимые векторы чистых выпусков) $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_l\}$ в совокупности составляют технологическое множество (производственное множество) $Y \subset \mathbb{R}^l$.

В определенных случаях удобно различать выпуск продукции и затраты производственных факторов. Пусть число факторов производства равно n, а число видов выпускаемой продукции равно m, так что $l = m + n$. Обозначим вектор затрат через $\mathbf{r}$, а объемы выпусков через $\mathbf{y}^o$. Вектор $\mathbf{y} = (-\mathbf{r}, \mathbf{y}^o)$ является вектором чистых выпусков. По смыслу $\mathbf{r}$ и $\mathbf{y}^o$ — неотрицательные векторы, так что технологическое множество является подмножеством $\mathbb{R}^n_- \times \mathbb{R}^m_+$. Однако большинство теоретических результатов, обсуждаемых в данной главе, не зависит от знаков компонент векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{y}^o$, поэтому при необходимости можно отнести к выпуску то, что затрачивается в производстве, поменяв знак.

Перечислим свойства технологических множеств, в терминах которых обычно дается описание конкретных классов технологий. Простейшими свойствами являются непустота, замкнутость и выпуклость технологических множеств.

Непустота технологического множества ($Y \neq \varnothing$) означает принципиальную возможность осуществления производственной деятельности.

Свойство замкнутости означает, что технологическое множество содержит свою границу, и что предел любой последовательности технологически допустимых векторов чистого выпуска также является технологически допустимым вектором чистых выпусков. Это свойство носит, скорее, технический характер (оно нужно для доказательства некоторых теорем) и не может быть установлено эмпирически.

Выпуклость означает возможность «смешивать» технологии в любой пропорции. Формально, если $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$, то $\alpha\mathbf{y}' + (1-\alpha)\mathbf{y}'' \in Y$ при всех $\alpha \in [0, 1]$.

Дадим определения других важных свойств.

Определение 3.1:

Технологическое множество обладает свойством свободы расходования, если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y}' \leqslant \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{y}' \in Y$. ◀

Свойство свободы расходования означает наличие возможности производить тот же самый объем выпуска посредством бо́льших затрат или меньший выпуск при тех же затратах. В частности, такое возможно, если применяемые технологии позволяют без дополнительных затрат утилизировать излишние блага.

Определение 3.2:

Технологическое множество обладает свойством отсутствия рога изобилия[1] если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ следует, что $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. ◀

Отсутствие рога изобилия означает, что для производства продукции в положительном количестве необходимы затраты в ненулевом объеме.

Определение 3.3:

* Технологическое множество обладает свойством невозрастающей отдачи от масштаба, если из $\mathbf{y} \in Y$ следует, что $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при всех $0 < \lambda < 1$.

* Технологическое множество обладает свойством неубывающей отдачи от масштаба, если из $\mathbf{y} \in Y$ следует, что $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при всех $\lambda > 1$.

* Технологическое множество обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, если из $\mathbf{y} \in Y$ следует, что $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при всех $\lambda > 0$. ◀

Иногда свойство невозрастающей отдачи от масштаба неформально называют (не совсем точно) убывающей отдачей от масштаба, а свойство неубывающей отдачи — возрастающей отдачей. На Рис. 3.1, 3.2 и 3.3 показаны различные случаи отдачи от масштаба. В случае

[1] Англ. *no free lunch* — букв. «невозможность бесплатного обеда».

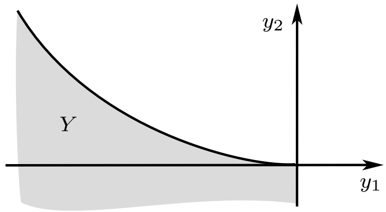


Рис. 3.1. *Технологическое множество с неубывающей отдачей от масштаба*

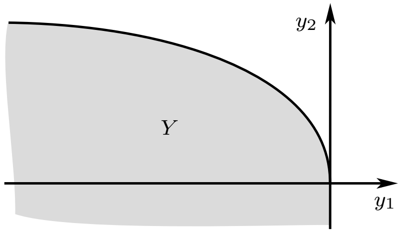


Рис. 3.2. *Выпуклое технологическое множество с невозрастающей отдачей от масштаба*

двух благ, когда одно затрачивается, а другое производится, убывающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не возрастает. Если за один час студент может решить в лучшем случае пять однотипных задач по микроэкономике, то за два часа при убывающей отдаче он не смог бы решить более десять таких задач. В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, возрастающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не убывает.

Свойство постоянной отдачи от масштаба выполнено тогда и только тогда, когда технологическое множество одновременно характеризуется невозрастающей и неубывающей отдачей. Геометрически постоянная отдача от масштаба означает, что Y является конусом (возможно, не содержащим $\mathbf{0}$). В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, постоянная отдача означает, что средняя производительность затрачиваемого фактора не меняется при изменении объема производства.

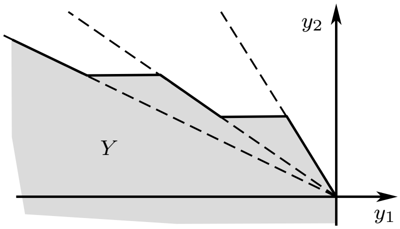


Рис. 3.3. *Невыпуклое технологическое множество с невозрастающей отдачей от масштаба*

Определение 3.4:

Технологическое множество обладает свойством необратимости, если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ следует, что $(-\mathbf{y}) \notin Y$. ◀

Пусть из килограмма стали можно произвести пять подшипников. Необратимость означает, что невозможно произвести из пяти подшипников килограмм стали.

Определение 3.5:

Технологическое множество обладает свойством аддитивности, если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y}' \in Y$ следует, что $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y$. ◀

Свойство аддитивности означает возможность комбинирования технологий.

Определение 3.6:

Технологическое множество обладает свойством допустимости бездеятельности, если $\mathbf{0} \in Y$. ◀

Следующая теорема устанавливает связи между возможными свойствами технологического множества. (Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.2.)

Теорема 3.1:

{i} Технологическое множество обладает одновременно свойствами аддитивности и невозрастающей отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда оно является выпуклым конусом.

{ii} Из выпуклости технологического множества и допустимости бездеятельности следует невозрастающая отдача от масштаба. ⌟

Заметим, что при невозрастающей отдаче технология может быть невыпуклой (см. Рис. 3.3). В задаче 3.3 предлагается придумать другие контрпримеры к теореме.

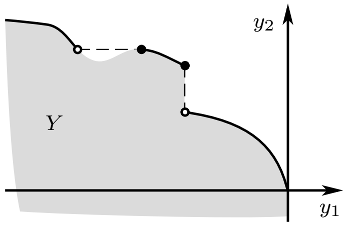


Рис. 3.4. *Эффективная граница технологического множества*

Не все допустимые технологии в равной степени важны с экономической точки зрения. Среди допустимых особо выделяются эффективные технологии.

Определение 3.7:

Допустимую технологию $\mathbf{y}$ принято называть эффективной, если не существует другой (отличной от нее) допустимой технологии $\mathbf{y}'$, такой что $\mathbf{y}' \geqslant \mathbf{y}$. ◀

Очевидно, что такое определение эффективности неявно подразумевает, что все блага являются в определенном смысле желательными (среди них нет антиблаг, «мусора»). Эффективные технологии составляют эффективную границу технологического множества (см. Рис. 3.4). При определенных условиях оказывается возможным использовать в анализе эффективную границу вместо всего технологического множества. При этом важно, чтобы для любой допустимой технологии $\mathbf{y}$ нашлась эффективная технология $\mathbf{y}'$, такая что $\mathbf{y}' \geqslant \mathbf{y}$. Для того чтобы это условие было выполнено, требуется, чтобы технологическое множество было замкнутым и чтобы в пределах технологического множества невозможно было увеличивать до бесконечности выпуск одного блага, не уменьшая при этом выпуск других благ. Можно показать, что если технологическое множество обладает свойством свободы расходования, то эффективная граница однозначно задает соответствующее технологическое множество.

Часто в экономической теории производство моделируется посредством производственной функции. Уместен вопрос о том, при каких условиях на производственное множество такое представление возможно. Хотя можно дать более широкое определение производственной функции, однако здесь и далее мы будем говорить только об однопродуктовых технологиях, т. е. будем исходить из того, что $m = 1$.

Пусть R — проекция технологического множества Y на пространство векторов затрат, т. е.

$$R = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \mid \exists y^o \in \mathbb{R} \colon (-\mathbf{r}, y^o) \in Y \}.$$

Определение 3.8:

Функция $f \colon R \mapsto \mathbb{R}$ называется производственной функцией, представляющей технологию Y, если при каждом $\mathbf{r} \in R$ величина $f(\mathbf{r})$ является значением следующей задачи:

$$\begin{gathered} y^o \to \max_{y^o} \\ (-\mathbf{r}, y^o) \in Y. \end{gathered} \qquad (\mathcal{F})$$

◀

Заметим, что любая точка эффективной границы технологического множества имеет вид $(-\mathbf{r}, f(\mathbf{r}))$. Обратное верно, если $f(\mathbf{r})$ существует и является возрастающей функцией. В этом случае $y^o = f(\mathbf{r})$ является уравнением эффективной границы.

Следующая теорема устанавливает условия, при которых задача $(\mathcal{F})$ имеет решение при всех $\mathbf{r} \in R$.

Теорема 3.2:

Пусть множество Y замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия. Тогда на R определена производственная функция (для любого $\mathbf{r} \in R$ задача $(\mathcal{F})$ имеет решение). ┘

Доказательство: Очевидно, что задача $(\mathcal{F})$ эквивалентна задаче

$$y^o \to \max_{y^o \in F(\mathbf{r})},$$

где

$$F(\mathbf{r}) = \{ y^o \mid (-\mathbf{r}, y^o) \in Y \}.$$

Воспользуемся тем, что при выполнении условий теоремы каждое из множеств $F(\mathbf{r})$ замкнуто и ограничено сверху и, следовательно, данная задача имеет решение.

Из замкнутости Y следует замкнутость множеств $F(\mathbf{r})$.

Покажем, что множества $F(\mathbf{r})$ ограничены сверху. Пусть это не так и при некотором $\mathbf{r} \in R$ существует неограниченно возрастающая последовательность $\{y_n\}$, такая что $y_n \in F(\mathbf{r})$. Вследствие невозрастающей отдачи от масштаба $(-\mathbf{r}/y_n, 1) \in Y$ при $y_n > 1$. Поэтому (вследствие замкнутости) $(\mathbf{0}, 1) \in Y$, что противоречит отсутствию рога изобилия. ■

Отметим также, что если технологическое множество Y удовлетворяет гипотезе свободного расходования и существует представляющая его производственная функция $f(\cdot)$, то множество Y описывается следующим соотношением:

$$Y = \{ (-\mathbf{r}, y^o) \mid y^o \leqslant f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in R \} .$$

Установим теперь некоторые взаимосвязи между свойствами технологического множества и представляющей его производственной функции.

Теорема 3.3:

Пусть технологическое множество Y таково, что для него определена производственная функция $f(\cdot)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

{i} если множество Y выпукло, то множество R выпукло и функция $f(\cdot)$ вогнута;

{ii} если множество Y удовлетворяет гипотезе свободного расходования, то верно и обратное, т. е. если множество R выпукло и функция $f(\cdot)$ вогнута, то множество Y выпукло;

{iii} если Y выпукло, то $f(\cdot)$ непрерывна на внутренности множества R;

{iv} если множество Y обладает свойством свободы расходования, то функция $f(\cdot)$ не убывает;

{v} если Y обладает свойством отсутствия рога изобилия и $\mathbf{0} \in R$, то $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$;

{vi} если множество Y обладает свойством допустимости бездеятельности, то $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$. ⌟

Доказательство: {i} Пусть $\mathbf{r}', \mathbf{r}'' \in R$. Имеем $(-\mathbf{r}', f(\mathbf{r}')) \in Y$ и $(-\mathbf{r}'', f(\mathbf{r}'')) \in Y$. Так как множество Y выпукло, то для всех $\alpha \in [0, 1]$ выполнено

$$(-\alpha\mathbf{r}' - (1-\alpha)\mathbf{r}'', \alpha f(\mathbf{r}') + (1-\alpha) f(\mathbf{r}'')) \in Y.$$

Отсюда $-\alpha\mathbf{r}' - (1-\alpha)\mathbf{r}'' \in R$ (множество R выпукло) и по определению производственной функции

$$\alpha f(\mathbf{r}') + (1-\alpha) f(\mathbf{r}'') \leqslant f(\alpha\mathbf{r}' + (1-\alpha)\mathbf{r}''),$$

что и означает вогнутость $f(\cdot)$.

{ii} Так как множество Y обладает свойством свободного расходования, то множество Y (с точностью до знака вектора затрат) совпадает с подграфиком функции $f(\cdot)$, а подграфик вогнутой функции — выпуклое множество.

{iii} Доказываемый факт следует из того, что вогнутая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

{iv} Пусть $\mathbf{r}'' \geqslant \mathbf{r}'$ ($\mathbf{r}', \mathbf{r}'' \in R$). Так как $(-\mathbf{r}', f(\mathbf{r}')) \in Y$, то по свойству свободы расходования $(-\mathbf{r}'', f(\mathbf{r}')) \in Y$. Отсюда по определению производственной функции $f(\mathbf{r}'') \geqslant f(\mathbf{r}')$, т. е. $f(\cdot)$ не убывает.

{v} Неравенство $f(\mathbf{0}) > 0$ противоречит предположению об отсутствии рога изобилия. Значит, $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$.

{vi} По предположению о допустимости бездеятельности $(\mathbf{0}, 0) \in Y$. Значит, по определению производственной функции $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$. ■

В предположении о существовании производственной функции свойства технологии можно описывать непосредственно в терминах этой функции. Покажем это на примере так называемой эластичности от масштаба.

Пусть производственная функция дифференцируема. В точке $\mathbf{r}$, где $f(\mathbf{r}) > 0$, определим локальную эластичность масштаба $e(\mathbf{r})$ как

$$e(\mathbf{r}) = \frac{df(\lambda\mathbf{r})}{d\lambda} \frac{\lambda}{f(\mathbf{r})}\Bigg|_{\lambda=1}.$$

Если в некоторой точке $e(\mathbf{r})$ равна единице, то считают, что в этой точке постоянная отдача от масштаба, если больше единицы — то возрастающая отдача, если меньше — убывающая отдача от масштаба. Вышеприведенное определение можно переписать в следующем виде:

$$e(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_i} r_i}{f(\mathbf{r})}.$$

Теорема 3.4:

Пусть для технологического множества Y существует дифференцируемая производственная функция $f(\cdot)$ и в точке $\mathbf{r}$ выполнено $f(\mathbf{r}) > 0$. Тогда верно следующее:

{i} если технологическое множество Y обладает свойством убывающей отдачи от масштаба, то $e(\mathbf{r}) \leqslant 1$;

{ii} если технологическое множество Y обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба, то $e(\mathbf{r}) \geqslant 1$;

{iii} если Y обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то $e(\mathbf{r}) = 1$. ⌟

Доказательство: {i} Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$ ($0 < \lambda_n < 1$), такую что $\lambda_n \to 1$. Тогда $(-\lambda_n \mathbf{r}, \lambda_n f(\mathbf{r})) \in Y$, откуда следует, что $f(\lambda_n \mathbf{r}) \geqslant \lambda_n f(\mathbf{r})$. Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$\frac{f(\lambda_n \mathbf{r}) - f(\mathbf{r})}{\lambda_n - 1} \leqslant f(\mathbf{r}).$$

Переходя к пределу, получаем

$$\left.\frac{df(\lambda\mathbf{r})}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_i} r_i \leqslant f(\mathbf{r}).$$

Таким образом, $e(\mathbf{r}) \leqslant 1$.

Пункты {ii} и {iii} доказываются аналогично. ■

Технологические множества Y можно задавать также в виде неявных производственных функций.

Определение 3.9:

Функция $g\colon \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$ называется неявной производственной функцией, если технология $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ принадлежит технологическому множеству Y тогда и только тогда, когда $g(\mathbf{y}) \geqslant 0$. ◀

Такую функцию можно найти всегда. Например, подходит функция такая, что $g(\mathbf{y}) = 1$ при $\mathbf{y} \in Y$ и $g(\mathbf{y}) = -1$ при $\mathbf{y} \notin Y$. Заметим, однако, что данная функция не является дифференцируемой. Вообще говоря, не каждое «классичекое» технологическое множество можно описать *одной* дифференцируемой неявной производственной функцией. В частности, технологические множества, рассматриваемые в начальных курсах микроэкономики, часто бывают такими, что для их описания нужно два (или больше) неравенства с дифференцируемыми функциями, поскольку требуется учитывать дополнительные ограничения неотрицательности факторов производства. Чтобы учитывать такие ограничения, можно использовать векторные неявные производственные функции, для которых условие технологической допустимости имеет вид $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \geqslant \mathbf{0}$. Тем не менее с целью упрощения изложения мы в дальнейшем (см., напр., гл. 4) для описания технологий будем использовать только одно ограничение, т. е. скалярную функцию[2].

[2] В задаче 3.36 требуется провести анализ решения задачи производителя в случае векторной неявной производственной функции.

Укажем здесь на связь неявной производственной функции и более привычной (явной) производственной функции: в ситуации, когда технология такова, что ресурсные ограничения оказываются несущественными, значение неявной производственной функции можно определить так:

$$g((-\mathbf{r}, y^o)) = f(\mathbf{r}) - y^o.$$

Задачи

3.1 Пусть технологическое множество фирмы задается условием

$$y_1 \leqslant \ln(1 - y_2), \text{ где } y_2 < 1.$$

Какими свойствами оно обладает?

3.2 Докажите Теорему 3.1.

3.3 (A) Приведите пример технологического множества, обладающего свойством невозрастающей отдачи от масштаба, но не обладающего свойством допустимости бездеятельности.

(B) Приведите пример технологического множества, обладающего свойством допустимости бездеятельности, но не обладающего свойством невозрастающей отдачи от масштаба.

(C) Приведите пример невыпуклого технологического множества, обладающего свойством аддитивности.

(D) Приведите пример выпуклого технологического множества, не обладающего свойством аддитивности.

(E) Приведите пример выпуклого технологического множества, не обладающего свойством невозрастающей отдачи от масштаба.

3.4 Технологии $(-5, 4)$, $(-4, 0)$ и $(-2, 2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству Y. Можно ли гарантировать, что технология $(-3, 2)$ принадлежит Y, если известно, что Y выпукло? Изобразите графически множество технологий, про которые можно утверждать, что они принадлежат Y.

3.5 Технологии $(-5, 4)$, $(-4, 0)$ и $(-2, 2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству Y. Можно ли гарантировать, что технология $(-2, 1)$ принадлежит Y, если известно, что Y выпукло и характеризуется убывающей отдачей? Изобразите графически множество технологий, про которые можно утверждать, что они принадлежат Y.

3.6 Технологии $(-8, 10)$, $(-2, 3)$ и $(-4, 2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству Y. Можно ли гарантировать, что технология $(-5, 5)$ принадлежит Y, если известно, что Y характеризуется свободой расходования? Изобразите графически множество технологий, про которые можно утверждать, что они принадлежат Y.

3.7 Пусть однопродуктовая технология может быть представлена производственной функцией. Покажите, что производственное множество удовлетворяет свойству постоянной отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда соответствующая производственная функция однородна первой степени.

3.8 Покажите, что если технологическое множество Y замкнуто и выпукло и $-\mathbb{R}^l_+ \subset Y$, то оно обладает свойством свободы расходования.

3.9 Назовем вектор $\boldsymbol{\psi}$ направлением рецессии технологического множества, если существует $\mathbf{y} \in Y$ и неограниченная последовательность положительных чисел $\{\lambda_i\}$, такая что $\mathbf{y} + \lambda_i \boldsymbol{\psi} \in Y$.

(A) Обозначим множество всех рецессивных направлений через Ψ. Покажите, что если технологическое множество Y замкнуто и выпукло, то Ψ является замкнутым выпуклым конусом. В случае, если Y удовлетворяет условию свободы расходования, то множество Ψ содержит $-\mathbb{R}^l_+$.

(B) Предположим, что Y замкнуто и выпукло, $\mathbf{0} \in Y$. Докажите, что $\boldsymbol{\psi}$ является рецессивным направлением технологического множества Y тогда и только тогда, когда $\lambda\boldsymbol{\psi} \in Y$ при всех $\lambda \geqslant 0$.

(C) Докажите, что если технологическое множество Y замкнуто и выпукло, то $Y + \Psi = Y$.

3.2 Задача производителя и ее свойства

Гипотеза, лежащая в основе модели поведения производителя в условиях рынка, заключается в том, что производитель выбирает технологически допустимый вектор чистых выпусков, максимизирующий прибыль. В терминах чистых выпусков прибыль есть скалярное произведение вектора чистых выпусков $\mathbf{y} \in Y$ на вектор цен: $\mathbf{py}$. Таким образом, если производитель, приобретая факторы производства и продавая производимые блага на рынках с совершенной конкуренцией, сталкивается с некоторым вектором цен $\mathbf{p}$ и рассматривает его как данный (является ценополучателем), то его выбор оказывается решением следующей задачи на экстремум.

Задача производителя:

$$\mathbf{py} \to \max_{\mathbf{y} \in Y}. \qquad (\Pi)$$

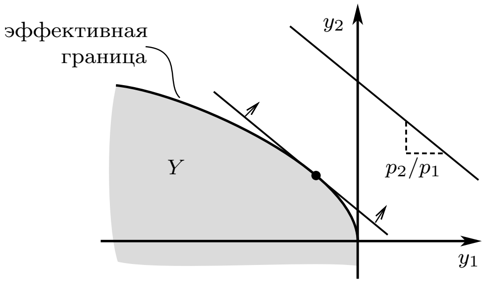


Рис. 3.5. *Решение задачи производителя при положительных ценах лежит на эффективной границе*

Как нетрудно понять, решение задачи производителя (если оно существует) всегда лежит на границе технологического множества (см. задачу 3.10). Если же все цены положительны (все блага желательны), то решение задачи производителя должно лежать на эффективной границе технологического множества (см. задачу 3.11 и относящиеся к обратному утверждению задачи 3.12 и 3.13). Это свойство иллюстрируется на Рис. 3.5.

Обозначим множество цен, на котором существует решение задачи (Π), через P.

Определение 3.10:

Отображением предложения $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ будем называть отображение, которое ставит в соответствие каждому вектору цен $\mathbf{p} \in P$ множество решений задачи (Π). Если решения единственны, то говорят о функции предложения. ◀

Заметим, что, так как мы рассматриваем чистые выпуски, то определенное таким образом отображение точнее было бы назвать отображением чистого предложения.

Определение 3.11:

Функция прибыли — это функция, которая ставит в соответствие каждому вектору цен $\mathbf{p} \in P$ значение задачи (Π):

$$\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{y}, \text{ где } \mathbf{y} \in \mathbf{y}(\mathbf{p}). \qquad ◀$$

Существенное отличие задачи производителя (Π) от задачи потребителя ($\mathcal{C}$) состоит в том, что множество ее допустимых решений Y, как правило, не является ограниченным. Более того, для технологий

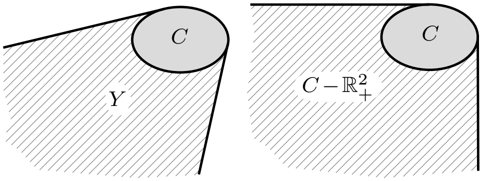


Рис. 3.6. *Иллюстрация предположения, гарантирующего существование решения задачи максимизации прибыли*

с неубывающей отдачей существование допустимых технологий с положительной прибылью означает существование допустимых технологий, дающих сколь угодно большую прибыль.

Пример 3.1 (отсутствие решения задачи производителя)
Пусть технологическое множество имеет вид

$$Y = \{ (y_1, y_2) \mid y_1 \leqslant 0, y_2 + \alpha y_1 \leqslant 0 \},$$

цены благ равны p_1, p_2. Если выбрать $y_2 = -\alpha y_1$, то прибыль будет равна $-(\alpha p_2 - p_1) y_1$. Поэтому если $\alpha p_2 > p_1$, то прибыль не ограничена сверху и решение отсутствует.

Если $\alpha p_2 < p_1$, то решение единственно — $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$. Если $\alpha p_2 = p_1$, то решением этой задачи является любая технологически допустимая пара (y_1, y_2), такая что $y_2 + \alpha y_1 = 0$. △

Таким образом, существование решений можно гарантировать лишь при дополнительных предположениях относительно вектора цен **p** и структуры множества Y. Ниже мы докажем существование решения для всех неотрицательных цен при следующем (довольно сильном и не очень реалистичном) предположении:

Существует компактное множество C, такое что $C \subset Y$ и $Y \subset C - \mathbb{R}^l_+$. (©)

Заметим, что множество C, обладающее указанным свойством, если существует, то определяется множеством Y не единственным образом. Это несложно понять из Рис. 3.6.

Теорема 3.5:

Пусть выполнено предположение (©). Тогда решение задачи (П) существует при любом неотрицательном векторе цен благ. ┘

Доказательство: Докажем, что задача максимизации прибыли на Y в определенном смысле сводится к задаче максимизации прибыли на C. Пусть $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y} \notin C$. Тогда по условию (ⓒ) найдется вектор $\mathbf{y}' \in C$, такой что $\mathbf{y}' - \mathbf{y} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Тем самым мы нашли допустимое решение, для которого прибыль не меньше, чем для $\mathbf{y}$. Из этого следует, что нам достаточно рассматривать только $\mathbf{y} \in C$.

Так как C — компактное множество, а прибыль $\mathbf{py}$ непрерывна по $\mathbf{y}$, то согласно теореме Вейерштрасса решение задачи (Π) на множестве C всегда существует. ■

Ясно, что предположения этой теоремы слишком ограничительны, что не позволяет устанавливать существование решения задачи производителя для многих популярных технологических множеств. Так для производственной функции Кобба—Дугласа с убывающей отдачей ($f(K, L) = K^\alpha L^\beta$, $\alpha + \beta < 1$) мы можем гарантировать существование решения при положительных ценах, а условию теоремы она не удовлетворяет.

Существование решения задачи производителя в этом случае гарантируется тем фактом, что на всех так называемых «рецессивных направлениях» данного технологического множества прибыль принимает отрицательные значения. Поясним сказанное и усилим доказанную выше теорему.

Введем соответствующие понятия[3]. Пусть Y удовлетворяет свойству невозрастающей отдачи от масштаба. Назовем вектор $\boldsymbol{\psi}$ направлением рецессии (направлением «удаления в бесконечность»), если для него выполнено $\lambda\boldsymbol{\psi} \in Y$ при всех $\lambda \geqslant 0$. Обозначим через Ψ множество всех рецессивных направлений. По построению Ψ является конусом. Построим на основе Ψ следующее множество (множество цен, которые на всех рецессивных направлениях дают отрицательную прибыль):

$$\mathring{P} = \{\, \mathbf{p} \mid \mathbf{p}\boldsymbol{\psi} < 0 \ \forall \boldsymbol{\psi} \in \Psi \setminus \{\mathbf{0}\} \,\}\,.$$

Справедливая следующая теорема[4].

Теорема 3.6:

Пусть технологическое множество Y непусто, замкнуто и удовлетворяет свойству невозрастающей отдачи от масштаба. Тогда при всех $\mathbf{p} \in \mathring{P}$ задача (Π) имеет решение ($\mathbf{y}(\mathbf{p}) \neq \varnothing$). ⌟

Доказательство: Рассмотрим $\mathbf{p} \in \mathring{P}$ и предположим, что задача (Π) не имеет решения. При этом найдется последовательность допусти-

[3] См. также задачу 3.9, где дано несколько отличающееся определение рецессивного направления.

[4] Доказательство теоремы технически сложно. Его можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего материала.

мых технологий $\{\mathbf{y}_i\}$, такая что

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_{i+1} > \mathbf{p}\mathbf{y}_i \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} \mathbf{p}\mathbf{y}_i = \sup_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{p}\mathbf{y}.$$

Последовательность $\{\mathbf{y}_i\}$ не может быть ограниченной, иначе у нее существовали бы сходящиеся подпоследовательности и (по замкнутости технологического множества) любой соответствующий предел (точка сгущения) был бы решением задачи (П). Следовательно, можно выбрать последовательность $\{\mathbf{y}_i\}$ так, чтобы $\mathbf{y}_i \neq \mathbf{0}$,

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\| > \|\mathbf{y}_i\| \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} \|\mathbf{y}_i\| = +\infty.$$

Далее, последовательность нормированных векторов $\{\mathbf{y}_i/\|\mathbf{y}_i\|\}$ ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, можно выбрать последовательность $\{\mathbf{y}_i\}$ так, что $\{\mathbf{y}_i/\|\mathbf{y}_i\|\}$ имеет предел. Обозначим этот предел через $\boldsymbol{\psi}$. Покажем, что $\boldsymbol{\psi} \in \Psi$.

Возьмем $\lambda \geqslant 0$ и рассмотрим последовательность $\{\tilde{\mathbf{y}}_i\}$, где $\tilde{\mathbf{y}}_i = \lambda\mathbf{y}_i/\|\mathbf{y}_i\|$. Из того, что исходная последовательность $\mathbf{y}_i$ неограниченно возрастает, следует, что начиная с некоторого i выполнено $\lambda \leqslant \|\mathbf{y}_i\|$ и, значит, по свойству невозрастающей отдачи последовательность $\tilde{\mathbf{y}}_i$ принадлежит Y. Пределом этой последовательности будет вектор $\lambda\boldsymbol{\psi}$. Технологическое множество замкнуто, поэтому $\lambda\boldsymbol{\psi} \in Y$. Таким образом, $\boldsymbol{\psi} \in \Psi$.

Так как $\mathbf{p} \in \mathring{P}$ и $\boldsymbol{\psi} \in \Psi$, то $\mathbf{p}\boldsymbol{\psi} < 0$. Отсюда следует, что для достаточно больших i выполняется $\mathbf{p}\tilde{\mathbf{y}}_i < 0$, поэтому $\lim \mathbf{p}\mathbf{y}_i = -\infty$. Однако множество Y непусто, поэтому $\sup_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{p}\mathbf{y} > -\infty$. Полученное противоречие доказывает, что задача (П) имеет решение. ■

Из доказанной теоремы следует, что если множество рецессивных направлений Ψ совпадает с $\mathbb{R}^l_-$, то (в предположениях теоремы) решение задачи производителя существует при любых положительных ценах. Примером служит технология, задаваемая производственной функцией Кобба—Дугласа с убывающей отдачей.

Сформулируем теперь свойства функции прибыли и отображения (функции) предложения.

Теорема 3.7 (свойства отображения предложения):

{i} Отображение (функция) предложения $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ однородно нулевой степени.

{ii} Если множество Y замкнуто, то множество $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ замкнуто при всех $\mathbf{p} \in P$.

{iii} Если множество Y выпукло, то множество $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ выпукло при всех $\mathbf{p} \in P$.

{iv} Если множество Y строго выпукло, то $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — однозначная функция на $\mathbf{p} \in P$, причем $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ непрерывна[5] на $\mathbf{p} \in \operatorname{int} P$.

{v} Если функция прибыли $\pi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, то матрица Якоби $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = (\partial y_s(\mathbf{p})/\partial p_k)$ функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ симметрична и положительно полуопределена, $\mathbf{p} \in \operatorname{int} P$.

Доказательство пунктов {i}–{iv} этой теоремы оставляем в качестве упражнения. Пункт {v} будет доказан ниже.

Теорема 3.8 (свойства функции прибыли):

{i} Функция $\pi(\mathbf{p})$ положительно однородна первой степени:

$$\pi(\lambda\mathbf{p}) = \lambda\pi(\mathbf{p}) \ \forall \mathbf{p} \in \operatorname{int} P.$$

{ii} Функция прибыли $\pi(\mathbf{p})$ выпукла на любом выпуклом подмножестве множества P (множества цен, при которых задача (Π) имеет решение).

{iii} Функция $\pi(\mathbf{p})$ непрерывна на внутренности множества P, т. е. на $\operatorname{int} P$.

{iv} Если множество Y строго выпукло, то $\pi(\mathbf{p})$ непрерывно дифференцируема на $\mathbf{p} \in \operatorname{int} P$. ┘

Доказательство: {i} Доказательство однородности оставляем в качестве упражнения.

{ii} Докажем выпуклость $\pi(\cdot)$. Пусть от некоторых двух цен $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ взята выпуклая комбинация — цена

$$\mathbf{p}_\alpha = \alpha\mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{p}'$$

при $\alpha \in [0, 1]$. С учетом условий максимизации прибыли, для $\mathbf{y}_\alpha \in \mathbf{y}(\mathbf{p}_\alpha)$ имеем, что

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_\alpha \leqslant \pi(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p}'\mathbf{y}_\alpha \leqslant \pi(\mathbf{p}').$$

[5] Заметим, что поскольку постоянное отображение Y непрерывно, полунепрерывность сверху отображения предложения (непрерывность функции предложения, если это отображение однозначно) гарантируется при существовании решения задачи производителя (и ограниченности множества таких решений) согласно Теореме B.62 из Приложения B (варианту теоремы Бержа для линейных целевых функций). При этом следует предположить замкнутость Y (но строгая выпуклость не нужна).

Складывая эти неравенства с множителями α и $1-\alpha$ соответственно, получим требуемое неравенство:

$$\pi(\mathbf{p}_\alpha) \leqslant \alpha\pi(\mathbf{p}) + (1-\alpha)\pi(\mathbf{p}').$$

Выпуклость функции $\pi(\cdot)$ можно также доказать, используя то, что поточечный максимум семейства выпуклых функций — выпуклая функция и что $\pi(\cdot)$ является поточечным максимумом выпуклых (линейных) функций $\mathbf{py}$, $\mathbf{y} \in Y$.

{iii} Непрерывность функции $\pi(\cdot)$ на множестве $\operatorname{int} P$ следует, например, из того факта, что выпуклая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

{iv} Дифференцируемость функции $\pi(\cdot)$ следует из теоремы об опорной функции[6] и из того факта, что решение задачи производителя, $\mathbf{y}(\mathbf{p})$, существует и единственно на множестве $\operatorname{int} P$. Кроме того, следствием теоремы об опорной функции является следующее тождество (лемма Хотеллинга, см. ниже):

$$\nabla\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{y}(\mathbf{p}).$$

Так как функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ непрерывна на $\operatorname{int} P$, то функция $\pi(\mathbf{p})$ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int} P$. ■

Рассматривая поведение потребителя в гл. 2, мы получили «лемму Шепарда» и «тождество Роя». Близким аналогом этих свойств в теории производства является следующая лемма Хотеллинга[7]. (Мы уже установили этот результат при доказательстве пункта {iv} Теоремы 3.8 для строго выпуклого технологического множества.)

Теорема 3.9 (лемма Хотеллинга):

Если функция прибыли $\pi(\cdot)$ определена в окрестности вектора цен $\tilde{\mathbf{p}} \in \operatorname{int} P$ и дифференцируема в $\tilde{\mathbf{p}}$, то

$$\nabla\pi(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{y}(\tilde{\mathbf{p}}).$$ ⌟

Доказательство: Доказательство аналогично доказательству леммы Шепарда для потребления (см. Теорему 2.9 на с. 136). Рассмотрим в окрестности вектора $\tilde{\mathbf{p}}$ функцию

$$\gamma(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{y}} - \pi(\mathbf{p}),$$

[6] См. Теорему B.43 на с. 1126 в Приложении B.

[7] См. H. Hotelling. Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions, *Journal of Political Economy* **60** (1932): 577–616.

где $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\tilde{\mathbf{p}})$. По определению функции прибыли $\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = 0$ и $\gamma(\mathbf{p}) \leqslant 0$ для произвольного вектора цен $\mathbf{p}$ (технология $\tilde{\mathbf{y}}$ не обязательно максимизирует прибыль при ценах $\mathbf{p}$), т. е. функция $\gamma(\cdot)$ достигает максимума в точке $\tilde{\mathbf{p}}$. При этом $\nabla\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$, откуда и следует доказываемое тождество. ■

Если функция прибыли дважды непрерывно дифференцируема, то по теореме Юнга[8] ее матрица Гессе $\nabla^2\pi(\mathbf{p})$ является симметричной. Следовательно, симметричной является и совпадающая с ней матрица $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \nabla\mathbf{y}(\mathbf{p})$. Таким образом, для любых двух благ i и j выполнено

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2\pi}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2\pi}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial y_j}{\partial p_i},$$

что означает симметричность перекрестного влияния цен на чистое предложение. Это свойство аналогично уравнению Слуцкого в теории потребления, но имеет более простой вид, поскольку здесь отсутствует эффект дохода. Кроме того, из выпуклости функции прибыли следует, что матрица $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \nabla\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \nabla^2\pi(\mathbf{p})$ будет положительно полуопределенной. Эти рассуждения доказывают пункт {v} Теоремы 3.7.

Если технологическое множество может быть представлено посредством производственной функции, то задача производителя сводится к следующей задаче максимизации прибыли:

$$p^o f(\mathbf{r}) - \mathbf{wr} \to \max_{\mathbf{r}\in R},$$

где p^o — цена выпускаемой продукции, $\mathbf{r}$ — количество затрачиваемых факторов производства, $\mathbf{w}$ — вектор цен факторов. Прибыль (чистый доход) здесь определяется как разность между выручкой (валовым доходом) $p^o y^o$ и издержками производства $\mathbf{wr}$.

Пусть $\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)$ — функция спроса на факторы производства при векторе цен $(\mathbf{w}, p^o)$, а $y^o(\mathbf{w}, p^o)$ — функция предложения продукции при векторе цен $(\mathbf{w}, p^o)$. Как нетрудно понять, в использовавшихся ранее обозначениях $\mathbf{p} = (\mathbf{w}, p^o)$ и $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = (-\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o), y^o(\mathbf{w}, p^o))$.

Заметим, что если $p^o > 0$, то $y^o(\mathbf{w}, p^o) = f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o))$. В данном контексте функция прибыли записывается в следующем виде:

$$\pi(\mathbf{w}, p^o) = p^o f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)) - \mathbf{wr}(\mathbf{w}, p^o).$$

Результаты, доказанные в этом параграфе, как и те, которые будут доказаны впоследствии, можно переформулировать для случая,

[8] См. Теорему B.51 на с. 1131 в Приложении B.

когда первичным объектом рассмотрения является не технологическое множество, а производственная функция.

Если $\bar{\mathbf{r}}$ — внутреннее решение задачи максимизации прибыли ($\bar{\mathbf{r}} \in \operatorname{int} R$) и производственная функция дифференцируема, то $\bar{\mathbf{r}}$ удовлетворяет следующим условиям первого порядка:

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} = w_k, \; k = 1, \dots, l,$$

т. е. предельная производительность каждого фактора производства равна его цене. В векторных обозначениях это можно записать следующим образом:

$$p^o \nabla f(\bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{w}.$$

При $p^o > 0$ получим следующую дифференциальную характеристику задачи производителя:

$$\frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} = \frac{w_k}{p^o},$$

т. е. предельный продукт каждого фактора производства равен его относительной цене (пропорции обмена этого производственного фактора на продукт).

Предположим, что множество R задается неравенствами $\mathbf{r} \geqslant 0$[9]. Тогда любое решение удовлетворяет соотношениям

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} \leqslant w_k,$$

причем по условиям дополняющей нежесткости

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} = w_k, \text{ если } r_k > 0,$$

и

$$r_k = 0, \text{ если } p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} < w_k.$$

Указанные необходимые условия оптимальности оказываются достаточными в случае, если производственная функция вогнута.

Соотношения леммы Хотеллинга в этом случае принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \pi(w, p^o)}{\partial p^o} = f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \pi(w, p^o)}{\partial w_k} = -r_k(\mathbf{w}, p^o).$$

[9] Здесь функция $f(\cdot)$ определена на $\mathbb{R}^n_+$. Подразумевается, что эту функцию можно доопределить на открытом множестве, содержащем $\mathbb{R}^n_+$, причем таким образом, чтобы она была дифференцируемой на этой более широкой области определения.

Можно получить аналогичную дифференциальную характеристику решения задачи производителя и в случае, если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g(\cdot)$, которая является дифференцируемой.

Заметим, что если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g(\cdot)$, то задача производителя записывается как

$$\mathbf{p}\mathbf{y} \to \max_{\mathbf{y}}$$
$$g(\mathbf{y}) \geqslant 0.$$

При дифференцируемости функции $g(\cdot)$ решение этой задачи можно охарактеризовать, воспользовавшись теоремой Куна—Таккера в дифференциальной форме. Функция Лагранжа для задачи производителя равна

$$\mathbb{L}(\bar{\mathbf{y}}, \lambda) = \sum_{k=1}^{l} p_k y_k + \lambda g(\mathbf{y}),$$

где λ — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что $\nabla g(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$) существует множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такой что решение задачи, $\bar{\mathbf{y}}$, удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{y}}, \lambda)}{\partial y_k} = 0,$$

или

$$\lambda \frac{\partial g(\bar{\mathbf{y}})}{\partial y_k} = p_k.$$

В векторных обозначениях

$$\lambda \nabla g(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{p},$$

т. е. градиент неявной производственной функции пропорционален вектору цен.

Если не все цены равны нулю ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), то $\lambda > 0$. Исключая множитель Лагранжа λ, для любых двух благ k и s, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial g(\bar{\mathbf{y}})/\partial y_s}{\partial g(\bar{\mathbf{y}})/\partial y_k} = MRT^{s/k}.$$

Следовательно, решение задачи производителя характеризуется равенством предельной нормы трансформации любых двух благ отношению цен этих благ.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи производителя, если выполнено дополнительное условие, что функция $g(\cdot)$ квазивогнута.

Задачи

3.10 Объясните, почему при не равных нулю ценах решение задачи производителя должно лежать на границе технологического множества.

3.11 Объясните, почему если $\bar{\mathbf{y}}$ — решение задачи производителя (П) при некоторых ценах $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, то $\bar{\mathbf{y}}$ — эффективная технология (см. Определение 3.7 на с. 208). Продемонстрируйте, что если цены неотрицательны и не равны нулю, но не все положительны, то данное утверждение, вообще говоря, неверно.

3.12 Докажите, что все точки эффективной границы выпуклого технологического множества являются решением задачи производителя при некоторых неотрицательных, не равных нулю ценах. (*Указание:* Рассмотрите два множества: множество Y и множество потенциально более эффективных, чем $\bar{\mathbf{y}}$, технологий $\bar{\mathbf{y}}+\mathbb{R}^l_{++}$. Примените к ним теорему отделимости.)

3.13 ⟦Никайдо⟧ Покажите, что утверждение, рассмотренное в предыдущей задаче, нельзя усилить, т. е. не всегда существуют строго положительные цены ($\mathbf{p} > \mathbf{0}$), при которых эффективная технология будет решением задачи потребителя. Для этого рассмотрите технологическое множество

$$Y = \{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 + y_3^2 \leqslant 0, y_3 \geqslant 0 \,\}$$

и технологию $(1, -1, 0)$.

3.14 Для случая, когда технологическое множество может быть представлено производственной функцией, сформулируйте и докажите лемму Хотеллинга, пользуясь формулой вычисления прибыли и условиями первого порядка для внутреннего решения задачи производителя.

3.15 Для случая, когда Y представлено дифференцируемой неявной производственной функцией, можно доказать лемму Хотеллинга, используя условия первого порядка теоремы Куна—Таккера. Проведите это доказательство.

3.16 Докажите Теорему 3.7.

3.17 Покажите, что если производственная функция $f(\cdot)$ строго вогнута и, кроме того, $f(\mathbf{0}) = 0$, то прибыль в точке оптимума неотрицательна.

3.18 Покажите, что если производственная функция обладает возрастающей отдачей от масштаба, то прибыль не может быть положительной. На основе этого выведите, что в случае возрастающей отдачи от масштаба задача производителя либо не имеет решения, либо в точке решения прибыль равна нулю.

3.19 Пусть $\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)$ — функция спроса на факторы, $y^o(\mathbf{w}, p^o) = f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o))$ — функция предложения, а $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{r})$ — матрица вторых производных производственной функции $f(\mathbf{r})$. Выведите следующие соотношения сравнительной статики для задачи производителя:

$$\frac{\partial y^o}{\partial p^o} = -\frac{1}{p^o}\nabla f^{\intercal}\mathbf{H}^{-1}\nabla f, \qquad \frac{\partial r}{\partial p^o} = -\frac{1}{p^o}\mathbf{H}^{-1}\nabla f,$$
$$\frac{\partial y^o}{\partial w} = \frac{1}{p^o}\mathbf{H}^{-1}\nabla f, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{1}{p^o}\mathbf{H}^{-1}.$$

3.20 На основе результата предыдущей задачи сделайте заключение о поведении выпуска производителя и его спроса на факторы для дважды дифференцируемых вогнутых производственных функций. Сформулируйте закон спроса и закон предложения для модели производителя и обсудите условия их выполнения.

3.21 Проиллюстрируйте соотношения задачи 3.19 для производственной функции типа Кобба—Дугласа.

3.22 (A) Пусть производственное множество фирмы задается следующим образом:

$$Y = \{\, (y_1, y_2, y_3) \mid y_1 \leqslant \ln(1 - y_2), y_2 < 1 \,\}.$$

Постройте соответствующую функцию предложения $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ и функцию прибыли.

(B) Сделайте то же самое для производственного множества

$$Y = \{\, (y_1, y_2, y_3) \mid y_1^5 \leqslant y_2^3 y_3, y_2 \leqslant 0, y_3 \leqslant 0 \,\}.$$

3.23 Докажите, что непрерывно дифференцируемая функция спроса удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial p_j} = 0 \;\; \text{для всех } j$$

и

$$\sum_i p_i \frac{\partial y_k}{\partial p_i} = 0 \ \text{ для всех } k.$$

Запишите аналогичные тождества для эластичностей чистого предложения по ценам.

3.24 Докажите, что для любых двух благ i и j выполнено неравенство

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_i}\frac{\partial y_j}{\partial p_j} \geqslant \frac{\partial y_i}{\partial p_j}\frac{\partial y_j}{\partial p_i}$$

(что можно интерпретировать как более сильное влияние «своей» цены на чистое предложение, чем «чужой»). (*Указание:* Воспользуйтесь леммой Хотеллинга и выпуклостью функции прибыли.)

3.25 Для технологии, описываемой производственной функцией $f(r) = r^\alpha$, где $\alpha \in (0,1)$, вычислите

- функцию прибыли;
- функцию спроса на производственный фактор;
- функцию предложения.

Покажите, что

- функция прибыли однородна и выпукла (по цене продукции p^o и цене производственного фактора w);
- функция спроса удовлетворяет закону спроса;
- функция предложения удовлетворяет закону предложения.

3.26 Найдите функцию прибыли, функцию предложения и функцию спроса на факторы для следующих производственных функций:

(A) $f(\mathbf{r}) = \prod_i r_i^{\alpha_i}$ ($\alpha_i > 0$, функция Кобба—Дугласа);
(B) $f(\mathbf{r}) = \sum_i a_i r_i^\rho$ ($a_i > 0$, $\rho \in (0,1)$);
(C) $f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(r_i) + r_n$.

Какими свойствами обладают найденные функции? Покажите, что для данных функций выполнена лемма Хотеллинга.

3.27 Докажите, что выручка фирмы в оптимуме ($p^o y^o(\mathbf{w}, p^o)$) не может вырасти, если цены на все факторы производства увеличатся пропорционально.

3.28 Покажите, что выручка фирмы в оптимуме может вырасти, если упадет цена по крайней мере одного из выпускаемых ею продуктов.

3.29 Покажите, что выручка фирмы в оптимуме может упасть, если упадет цена по крайней мере одного из используемых ею факторов производства.

3.30 Покажите, что прибыль фирмы упадет, если вырастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства.

3.31 Покажите, что прибыль фирмы упадет, если упадет цена по крайней мере на один из выпускаемых ею продуктов.

3.32 Предположим, что производственная функция для некоторой технологии вогнута и сепарабельна, причем предельный продукт любого фактора производства сколь угодно мал при достаточно больших объемах затрат этого фактора производства. Докажите следующие свойства.

(A) Выручка фирмы упадет, если возрастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства.

(B) Спрос данной фирмы на любой фактор производства неограниченно возрастает при падении цены этого фактора производства.

(C) Предложение данной фирмы неограниченно возрастает при росте выпускаемой этой фирмой продукции.

3.33 Покажите, что в случае однородной производственной функции показатель отдачи от масштаба не зависит от цен факторов.

3.34 Покажите, что в случае однородной производственной функции отношение функций спроса на любые два фактора производства не зависит от цены продукции.

3.35 Покажите, что функция прибыли сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна функция спроса.

3.36 Рассмотрите векторную (k-мерную) неявную производственную функцию, для которой условие технологической допустимости имеет вид $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \geqslant \mathbf{0}$. Предполагая, что эта функция является дифференцируемой, проведите анализ необходимых условий оптимальности для задачи производителя, используя теорему Куна—Таккера.

3.3 Восстановление технологического множества

Пусть $(\mathbf{p}^i, \mathbf{y}^i)$, $i = 1, \ldots, n$ — последовательность наблюдений: при ценах $\mathbf{p}^i$ наблюдался вектор чистого выпуска $\mathbf{y}^i$. Если при каком-то векторе цен $\mathbf{p}^i$ выполнено $\mathbf{p}^i\mathbf{y}^j > \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i$, то $\mathbf{y}^i$ не максимизирует прибыль при ценах $\mathbf{p}^i$, а это противоречит рациональности производителя. Если же $\mathbf{p}^i\mathbf{y}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i$ $\forall i, j$, то последовательность наблюдений $(\mathbf{p}^i, \mathbf{y}^i)$, $i = 1, \ldots, n$ не противоречит гипотезе максимизации прибыли.

Технологическое множество, которое порождает такие выборы производителя, может быть построено разными способами. Рассмотрим некоторые из них.

Наиболее простым является вариант, когда технологическое множество, которое при максимизации прибыли порождает такие выбо-

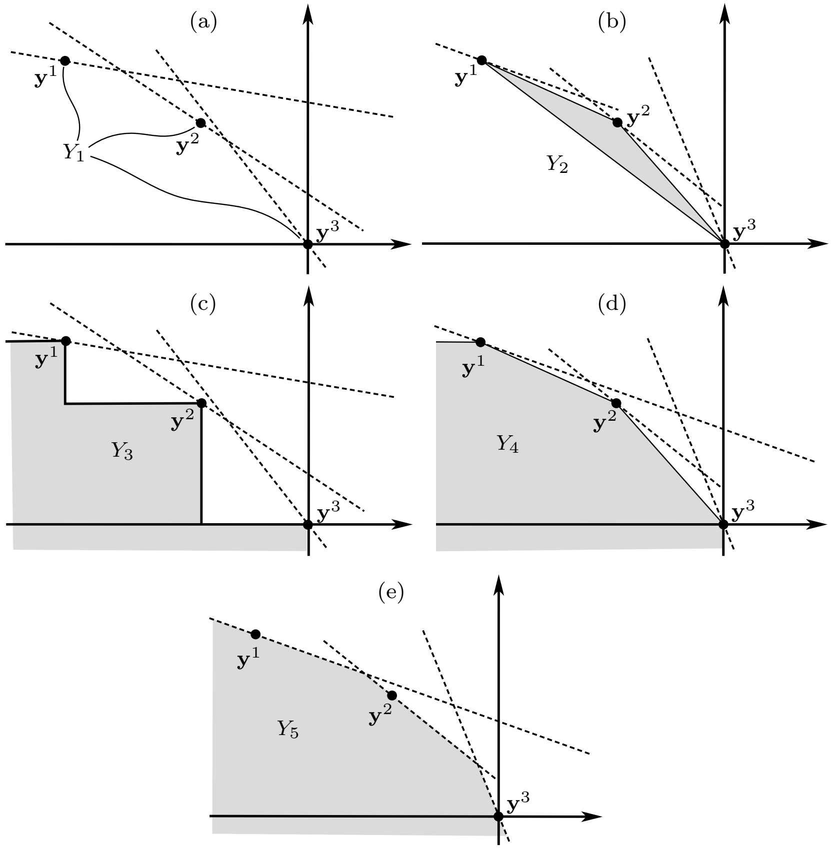


Рис. 3.7. *Возможные способы построения множества Y по наблюдаемым точкам*

ры, состоит только из точек $\mathbf{y}^i$, т. е.

$$Y_1 = \{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n\}.$$

Также можно в качестве технологического множества Y взять выпуклую оболочку Y_2 точек $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ (если мы предполагаем, что технологическое множество выпукло). Если мы предполагаем свободу расходования, то в качестве Y можно взять разность между Y_1 и $\mathbb{R}^l_+$

$$Y_3 = Y_1 - \mathbb{R}^l_+,$$

и между Y_2 и $\mathbb{R}_+$ (в сочетании выпуклостью)

$$Y_4 = Y_2 - \mathbb{R}^l_+.$$

Еще один вариант состоит в том, чтобы исключать только те векторы $\mathbf{y}$, которые заведомо не могут принадлежать технологическому множеству (векторы, для которых выполнено $\mathbf{p}^i\mathbf{y} > \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i$ хотя бы для одного из наблюдений i), т. е. взять пересечение полупространств, отсекаемых соответствующими гиперплоскостями:

$$Y_5 = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}^i\mathbf{y} \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i, i = 1, \ldots, n \,\}.$$

Все эти варианты для случая $n = 3$ проиллюстрированы на Рис. 3.7. Наклон пунктирных прямых линий соответствует отношению цен. Отметим, что имеет место следующая цепочка включений для рассмотренных множеств:

$$Y_1 \begin{matrix} \subset Y_2 \subset \\ \subset Y_3 \subset \end{matrix} Y_4 \subset Y_5.$$

Таким образом, существует несколько множеств, порождающих указанный спрос, причем Y_5 является «максимальным» из этих множеств (т. е. содержит любое другое множество). Покажем, что аналогичная процедура позволяет построить подходящее технологическое множество и в случае, когда количество наблюдений может быть бесконечным.

Предположим, что функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$, определенная на множестве цен P, такова, что $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ является решением задачи максимизации прибыли при ценах $\mathbf{p}$. Требуется на основе $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ и соответствующей функции прибыли $\pi(\mathbf{p})$ восстановить соответствующее технологическое множество Y.

Заметим, что существование вектора $\mathbf{y} \in Y$, такого что $\mathbf{p}\mathbf{y} > \pi(\mathbf{p})$ при некоторых ценах $\mathbf{p}$, противоречило бы гипотезе максимизации прибыли на Y. Объединим все векторы $\mathbf{y}$ не противоречащие этому условию при ценах из области определения функции прибыли ($\mathbf{p} \in P$):

$$Y_\pi = \bigcap_{\mathbf{p}\in P} \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p}) \,\} = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p})\ \forall \mathbf{p} \in P \,\}.$$

Очевидно, что по построению выполнено $Y \subset Y_\pi$ (т. е. построенное технологическое множество будет, вообще говоря, шире, чем исходное), и что $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ является решением задачи производителя с технологическим множеством Y_π при ценах $\mathbf{p} \in P$. Как следствие функция прибыли для построенного «технологического множества» Y_π определена при всех $\mathbf{p} \in P$ и совпадает с $\pi(\mathbf{p})$.

Таким образом, мы нашли (максимальное) технологическое множество, которое может породить данные наблюдения.

Уместен вопрос: совпадет ли множество Y_π с технологическим множеством Y, на основе которого оно построено? Положительный ответ на этот вопрос позволил бы нам восстанавливать технологические множества по наблюдаемому поведению.

Ответ на вопрос зависит от свойств технологического множества Y и от множества цен P, при которых наблюдается предложение.

В общем случае Y и Y_π могут не совпадать, поскольку описанный метод построения Y_π порождает выпуклые множества (пересечение полупространств), а технологическое множество Y может быть невыпуклым (как на Рис. 3.7a и 3.7c). Кроме того, ясно, что множество цен P может быть недостаточно «богатым» для того, чтобы технологическое множество было адекватно представлено наблюдаемыми выборами при этих ценах.

В частном случае, когда $P = \mathbb{R}^l_{++}$, наш метод построения Y_π порождает множества, удовлетворяющее свойству свободы расходования. Соответственно Y и Y_π не будут совпадать, если технологическое множество Y не удовлетворяет свойству свободы расходования (как на Рис. 3.7a и 3.7b).

Теорема 3.10:

Пусть технологическое множество Y непусто, замкнуто, выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования. Тогда при $P = \mathbb{R}^l_{++}$ оно совпадает с порождаемым им множеством Y_π. ┘

Доказательство: Так как $Y \subset Y_\pi$, то остается только показать, что $Y_\pi \subset Y$.

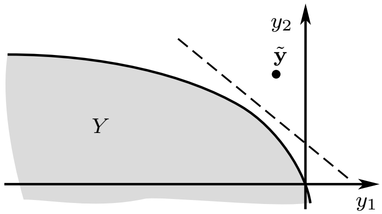


Рис. 3.8. *Иллюстрация отделимости*

Рассмотрим точку $\tilde{\mathbf{y}}$, не принадлежащую технологическому множеству Y. По теореме отделимости[10] для непустого выпуклого замкнутого множества Y и точки $\tilde{\mathbf{y}}$, не принадлежащей этому множеству, существует вектор коэффициентов $\tilde{\mathbf{p}}$, не равный нулю, и число q, такие что

$$\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > q \geqslant \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y} \ \forall \mathbf{y} \in Y$$

(см. Рис. 3.8.) Покажем, что $\tilde{\mathbf{p}}$ может быть вектором цен. Для этого нужно, чтобы он не имел нулевых или отрицательных компонент.

Предположим, что $\tilde{p}_i < 0$. Рассмотрим некоторую точку $\mathbf{y}' \in Y$ и луч $\mathbf{y}' - \lambda \mathbf{e}^i$ при $\lambda \geqslant 0$, где $\mathbf{e}^i$ — орт (i-я компонента равна единице, а остальные — нули). Этот луч целиком лежит во множестве Y, так как Y удовлетворяет свойству свободы расходования. Величина $\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y}' - \lambda \tilde{p}_i$ не ограничена сверху. Это противоречит тому, что $\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in Y$. Мы пришли к противоречию, поэтому $\tilde{\mathbf{p}} \geqslant \mathbf{0}$.

Более того, можно выбрать вектор коэффициентов так, что в нем не будет нулевых компонент. Действительно, рассмотрим вектор $\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon \mathbf{p}'$, где $\mathbf{p}'$ — произвольный вектор цен из $P = \mathbb{R}^l_{++}$. Величины $\mathbf{p}'\mathbf{y}$ при $\mathbf{y} \in Y$ ограничены сверху значением $\pi(\mathbf{p}')$, поэтому если ε достаточно мало́, то все еще будут выполняться неравенства

$$(\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon \mathbf{p}')\tilde{\mathbf{y}} > (\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon \mathbf{p}')\mathbf{y} \ \forall \mathbf{y} \in Y,$$

т. е. мы можем заменить $\tilde{\mathbf{p}}$ на некоторый вектор $\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^l_{++}$.

Из этих рассуждений следует, что существует вектор $\tilde{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, такой что $\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y} \ \forall \mathbf{y} \in Y$. Таким образом, $\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > \pi(\tilde{\mathbf{p}})$ и, значит, $\mathbf{y} \notin Y_\pi$. Тем самым, мы показали, что любая точка, которая не принадлежит Y, не принадлежит и Y_π. А это означает, что $Y_\pi \subset Y$. ■

На Рис. 3.9 приведены примеры ситуаций, когда при нарушении предположений доказанной теоремы ее утверждение ($Y_\pi \subset Y$) невер-

[10] См. Теорему B.42 на с. 1125 в Приложении B и комментарий после теоремы.

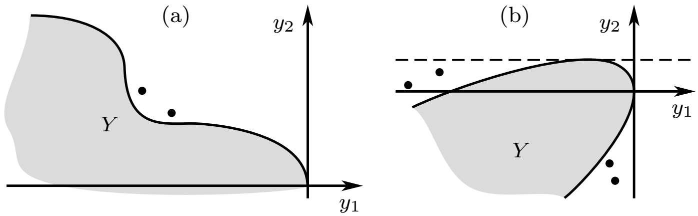


Рис. 3.9. *Ситуации, когда невозможно восстановить технологическое множество. (a) Не выполнено условие выпуклости; изображенные точки нельзя отделить. (b) Не выполнено условие свободы расходования; изображенные точки нельзя отделить гиперплоскостью с неотрицательным наклоном*

но, т. е. невозможно восстановить Y на основе функции прибыли. Заметим, что на Рис. 3.9b невозможность восстановления связана с «бедностью» множества цен; если бы множество цен P включало векторы с отрицательными компонентами, то проблем с восстановлением не было бы.

Обсудим теперь следующую проблему: как для данной функции $\pi(\mathbf{p})$ и функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$, заданных на множестве цен P, определить, могут ли они являться функцией прибыли и функцией предложения рационального производителя соответственно. При этом будем считать множество цен P открытым.

Как было показано выше, необходимыми требованиями к функции прибыли являются ее выпуклость, положительная однородность первой степени и непрерывность. Оказывается, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы произвольная функция $\pi(\mathbf{p})$ была функцией прибыли для некоторого технологического множества. В качестве такого множества можно взять рассмотренное выше множество

$$Y_\pi = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p}) \ \forall \mathbf{p} \in P \,\}.$$

Другими словами, верны следующие утверждения.

◆ Если функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то построенная на ее основе функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя.

◆ Если функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя, то построенная на ее основе функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли.

◆ Если функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то существует технологическое множество, порождающее $\pi(\mathbf{p})$ как функцию прибыли.

Перечислим упомянутые необходимые условия. Для удобства доказательства потребуем дополнительно, чтобы $\pi(\mathbf{p})$ была дважды непрерывно дифференцируемой, а $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — непрерывно дифференцируемой.

Условия на функцию $\pi(\mathbf{p})$ $(\pi\colon P \mapsto \mathbb{R})$:

(A1) положительная однородность первой степени;
(A2) выпуклость;
(A3) $\pi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема (более сильное условие, чем требуется).

Условия на функцию $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ $(\mathbf{y}\colon P \mapsto \mathbb{R}^l)$:

(B1) положительная однородность нулевой степени,
(B2) $\mathbf{y}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, матрица первых производных $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = (\partial y_s(\mathbf{p})/\partial p_k)$ положительно полуопределена и симметрична.

Сформулируем приведенный выше набор неформальных утверждений как теорему.

Теорема 3.11:

{i} Пусть для всех k выполнено

$$y_k(\mathbf{p}) = \frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_k},$$

и функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (A1), (A2) и (A3). Тогда $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = (y_1(\mathbf{p}), \ldots, y_l(\mathbf{p}))$ удовлетворяет условиям (B1) и (B2) налагаемым на функцию спроса-предложения производителя.

{ii} Пусть функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (B1) и (B2). Тогда функция $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (A1), (A2) и (A3).

{iii} Пусть функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (A1), (A2), (A3). Тогда множество $Y_\pi = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p})\ \forall \mathbf{p} \in P \,\}$ является технологическим множеством, порождающим функцию прибыли $\pi(\mathbf{p})$. ⌟

Доказательство: {i} Так как функция $\pi(\mathbf{p})$ однородна первой степени, то ее производная $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ однородна нулевой степени.

Непрерывная дифференцируемость $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $\pi(\mathbf{p})$.

Матрица вторых производных дважды непрерывно дифференцируемой функции симметрична. Таким образом, для функции $\pi(\mathbf{p})$ выполнено

$$\frac{\partial^2\pi(\mathbf{p})}{\partial p_s \partial p_k} = \frac{\partial^2\pi(\mathbf{p})}{\partial p_k \partial p_s}.$$

Матрица вторых производных функции $\pi(\mathbf{p})$ есть матрица первых производных функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$. Поэтому

$$\frac{\partial y_s}{\partial p_k} = \frac{\partial y_k}{\partial p_s}.$$

Положительная полуопределенность матрицы вторых производных (т. е. $\mathbf{rMr} \geqslant 0 \ \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$) — необходимый (и достаточный) признак выпуклости дважды дифференцируемой функции.

{ii} Продифференцируем $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{py}(\mathbf{p}) = \sum p_k y_k(\mathbf{p})$ по p_k:

$$\frac{\partial\pi(\mathbf{p})}{\partial p_k} = y_k(\mathbf{p}) + \sum_{s=1}^{l} p_s \frac{\partial y_s(\mathbf{p})}{\partial p_k} = y_k(\mathbf{p}) + \sum_{s=1}^{l} p_s \frac{\partial y_k(\mathbf{p})}{\partial p_s}.$$

Второе равенство — следствие симметричности производных функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$. Так как $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — положительно однородна нулевой степени, то по закону Эйлера

$$\sum_{s=1}^{l} p_s \frac{\partial y_k(\mathbf{p})}{\partial p_s} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\pi(\mathbf{p})}{\partial p_k} = y_k(\mathbf{p}).$$

Далее воспроизводим доказательство пункта {i} в обратном порядке.

{iii} Обозначим

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \nabla\pi(\mathbf{p}).$$

Так как $\pi(\mathbf{p})$ — однородная первой степени функция и $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — ее градиент, то по формуле Эйлера

$$\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{py}(\mathbf{p}).$$

С учетом этого равенства по определению множества Y_π следует, что величина $\mathbf{py}(\mathbf{p})$ всегда не меньше, чем $\mathbf{py}$ в любой точке $\mathbf{y} \in Y_\pi$. Если мы докажем, что при любых ценах $\mathbf{p} \geqslant 0$ точка $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ принадлежит множеству Y_π, то тем самым мы докажем, что $\pi(\mathbf{p})$ есть функция прибыли, соответствующая технологическому множеству Y_π. Другими словами, нам требуется показать, что $\mathbf{p}'\mathbf{y}(\mathbf{p}) \leqslant \pi(\mathbf{p}')$ при всех $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \geqslant 0$.

Так как $\pi(\mathbf{p})$ — выпуклая дифференцируемая функция, то ее график лежит выше касательной:

$$\pi(\mathbf{p}') \geqslant \pi(\mathbf{p}) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\nabla\pi(\mathbf{p}).$$

Поскольку $\nabla\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{y}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{p}\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{p})$, получаем требуемое для доказательства утверждения соотношение

$$\pi(\mathbf{p}') \geqslant \pi(\mathbf{p}) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'\mathbf{y}(\mathbf{p}). \qquad \blacksquare$$

Замечание: Пункт {iii} данной теоремы можно доказать и без предположения о дифференцируемости. Это предположение вводится для упрощения доказательства.

Определение множества Y_π, как оно дано выше, не очень удобно для прикладных задач. Желательно иметь более «операциональное» описание восстановленного технологического множества — соответствующую ему производственную функцию. Рассмотрим вопрос о том, как получить такое описание.

Определение множества Y_π не изменится (с учетом того, что функция $\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}$ положительно однородна), если нормировать подходящим образом цены. Важно только, чтобы нормированные цены (обозначим множество таких цен через $\hat{P}$) совпадали с точностью до положительного множителя с ценами из исходного множества P. (Например, если цена одного из благ всегда положительна, то ее можно принять равной единице; если цены составляют положительный ортант, то можно сумму цен положить равной единице.) Таким образом, имеем:

$$Y_\pi = \left\{ \mathbf{y} \;\middle|\; \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p}) \text{ для всех } \mathbf{p} \in \hat{P} \right\}.$$

Можно переписать это определение в эквивалентном виде:

$$Y_\pi = \left\{ \mathbf{y} \;\middle|\; \inf_{\mathbf{p}\in\hat{P}} (\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}) \geqslant 0 \right\}.$$

Очевидно, что данный способ восстановления технологического множества по функции прибыли $\pi(\mathbf{p})$ фактически задает неявную производственную функцию[11] по формуле

$$g(\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{p}\in\hat{P}} (\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}).$$

Таким образом, для получения неявной производственной функции[12], соответствующей множеству Y_π, можно в качестве $g(\mathbf{y})$ взять значение следующей задачи:

$$\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y} \to \inf_{\mathbf{p}\in\hat{P}}.$$

Рассмотрим, например, однопродуктовую технологию с выпуском y^o (цена $p^o > 0$) и затратами $\mathbf{r}$ (цены $\mathbf{w} > 0$). Если положить $p^o = 1$, задача переписывается в виде

$$\pi(\mathbf{w}, 1) + \mathbf{w}\mathbf{r} - y^o \to \inf_{\mathbf{w}>0}.$$

Если функция прибыли строго выпукла, то, решая эту задачу, мы найдем решение как функцию $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r})$ (определенную для тех значений затрат $\mathbf{r}$, при которых решение существует), а по ней — неявную производственную функцию

$$g(\mathbf{r}, y^o) = \pi(\mathbf{w}(\mathbf{r}), 1) + \mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{r} - y^o.$$

Условие принадлежности технологическому множеству Y_π, т. е. неравенство $g(\mathbf{r}, y^o) \geqslant 0$, можно переписать в виде $y^o \leqslant \pi(\mathbf{w}(\mathbf{r}), 1) + \mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{r}$. Ясно, что правая часть здесь представляет собой однопродуктовую явную производственную функцию, описывающую данную технологию:

$$f(\mathbf{r}) = \pi(\mathbf{w}(\mathbf{r}), 1) + \mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{r}.$$

Задачи

3.37 Известно, что при ценах $(1, 2)$ производитель выбрал вектор выпуска $(1, -1)$, а при ценах $(2, 1)$ — вектор выпуска $(-1, 1)$. Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

3.38 Известно, что при ценах $(3, 2)$ производитель выбрал вектор выпуска $(2, -1)$, а при ценах $(2, 3)$ — вектор выпуска $(1, -2)$. Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

---

[11] Можно показать (опираясь на то, что функция $\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}$ положительно однородна, а P представляет собой конус), что если цены не нормировать, то эта неявная производственная функция будет принимать значения 0 (если $\mathbf{y} \in Y_\pi$) и $-\infty$ (если $\mathbf{y} \notin Y_\pi$). Это, конечно, не очень удобно.

[12] Отметим, что полученная таким образом функция $g(\mathbf{y})$ в некоторых случаях может принимать значение $-\infty$.

3.39 Известно, что при ценах $(1, 4)$ производитель выбрал вектор выпуска $(-4, 3)$, при ценах $(1, 1)$ — вектор выпуска $(0, 0)$, а при ценах $(2, 1)$ — вектор выпуска $(3, -4)$. Можно ли гарантировать, что вектор выпуска $(-1, 2)$ не принадлежит множеству допустимых технологий?

3.40 Известно, что при ценах $(1, 4)$ производитель выбрал вектор выпуска $(-4, 3)$, при ценах $(1, 1)$ — вектор выпуска $(0, 0)$, а при ценах $(2, 1)$ — вектор выпуска $(3, -4)$. Можно ли гарантировать, что вектор выпуска $(-9, 4)$ не принадлежит множеству допустимых технологий?

3.41 (A) Докажите, что в модели производителя выполнен следующий закон предложения: $\Delta\mathbf{p}\Delta\mathbf{y} \geqslant 0$, где $\Delta\mathbf{y}$ — изменение предложения при изменении цен на $\Delta\mathbf{p}$. Сравните закон предложения с законом спроса в теории поведения потребителя (ему посвящен п. 2.3.1).

(B) Переформулируйте закон предложения для случая, когда блага разделены на выпускаемую продукцию и затрачиваемые факторы. Сформулируйте два следствия этого свойства: закон предложения для выпускаемой продукции и закон спроса для производственных факторов.

3.42 Известно, что спрос потребителя удовлетворяет закону спроса только в случае благ, не являющихся товарами Гиффена, а спрос на факторы производства удовлетворяет закону спроса всегда. Какие особенности моделей рационального поведения производителя и потребителя предопределяют такие особенности их поведения?

3.43 (A) Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(p_1, p_2) = p_1 \left(\ln \frac{p_1}{p_2} - 1\right) + p_2.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

(B) Решите ту же задачу для функции прибыли

$$\pi(p_1, p_2, p_3) = \frac{3p_1^2 + p_2^2}{p_3}.$$

3.44 Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(w, p^o) = p^{o\,\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\alpha/w\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (p^o\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Найдите функцию спроса. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

3.4 Затраты и издержки

Итак, мы изучили основные свойства модели рационального поведения производителя. В микроэкономике утвердилась также традиция описывать технологию посредством функции издержек, решая при этом задачу максимизиции прибыли в два этапа. На первом этапе при данных ценах факторов находится минимальная величина издержек (стоимости затрачиваемых производственных факторов), которая позволяет произвести данное количество продукции. Соответствующая зависимость между выпусками и этими (минимальными) издержками и называется функцией издержек. На втором этапе при известной функции издержек и при заданных ценах на выпускаемую продукцию (или заданной зависимости этих цен от объема производства, если не предполагается, что производитель является ценополучателем) находится тот выпуск, которому соответствует максимальная прибыль. Такое разделение задачи выбора оптимальной технологии на два этапа представляется удобным исследовательским приемом, особенно при исследовании моделей равновесия с производством, удовлетворяющим условиям постоянной отдачи от масштаба, а также при анализе моделей несовершенной конкуренции, когда поведение производителя оказывает влияние на рыночные цены[13].

В этом параграфе приведем результаты относительно свойств функций издержек и связи этих функций с теми понятиями, которые были рассмотрены выше.

Для упрощения записи вектор выпуска будем обозначать здесь через $\mathbf{y}$ (вместо $\mathbf{y}^o$), где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Как и ранее, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ — вектор соответствующих затрат.

3.4.1 Множество требуемых затрат

Через $Y^o \subset \mathbb{R}^m$ обозначим множество, состоящее из тех векторов объемов производства, которые допустимы при данном технологическом множестве (существуют затраты, которые вместе с $\mathbf{y}$ составляют допустимую технологию):

$$Y^o = \{\, \mathbf{y} \mid \exists \mathbf{r}\colon (-\mathbf{r}, \mathbf{y}) \in Y \,\}.$$

[13]Об этом см. в гл. 12 и 13.

Определение 3.12:

Для каждого вектора выпуска $\mathbf{y} \in Y^o$ множество требуемых затрат $V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n$ — это множество векторов затрат, обеспечивающих этот выпуск при данном технологическом множестве Y, т. е.

$$V(\mathbf{y}) = \{\, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \mid (-\mathbf{r}, \mathbf{y}) \in Y \,\}. \qquad \blacktriangleleft$$

Из предполагаемых свойств Y вытекают некоторые *свойства множества* $V(\mathbf{y})$ и соответствующего отображения $V(\cdot)$:

- из выпуклости Y следует выпуклость множеств $V(\mathbf{y})$ (см. задачу 3.45);
- из свободы расходования для Y следует свобода расходования для множеств $V(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{r} \in V(\mathbf{y}) \;\text{ и }\; \mathbf{r}' \geqslant \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}' \in V(\mathbf{y})$$

  (см. задачу 3.46).

Для случая однопродуктовой технологии ($m = 1$) рассмотрим связь множества требуемых затрат с производственной функцией (в предположении, что она существует). На основе $V(\cdot)$ можно определить производственную функцию следующим образом:

$$f(\mathbf{r}) = \max_{y\,:\, \mathbf{r} \in V(y)} y.$$

При моделировании производства с помощью производственной функции естественно предположить, что технологическое множество обладает свойством свободы расходования по выпуску:

$$\mathbf{y} \leqslant \mathbf{y}' \;\text{ и }\; (-\mathbf{r}, \mathbf{y}') \in Y \quad \Rightarrow \quad (-\mathbf{r}, \mathbf{y}) \in Y.$$

Как нетрудно понять, свобода расходования по выпуску эквивалентна монотонности отображения $V(\cdot)$, т. е. вложенности множеств $V(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{y} \leqslant \mathbf{y}' \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{y}') \subset V(\mathbf{y})$$

(см. Рис. 3.10). При этом предположении множества $V(y)$ связаны с производственной функцией следующим образом:

$$V(y) = \{\, \mathbf{r} \in R \mid f(\mathbf{r}) \geqslant y \,\}.$$

Следующая теорема связывает свойства отображения $V(\cdot)$ и соответствующей производственной функции $f(\cdot)$. (Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.47.)

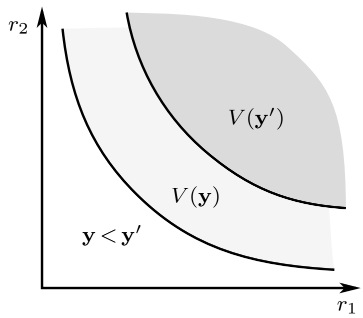


Рис. 3.10. *Монотонность $V(\cdot)$ (свобода расходования по выпуску)*

Теорема 3.12:

Пусть однопродуктовая технология представима производственной функцией $f(\cdot)$ и пусть отображение $V(\cdot)$, соответствующее этой технологии, монотонно. Тогда

{i} производственная функция $f(\cdot)$ монотонна;

{ii} множества $V(y)$ выпуклы при всех $y \in Y^o$ тогда и только тогда, когда производственная функция $f(\cdot)$ квазивогнута. ┘

В терминах множеств $V(y)$ можно определить изокванты для данной технологии:

$$\left\{\, \mathbf{r} \in V(y) \;\middle|\; \mathbf{r} \notin V(y') \text{ для всех } y' > y \,\right\}.$$

Это множество таких векторов затрат $\mathbf{r}$, которые позволяют произвести y, но не позволяют произвести больше y. Таким образом, изокванта — это граница множества $V(y)$ (см. Рис. 3.11). Например, для производственной функции Кобба—Дугласа с двумя видами затрат имеем

$$Y = \{\, (-r_1, -r_2, y) \mid y \leqslant r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} \,\},$$
$$V(y) = \{\, (r_1, r_2) \mid y \leqslant r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} \,\}.$$

Соответственно, изокванта задается уравнением

$$r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} = \text{const}.$$

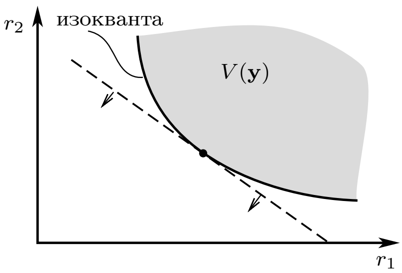


Рис. 3.11. *Построение функции издержек*

3.4.2 Функция издержек

Напомним, что через $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ мы обозначили цены затрачиваемых ресурсов (часть общего вектора цен $\mathbf{p}$, соответствующая $-\mathbf{r}$). Если зафиксировать вектор выпуска $\mathbf{y} \in Y^o$ то задача максимизации прибыли (Π) сводится к следующей задаче минимизации издержек:

Задача минимизации издержек

$$\begin{aligned} &\mathbf{wr} \to \min_{\mathbf{r}} \\ &\mathbf{r} \in V(\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{C}$$

Иллюстрация этой задачи представлена на Рис. 3.11. Очевидна аналогия с задачей минимизации потребительских расходов ($\mathcal{H}$) в теории поведения потребителя (см. с. 119).

Следующая теорема дает условия, при которых задача (C) имеет решение. (Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.57.)

Теорема 3.13:

Пусть технологическое множество Y непусто и замкнуто, и $V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_+$ при всех $\mathbf{y} \in Y^o$. Тогда задача минимизации издержек (C) имеет решение при всех $\mathbf{y} \in Y^o$ и любых ценах факторов $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_{++}$. ⌟

В дальнейшем в этом ??разделе будем предполагать, что для любого $\mathbf{y} \in Y^o$ найдутся цены факторов $\mathbf{w}$, при которых задача минимизации издержек имеет решение (что, например, будет верным, если выполнены условия приведенной теоремы). Обозначим множество цен факторов, при которых существует решение задачи (C) при объеме выпуска $\mathbf{y}$, через $W(\mathbf{y})$.

Определение 3.13:

Функция издержек $c(\cdot)$ — это функция, сопоставляющая значение целевой функции задачи (C) параметрам $\mathbf{w}$ и $\mathbf{y}$; для каждого вектора выпуска $\mathbf{y} \in Y^o$ и вектора цен факторов $\mathbf{w} \in W(\mathbf{y})$ значение $c(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ указывает минимальную величину издержек, при которых в соответствии с данной технологией можно произвести $\mathbf{y}$. ◀

Если технологическое множество задано производственной функцией $y \leqslant f(\mathbf{r})$, то задача (C) примет вид:

$$\mathbf{wr} \to \min_{\mathbf{r}}$$
$$y \leqslant f(\mathbf{r}).$$

Перечислим свойства, которыми обладает функция издержек.

Теорема 3.14 (свойства функции издержек):

Пусть для технологического множества Y определена функция издержек $c(\cdot)$. Тогда она обладает следующими свойствами.

{i} Функция издержек положительно однородна первой степени по ценам факторов:

$$c(\lambda \mathbf{w}, \mathbf{y}) = \lambda c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \text{ при всех } \lambda > 0, \mathbf{y} \in Y^o \text{ и } \mathbf{w} \in W(\mathbf{y}).$$

{ii} Если отображение $V(\cdot)$ монотонно по выпуску, то функция издержек монотонна по ценам.

{iii} Если $V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_{++}$ при всех $\mathbf{y} \in Y^o$, то функция издержек монотонна по ценам факторов:

$$\mathbf{w}' \geqslant\neq \mathbf{w} \Rightarrow c(\mathbf{w}', \mathbf{y}) > c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \; \forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W(\mathbf{y}).$$

{iv} Функция издержек вогнута по ценам на любом выпуклом подмножестве множества $W(\mathbf{y})$.

{v} Функция издержек непрерывна по ценам на внутренности множества $W(\mathbf{y})$, т. е. на $\operatorname{int} W(\mathbf{y})$.

{vi} Если технологическое множество Y выпукло, то множество Y^o выпукло и функция издержек выпукла по выпуску.

{vii} Если Y выпукло, то функция издержек непрерывна по выпуску на внутренности множества Y^o. ┘

Доказательство: Доказательство свойств {i}, {ii} {iv}, {v}, {vi} и {vii} аналогично приведенным ранее и оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 3.58). Докажем только свойство {iii} — монотонность функции издержек по ценам факторов.

Пусть $\mathbf{r}$ — оптимальные затраты при ценах факторов $\mathbf{w}$ и выпуске $\mathbf{y}$, т. е. $\mathbf{wr} = c(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Из $\mathbf{w}' \geqslant\neq \mathbf{w}$ следует, что $c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{wr} < \mathbf{w}'\mathbf{r} \leqslant c(\mathbf{w}', \mathbf{y})$, поскольку $\mathbf{r} \in V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_{++}$. ■

В дальнейшем нам понадобится также понятие функции условного спроса.

Определение 3.14:

Функция условного спроса на факторы производства $\mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ сопоставляет выпуску $\mathbf{y} \in Y^o$ и ценам факторов $\mathbf{w} \in W(\mathbf{y})$ оптимальное решение задачи (C). ◀

Следующая теорема говорит о свойствах функции условного спроса. (Его доказательство аналогично приведенным ранее и оставляется читателю в качестве упражнения; см задачу 3.59.)

Теорема 3.15 (свойства функции условного спроса на факторы):

{i} Функция условного спроса на факторы производства $\mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ положительно однородна нулевой степени как функция цен факторов производства $\mathbf{w}$.

{ii} Если множество $V(\mathbf{y})$ строго выпукло, то $\mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ — (однозначная) непрерывная функция $\mathbf{w}$.

Если, кроме того, функция издержек дифференцируема, то верна следующая лемма Шепарда, связывающая издержки и функцию условного спроса на факторы.

Теорема 3.16 (лемма Шепарда[14]):

Если функция издержек дифференцируема по ценам факторов при объеме производства $\mathbf{y} \in Y^o$, то для всех $\mathbf{w} \in \operatorname{int} W(\mathbf{y})$ выполнено

$$\nabla_{\mathbf{w}} c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$$

или

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, \mathbf{y})}{\partial w_i} = r_i(\mathbf{w}, \mathbf{y}).$$ ┘

[14] R. W. Shephard. *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, 1970.

Доказательство: Зафиксируем цены факторов на уровне $\tilde{\mathbf{w}} \in \operatorname{int} W(\mathbf{y})$. Введем на $W(\mathbf{y})$ следующую функцию:

$$\gamma(\mathbf{w}) = c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) - \mathbf{w}\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{y}).$$

По определению функции издержек и функции условного спроса $\gamma(\mathbf{w})$ достигает максимума, равного нулю, в точке $\tilde{\mathbf{w}}$:

$$\gamma(\mathbf{w}) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \gamma(\tilde{\mathbf{w}}) = 0.$$

Если функция издержек дифференцируема по ценам факторов, то функция $\gamma(\cdot)$ тоже дифференцируема. Так как точка $\tilde{\mathbf{w}}$ внутренняя в $W(\mathbf{y})$, то по условию первого порядка максимума градиент ее должен быть равен нулю:

$$\nabla\gamma(\tilde{\mathbf{w}}) = \nabla_{\mathbf{w}} c(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{y}) - \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$ ■

Как отмечалось выше, использование функции издержек позволяет рассматривать максимизацию прибыли как двухэтапную процедуру. На первом этапе по данной технологии и соответствующему множеству требуемых затрат строится функция издержек. На втором этапе решается задача выбора объема производства, максимизирующего прибыль, которая в этом случае рассчитывается как разница между выручкой и издержками:

$$\mathbf{p}\mathbf{y} - c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \to \min_{y \in Y^o}.$$

Здесь через $\mathbf{p}$ мы обозначили цены продукции, а через Y^o, как и ранее, те объемы производства, которые допустимы при данном технологическом множестве. Это один из вариантов записи задачи производителя. Если функция издержек дифференцируема и решение рассматриваемой задачи, $\bar{\mathbf{y}}$, является внутренним (т. е. $\bar{\mathbf{y}} \in \operatorname{int} Y^o$), причем для $\mathbf{y}$ из некоторой окрестности $\bar{\mathbf{y}}$ множество $W(\mathbf{y})$ содержит $\mathbf{w}$, то это решение характеризуется следующим условием первого порядка:

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{y}})}{\partial y_k} = p_k \text{ для всех k},$$

или (в векторной записи)

$$\nabla_{\mathbf{y}} c(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{p}.$$

Таким образом, оптимальный выпуск характеризуется тем, что предельные издержки равны цене производимого блага.

На основе решения рассматриваемой задачи можно построить функцию (отображение) предложения (предложения продукции). Она указывает оптимальный объем выпуска $\bar{\mathbf{y}}$ как функцию цен продукции $\mathbf{p}$ и цен факторов $\mathbf{w}$.

Обычно функции издержек используют в моделях частного равновесия (в моделях квазилинейных экономик, см. гл. 5).

Задачи

3.45 Покажите, что из выпуклости технологического множества следует выпуклость множеств требуемых затрат. Приведите пример, демонстрирующий, что обратное, вообще говоря, неверно.

3.46 Покажите, что если технологическое множество характеризуется свободой расходования, то для множеств требуемых затрат тоже выполнено аналогичное свойство. Приведите пример, демонстрирующий, что обратное, вообще говоря, неверно.

3.47 Докажите Теорему 3.12.

3.48 Для каждой из приведенных ниже функций определите, может ли она быть функцией издержек для некоторой технологии, и если может, то при каких условиях.

(A) $c(y, \mathbf{w}) = y^{1/2}(w_1 w_2)^{3/4}$;
(B) $c(y, \mathbf{w}) = (y + 1/y)(w^1 w^2)^{1/2}$;
(C) $c(y, \mathbf{w}) = y(w_1 - (w_1 w_2)^{1/2} + w_2)$;
(D) $c(y, \mathbf{w}) = y(w_1 + w_2)$;
(E) $c(y, \mathbf{w}) = y \min\{w_1, w_2\}$.

3.49 Для каждой из приведенных ниже функций определите, при каких параметрах a и b она может быть функцией издержек для некоторой технологии.

(A) $c(y, \mathbf{w}) = y(aw_1 + bw_2)$;
(B) $c(y, \mathbf{w}) = y \min\{aw_1, bw_2\}$;
(C) $c(y, \mathbf{w}) = y w_1^a w_2^b$.

3.50 Множество требуемых ресурсов, соответствующее объему производства y, задается неравенством

$$ar_1 + br_2 \geqslant y^2 \text{ при } a, b > 0.$$

Какой вид имеет соответствующая производственная функция? Постройте функцию издержек.

3.51 Для технологии, описываемой производственной функцией $f(r) = r^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$), вычислите функцию издержек. Покажите, что функция издержек однородна по цене фактора производства и выпукла по выпуску y.

3.52 Найдите функции издержек для следующих производственных функций:

(A) $f(\mathbf{r}) = \prod_i r_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i > 0)$;
(B) $f(\mathbf{r}) = \sum_i a_i r_i^{\rho}$ $(a_i > 0,\ \rho \in (0,1))$;
(C) $f(\mathbf{r}) = \min\{r_i/a_i\}$ $(a_i > 0)$;
(D) $f(\mathbf{r}) = \sum_i a_i r_i$ $(a_i > 0)$.

3.53 (A) Проверьте, для производственных функций задачи 3.52 локальная эластичность масштаба (см. с. 211) равна частному средних и предельных издержек.

(B) Докажите, что это свойство верно в общем случае.

3.54 Предположим, что предприятие имеет строго вогнутую производственную функцию $f(\mathbf{r})$. Рассмотрите следующие две задачи:

$$\mathbf{wr} \to \min_{\mathbf{r}}$$
$$y^* \leqslant f(\mathbf{r})$$

и

$$f(\mathbf{r}) \to \max_{\mathbf{r}}$$
$$\mathbf{wr} \leqslant c^*.$$

Докажите следующие два утверждения.

(A) Пусть $\mathbf{r}^*$ является решением первой задачи при некотором y^*. Тогда $\mathbf{r}^*$ является решением второй задачи при $c^* = \mathbf{wr}^*$.

(B) Пусть $\mathbf{r}^*$ является решением второй задачи при некотором c^*. Тогда $\mathbf{r}^*$ является решением первой задачи при $y^* = f(\mathbf{r}^*)$.

3.55 Предположим, что предприятие со строго вогнутой производственной функцией $f(\mathbf{r})$ имеет функцию издержек $c(\mathbf{w}, y)$. Докажите, что оптимальный объем производства в следующих двух задачах совпадает:

$$py - \mathbf{wr} \to \max_{y,\mathbf{r}}$$
$$y \leqslant f(\mathbf{r})$$

и

$$py - c(\mathbf{w}, y) \to \max_{y}.$$

3.56 Докажите, что если функция издержек выпукла, то производителю выгоднее производить продукцию, чем закрыться (производить нулевой объем).

3.57 Докажите Теорему 3.13.

3.58 Дайте полное доказательство Теоремы 3.14.

3.59 Докажите Теорему 3.15.

3.60 Пусть функция издержек строго вогнута и, кроме того, $c(\mathbf{w}, 0) = 0$. Докажите, что данная функция издержек была порождена производственной функцией, которая в точках оптимального выбора производителя характеризуется возрастающей отдачей от масштаба.

3.61 Покажите, что если технология характеризуется постоянной отдачей от масштаба, то функция издержек является линейной.

3.62 Покажите, что если множество R выпукло и производственная функция квазивогнутая и неубывающая, то множество Y^o выпукло и функция издержек является выпуклой.

3.63 Покажите, что если множество R выпукло и производственная функция непрерывна и строго вогнута, то множество Y^o выпукло и функция издержек строго выпукла.

3.64 Покажите, что если цены на все выпускаемые фирмой продукты увеличатся пропорционально, то издержки этой фирмы, соответствующие оптимальной технологии, возрастут.

3.65 По аналогии с параграфом 3.3 рассмотрите восстановление множества требуемых затрат. По функции издержек $c(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ при некотором фиксированном объеме производства $\mathbf{y} \in Y^o$ можно построить следующее множество:

$$V_c(\mathbf{y}) = \{\, \mathbf{r} \mid \mathbf{wr} \geqslant c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \; \forall \mathbf{w} \geqslant 0 \,\}\,.$$

(A) Объясните, почему множество $V_c(\mathbf{y})$ является выпуклым при любом векторе выпуска $\mathbf{y}$.

(B) Объясните, почему если $W(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_+$, то выполняется следующее свойство, которое можно называть свойством свободы расходования производственных факторов:

$$V_c(\mathbf{y}) = V_c(\mathbf{y}) + \mathbb{R}^n_+,$$

т. е. если $\mathbf{r}$ принадлежит множеству $V_c(\mathbf{y})$ и $\mathbf{r}' \geqslant \mathbf{r}$, то $\mathbf{r}'$ также принадлежит множеству $V_c(\mathbf{y})$.

(C) Докажите, что если исходное множество требуемых затрат $V(\mathbf{y})$ выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования производственных факторов, то $V(\mathbf{y}) = V_c(\mathbf{y})$.

(D) Приведите графические примеры того, что множество требуемых затрат $V(\mathbf{y})$ и восстановленное множество $V_c(\mathbf{y})$ могут не совпадать, если исходное множество $V(\mathbf{y})$ не является выпуклым или не удовлетворяет свойству свободы расходования производственных факторов.

(E) Докажите, что даже если множества $V(\mathbf{y})$ и $V_c(\mathbf{y})$ не совпадают друг с другом, это различие несущественно с точки зрения описания поведения производителя, поскольку $V_c(\mathbf{y})$ порождает ту же самую функцию издержек, что и $V(\mathbf{y})$.

3.5 Агрегирование в производстве

Пусть существует n фирм с технологическими множествами Y_j, $j = 1, \ldots, n$. Зададимся вопросом о том, можно ли найти технологическое множество Y_Σ, такое чтобы производитель с таким технологическим множеством (репрезентативный производитель или агрегированный производитель) демонстрировал в определенном смысле такое же поведение, как и n исходных производителей.

Оказывается, что такое технологическое множество построить очень просто:

$$Y_\Sigma = \sum_{j=1}^{n} Y_j,$$

т. е.

$$Y_\Sigma = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_j \;\middle|\; \mathbf{y}_j \in Y_j \right\}.$$

Действительно, верна следующая теорема. (Ее доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.66.)

Теорема 3.17:

{i} Если при ценах $\mathbf{p}$ технология $\bar{y}_j$ является решением задачи j-го производителя, то технология

$$\bar{\mathbf{y}}_\Sigma = \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathbf{y}}_j$$

является решением задачи агрегированного производителя при тех же ценах.

{ii} Обратно, если $\bar{y}_\Sigma$ является решением задачи агрегированного производителя, то найдутся технологии $\bar{y}_j$, каждая из которых является решением задачи соответствующего производителя. ⌟

Как следствие указанного свойства между функциями прибыли существует следующая связь:

$$\pi_\Sigma(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(\mathbf{p}).$$

Если $f_j(\cdot)$ — производственная функция j-й фирмы, то агрегированная фирма будет иметь производственную функцию $f_\Sigma(\cdot)$, которая получается как значение следующей задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{r}_j) \to \max_{r_j \in R_j}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_\Sigma.$$

Можно показать, что построенная таким образом функция $f_\Sigma(\cdot)$ будет производственной функцией, соответствующей агрегированному технологическому множеству Y_Σ.

Аналогично, если $c_j(\cdot)$ — функция издержек j-й фирмы, то агрегированная фирма будет иметь функцию издержек $c_\Sigma(\cdot)$, которая получается как значение следующей задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\mathbf{w}, \mathbf{y}_j) \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j^o}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_j = \mathbf{y}_\Sigma.$$

Задачи

3.66 Докажите Теорему 3.17.

3.67 Обоснуйте приведенный в этом параграфе способ агрегирования производственных функций.

3.68 Обоснуйте приведенный в этом параграфе способ агрегирования функций издержек.

3.69 Технологические множества n фирм одинаковы и состоят из двух технологий: $(0, 0)$ и $(-1, 1)$. Опишите агрегированное технологическое множество Y_Σ. Покажите, что усредненное технологическое множество Y_Σ/n в пределе заполняет весь отрезок между $(0, 0)$ и $(-1, 1)$ (в том смысле, что для каждой технологии из данного отрезка существует сколь угодно близкая к ней технология из Y_Σ/n).

3.70 Повторите анализ предыдущей задачи для ситуации, когда технологические множества дополнены свободой расходования.

3.71 Технологические множества n фирм одинаковы и заданы неравенствами

$$(y_{j1} + 1)^2 + (y_{j2} + 1)^2 \leqslant 2, \; j = 1, \ldots, n.$$

Найдите неравенство, задающее соответствующее агрегированное технологическое множество.

3.72 Технологические множества n фирм одинаковы и заданы неравенствами

$$y_{j1} + y_{j2}^2 \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Найдите неравенство, задающее соответствующее агрегированное технологическое множество.

3.73 Найдите агрегированную производственную функцию для следующих производственных функций ($j = 1, \ldots, n$):

(A) $f_j(r) = \alpha_j r$;
(B) $f_j(r) = \alpha_j \ln(r + 1)$;
(C) $f_j(r) = \alpha_j \sqrt{r}$;
(D) $f_j(r) = \alpha_j (1 - \exp(-r))$.

3.74 Найдите агрегированную функцию издержек для следующих функций издержек ($j = 1, \ldots, n$):

(A) $c_j(w, y) = \alpha_j w y$;
(B) $c_j(w, y) = \alpha_j w(\exp(y) - 1)$;
(C) $c_j(w, y) = \alpha_j w y^3$;
(D) $c_j(w, y) = -\alpha_j w \ln(1 - y)$.

3.75 Фирма имеет n заводов, издержки производства которых описываются следующими функциями: $c_j(w, y) = \alpha_j w y^2$, $j = 1, \ldots, n$. Определите функцию издержек фирмы.

3.76 Фирма имеет два завода, издержки производства которых описываются следующими функциями $c_1(w, y) = \alpha w y^2$, $c_2(\mathbf{y}) = \beta w y$. Определите функцию издержек фирмы.

Глава 4

Классические (совершенные) рынки. Общее равновесие

Анализ классических (совершенных) рынков уместно начать с перечисления характеристик рынков, при наличии которых их называют совершенными или классическими.

- Отсутствие экстерналий — не опосредованных рынком влияний одних экономических субъектов на других. На поведение экономических субъектов поведение других экономических субъектов может влиять только косвенно — через уровни цен и фиксированные денежные трансферты (например, получение потребителем прибыли от принадлежащих ему предприятий).
- Существуют рынки всех благ, от которых зависят полезности потребителей и/или технологические множества производителей.
- Существующие рынки является связными: любое благо можно поменять на любое другое благо.
- Совершенная конкуренция: каждый экономический субъект принимает цены как данные (является ценополучателем, что можно объяснить тем, что он «достаточно мал»).
- Нет издержек сделок, нет «рыночного трения». Цена покупки и цена продажи совпадают.
- Совершенство информации. Уровни цен и характеристики обмениваемых благ известны каждому экономическому субъекту.

Реальные рынки далеки от совершенных рынков, однако их анализ выявляет некоторые эффекты, общие для всех рынков, и предваряет анализ несовершенных. В теоремах благосостояния мы покажем, что совершенный рынок как механизм согласования интересов экономических субъектов приводит к Парето-оптимальным исходам. В последующих главах мы рассмотрим отдельные типы рыночных несовершенств и связанные с ними отклонения равновесий от Парето-оптимальности, т. е. так называемые фиаско рынка.

В начале данной главы на основе материала предыдущих глав (моделей потребителя и производителя) излагается модель экономики в целом и вводится концепция равновесия. Один из параграфов главы посвящен проблеме существования равновесия. Более сложные теоремы существования приведены в приложении. Поскольку этот материал носит в основном технический вспомогательный характер, он может быть опущен без ущерба для понимания дальнейшего материала.

4.1 Классическая модель экономики. Допустимые состояния

Пусть имеются $l \geqslant 1$ благ и $m \geqslant 1$ потребителей. Каждый из потребителей характеризуется неоклассическими предпочтениями $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ на множестве X_i, а также принадлежащими ему начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_i$. В дальнейшем, как правило, будем предполагать, что предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u_i(\cdot)$[1]. Множество X_i — это множество всех тех наборов, которые потребитель (физически) в состоянии потребить. Обычно в микроэкономических моделях множество X_i совпадает с неотрицательным ортантом, т. е. $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Но мы не вводим такой априорной предпосылки, рассматривая и ситуации, когда X_i не совпадает с $\mathbb{R}^l_+$. Например, если одним из благ является досуг, его потребление ограничено бюджетом времени потребителя. Другое ограничение может состоять в том, что потребление тех или иных благ не может быть ниже некоторой положительной пороговой величины («прожиточного минимума»). В ситуации, когда потребители сами создают некоторые блага, последние можно моделировать отрицательными компонентами потребительских наборов.

далее, пусть в экономике имеется n производителей (фирм), каждый из которых характеризуется технологическим множеством Y_j (множеством векторов чистого выпуска). Технологические множества Y_j в дальнейшем будем часто задавать в виде неявных производственных функций $g_j(\cdot)$. Напомним, что по определению $g_j(\cdot)$ называется неявной производственной функцией, если технология $\mathbf{y}_j$ принадлежит технологическому множеству Y_j тогда и только тогда, когда $g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0$. Как и ранее, с целью упрощения изложения мы будем рассматривать только скалярные неявные производственные функции. Переформулировка рассматриваемых ниже теорем для случая векторных неявных производственных функций (т. е. технологиче-

[1] Если неоклассические предпочтения непрерывны, то в соответствии с теоремой Дебре существует представляющая данные предпочтения непрерывная функция полезности $u_i(\cdot)$ (см. параграф 1.4).

ских множеств, задаваемых несколькими ограничениями) не связана с какими-либо концептуальными трудностями.

Таким образом, классическая модель экономики задается следующими компонентами:

- $I = \{1, \ldots, m\}$ — множество потребителей;
- $J = \{1, \ldots, n\}$ — множество производителей (фирм);
- $K = \{1, \ldots, l\}$ — множество товаров (благ);
- $X_i \subset \mathbb{R}^l$ — множество допустимых наборов i-го потребителя;
- $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ — предпочтения i-го потребителя или $u_i(\cdot)$ — функция полезности потребителя ($u_i \colon X_i \mapsto \mathbb{R}$);
- ω_{ik} — начальный (до обмена) запас k-го блага у i-го потребителя;
- $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ — технологическое множество (множество допустимых технологий) j-го производителя; $g_j(\cdot)$ — неявная производственная функция ($g_j \colon \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$).

Для описания состояния экономики используются следующие переменные:

- x_{ik} — потребление i-м потребителем k-го блага ($k \in K$);
- $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{il})$ — потребительский набор i-го потребителя;
- $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ — потребительские наборы всех потребителей;
- y_{jk} — производство j-м производителем k-го блага (это чистый выпуск, т. е. отрицательные компоненты соответствуют затратам);
- $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \ldots, y_{jl})$ — технология j-го производителя;
- $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ — набор технологий всех производителей.

Набор $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle (\mathbf{x}_i)_{i \in I}, (\mathbf{y}_j)_{j \in J} \rangle$ называют состоянием экономики. Естественно рассматривать не все такие наборы, а только (физически) допустимые состояния экономики.

Определение 4.1:

Под допустимым состоянием экономики принято понимать такую пару $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, что

* при всех $i \in I$ вектор $\mathbf{x}_i$ является допустимым набором для i-го потребителя (т. е. $\mathbf{x}_i \in X_i$),
* при всех $j \in J$ вектор $\mathbf{y}_j$ является допустимой технологией для j-го производителя (т. е. $\mathbf{y}_j \in Y_j$),
* для экономики в целом выполнены балансы, т. е. общий объем потребления в экономике по каждому благу $k \in K$ равен сумме общего объема производства и суммарных на-

чальных запасов:

$$\sum_{i\in I} x_{ik} = \sum_{i\in I} \omega_{ik} + \sum_{j\in J} y_{jk}. \qquad \blacktriangleleft$$

Отметим, что иногда в моделях общего равновесия используются полубалансы, т. е. балансовые ограничения в виде неравенств:

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{i\in I} \omega_{ik} + \sum_{j\in J} y_{jk}.$$

При этом строгое неравенство должно означать, что в экономике осталось непотребленное благо. В рамках моделей с балансами в виде равенств возможность «выбрасывать» блага можно моделировать с помощью технологических множеств со свободой расходования по данным благам. В определенном смысле используемый здесь подход является более общим, поскольку позволяет моделировать блага, утилизация которых требует затрат ресурсов (см. задачу 4.89).

Любой механизм координации решений экономических субъектов должен приводить к допустимому состоянию экономики. Анализ экономического механизма включает описание условий, при которых он «работоспособен», и свойств тех допустимых состояний, к которым он может привести. Ниже мы проведем такое исследование для механизма ценовой координации совершенных рынков.

4.2 Общее равновесие (равновесие по Вальрасу)

В этом параграфе вводится понятие общего равновесия (или, более точно, общего конкурентного равновесия)[2] и обсуждаем ту роль, которую играет это понятие в неоклассическом анализе.

[2]Развитие этой модели связано, в частности, с именами Адама Смита, Давида Рикардо, Леона Вальраса, Кеннета Эрроу и Жерара Дебре. См., напр., L. Walras• *Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale*, Lausanne, Paris: Corbaz, 1874-1877 (рус. пер. Л. Вальрас• *Элементы чистой политической экономии или Теория общественного богатства*, М.: Экономика, 2000); L. Walras• *Théorie mathématique de la richesse sociale*, Lausanne: Corbaz, 1883; K. J. Arrow and G. Debreu• Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* **22** (1954): 265–290; G. Debreu• *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons, 1959 (Cowles Foundation Monograph No. 17).

4.2.1 Субъекты экономики в моделях общего равновесия

Модель потребителя

Ниже через p_k будем обозначать цену k-го блага, а через $\mathbf{p}$ вектор всех цен $(p_1, \ldots, p_l)$. Пусть потребитель $i \in I$ сталкивается с рыночными ценами $\mathbf{p}$ приобретаемых им благ. Как и ранее, предполагаем, что потребитель в соответствии со своими предпочтениями $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ выбирает наилучший потребительский набор из тех, которые ему доступны, т. е. из потребительских наборов, принадлежащих бюджетному множеству. Под бюджетным множеством понимается множество допустимых потребительских наборов ($\mathbf{x}_i \in X_i$), удовлетворяющих бюджетному ограничению

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \sum_{k \in K} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i,$$

т. е. бюджетное множество имеет вид

$$B_i(\mathbf{p}, \beta_i) = \{\, \mathbf{x}_i \in X_i \mid \mathbf{p}\mathbf{x}_i \leqslant \beta_i \,\}\,.$$

Здесь $\beta_i = \beta_i(\cdot)$, где $\beta_i(\cdot)$ — функция, задающая доход потребителя. Способ формирования дохода зависит от конкретного варианта экономики. Например, в экономике обмена доход потребителя формируется за счет продажи по рыночным ценам его начальных запасов:

$$\beta_i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{k \in K} p_k \omega_{ik}.$$

В модели классических рынков предполагается, что начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i$, цены, а также доходы из других источников не зависят от выбора потребителя (определяются экзогенно). Другими словами, потребитель считает, что он не влияет на цены (является ценополучателем) и на свою исходную, до торговли, собственность, принимая их как данные. Поэтому при описании выбора потребителя при заданных ценах будем считать, что доходы фиксированы.

Таким образом, набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является выбором потребителя, сталкивающегося с ценами $\mathbf{p}$ и имеющего доход β_i, или, другими словами, спросом потребителя, если

- набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ принадлежит бюджетному множеству ($\bar{\mathbf{x}}_i \in B_i(\mathbf{p}, \beta_i)$);
- любой потребительский набор $\mathbf{x}_i \in X_i$ лучший, чем $\bar{\mathbf{x}}_i$, не принадлежит бюджетному множеству, т. е. $\mathbf{x}_i \succ_i \bar{\mathbf{x}}_i \Rightarrow \mathbf{x}_i \notin B_i(\mathbf{p}, \beta_i)$.

Если предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u_i(\cdot)$, то его выбор моделируется как решение задачи максимизации функции полезности по $\mathbf{x}_i \in X_i$ при бюджетном ограничении. Таким образом, задача потребителя имеет вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i}$$
$$\mathbf{x}_i \in B_i(\mathbf{p}, \beta_i).$$

При дифференцируемости функций полезности можно охарактеризовать решение задачи потребителя, т. е. оптимальный для данного потребителя набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, при помощи теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме[3]. Будем считать, что решение задачи потребителя внутреннее[4], т. е.

$$\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i.$$

Это позволяет не учитывать ограничение $\mathbf{x}_i \in X_i$.

Функция Лагранжа для задачи потребителя имеет вид

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}_i, \nu_i) = u_i(\mathbf{x}_i) + \nu_i\Big(\beta_i - \sum_{k\in K} p_k x_{ik}\Big),$$

где ν_i — множитель Лагранжа для бюджетного ограничения. По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что не все цены равны нулю) существует множитель Лагранжа $\nu_i \geqslant 0$, такой что в оптимуме для всех благ $k \in K$ выполнено $\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}_i, \nu_i)}{\partial x_{ik}} = 0$ или

$$\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k.$$

Другими словами, градиент функции полезности пропорционален вектору цен:

$$\nabla u_i(\bar{\mathbf{x}}_i) = \nu_i \mathbf{p}.$$

Если предположить, что в решении задачи потребителя $\bar{\mathbf{x}}_i$ не все частные производные функции полезности равны нулю, т. е. $\nabla u_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0}$, то $\nu_i > 0$. Такое решение задачи потребителя может иметь место, только если цены, с которыми он сталкивается, не все равны нулю. Исключая множитель Лагранжа, для любых двух благ $k, s \in K$, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{is}}{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik}} = MRS_i^{s/k},$$

[3] См. Приложение B, параграф B.16.

[4] Напомним, что это означает, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ принадлежит X_i вместе с некоторой своей окрестностью.

где $MRS_i^{s/k}$ — предельная норма замещения блага s на благо k. Следовательно, решение задачи потребителя характеризуется равенством предельной нормы замещения любых двух благ отношению цен этих благ. Таким образом, мы получили классическую дифференциальную характеристику решения задачи потребителя.

Это одно из условий первого порядка, т. е. необходимое условие максимума. Как мы предположили, градиент не равен нулю, поэтому $\nu_i > 0$ и по условию дополняющей нежесткости теоремы Куна—Таккера получаем, что бюджетное ограничение выходит на равенство:

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \beta_i.$$

Это еще одно условие первого порядка.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое (внутреннее) решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи потребителя, если выполнено дополнительное условие, состоящее в том, что множество X_i выпукло, а функция полезности $u_i(\cdot)$ вогнута[5].

Отдельного рассмотрения требует случай, когда решение задачи потребителя не является внутренним. Пусть, например, $X_i = \mathbb{R}_+^l$ и потребление некоторых благ в решении задачи потребителя может быть равно нулю. Для получения дифференциальной характеристики такого решения опять можно воспользоваться теоремой Куна—Таккера[6]. Получаем, что оптимальный набор для всех $k \in K$ должен удовлетворять условиям $\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} \leqslant 0$, причем $\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = 0$, если $\bar{x}_{ik} > 0$, или

$$\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} \leqslant \nu_i p_k, \text{ причем } \frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k, \text{ если } \bar{x}_{ik} > 0.$$

Модель производителя

При выборе объемов производства $\mathbf{y}_j = (y_{jk})_{k \in K}$ каждая фирма $j \in J$ ограничена своим технологическим множеством Y_j. (Напомним, что здесь речь идет о чистом выпуске, т. е. отрицательные элементы технологии $\mathbf{y}_j$ соответствуют затратам.) В качестве целевой

[5] Существуют и более слабые наборы условий, гарантирующие, что условия первого порядка приводят к решению задачи потребителя. Обычно они включают выпуклость предпочтений (или квазивогнутость представляющих их функций полезности). Мы привели здесь более сильные условия, чем это необходимо.

[6] Чтобы эти рассуждения были корректными, следует предположить, что функция $u(\cdot)$ определена (и дифференцируема) на открытом множестве, содержащем $X_i = \mathbb{R}_+^l$. Тогда на границе множества X_i производные определяются стандартным образом.

функции «классического» производителя берется его прибыль

$$\pi_j = \mathbf{p}\mathbf{y}_j = \sum_{k\in K} p_k y_{jk}.$$

В ситуации совершенной конкуренции производитель, как и потребитель, не может влиять на цены (является ценополучателем). Таким образом, задача производителя состоит в максимизации прибыли при технологических ограничениях:

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j}$$
$$\mathbf{y}_j \in Y_j.$$

Если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g_j(\cdot)$, то задача производителя записывается как

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j}$$
$$g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0.$$

При дифференцируемости функции $g_j(\cdot)$ решение этой задачи также можно охарактеризовать на основе теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме. Функция Лагранжа для задачи производителя равна

$$\mathbb{L} = \sum_{k\in K} p_k y_{jk} + \kappa_j g_j(\mathbf{y}_j),$$

где κ_j — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что $\nabla g_j(\mathbf{y}_j) \neq \mathbf{0}$) существует множитель Лагранжа $\kappa_j \geqslant 0$, такой что в оптимуме выполнено равенство

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{y}}_j, \kappa_j)}{\partial y_{jk}} = 0 \ \forall k \in K,$$

или

$$\kappa_j \frac{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} = p_k \ \forall k \in K.$$

Другими словами, градиент неявной производственной функции пропорционален вектору цен:

$$\kappa_j \nabla g_j(\bar{\mathbf{y}}_j) = \mathbf{p}.$$

Если не все цены равны нулю ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), то $\kappa_j > 0$. Исключая множитель Лагранжа κ_j, для любых двух благ $k, s \in K$, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{js}}{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk}} = MRT_j^{s/k},$$

где $MRT_j^{s/k}$ — предельная норма трансформации блага s в благо k. Следовательно, решение задачи производителя характеризуется равенством предельной нормы трансформации любых двух благ отношению цен этих благ. Таким образом, мы получили классическую дифференциальную характеристику решения задачи производителя.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи производителя, если выполнено дополнительное условие, что функция $g_j(\cdot)$ квазивогнута.

4.2.2 Модели общего равновесия

Теперь модели отдельных экономических субъектов — потребителей и производителей — объединим в модель рынка (экономики) в целом. Такие модели называются моделями общего равновесия.

Модель обмена

В случае, если в экономике производство отсутствует и потребители получают доход только за счет продажи своих начальных запасов, она называется экономикой обмена. Таким образом, экономика обмена характеризуется множеством потребителей, множествами допустимых потребительских наборов потребителей, их предпочтениями и начальными запасами, т. е.

$$\mathcal{E}_E = \left\langle I, (X_i, \succcurlyeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i \in I} \right\rangle.$$

Введем определение равновесия для экономики обмена[7].

Определение 4.2:

Общим равновесием (равновесием по Вальрасу) в экономике обмена $\mathcal{E}_E$ называется набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$, удовлетворяющий следующим условиям:

[7] Альтернативный вариант модели предполагает введение в экономику обмена предприятия с технологическим множеством $Y = -\mathbb{R}^l_+$, что позволяет утилизировать «лишние» блага. Очевидно, что определение и свойства равновесия в такой экономике будут, вообще говоря, другими.

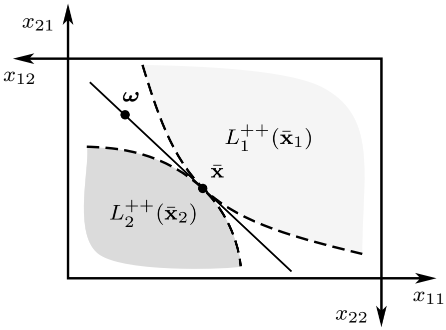


Рис. 4.1. *Геометрическая интерпретация равновесия на диаграмме Эджворта*

* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя i при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i$;
* $\bar{\mathbf{x}}$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_E$, следовательно, для всякого блага k выполнено равенство

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_{ik} = \omega_{\Sigma k},$$

где $\omega_{\Sigma k} = \sum_{i \in I} \omega_{ik}$ — суммарные запасы блага k в экономике. ◀

Удобным средством для иллюстрации экономики обмена является диаграмма Эджворта (ящик Эджворта). Эта диаграмма позволяет наглядно представить экономику с двумя потребителями и двумя благами. Обычно предполагается, что множества допустимых потребительских наборов в такой экономике задаются неравенствами $\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{x}_2 \geqslant \mathbf{0}$. На диаграмме Эджворта потребление первого потребителя (x_{11}, x_{12}) представляется в обычной системе координат, а потребление второго потребителя (x_{21}, x_{22}) — в перевернутой с центром в точке $(\omega_{\Sigma 1}, \omega_{\Sigma 2})$, если смотреть из системы координат первого потребителя. Точка (x_{11}, x_{12}) в первой системе координат совпадет с точкой (x_{21}, x_{22}) во второй системе координат, что позволяет изобразить состояние $\mathbf{x}$ одной точкой на данной диаграмме.

На Рис. 4.1, иллюстрирующем с помощью ящика Эджворта концепцию равновесия, общая для потребителей бюджетная линия в равновесии проходит через точку начальных запасов ω и равновесный вектор $\bar{\mathbf{x}}$. Наклон бюджетной прямой соответствует отношению равновесных цен $\bar{p}_1/\bar{p}_2$. У каждого потребителя множество $L_i^{++}(\bar{\mathbf{x}}_i)$ наборов, которые лучше, чем равновесный набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, лежит по соответствующую сторону от бюджетной прямой, так что это множество не имеет общих точек с бюджетным треугольником данного потребителя.

Модель Эрроу—Дебре

Модель Эрроу—Дебре является развитием модели обмена и включает помимо потребителей производственный сектор. Особенностью модели является и то, что в ней специфицированы права собственности потребителей на владение фирмами, производящими продукцию. Таким образом, в модели предполагается, что все предприятия кому-то принадлежат, т. е. каждый потребитель i владеет долей $\gamma_{ij} \geqslant 0$ предприятия j, причем $\sum_{i \in I} \gamma_{ij} = 1$.

Наличие производственного сектора влияет и на постановку задачи потребителя, поскольку доход потребителя складывается из того, что он может выручить от продажи начальных запасов, и из его дохода от участия в прибыли. Поэтому доход потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и величинах прибыли π_j равен

$$\beta_i = \sum_{k \in K} p_k \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \pi_j .$$

В целом экономика Эрроу—Дебре характеризуется множеством потребителей, множествами допустимых потребительских наборов потребителей, их предпочтениями и начальными запасами, множеством производителей, их производственными множествами и долями потребителей в прибыли фирм, т. е.

$$\mathcal{E}_{AD} = \left\langle I, (X_i, \succcurlyeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i \in I}, J, (Y_j)_{j \in J}, (\gamma_{ij})_{i \in I, j \in J} \right\rangle .$$

Определение 4.3:

Общим равновесием (равновесием по Вальрасу) в экономике Эрроу—Дебре $\mathcal{E}_{AD}$ называется набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такой что:

* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя i при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j$;
* каждый вектор $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя j при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;

* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_{AD}$, следовательно, для всякого блага k выполнено равенство

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{i\in I} \omega_{ik} + \sum_{j\in J} \bar{y}_{jk}.$$

◀

Заметим, что условие допустимости состояния $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ означает выполнение балансов, что в контексте общего равновесия интерпретируется как равенство спроса и предложения[8].

Ясно, что экономика обмена является частным случаем экономики Эрроу—Дебре при отсутствии производства, а концепция равновесия в экономике обмена конкретизирует концепцию равновесия для экономики Эрроу—Дебре.

Равновесие экономики с производством удобно иллюстрировать на диаграмме, аналогичной ящику Эджворта (см. Рис. 4.2). Рассматривается экономика с одним потребителем, одним предприятием и двумя благами. Множество $\boldsymbol{\omega}+Y$, состоящее из векторов $\boldsymbol{\omega}+\mathbf{y}$, таких что $\mathbf{y} \in Y$, где $\boldsymbol{\omega}$ — начальные запасы, Y — технологическое множество,— это так называемое множество производственных возможностей экономики. Точка начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$ лежит на границе производственных возможностей (в предположении, что $\mathbf{0}$ лежит на границе технологического множества). Вектор $\bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} + \bar{\mathbf{y}}$, соответствующий равновесию, тоже лежит на границе производственных возможностей. Через этот вектор проходит бюджетная линия потребителя, касаясь как границы производственных возможностей, так и кривой безразличия. Наклон бюджетной прямой соответствует отношению равновесных цен. Множество лучших точек, чем точка $\bar{\mathbf{x}}$, лежит по противоположную сторону бюджетной прямой. Оно не имеет общих точек с бюджетным треугольником.

[8]Если бы мы использовали вариант модели, о которой упоминалось выше,— включающий балансы в виде неравенств (полубалансы), то в равновесии спрос мог бы быть ниже предложения. В таком случае определение равновесия потребовалось бы дополнить условием, что цены таких благ равны нулю. Точнее, потребовалось бы включить в определение равновесия *закон Вальраса*:

$$\bar{\mathbf{p}} \sum_{i\in I} \bar{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{p}} \Big(\sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \bar{\mathbf{y}}_j \Big).$$

В противном случае «потери денег» в экономике приводили бы к существованию нереалистичных равновесий.

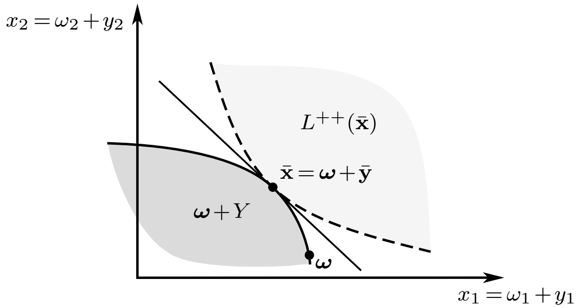


Рис. 4.2. *Геометрическая интерпретация равновесия в экономике с производством*

Экономика с трансфертами

Если в экономике есть фиксированные трансферты (перераспределение доходов между потребителями), то доход потребителя складывается из доходов от продажи начальных запасов, долей в прибыли фирм и трансфертов S_i:

$$\beta_i = \sum_{k \in K} p_k \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \pi_j + S_i.$$

Величина трансферта S_i может быть как положительной, так и отрицательной. Предполагается, что S_i не зависит от выбора потребителя. Сумма трансфертов по всем потребителям должна быть равна нулю[9]:

$$\sum_{i \in I} S_i = 0.$$

Дадим определение общего равновесия для общей модели экономики с трансфертами, задаваемой параметрами

$$\mathcal{E}_T = \left\langle I, (X_i, \succcurlyeq_i, \boldsymbol{\omega}_i, S_i)_{i \in I}, J, (Y_j)_{j \in J}, (\gamma_{ij})_{i \in I, j \in J} \right\rangle.$$

Определение 4.4:

Общим равновесием в экономике с трансфертами $\mathcal{E}_T$ называется набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такой что:

[9] Это можно интерпретировать как сбалансированность государственного бюджета.

* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя i при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j + S_i$;
* каждый вектор $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя j при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_T$, следовательно, для всякого блага k выполнено равенство

$$\sum_{i\in I}\bar{x}_{ik} = \sum_{i\in I}\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}.$$

◄

Экономика обмена и экономика Эрроу—Дебре являются частными случаями описанной здесь экономики с трансфертами.

Экономика распределения

Следующую модель равновесия[10] для экономики без производства нельзя назвать в полном смысле моделью функционирования рыночной экономики, поскольку доходы потребителей в ней, по существу, формируются государством и совокупные начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ принадлежат государству. (Как вариант можно считать, что $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ — это сумма начальных запасов и заданного экзогенно совокупного чистого выпуска в экономике с производством). Мы изложим ее в основном для того, чтобы потом использовать в задачах.

В экономике распределения (в отличие от экономики обмена) задается вектор совокупных начальных запасов $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и доход R_i каждого потребителя, т. е.

$$\mathcal{E}_D = \Big\langle (X_i, u_i(\cdot))_{i\in I}, \boldsymbol{\omega}_\Sigma, (R_i)_{i\in I} \Big\rangle$$

Определение 4.5:

Под общим равновесием в экономике распределения мы будем понимать пару $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) = \langle \mathbf{p}, (\bar{\mathbf{x}}_i)_{i\in I}\rangle$, такую что:

* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$,
* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R_i,
* состояние $\bar{\mathbf{x}}$ является допустимым, в частности, выполнены балансы по благам, т. е. для всех $k \in K$

$$\sum_{i\in I}\bar{x}_{ik} = \sum_{i\in I}\omega_{ik}.$$

[10] См. Э. Маленво. *Лекции по микроэкономическому анализу*, М.: Наука, 1985, гл. V, § 2.

* $\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_{i\in I} R_i$. ◀

4.2.3 Некоторые свойства общего равновесия

Установим некоторые свойства равновесия, которые нам понадобятся в дальнейшем. При этом речь пойдет об общей модели экономики с производством и трансфертами.

Простейшим свойством общего равновесия является то, что бюджетные ограничения всех потребителей выполняются как равенства. Действительно, сумма доходов потребителей равна

$$\sum_{i\in I}\beta_i = \sum_{i\in I}\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\gamma_{ij}\mathbf{p}\mathbf{y}_j + \sum_{i\in I} S_i =$$
$$= \mathbf{p}\Bigl(\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J}\mathbf{y}_j\sum_{i\in I}\gamma_{ij}\Bigr) = \mathbf{p}\Bigl(\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J}\mathbf{y}_j\Bigr) = \mathbf{p}\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i,$$

где последнее равенство («закон Вальраса») является следствием выполнения балансов по благам. Таким образом, сумма доходов всех потребителей равна совокупным потребительским расходам. Это тождество выполняется для любого допустимого состояния экономики при любом векторе цен. Если бы хоть один потребитель не полностью израсходовал свой доход, то, сложив бюджетные ограничения, мы получили бы неравенство

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\bar{\mathbf{x}}_i < \sum_{i\in I}\beta_i,$$

и пришли бы к противоречию. Поэтому в равновесии $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}_i = \beta_i$ для любого потребителя $i \in I$.

В дальнейшем будем использовать также дифференциальные свойства равновесия. Пусть функции полезности и производственные функции дифференцируемы, равновесие является внутренним (по потреблению, т.е. $\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i \ \forall i \in I$), и в точке равновесия для любого потребителя $i \in I$ выполнено

$$\nabla u_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0}.$$

Тогда существуют блага, цены которых не равны нулю. Поскольку для всех $i \in I$ потребительский набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя, а при всех $j \in J$ технология $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя, то выполняются следующие соотношения, называемые дифференциальной характеристикой равновесия:

$$\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_k} = \frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{is}}{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik}} = MRS_i^{s/k}(\bar{\mathbf{x}}_i),$$

$$\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_k} = \frac{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{js}}{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk}} = MRT_j^{s/k}(\bar{\mathbf{y}}_j),$$

где k — благо с ненулевой ценой.

Это необходимое условие равновесия. Из него следует, что в равновесии предельные нормы замещения (трансформации) любых двух благ s, k для всех экономических субъектов совпадают. Так, на Рис. 4.1 в точке равновесия кривые безразличия касаются общей бюджетной прямой, а на Рис. 4.2 бюджетной прямой касаются граница производственных возможностей и кривая безразличия.

Другое необходимое условие равновесия, о котором говорилось выше, состоит в том, что бюджетные ограничения всех потребителей выполняются как равенства.

Выполнение этих двух условий для набора $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, где $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики, $\bar{\mathbf{p}}$ — вектор цен, не гарантирует, что этот набор представляет собой равновесие. Необходимые условия требуется дополнить условиями второго порядка, например предположением о вогнутости функций полезности и неявных производственных функций, чтобы превратить их в достаточные. Более подробно эти условия анализируются ниже при доказательстве второй теоремы благосостояния для дифференцируемых функций.

4.2.4 Избыточный спрос

Отображение избыточного спроса $\mathbf{E}(\cdot)$ сопоставляет каждому вектору цен превышение совокупного спроса над совокупным предложением при этих ценах. Можно переформулировать определение равновесия в терминах избыточного спроса, поскольку, как нетрудно понять, в равновесии избыточный спрос должен быть равен нулю. Таким образом, для равновесных цен $\bar{\mathbf{p}}$ выполнено условие $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$. В ситуации же, когда избыточный спрос определяется однозначно, равновесные цены удовлетворяют системе уравнений $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$.

Для модели обмена отображение избыточного спроса строится следующим образом. Пусть при ценах $\mathbf{p}$ отображение спроса i-го потребителя есть $\mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \beta_i)$. Так как $\beta_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i$, то будем рассматривать спрос как функцию только цен, т. е. $\mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ (в прежних обозначениях $\mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i)$). Тогда избыточный спрос потребителя при этих ценах представляет собой превышение спроса над начальными запасами потребителя при данных ценах. Избыточный спрос для всей экономики есть сумма избыточных спросов всех потребителей. Таким образом, отображение избыточного спроса в модели обмена имеет вид $\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \sum_{i \in I}(\mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_i)$.

Аналогичным образом определяется избыточный спрос в модели Эрроу—Дебре. Кроме начальных запасов и спроса следует учитывать также предложение благ $\mathbf{y}_j(\mathbf{p})$. Спрос потребителя при данных ценах здесь также можно представить в виде $\mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ (в прежних обозначениях $\mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij}\pi_j(\mathbf{p}))$, где $\pi_j(\cdot)$ — функции прибыли фирм).

Определение 4.6:

Функцией (отображением) избыточного спроса в модели Эрроу—Дебре называется функция (отображение)

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \sum_{i \in I} \big(\mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_i\big) - \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j(\mathbf{p}).$$

Областью определения служит множество таких цен, при которых задачи производителей и потребителей имеют решения. ◄

Убедимся, что равновесными цены $\mathbf{p}$ могут быть тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\mathbf{p})$.

Действительно, пусть $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\mathbf{p})$. Это означает, что существуют потребительские наборы $\bar{\mathbf{x}}_i$ и технологии $\bar{\mathbf{y}}_j$, такие что $\bar{\mathbf{x}}_i \in \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ и $\bar{\mathbf{y}}_j \in \mathbf{y}(\mathbf{p})$, другими словами, для всех $i \in I$ набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи i-го потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij}\mathbf{p}\bar{\mathbf{y}}_j$, для всех $j \in J$ чистый выпуск $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи j-го производителя при ценах $\mathbf{p}$, и выполнено

$$\sum_{i \in I} (\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i) - \sum_{j \in J} \bar{\mathbf{y}}_j = \mathbf{0}.$$

Значит, $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ по определению является равновесием.

Наоборот, если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие, то $\bar{\mathbf{x}}_i \in \mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{p}})$ для всех $i \in I$, $\bar{\mathbf{y}}_j \in \mathbf{y}(\bar{\mathbf{p}})$ для всех $j \in J$, и

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in I} (\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i) - \sum_{j \in J} \bar{\mathbf{y}}_j \in \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}).$$

Рассмотрим другие свойства избыточного спроса.

Поскольку функции (отображения) спроса и предложения положительно однородны нулевой степени, т. е. при $\alpha > 0$ выполняется

$$\mathbf{x}_i(\alpha\mathbf{p}, \alpha\beta) = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \beta), \quad \mathbf{y}_j(\alpha\mathbf{p}) = \mathbf{y}_j(\mathbf{p}),$$

то, как несложно проверить, функции (отображения) избыточного спроса также *положительно однородны нулевой степени*:

$$\mathbf{E}(\alpha\mathbf{p}) = \mathbf{E}(\mathbf{p}).$$

Как мы видели, в равновесии выполняется закон Вальраса. Другими словами, в равновесии стоимость избыточного спроса в равновесных ценах равна нулю (поскольку сам избыточный спрос равен нулю). Закон Вальраса, вообще говоря, выполняется не в любой экономике и не при любых ценах. Однако, если предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то отображение избыточного спроса удовлетворяет закону Вальраса. Действительно, для любого вектора цен и любого потребителя с локально ненасыщаемыми предпочтениями выполнено $\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\pi_j(\mathbf{p})$ для всех $\mathbf{x}_i \in \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$, т. е. выполнено бюджетное равенство (закон Вальраса для спроса отдельного потребителя). Сложив эти тождественные соотношения, получим $\mathbf{p}\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{p}\sum_{j\in J}\mathbf{y}_j$ для всех $\mathbf{x}_i \in \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ и $\mathbf{y}_j \in \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$. Таким образом, при любых ценах, для которых определена величина избыточного спроса, если $\mathbf{e} \in \mathbf{E}(\mathbf{p})$, то $\mathbf{p}\mathbf{e} = 0$. Соответственно, если $\mathbf{E}(\cdot)$ — функция, то $\mathbf{p}\mathbf{E}(\mathbf{p}) = 0$ при любых ценах, для которых определена величина избыточного спроса.

В заключение этого параграфа рассмотрим конкретные примеры нахождения равновесий.

Пример 4.1

Рассмотрим экономику с двумя потребителями и двумя благами. Первый потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}\}$ $(x_{11}, x_{12} \geqslant 0)$ и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_1 = (9, 5)$. Второй потребитель имеет функцию полезности $u_2 = \sqrt{x_{21}} + 2\sqrt{x_{22}}$ $(x_{21}, x_{22} \geqslant 0)$ и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_2 = (6, 5)$.

Пусть в равновесии $p_1 > 0$. Тогда можно положить $p_1 = 1$ и обозначить $p_2 = p$. Спрос первого потребителя в этих обозначениях имеет вид

$$x_{11}(p) = x_{12}(p) = \frac{9+5p}{1+p}.$$

Спрос второго потребителя

$$x_{21}(p) = \frac{p(6+5p)}{4+p}, \quad x_{22}(p) = \frac{4(6+5p)}{p(4+p)}.$$

В равновесии суммарный спрос равен предложению (т. е. суммарным начальным запасам $\omega_{\Sigma 1} = 9 + 6 = 15$ и $\omega_{\Sigma 2} = 5 + 5 = 10$) или, что то же самое, избыточный спрос равен нулю. Избыточный спрос на

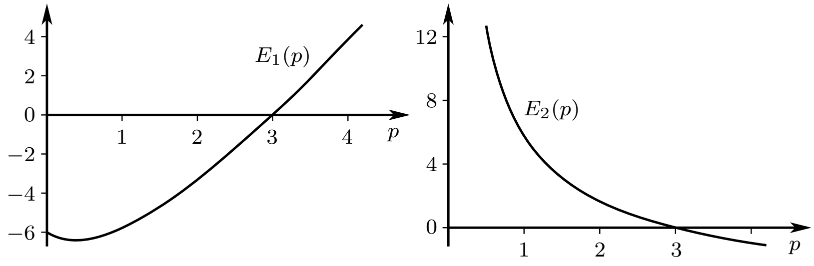


Рис. 4.3. *Избыточный спрос на рынках двух благ — иллюстрация к Примеру 4.1*

рынках двух благ равен

$$E_1(p) = \frac{9+5p}{1+p} + \frac{p(6+5p)}{4+p} - 15, \quad E_2(p) = \frac{9+5p}{1+p} + \frac{4(6+5p)}{p(4+p)} - 10.$$

Графики функций избыточного спроса приведены на Рис. 4.3.

При $p = 3$ избыточный спрос (на обоих рынках) равен нулю, т. е. эта цена соответствует равновесию. Без доказательства отметим, что других нулей функции избыточного спроса не имеют. Таким образом, данное равновесие единственное. Оно характеризуется следующими параметрами:

$$\bar{x}_{11} = \bar{x}_{12} = 6, \quad \bar{x}_{21} = 9, \quad \bar{x}_{22} = 4, \quad \bar{p}_1 = 1, \quad \bar{p}_2 = 3.$$

Заметим, что сбалансированность достаточно проверить для одного рынка, поскольку для другого рынка она уже будет следствием закона Вальраса $E_1(p) + E_2(p)p = 0$.

Читателю предлагается проверить самостоятельно, что равновесие не может достигаться при нулевой цене первого блага. △

В следующем примере иллюстрируется поиск равновесия в экономике с производством при постоянной отдаче от масштаба.

Пример 4.2

В экономике с двумя потребителями, одной фирмой и двумя благами первый потребитель имеет функцию полезности $u_1 = -(5 - x_{11}) - (5 - x_{12})$ $(x_{11}, x_{12} \geqslant 0)$ и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_1 = (4, 2)$, а второй потребитель — функцию полезности $u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}$ $(x_{21}, x_{22} \geqslant 0)$ и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_2 = (3, 5)$. Производственное множество фирмы задается уравнением $y_1 + 3y_2 \leqslant 0$.

Решение задачи фирмы с таким производственным множеством существует только при соотношении цен $p_1/p_2 = 3$. Оптимальное решение задачи фирмы должно лежать на эффективной границе и, следовательно, удовлетворять уравнению $y_1 + 3y_2 = 0$. При этом прибыль равна нулю.

Можно принять $\bar{p}_1 = 1$, $\bar{p}_2 = 3$. При таких ценах, как нетрудно проверить, потребители будут предъявлять следующий спрос:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (4, 2), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (9, 3).$$

Для того чтобы на первом рынке спрос был равен предложению, необходимо, чтобы фирма производила $\bar{y}_1 = 4 + 9 - 4 - 3 = 6$. Для производства такого количества первого блага фирма должна затратить две единицы второго блага, т. е. $\bar{y}_2 = -2$. Как и следует ожидать, спрос на втором рынке равен предложению: $2+3 = 2+5-2$. △

Задачи

4.1 Укажите наиболее важные черты, по которым рынок называют совершенным или классическим: ◆ от чего зависят предпочтения и потребительские множества, ◆ влияние экономических субъектов на цены, ◆ определенность информации, ◆ влияние издержек сделок, ◆ существование рынков.

4.2 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \min\{x_{i1}, x_{i2}\},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике. При каких условиях оно единственно?

4.3 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, x_{12}\}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21}x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике. Покажите, что оно единственно.

4.4 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \alpha_1 x_{11} + \beta_1 x_{12}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = \alpha_2 x_{21} + \beta_2 x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике. Покажите, что оно единственно.

4.5 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}^2 + x_{12}^2, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике или докажите, что оно не существует.

4.6 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}x_{12}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике. Покажите, что оно единственно.

4.7 Рассмотрите экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями, которые имеют следующие функции полезности начальные запасы:

$$u_1(x_1, y_1) = -\frac{1}{x_1^2} - \left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{y_1^2}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0),$$
$$u_2(x_2, y_2) = -\left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{y_2^2}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1).$$

Найдите равновесие в этой экономике. Единственно ли оно?

4.8 Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$E_1(p_1, p_2) = -\frac{p_2}{p_1 + p_2}, \quad E_2(p_1, p_2) = -\frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

(A) Является ли она положительно однородной нулевой степени?

(B) Является ли она непрерывной?

(C) Может ли она быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

4.9 Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{pa}}\mathbf{a} - \boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Является ли она положительно однородной нулевой степени? Является ли она непрерывной? Выполняется ли для нее закон Вальраса? Может ли она быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

4.10 Пусть функции избыточного спроса на первые два товара в экономике с тремя благами имеют вид

$$E_1(\mathbf{p}) = -p_1/p_3 + p_2/p_3 + 1 \quad \text{и} \quad E_2(\mathbf{p}) = p_1/p_3 - 2p_2/p_3 + 2.$$

Найдите избыточный спрос на третий товар. Может ли $\mathbf{E}(\cdot)$ быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

4.11 Пусть в экономике с двумя потребителями обращаются два товара. Функции полезности потребителей имеют вид

$$u_1(x_1, y_1) = x_1^{\alpha} y_1^{1-\alpha} \quad \text{и} \quad u_2(x_2, y_2) = x_2^{\beta} y_2^{1-\beta}.$$

Потребители обладают начальными запасами в размере $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, b)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (c, d)$. Найдите равновесие как функцию параметров α, β, a, b, c, d.

4.12 В экономике обмена функции полезности потребителей имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \prod_{k=1}^{l} x_{ik}^{\alpha_{ik}},\ i = 1, \ldots, m-1, \quad u_m(\mathbf{x}_m) = \sum_{k=1}^{l} x_{mk}.$$

Охарактеризуйте равновесие в этой экономике.

4.13 В экономике обмена непрямые функции полезности потребителей имеют вид

$$v_i(\mathbf{p}, \beta_i) = \ln \beta_i - \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik} \ln p_k,\ i = 1, \ldots, m.$$

Начальные запасы у всех потребителей одинаковы и положительны. Найдите равновесие в этой экономике.

4.14 Предположим, что в экономике обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.

(А) Гарантирует ли выпуклость предпочтений, что равновесные распределения (если существуют) всегда совпадают с начальными запасами?

(В) Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений, что равновесные распределения (если существуют) всегда совпадают с начальными запасами?

Аргументируйте свой ответ.

4.15 Какими свойствами обладает равновесие в модели обмена с монотонными и строго выпуклыми предпочтениями? Аргументируйте свой ответ.

4.16 Какими свойствами обладает равновесие в модели обмена с монотонными (но, вообще говоря, не строго монотонными) предпочтениями? Аргументируйте свой ответ.

4.17 Покажите, что совпадение предпочтений потребителей, начальных запасов и положительность начальных запасов не гарантируют, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

4.18 Покажите, что совпадение предпочтений потребителей, начальных запасов и выпуклость предпочтений не гарантируют, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

4.3 Существование общего равновесия

При рассмотрении моделей общего равновесия одним из наиболее важных является вопрос о том, существует ли в данной экономике равновесие (равновесия). Ведь если равновесий не существует, то анализ их свойств становится бессмысленным. В этом параграфе мы изложим один из стандартных способов доказательства существования равновесия, делая упор на экономиках обмена. Альтернативные способы доказательства существования равновесия, несколько более сложные, но опирающиеся на более слабые предположения, приведены в приложении к данной главе.

Типичное доказательство существования равновесия основано на демонстрации того факта, что некоторое (подходящим образом построенное) отображение имеет неподвижную точку и что эта неподвижная точка соответствует состоянию равновесия. При этом, как правило, используется теорема Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения некоторого компактного выпуклого множества (обычно — множества цен) в себя, или ее непосредственное обобщение — теорема Какутани.

В наиболее простой версии доказательства построение такого отображения опирается на функцию (отображение) избыточного спроса $\mathbf{E}(\mathbf{p})$, то есть на функцию, показывающую превышение спроса над предложением. (Формальные определения избыточного спроса для различных типов экономик приведены выше.) Рассматривается вопрос о существовании вектора цен $\bar{\mathbf{p}}$, такого что $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$ ($\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$, если избыточный спрос является функцией), т. е. такого вектора цен, который уравновешивает спрос и предложение на всех рынках.

Доказательство существования равновесия проводится в два этапа. Сначала доказывается, что те или иные свойства избыточного спроса гарантируют существование равновесия. Далее для экономик различных типов указываются условия (свойства предпочтений и т. д.), которые гарантируют, что избыточный спрос для этих моделей обладает данными свойствами.

В этом параграфе мы рассмотрим условия существования равновесия в экономике обмена, в которой решение задачи каждого потребителя существует и единственно при любом положительном векторе цен благ и, следовательно, $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ является функцией, определенной на множестве положительных цен.

Функции избыточного спроса положительно однородны нулевой степени, поэтому если $\bar{\mathbf{p}}$ — равновесный вектор цен, то $\lambda\bar{\mathbf{p}}$ — также равновесный вектор цен при любом $\lambda > 0$, и наоборот. Значит, равновесный вектор цен определяется с точностью до нормировки цен. Ниже будут описаны ситуации, в которых гарантируется существование равновесия с положительными ценами. Поэтому равновесный вектор цен будем искать в следующем множестве цен (симплексе цен):

$$\mathcal{S}^{l-1} = \left\{ \mathbf{p} \geqslant \mathbf{0} \;\middle|\; \sum_{k\in K} p_k = 1 \right\}.$$

При этом каждому вектору цен $\mathbf{p}$ из $\mathbb{R}^l_+$ (за исключением нулевого вектора) можно однозначно сопоставить вектор $\lambda\mathbf{p}$ из $\mathcal{S}^{l-1}$ при некотором $\lambda > 0$. Этот способ нормировки цен удобен тем, что множество $\mathcal{S}^{l-1}$ компактно и выпукло (что, как мы увидим ниже, позволяет непосредственно использовать теорему Брауэра).

Следующее утверждение носит вспомогательный характер и используется в дальнейшем для доказательства наиболее простого варианта теоремы существования равновесия в модели обмена. Оно указывает свойства функции избыточного спроса $\mathbf{E}(\cdot)$, гарантирующие существование вектора цен, при котором этот избыточный спрос является неположительным, т. е. спрос не превышает предложение.

Теорема 4.1:

Предположим, что функция избыточного спроса $\mathbf{E}(\cdot)$ определена на множестве цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$, $\mathbf{p} \neq 0$, непрерывна, положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса, т. е. $\mathbf{pE}(\mathbf{p}) = 0$.

Тогда существует вектор цен $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_+$, $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$, такой что $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}$.⌋

Доказательство: Определим на множестве $\mathcal{S}^{l-1}$ следующую систему функций для всех благ $k \in K$:

$$g_k(\mathbf{p}) = \frac{p_k + \max\{0, E_k(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{s\in K} \max\{0, E_s(\mathbf{p})\}}.$$

Вектор-функция $\mathbf{g}(\cdot) = (g_k(\cdot))_{k\in K}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Брауэра: она отображает компактное выпуклое множество $\mathcal{S}^{l-1}$

в себя по построению и является непрерывной, так как основана на операциях, сохраняющих непрерывность. Поэтому существует вектор цен $\bar{\mathbf{p}}$, являющийся неподвижной точкой функции $\mathbf{g}(\cdot)$:

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{p}},$$

т. е. такой вектор цен $\bar{\mathbf{p}}$, что для всех благ $k \in K$

$$\bar{p}_k = g_k(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{\bar{p}_k + \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}}{1 + \sum_{s \in K} \max\{0, E_s(\bar{\mathbf{p}})\}}.$$

Преобразуя эти равенства, получим

$$\bar{p}_k \sum_{s \in K} \max\{0, E_s(\bar{\mathbf{p}})\} = \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}.$$

Умножим каждое из этих равенств на $E_k(\bar{\mathbf{p}})$ и сложим:

$$\sum_{k \in K} \bar{p}_k E_k(\bar{\mathbf{p}}) \sum_{s \in K} \max\{0, E_s(\bar{\mathbf{p}})\} = \sum_{k \in K} E_k(\bar{\mathbf{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}.$$

В соответствии с законом Вальраса первый сомножитель левой части данного соотношения равен нулю, поэтому

$$\sum_{k \in K} E_k(\bar{\mathbf{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\} = 0.$$

Величина $E_k(\bar{\mathbf{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}$ равна либо нулю, либо $(E_k(\bar{\mathbf{p}}))^2$. Поскольку каждое из слагаемых неотрицательно, сумма может быть равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Отсюда следует, что для всех $k \in K$ выполнено неравенство $E_k(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant 0$. ■

Использованное в приведенном доказательстве правило пересчета структуры цен, которое заключается в том, что цены $\mathbf{p}$ заменяются на цены $\mathbf{g}(\mathbf{p})$, имитирует возможную реакцию органа, ответственного за ценообразование, на отклонения от равновесия на рынках благ. В соответствии с ним цена дефицитного блага увеличивается на величину, пропорциональную дефициту. Коэффициент пропорциональности выбирается так, чтобы новый вектор цен был элементом множества $\mathcal{S}^{l-1}$.

Рассмотрим теперь, какие условия на предпочтения гарантируют выполнение предположений вышеприведенного утверждения. Предположим, что $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Тогда строгая выпуклость и непрерывность предпочтений обеспечивают существование и единственность решения задачи потребителя, а также непрерывность функций избыточного спроса, по крайней мере на множестве строго положительных цен ($\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$). Локальная ненасыщаемость предпочтений гарантирует выполнение закона Вальраса ($\mathbf{pE}(\mathbf{p}) = 0$). Таким образом, обычные предположения относительно предпочтений обеспечивают требуемые (для существования равновесного вектора цен) свойства избыточного спроса, правда, не на всем множестве цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$, $\mathbf{p} \neq 0$, а только на его подмножестве — векторах положительных цен, тогда как в доказательстве утверждения требуется выполнение аналогичных свойств на множестве всех неотрицательных и не равных нулю цен. Более того, задачи потребителей могут не иметь решения если цены некоторых благ равны нулю. Это значит, что при таких ценах функция избыточного спроса не определена.

В ряде случаев можно обойти это затруднение посредством модификации избыточного спроса таким образом, чтобы

- модифицированный спрос был определен для всех (неотрицательных, не равных нулю) цен;
- обладал свойствами, указанными в теореме;
- совпадал на множестве векторов равновесных цен с фактическим избыточным спросом.

Данный прием позволяет установить простейший вариант теоремы существования равновесия в модели обмена.

Теорема 4.2:

Предположим, что в экономике обмена у всех потребителей $X_i = \mathbb{R}^l_+$, предпочтения локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$). Предположим также, что существует потребитель, предпочтения которого строго монотонны. Тогда существует равновесие, такое что $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. ⌟

Доказательство: Модифицируем задачу потребителя, введя дополнительно к бюджетному ограничению количественное ограничение (квоту на потребление) по каждому благу $k \in K$ следующего типа:

$$x_{ik} \leqslant \omega_{\Sigma k} + \varepsilon,$$

где $\omega_{\Sigma k}$ — совокупные запасы блага k в экономике, ε — произвольная положительная константа.

Модифицированное таким образом бюджетное множество каждого потребителя оказывается компактным при любом векторе цен $\mathbf{p}$ (с учетом того, что $X_i = \mathbb{R}^l_+$). Следовательно, поскольку предпочтения непрерывны, при любых ценах существует наиболее предпочитаемый потребительский набор. Поскольку предпочтения строго выпуклы, этот набор единственный, и, таким образом, оказываются определенными модифицированные функции спроса $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{p})$, а значит, и модифицированная функция избыточного спроса $\mathbf{E}^*(\cdot)$. При этом функция $\mathbf{E}^*(\cdot)$ оказывается непрерывной.

Непрерывность функции $\mathbf{E}^*(\cdot)$ на $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}$ доказывается способом, аналогичным доказательству непрерывности функции спроса на множестве цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^l$ (см. пункт {iii} Теоремы 2.2 в гл. 2, с. 108). При этом используется то, что предпочтения потребителей непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы потребителей строго положительны ($\boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$).

Кроме того, по аналогии с обычным спросом, можно доказать, что $\mathbf{E}^*(\cdot)$ положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса. При этом Теорема 4.1 гарантирует существование вектора цен $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}$, при котором выполняется неравенство

$$\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}.$$

Покажем теперь, что для любого вектора цен $\bar{\mathbf{p}}$, такого что $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}$, определен избыточный спрос исходной задачи $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$ и выполнено равенство $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$.

Пусть $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}$. Тогда $\sum_{i \in I} \mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Отсюда следует, что

$$x_{ik}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \omega_{\Sigma k} - \sum_{s \neq i} x_{sk}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \omega_{\Sigma k} < \omega_{\Sigma k} + \varepsilon.$$

С учетом выпуклости предпочтений это означает, что дополнительно введенные нами ограничения несущественны, т. е. для всех потребителей выполнено равенство $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{p}})$. (Если это не так и в бюджетном множестве потребителя i найдется набор $\mathbf{x}_i'$, более предпочтительный, чем $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$, то все наборы на внутренней части отрезка, соединяющего $\mathbf{x}_i'$ и $\mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{p}})$, также более предпочтительны, чем $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$. Но по крайней мере часть данного отрезка принадлежит модифицированному бюджетному множеству, а это противоречит определению $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$.) Таким образом[11], $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$.

Так как по предположению теоремы существует потребитель, предпочтения которого строго монотонны, то $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}_{++}^l$, т. е. цена любого блага окажется положительной. Действительно, предположение

[11] Легко показать, что, наоборот, если $\mathbf{E}(\mathbf{p}) \leqslant \mathbf{0}$ для некоторых цен $\mathbf{p}$, то $\mathbf{E}^*(\mathbf{p}) = \mathbf{E}(\mathbf{p})$. Более того, равенство $\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ влечет $\mathbf{E}^*(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Это означает, что вектор цен $\mathbf{p}$ является равновесным тогда и только тогда, когда он является равновесным для модифицированной функции избыточного спроса $\mathbf{E}^*(\cdot)$.

о том, что существует благо k, цена которого равна нулю, противоречит тому факту, что $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$ является выбором такого потребителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$.

Поскольку $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, из закона Вальраса следует, что $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. Значит, $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. ■

Заметим, что мы, вообще говоря, не можем использовать прием, состоящий во введении количественных ограничений, в ситуации, когда начальные запасы хотя бы одного из потребителей не содержат хотя бы одного блага. Как показывает приводимый ниже пример, в этом случае модифицированная функция избыточного спроса может не быть непрерывной на границе множества цен.

Пример 4.3
Пусть в экономике обмена есть только два блага ($l = 2$), функции полезности всех потребителей $i \in I$ имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \sqrt{x_{i1}} + \sqrt{x_{i2}},$$

а все начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_i = (0, 1)$. Очевидно, что предпочтения рассматриваемых потребителей локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы.

Задача потребителя состоит в том, чтобы максимизировать $u_i(x_{i1}, x_{i2})$ при следующих ограничениях:

$$p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} \leqslant p_2,$$

$$x_{i1} \geqslant 0, \quad x_{i2} \geqslant 0.$$

При $p_1, p_2 > 0$ спрос потребителя на второе благо равен

$$x_{i2}(p_1, p_2) = \frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

Таким образом, $x_{i2}(p_1, p_2) \to 1$, когда $p_2 \to 0$. Но если $p_2 = 0$, то полезность можно сделать неограниченно большой, увеличивая x_{i2} (спрос на второе благо бесконечен). Таким образом, спрос на второе благо не определен при $p_2 = 0$.

Покажем, что в такой экономике равновесие не существует. При $p_1, p_2 > 0$ спрос потребителя на первое благо равен

$$x_{i1}(p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{p_1(p_1 + p_2)},$$

т. е. положителен. Значит, при положительных ценах равновесия быть не может, так как в экономике первое благо отсутствует. Если же цена на одно из благ равна нулю, то соответствующий спрос бесконечен и равновесия при этих ценах тоже нет.

Покажем, что модифицированная функция избыточного спроса не является непрерывной. Если $p_1, p_2 > 0$ и цена p_2 достаточно мала, то модифицированный спрос потребителя совпадает с обычным спросом и $x_{i2}(p_1, p_2) \to 1$ при $p_2 \to 0$. Но при $p_1 > 0$ и $p_2 = 0$ модифицированный спрос на второе благо равен $n + \varepsilon$. Таким образом, модифицированный спрос на второе благо не является непрерывным при $p_2 = 0$, а значит, приведенное доказательство существования «не работает». $\triangle$

Если в приведенном примере дать хотя бы одному из потребителей ненулевой запас первого блага, то хотя модифицированный избыточный спрос $\mathbf{E}^*(\cdot)$ по прежнему не будет непрерывным, но равновесие существует. (Читатель может убедиться в этом самостоятельно, см. задачу 4.19.) Таким образом, вышеприведенные условия на избыточный спрос являются довольно ограничительными.

В приложении к данной главе приводится другой вариант теоремы существования (см. Теоремы 4.8 и 4.10), с более слабыми условиями на избыточный спрос. Доказательство этого утверждения состоит в указании правила процесса ценообразования (отличного от описанного выше), имитирующего поведение ценообразующего органа, которое порождает отображение множества цен $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя, удовлетворяющее теореме Какутани (о существовании неподвижной точки многозначного отображения компактного выпуклого множества в себя).

Обсудим теперь вопрос о том, как использовать те же приемы и полученные результаты для экономики с производством. Чтобы избыточный спрос являлся непрерывной функцией, требуется сделать определенные предположения относительно технологий. Выше мы установили условия, при которых совокупный спрос потребителя является непрерывной функцией. Если, в дополнение к этим условиям, технологическое множество каждого производителя является строго выпуклым, то как предложение, так и совокупный избыточный спрос также будут непрерывными функциями. В случае, когда технологические множества представляются производственными функциями, можно предположить строгую вогнутость последних. Характерным примером этого типа функций является функция Кобба—Дугласа.

Вообще говоря, для многих «типичных» функций полезности и производственных функций спрос и предложение являются точечно-множественными отображениями, а не функциями (прежде всего если рассматривать их на более широком множестве, чем множество положительных цен). Поэтому подход, основанный на функциях избыточного спроса, который мы обсуждали выше, имеет не очень широкую область приложимости. Возможно заменить предположения о строгой выпуклости предпочтений и технологических множеств на предположения о выпуклости, если применить другой, более прямой подход (см. Теоремы 4.13 и 4.14 в приложении к данной главе). Он приводит к более длинному доказательству, но зато является более элегантным и расширяет область приложимости теорем существования.

И наконец, выполнение условий теоремы Какутани для отображений, построенных на основе функций избыточного спроса, можно гарантировать лишь при достаточно сильных предположениях относительно предпочтений потребителей, начальных запасов и технологических множеств производителей. Поэтому при установлении условий существования равновесия используются различные модификации функций избыточного спроса, концепций равновесия и т. д. Некоторые приемы такого такого анализа условий существования равновесий также приведены в приложении.

(

Задачи]Задачи[12]

4.19 Пусть в ситуации, описанной в Примере 4.3, начальные запасы всех потребителей имеют вид $\boldsymbol{\omega}_i = (a, 1)$, где $a > 0$.

(A) Покажите, что модифицированный спрос $\mathbf{E}^*(\cdot)$ не является непрерывным.

(B) Покажите, что в такой экономике равновесие существует.

4.20 Можно ли утверждать, что в экономике обмена, в которой функции полезности имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} x_{ik}^{\alpha_{ik}},$$

а начальные запасы равны $\omega_{ik} = i \cdot k$, равновесие существует? Аргументируйте свой ответ.

4.21 Пусть в экономике обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ, дав до-

[12]Часть задач относится к материалу из приложения к данной главе.

казательство существования равновесия либо приведя пример отсутствия равновесия.

4.22 Пусть в экономике обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ, дав доказательство существования равновесия либо приведя пример отсутствия равновесия.

4.23 Покажите, что в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями, описываемыми функциями полезности

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22},$$

и с начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (\alpha, 1)$ при $\alpha \geqslant 0$ равновесие существует тогда и только тогда, когда $\alpha \neq 0$. Какие условия известной вам теоремы существования равновесия нарушаются в случае, когда равновесие не существует?

4.24 Покажите, что в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых описываются функциями полезности

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, x_{12}\}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22},$$

не существует равновесия при начальных запасах $\boldsymbol{\omega}_1 = (0, \gamma)$ $(\gamma \geqslant 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha < \beta)$. Какие условия известной вам теоремы существования равновесия здесь нарушаются?

4.25 Рассмотрите экономику с l благами и m потребителями, функции полезности которых имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik}\sqrt{x_{ik}}, \ \alpha_{ik} \geqslant 0.$$

При каких начальных запасах известные вам утверждения (какие?) гарантируют существование равновесия в такой экономике?

4.26 В экономике обмена только два блага $(l = 2)$, функции полезности всех потребителей i имеют вид

$$u_i(x_i^1, x_i^2) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2},$$

а начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_i = (0, 1)$. Вычислите квазиравновесия в этой модели.

4.27 Рассмотрите экономику с l благами и m потребителями, предпочтения которых представляются функциями полезности Кобба—

Дугласа, а начальные запасы положительны. При каких начальных запасах известные вам утверждения (какие?) гарантируют существование равновесия в такой экономике?

4.28 Рассмотрите экономику с четырьмя благами и четырьмя потребителями, функции полезности которых имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \min\{x_{i1}, x_{i2}\},\ i = 1, 2,$$
$$u_3(\mathbf{x}_3) = x_{31} + \min\{x_{33}, x_{34}\},$$
$$u_4(\mathbf{x}_4) = x_{42} + \min\{x_{43}, x_{44}\}.$$

Начальные запасы имеют вид $\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{e}^i$ (i-й орт). Охарактеризуйте все квазиравновесия, в которых не все цены равны нулю. Какие из них не являются равновесиями?

4.29 Рассмотрите экономику с четырьмя благами и четырьмя потребителями, функции полезности которых имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \min\{x_{i1}, x_{i2}\},\ i = 1, 2,$$
$$u_i(\mathbf{x}_i) = \min\{x_{i3}, x_{i4}\},\ i = 3, 4,$$

Первый потребитель имеет по единице первого и третьего блага, второй — по единице второго и четвертого. У остальных потребителей нет начальных запасов. Охарактеризуйте все квазиравновесия, в которых не все цены равны нулю, и покажите, что ни одно из них не является равновесием.

4.30 Рассмотрите экономику Эрроу—Дебре, в которой все продукты производятся на основе первичных факторов, принадлежащих потребителям, причем совокупные запасы этих факторов положительны. Предположите, что каждая фирма является однопродуктовой, ее технология описывается производственной функцией Кобба—Дугласа, а также что каждый продукт производится какой-то фирмой.

(A) Убедитесь, что все технологические множества выпуклы, замкнуты и обладают свойством допустимости бездеятельности.

(B) Убедитесь, что совокупное технологическое множество $Y_\Sigma = \sum_{j\in J} Y_j$ обладает свойствами отсутствия рога изобилия и необратимости.

(C) Какие дополнительные условия гарантируют существование квазиравновесия (равновесия) в такой экономике?

4.31 Предположим, что $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, $\bar{\mathbf{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$, $X_i = \mathbb{R}^l_+$, предпочтения потребителей строго выпуклы, непрерывны и монотонны. Пусть также $\mathbf{0} \in Y_j$,

$\boldsymbol{\omega}_i \geqslant \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$. Покажите, что это квазиравновесие является равновесием по Вальрасу.

4.4 Парето-оптимальные состояния экономики и их характеристики

В неоклассической экономической теории тот или иной механизм координации решений экономических субъектов (например, рыночный механизм) принято оценивать на основе результатов его работы, т. е. характеристик тех состояний экономики, к которым он приводит, безотносительно к самому по себе процессу координации. В духе традиции методологического индивидуализма считается, что подобная оценка состояний экономики должна строиться на основе оценок составляющих ее индивидуумов.

Но при сравнении состояний экономики возникает следующая трудность. Если мы рассматриваем отдельного индивидуума, то можем судить об экономической эффективности выбора по тому уровню благосостояния, который является результатом выбора. Однако реально в экономике взаимодействует большое число индивидуумов, и их интересы зачастую не совпадают. Если сравнивать два состояния экономики — S_1 и S_2, то для одного индивидуума S_1 может быть предпочтительнее, чем S_2, а для другого наоборот. Только если мнения всех индивидуумов совпадут, имеет смысл говорить о том, что одно состояние *с точки зрения данного сообщества в целом* предпочтительнее другого и, следовательно, это другое состояние не является эффективным. Данный тезис лежит в основе критерия оптимальности состояния экономики, сформулированного В. Парето.[13].

Ясно, что критерий Парето является довольно слабым, поскольку не позволяет сравнивать между собой те состояния, которые не улучшаемы по Парето. Кроме того, критерий Парето игнорирует такие волнующие большинство людей соображения, как равенство и справедливость.

Как бы то ни было, понятие эффективности (оптимальности) по Парето является одним из ключевых в экономической теории, в других общественных науках, а также в теории игр. Оптимальность по Парето — это важный критерий для оценки функционирования экономических систем и результатов экономической политики. Таким образом, в связи с анализом рыночного равновесия представляет ин-

[13] V. Pareto. *Manuele di economia politica*, Milan: Societa Editrice Libaria, 1906.

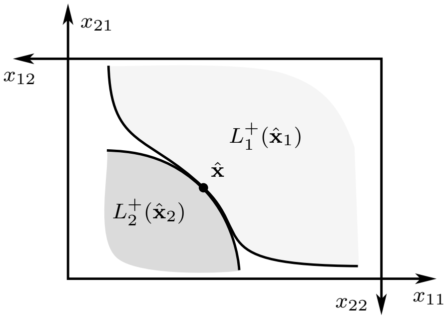


Рис. 4.4. *Иллюстрация Парето-оптимальности на ящике Эджворта*

терес вопрос о том, является ли равновесие эффективным, т. е. принадлежит ли оно границе Парето.

Определение 4.7:

Допустимое состояние экономики $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ является Парето-улучшением для допустимого состояния $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или, другими словами, доминирует его по Парето, если для каждого потребителя $i \in I$ выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_i \succcurlyeq_i \mathbf{x}_i$ и существует хотя бы один потребитель i_0 для которого $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \mathbf{x}_{i_0}$.

Допустимое состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ называется Парето-оптимальным, если для него не существует Парето-улучшений. ◀

Множество оптимальных по Парето состояний экономики образует границу Парето. Будем в дальнейшем обозначать ее $\mathcal{P}$.

Проиллюстрируем понятие оптимальности по Парето с помощью диаграммы Эджворта (см. Рис. 4.4). Парето-оптимальность состояния $\hat{\mathbf{x}}$ равносильна тому, что множества $L_1^+(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$ не имеют общих точек и множества $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^+(\hat{\mathbf{x}}_2)$ не имеют общих точек на ящике Эджворта. Здесь $L_i^+(\hat{\mathbf{x}}_i)$ — множество потребительских наборов, которые не хуже для потребителя i, чем набор $\hat{\mathbf{x}}_i$, а $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$ — множество потребительских наборов, которые лучше, чем набор $\hat{\mathbf{x}}_i$. Для оптимальности достаточно, чтобы множества $L_1^+(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^+(\hat{\mathbf{x}}_i)$ имели только одну общую точку — $\hat{\mathbf{x}}$.

4.4.1 Характеризация границы Парето через задачу максимизации взвешенной суммы полезностей

Для нахождения границы Парето, удобно пользоваться вспомогательной задачей. Сопоставим каждому из потребителей коэффициент $\alpha_i \geqslant 0$, так чтобы $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, и рассмотрим следующую задачу максимизации взвешенной суммы полезностей на множестве допустимых состояний экономики:

Задача нахождения оптимума Парето

$$\sum_{i \in I} \alpha_i u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \qquad (\mathcal{P}^\alpha)$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E}.$$

Здесь $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E}$ означает, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}$. Чтобы показать связь этой задачи с Парето-границей, введем вспомогательное понятие слабой Парето-границы.

Определение 4.8:

Допустимое состояние экономики $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ является строгим Парето-улучшением для допустимого состояния $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или, другими словами, строго доминирует его по Парето, если для каждого потребителя $i \in I$ выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_i \succ_i \mathbf{x}_i$.

Допустимое состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, если не существует другого допустимого состояния, которое строго доминирует его по Парето. ◀

Слабую границу Парето будем обозначать $\mathcal{WP}$.

Очевидно, что по определению обычная (сильная) граница Парето $\mathcal{P}$ всегда содержится в слабой границе Парето $\mathcal{WP}$, т. е. $\mathcal{P} \subset \mathcal{WP}$.

Теорема 4.3:

{i} Если $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — решение задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$, то $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, а если, кроме того, $\alpha_i > 0$ при всех $i \in I$, то $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит (сильной) границе Парето.

{ii} Пусть множества X_i выпуклы, функции полезности $u_i(\cdot)$ вогнуты, технологические множества Y_j выпуклы. Тогда если $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, то найдутся такие неотрицательные коэффициенты α_i ($\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$), что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$. ┘

Доказательство: {i} Предположим, что существует решение задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$, $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, которое не принадлежит слабой границе Парето. Тогда найдется такое допустимое состояние $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, что $u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) > u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$ для всех $i \in I$. При этом значение целевой функции задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$ будет больше в точке $\tilde{\mathbf{x}}$, чем в точке $\hat{\mathbf{x}}$, а это противоречит тому, что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — решение задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$. Доказательство для случая положительных коэффициентов и обычной (сильной) границы Парето полностью аналогично.

{ii} Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето. Введем обозначение

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}_1), \ldots, u_n(\mathbf{x}_n))$$

и рассмотрим следующее множество:

$$U^- = \{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E} \colon \mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \,\}.$$

Множество U^- непусто, так как $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \in U^-$. Покажем, что U^- — выпуклое множество. Пусть $\mathbf{v}' \in U^-$ и $\mathbf{v}'' \in U^-$. Это означает, что существуют допустимые состояния экономики $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ и $(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'')$, такие что $\mathbf{v}' \leqslant \mathbf{u}(\mathbf{x}')$ и $\mathbf{v}'' \leqslant \mathbf{u}(\mathbf{x}'')$. Выпуклая комбинация этих состояний,

$$(\beta \mathbf{x}' + (1-\beta)\mathbf{x}'', \beta \mathbf{y}' + (1-\beta)\mathbf{y}''), \text{ где } \beta \in [0,1],$$

является допустимым состоянием экономики. Так как $u_i(\cdot)$ — вогнутые функции, то

$$\mathbf{u}(\beta \mathbf{x}' + (1-\beta)\mathbf{x}'') \geqslant \beta \mathbf{u}(\mathbf{x}') + (1-\beta)\mathbf{u}(\mathbf{x}'').$$

Это означает, что $\beta \mathbf{v}' + (1-\beta)\mathbf{v}'' \leqslant \mathbf{u}(\beta \mathbf{x}' + (1-\beta)\mathbf{x}'')$, т. е. выпуклая комбинация точек из U^- тоже принадлежит U^-:

$$\beta \mathbf{v}' + (1-\beta)\mathbf{v}'' \in U^- \text{ при } \beta \in [0,1].$$

Множество $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++} = \{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} > \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_i) \,\}$ также является непустым и выпуклым.

Так как $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, то рассмотренные множества не имеют общих точек:

$$U^- \cap (\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}) = \varnothing.$$

В противном случае мы нашли бы допустимое состояние экономики, в котором каждый потребитель имел бы бóльшую полезность, чем в $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$. По теореме отделимости[14] существует разделяющая эти два

[14] См. Теорему B.41 на с. 1125 в Приложении B.

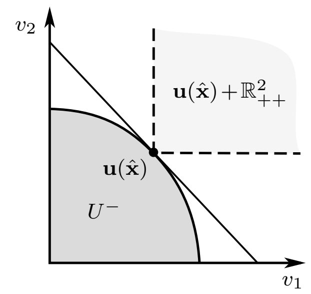


Рис. 4.5. *Иллюстрация к доказательству пункта* {ii} *Теоремы 4.3*

множества гиперплоскость, т. е. существуют вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и число b, такие что

$$\mathbf{av} \leqslant b \text{ при } \mathbf{v} \in U^-$$

и

$$\mathbf{av} \geqslant b \text{ при } \mathbf{v} \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}.$$

Покажем, что $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}$. Предположим, что существует потребитель i, для которого $a_i < 0$. Тогда если $\mathbf{v} \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, то $\mathbf{v} + t\mathbf{e}^i \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, где t — положительное число, а $\mathbf{e}^i$ — i-й орт. Мы всегда можем подобрать достаточно большое t, чтобы выполнялось $\mathbf{a}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}^i) < b$, а это противоречит тому, что $\mathbf{v} + t\mathbf{e}^i \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$.

Рассмотрим последовательность $\mathbf{v}^N = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + 1/N \cdot \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — вектор, состоящий из единиц. Поскольку $\mathbf{v}^N \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$ $\forall N$, то $\mathbf{av}^N \geqslant b$. Переходя к пределу, получим $\mathbf{au}(\hat{\mathbf{x}}) \geqslant b$. В то же время, $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \in U^-$ и $\mathbf{au}(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant b$. Следовательно, $\mathbf{au}(\hat{\mathbf{x}}) = b$.

Таким образом, мы доказали существование гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, с коэффициентами $\mathbf{a} \geqslant\neq \mathbf{0}$, которая проходит через $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})$ и разделяет множества U^- и $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$ (см. Рис. 4.5). Возьмем в качестве коэффициентов α_i нормированные коэффициенты a_i:

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\sum_{j \in I} a_j}.$$

Не существует допустимого состояния $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, такого что

$$\sum_{i \in I} \alpha_i u_i(\mathbf{x}_i) > \sum_{i \in I} \alpha_i u_i(\hat{\mathbf{x}}_i).$$

Действительно, для такого состояния выполнено $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in U^-$, откуда $\mathbf{au}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{au}(\hat{\mathbf{x}})$. Разделив это неравенство на $\sum_{i \in I} a_i$, получим

$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leqslant \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})$. Это означает, что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$. ■

Из доказанной теоремы следует, что множество решений задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$ при неотрицательных коэффициентах совпадает со слабой границей Парето и, следовательно, содержит в себе границу Парето. В то же время, множество решений задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$ при положительных коэффициентах содержится в границе Парето. Другими словами, эта задача позволяет получить для границы Парето оценки сверху и снизу. Кроме того, если сильная и слабая границы Парето совпадают, то задача $(\mathcal{P}^\alpha)$ полностью характеризует границу Парето. Следующая теорема предлагает возможные условия, при которых такое совпадение имеет место.

Теорема 4.4:

{i} Если предпочтения каждого потребителя заданы на $X_i = \mathbb{R}^l_+$, строго монотонны и непрерывны, то сильная граница Парето совпадает со слабой: $\mathcal{P} = \mathcal{WP}$.

{ii} Если предпочтения каждого потребителя заданы на $X_i = \mathbb{R}^l_+$, полустрого монотонны[15], непрерывны и выпуклы, то все состояния экономики, принадлежащие слабой границе Парето, в которых потребительские наборы содержат все блага в положительных количествах, также принадлежат и сильной границе Парето. ⌟

Доказательство: {i} Поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{WP}$, то достаточно показать, что $\mathcal{WP} \subset \mathcal{P}$. Пусть это не так, т. е. существует допустимое состояние $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, принадлежащее слабой границе Парето, но не сильной. Поскольку $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$ не принадлежит границе Парето, существует другое допустимое состояние $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, такое что для всех потребителей $\tilde{\mathbf{x}}_i \succcurlyeq_i \check{\mathbf{x}}_i$ и $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \check{\mathbf{x}}_{i_0}$ хотя бы для одного потребителя $i_0 \in I$.

Из строгой монотонности следует, что $\check{\mathbf{x}}_{i_0} \succcurlyeq_{i_0} \mathbf{0}$, поэтому $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}$ не может быть нулевым вектором. Следовательно, потребитель i_0 потребляет хотя бы одно благо k в положительном количестве: $\tilde{x}_{i_0 k} > 0$. Пусть $\mathbf{e}^k$ — k-й орт (вектор, где на k-м месте стоит единица, а на остальных местах — нули). Рассмотрим следующую последовательность перераспределений $(N = 1, 2, \ldots)$:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(N) = \tilde{\mathbf{x}}_{i_0} - \frac{1}{N}\mathbf{e}^k,$$

[15] Предпочтения называются полустрого монотонными, если они монотонны и из $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

$$\dot{\mathbf{x}}_i(N) = \tilde{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{N(N-1)}\mathbf{e}^k \text{ при } i \neq i_0.$$

По свойству строгой монотонности при любом N имеем $\dot{\mathbf{x}}_i(N) \succ_i \tilde{\mathbf{x}}_i(N)$ для $i \neq i_0$. Кроме того, для потребителя i_0 найдется достаточно большой номер $\bar{N}$, такой что набор $\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(\bar{N})$ допусти́м и (по свойству непрерывности предпочтений) $\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(\bar{N}) \succ_{i_0} \check{\mathbf{x}}_{i_0}$.

Таким образом, мы нашли допустимое распределение $(\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(\bar{N}), \tilde{\mathbf{y}})$ которое строго доминирует допустимое распределение $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, чего быть не может, так как? по предположению, $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето.

{ii} Доказательство второй части теоремы оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 4.34). ■

4.4.2 Дифференциальная характеристика границы Парето

Переформулируя определение Парето-оптимальности, можно утверждать, что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является Парето-оптимумом, если полезность ни для одного из потребителей нельзя увеличить, не уменьшая полезность для остальных потребителей (при том ограничении, что рассматриваются только допустимые состояния). Такая формулировка подсказывает следующую характеристику Парето-оптимальных состояний: для того чтобы состояние $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ было Парето-оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось решением следующих оптимизационных задач для всех $i_0 \in I$:

$$\begin{gathered}
u_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}) \to \max_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} \\
u_i(\mathbf{x}_i) \geqslant \hat{u}_i = u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \;\forall i \in I, i \neq i_0, \\
\mathbf{x}_i \in X_i \;\forall i \in I, \\
g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0 \;\forall j \in J, \\
\sum_{i \in I}(x_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j \in J} y_{jk} \;\forall k \in K.
\end{gathered} \tag{$\mathcal{P}_{i_0}$}$$

Рассмотрим одну из таких задач для произвольного потребителя i_0 и в предположении, что состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ внутреннее в том смысле, что $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ $\forall i \in I$ и что функции полезности и производственные функции дифференцируемы, применим к ней теорему Куна—Таккера[16]. Соответствующий лагранжиан имеет вид

[16] См. Приложение B, параграф B.16.

(с точностью до постоянных слагаемых)

$$\mathbb{L} = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{j \in J} \mu_j g_j(\mathbf{y}_j) + \sum_{k \in K} \sigma_k (\sum_{j \in J} y_{jk} - \sum_{i \in I}(x_{ik} - \omega_{ik})).$$

Согласно теореме Джона найдутся множители Лагранжа $\lambda_i \geqslant 0$ $(i \in I)$, $\mu_j \geqslant 0$ $(j \in J)$ и σ_k $(k \in K)$, такие что в точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ производные функции Лагранжа по всем x_{ik} и y_{jk} равны нулю:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{ik}} = \lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} - \sigma_k = 0 \ \forall i, k,$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_{jk}} = \mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \forall j, k.$$

Предположим, что в рассматриваемом состоянии $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ градиенты всех функций полезности и производственных функций не равны нулю. Другими словами, мы предполагаем, что для каждого потребителя i найдется благо k, такое что $\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik} \neq 0$, и что для каждого производителя j найдется благо k, такое что $\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk} \neq 0$. Эти предположения гарантируют выполнение условий регулярности теоремы Куна—Таккера.

Для проверки выполнения условий регулярности нужно убедиться, что градиенты всех активных ограничений (т. е. выполняющихся в рассматриваемом Парето-оптимальном состоянии как равенства) линейно независимы. Для этого достаточно показать, что градиенты всех, а не только активных, ограничений линейно независимы. Для доказательства этого факта проводится проверка ранга матрицы градиентов ограничений: записав структуру матрицы, следует убедиться что если линейная комбинация ее строк равна нулю, то все коэффициенты линейной комбинации нулевые. Мы здесь опускаем эту проверку (см. задачу 4.37).

Теорема Куна—Таккера утверждает, что можно выбрать множитель Лагранжа λ_{i_0} равным единице.

Из $\lambda_{i_0} = 1$ и из того, что существует благо k_0, такое что $\partial u_{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{i_0})/\partial x_{i_0 k_0} \neq 0$, следует, что $\sigma_{k_0} > 0$. Следовательно, как нетрудно проверить, из условий первого порядка следует, что все $\lambda_i > 0$ $(i \in I)$ и $\mu_j > 0$ $(j \in J)$.

Отсюда, исключая коэффициенты λ_i и μ_j, получим дифференциальную характеристику внутренних Парето-оптимальных состояний:

$$\frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik}}{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}},$$

$$\frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk}}{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}.$$

Она означает совпадение предельных норм замещения (трансформации) любых двух товаров k, k_0 ($\sigma_{k_0} > 0$) для всех экономических субъектов. Так, на приведенном выше Рис. 4.4 (с. 284) кривые безразличия двух потребителей касаются друг друга.

Чтобы получить достаточные условия Парето-оптимальности внутреннего состояния экономики, можно воспользоваться обратной теоремой Куна—Таккера в применении к задачам ($\mathcal{P}_{i_0}$). Для всех таких задач условия $\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{ik}} = 0$ и $\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_{jk}} = 0$ приводят к уравнениям одного и того же вида:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \sigma_k, \quad \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk}} = -\sigma_k.$$

Для каждой из задач нам требуется, чтобы $\lambda_{i_0} = 1$ или, что эквивалентно, $\lambda_{i_0} > 0$. Таким образом, следует искать множители Лагранжа для функций полезности, которые бы все были положительными ($\lambda_i > 0$) и удовлетворяли (вместе с $\mu_j \geqslant 0$ и σ_k) указанным уравнениям. Далее, условия дополняющей нежесткости для ограничений задачи ($\mathcal{P}_{i_0}$) сводятся к тому, что $\mu_j g_j = 0$. Для применимости обратной теоремы Куна—Таккера нужно, чтобы функции полезности и неявные производственные функции были вогнутыми.

При выводе дифференциальной характеристики точек Парето-границы мы использовали задачи ($\mathcal{P}_{i_0}$). Но можно было бы воспользоваться задачей ($\mathcal{P}^\alpha$). При этом, как нетрудно убедиться, получаемые уравнения будут очень схожи с теми, которые здесь выведены. Аналогами множителей Лагранжа λ_i будут веса α_i.

Если $X_i = \mathbb{R}^l_+$, то при использовании теоремы Куна—Таккера можно учесть в явном виде ограничения $x_i \geqslant 0$ и охарактеризовать *все* точки Парето-границы, а не только внутренние. Следующий пример демонстрирует соответствующую технику.

Пример 4.4

В экономике обмена два блага и два потребителя с функциями полезности

$$u_1 = -0{,}5(7 - x_{11})^2 - (4 - x_{12})^2, \quad u_2 = -0{,}5(6 - x_{21})^2 - (4 - x_{22})^2,$$

заданными на $\mathbb{R}^2_+$. Совокупные начальные запасы равны $\omega_{\Sigma 1} = 8$, $\omega_{\Sigma 2} = 3$.

Можно выразить из балансов потребление второго потребителя через потребление первого и затем представить полезность для второго потребителя как функцию x_{11} и x_{12}:

$$u_2 = -0{,}5(2 - x_{11})^2 - (1 + x_{12})^2.$$

Запишем задачу ($\mathcal{P}^\alpha$) для такой экономики с учетом сделанной подстановки:

$$\begin{gathered} \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \to \max_{x_{11}, x_{12}} \\ x_{11} \geqslant 0, \quad x_{12} \geqslant 0, \quad x_{11} \leqslant 8, \quad x_{12} \leqslant 3. \end{gathered} \tag{$\bowtie$}$$

Здесь мы ввели обозначение $\alpha_1 = \alpha$ (соответственно при этом $\alpha_2 = 1 - \alpha$ и $\alpha \in [0, 1]$). Все присутствующие в этой задаче функции вогнуты ($u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ строго вогнуты, а ограничения на неотрицательность потребления линейны). Таким образом, применим пункт {ii} Теоремы 4.3, и поэтому необходимое условие Парето-оптимальности точки (x_{11}, x_{12}) состоит в том, что она является решением данной задачи при некотором $\alpha \in [0, 1]$.

Далее, функция Лагранжа для задачи ($\bowtie$) с учетом ограничений на неотрицательность потребления (с множителями Лагранжа δ_j) будет иметь вид

$$\mathbb{L} = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 + \delta_1 x_{11} + \delta_2 x_{12} + \delta_3(8 - x_{11}) + \delta_4(3 - x_{12}).$$

Приравнивая производные лагранжиана к нулю, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{11}} &= \alpha(7 - x_{11}) + (1-\alpha)(2 - x_{11}) + \delta_1 - \delta_3 = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{12}} &= \alpha(8 - 2x_{12}) - (1-\alpha)(2 + 2x_{12}) + \delta_2 - \delta_4 = 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{gathered} 5\alpha + 2 - x_{11} + \delta_1 - \delta_3 = 0, \\ 10\alpha - 2 - 2x_{12} + \delta_2 - \delta_4 = 0. \end{gathered}$$

Градиенты тех ограничений на неотрицательность потребления, которые могут быть активными одновременно, являются линейно независимыми. Например, одновременно может быть $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$ (но при этом $x_{11} < 8$, $x_{12} < 3$), а градиенты этих ограничений равны $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Следовательно, выполнены условия регулярности теоремы Куна—Таккера.

Из (прямой) теоремы Куна—Таккера и из пункта {ii} Теоремы 4.3 следует, что если точка (x_{11}, x_{12}) соответствует оптимуму Парето, то найдутся числа $\alpha \in [0, 1]$, $\delta_j \geqslant 0$, такие что будут выполнены полученные выше равенства, а также соответствующие условия дополняющей нежесткости ($\delta_1 x_{11} = 0$, $\delta_2 x_{12} = 0$, $\delta_3(8-x_{11}) = 0$, $\delta_4(3-x_{12}) = 0$). Сначала охарактеризуем все точки ящика Эджворта, которые удовлетворяют указанным условиям (т. е. для них найдутся такие α и δ_j). (Остальные точки ящика Эджворта не могут принадлежать границе Парето.) Далее мы покажем, опираясь на обратную теорему Куна—Таккера и пункт {i} Теоремы 4.3, что все найденные таким образом точки действительно соответствуют оптимуму Парето.

Анализ Парето-границы требует перебора. Перебор можно осуществлять либо по знакам множителей Лагранжа (равен нулю, положителен), либо по ограничениям (активно, неактивно). Воспользуемся вторым способом. Существует девять возможных типов допустимых состояний рассматриваемой экономики: внутренняя часть ящика Эджворта, внутренние части четырех сторон ящика и четыре угла. Рассмотрим эти случаи, по возможности объединяя их анализ.

1. Внутренняя часть Парето-границы, $x_{11} \in (0, 8)$, $x_{12} \in (0, 3)$. Ограничения неотрицательности потребления неактивны, поэтому по условиям дополняющей нежесткости соответствующие множители Лагранжа равны нулю, т. е. $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 0$. При этом Парето-граница будет характеризоваться уравнениями

$$5\alpha = x_{11} - 2, \quad 5\alpha = 1 + x_{12}.$$

Таким образом, точки внутренней части границы Парето должны удовлетворять уравнению

$$x_{12} = x_{11} - 3.$$

Чтобы точка была внутренней, требуется, чтобы $x_{11} \in (3, 6)$ (тогда $x_{12} \in (0, 3)$). Это соответствует условию $\alpha \in (0{,}2, 0{,}8)$.

В то же время, точки вида $(x_{11}, x_{12}) = (2 + 5\alpha, 5\alpha - 1)$, где $\alpha \in (0{,}2, 0{,}8)$, по обратной теореме Куна—Таккера являются решениями задачи ($\bowtie$), поскольку выполнены условия Куна—Таккера, а целевая функция и функции, задающие ограничения задачи, являются вогнутыми[17]. Согласно пункту {i} Теоремы 4.3 эти точки соответствуют Парето-оптимальным состояниям.

2. Рассмотрим нижнюю сторону ящика Эджворта, т. е. случай, когда $x_{11} \in (0, 8)$, $x_{12} = 0$. По условиям дополняющей нежесткости в этом случае $\delta_1, \delta_3, \delta_4 = 0$. Уравнения, характеризующие Парето-

[17] Целевая функция строго вогнута при всех α, поскольку $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ строго вогнуты.

границу, принимают вид

$$5\alpha = x_{11} - 2, \quad \delta_2 = 2 - 10\alpha.$$

Условие $\delta_2 \geqslant 0$ выполняется, если $\alpha \leqslant 0{,}2$. Условие $x_{11} \in (0, 8)$ выполняется, если $\alpha \in (-0{,}4, 1{,}2)$. Таким образом, Парето-границе могут принадлежать только точки $(x_{11}, 0)$, где $x_{11} = 2+5\alpha$, при $\alpha \in [0, 0{,}2]$. Согласно пункту {i} Теоремы 4.3 эти точки соответствуют Парето-оптимальным состояниям при $\alpha \in (0, 0{,}2]$.

Точку $x_{11} = 2$, $x_{12} = 0$ (случай, когда $\alpha = 0$) следует рассмотреть отдельно. В этой точке $u_2 = -1$. Как нетрудно проверить, при $x_{12} \geqslant 0$ и $x_{11} \neq 2$ выполнено неравенство $u_2(x_{11}, x_{12}) < -1$, т. е. никакая допустимая точка не может обеспечить Парето-улучшение (второй потребитель всегда проигрывает). Значит, точка $(2, 0)$ соответствует Парето-оптимуму.

Таким образом, Парето-оптимальные точки в этом случае имеют вид $(x_{11}, 0)$, где $x_{11} \in [2, 3]$.

3. Верхняя сторона ящика Эджворта, т. е. $x_{11} \in (0, 8)$, $x_{12} = 3$. Этот случай анализируется по той же схеме, что и предыдущий. Парето-оптимальные точки в этом случае имеют вид $(x_{11}, 3)$, где $x_{11} \in [6, 7]$.

4. Рассмотрим левую сторону ящика Эджворта вместе с углами, т. е. случай когда $x_{11} = 0$, $x_{12} \in [0, 3]$. По условиям дополняющей нежесткости в этом случае $\delta_3 = 0$. Условия первого порядка принимают следующий вид:

$$\delta_1 = -5\alpha - 2, \quad 10\alpha - 2 - 2x_{12} + \delta_2 - \delta_4 = 0.$$

Очевидно, что первое из равенств при $\delta_1 \geqslant 0$ и $\alpha \in [0, 1]$ не может быть выполнено. Таким образом, на левой стороне ящика Эджворта нет Парето-оптимальных точек.

5. Аналогично можно рассмотреть правую сторону ящика Эджворта вместе с углами ($x_{11} = 8$, $x_{12} \in [0, 3]$) и убедиться, что для нее необходимые условия Парето-оптимальности не могут быть выполнены.

Таким образом, все точки Парето-границы найдены. Можно изобразить найденную Парето-границу на диаграмме Эджворта (Рис. 4.6). △

Задачи

4.32 Рассмотрите экономику, в которой предпочтения всех потребителей зависят от единственного блага (денег) и строго монотонны по этому благу.

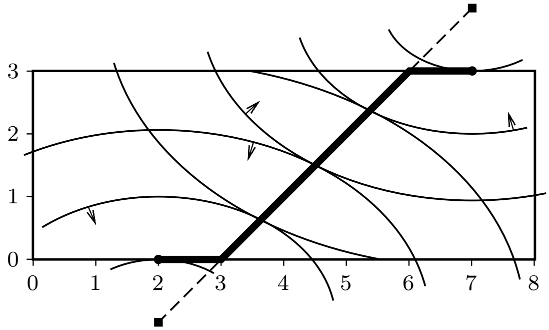


Рис. 4.6. *Парето-граница экономики, рассмотренной в Примере 4.4 (показана жирной линией)*

(А) Предположите, что общий запас денег в экономике фиксирован. Опишите Парето-эффективные состояния в данной экономике. Обоснуйте свой ответ.

(В) Пусть существует технология, которая позволяет избавляться от денег. Ответьте на тот же вопрос.

4.33 Рассмотрите экономику, в которой два индивидуума — Бим и Бом.

(А) Предположите, что Бим любит только пряники, а Бом — только пирожки. Имеется фиксированный положительный запас пряников и пирожков. Опишите Парето-эффективные состояния в такой экономике. Обоснуйте свой ответ.

(В) Предположите теперь, что для Бима пряники и пирожки комплементарны, так что он предпочитает потреблять пряники и пирожки в пропорции один к одному, а для Бома пряники и пирожки взаимозаменяемы, и пряник для него эквивалентен пирожку. Ответьте на тот же вопрос.

4.34 Докажите пункт {ii} Теоремы 4.4.

4.35 Для экономики обмена, в которой имеется два потребителя со строго монотонными, строго вогнутыми функциями полезности, заданными на $\mathbb{R}^l_+$, а общесистемные запасы благ строго положительны, докажите, что Парето-граница является связной кривой, соединяющей два угла ящика Эджворта, причем на каждой кривой безразличия в ящике Эджворта лежит ровно одна точка Парето, и что кривая Парето-границы не имеет колец. (*Указание:* Можно воспользоваться представлением Парето-границы через оптимизационную задачу с параметром, задающим «вес» полезности одного из потребителей, и теоремой о непрерывности по параметру решения задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве.)

4.36 Покажите, что в экономике обмена (с m потребителями) с совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей и совпадающими начальными запасами векторы начальных запасов потребителей составляют Парето-оптимальное распределение.

4.37 Восполните рассуждения п. 4.4.2, проверив, что условия регулярности теоремы Куна—Таккера выполнены, т. е. что градиенты ограничений линейно независимы.

4.38 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют линейные функции полезности, заданные на $X_i = \mathbb{R}^2_+$, т. е.

$$u_1 = \alpha_1 x_{11} + \beta_1 x_{12} \quad \text{и} \quad u_2 = \alpha_2 x_{21} + \beta_2 x_{22},$$

с положительными коэффициентами ($\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$), совокупные начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая границы Парето совпадают в такой экономике. Найдите их в зависимости от значений параметров.

4.39 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности, заданные на $X_1 = \mathbb{R}^2_{++}$ и $X_2 = \mathbb{R}^2_+$ соответственно:

$$u_1 = \ln x_{11} + \ln x_{12} \quad \text{и} \quad u_2 = x_{21} + x_{22},$$

совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая границы Парето совпадают в такой экономике. Найдите их в зависимости от величины начальных запасов.

4.40 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности:

$$u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}\} \quad \text{и} \quad u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}\}.$$

(A) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что множества допустимых потребительских наборов имеют вид $X_i = \mathbb{R}^2_+$ и что совокупные начальные запасы обоих благ одинаковы.

(B) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что совокупные начальные запасы первого блага больше, чем второго.

(C) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что блага могут потребляться в целых неотрицательных количествах и что совокупные начальные запасы обоих благ равны 6.

(D) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что блага могут потребляться в целых неотрицательных количествах, и что совокупные начальные запасы благ равны 10 и 5 соответственно.

4.41 (A) Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности:

$$u_1 = -(2 - x_{11})^2 - (3 - x_{12})^2 \quad \text{и} \quad u_2 = x_{21} + x_{22},$$

множества допустимых потребительских наборов имеют вид $X_i = \mathbb{R}^2_+$, начальные запасы благ равны $\boldsymbol{\omega}_\Sigma = (2, 2)$. Найдите границу Парето.

(B) Решите ту же задачу с функциями полезности

$$u_1 = x_{11} + x_{12} \quad \text{и} \quad u_2 = -(2 - x_{21})^2 - (3 - x_{22})^2,$$

и начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_\Sigma = (1, 3)$.

4.42 Распределение $\mathbf{x}$ в экономике обмена называется справедливым, если $\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \mathbf{x}_j$ для любой пары потребителей i, j (никто никому не завидует).

(A) Покажите, что множество справедливых распределений непусто.

(B) Покажите, что если предпочтения строго выпуклы, непрерывны и строго монотонны, а совокупные начальные запасы положительны, то множество справедливых распределений, которые являются Парето-оптимальными, непусто.

(C) Как выглядит множество Парето-оптимальных справедливых распределений, если предпочтения потребителей одинаковы?

4.5 Связь равновесия и Парето-оптимума. Теоремы благосостояния

Сопоставляя дифференциальные характеристики оптимума Парето и равновесия, можно обнаружить, что они совпадают. Совпадение дифференциальных характеристик позволяет заключить, что при определенных условиях совпадают и сами эти состояния. Указание этих условий составляет содержание так называемых теорем благосостояния[18] (или, как их еще называют, фундаментальных теорем

[18] Идею этих теорем можно найти в книге В. Парето. Несколько известных экономистов (А. Лернер, Х. Хотеллинг, О. Ланге, М. Алле) занимались этими вопросами в 1930–1940-е гг. и дали наброски доказательств. Формальные доказательства теорем разработали Кеннет Эрроу (1951) и Жерар Дебре (1951, 1954).

экономики благосостояния). Первая теорема благосостояния утверждает, что равновесие Парето-оптимально. Вторая теорема благосостояния утверждает, что на основе Парето-оптимума можно построить равновесие.

Для доказательства первой теоремы благосостояния нам потребуется определение локальной ненасыщаемости предпочтений[19].

Определение 4.9:

Предпочтения потребителя $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ называются локально ненасыщаемыми, если для любого допустимого набора $\mathbf{x}_i \in X_i$ в любой окрестности этого набора $V(\mathbf{x}_i)$ найдется другой лучший для него допустимый набор $\check{\mathbf{x}}_i$, т. е. такой набор, что $\check{\mathbf{x}}_i \in X_i$, $\check{\mathbf{x}}_i \in V(\mathbf{x}_i)$ и $\check{\mathbf{x}}_i \succ \mathbf{x}_i$. ◀

Для локальной ненасыщаемости, в частности, достаточно, чтобы функция полезности в каждой точке множества X_i строго возрастала хотя бы по одному из благ и чтобы $X_i = \mathbb{R}^l_+$. (Для внутренних потребительских наборов ($\mathbf{x}_i > \mathbf{0}$) строгое возрастание по одному из благ здесь можно заменить на строгое убывание по одному из благ).

Теорема 4.5 (первая теорема благосостояния):

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — общее равновесие экономики и функции полезности всех потребителей локально ненасыщаемы. Тогда состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ Парето-оптимально. ┘

Доказательство: Доказательство проводится от противного: пусть есть другое допустимое состояние, $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, доминирующее состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ в смысле Парето, т. е. такое, что для всех $i \in I$ выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_i \succcurlyeq_i \bar{\mathbf{x}}_i$, и для некоторого потребителя i_0 выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\mathbf{x}}_{i_0}$.

(1) Набор $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}$ дороже, чем нужно, чтобы удовлетворять бюджетному ограничению при равновесных ценах и доходах, т. е.

$$\bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} > \beta_{i_0}.$$

Если бы это было не так, то набор $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}$, более предпочтительный для потребителя i_0, чем $\bar{\mathbf{x}}_{i_0}$, являлся бы допустимым в задаче этого потребителя, что противоречит определению равновесия.

[19]Это определение уже давалось в гл. 1 (см. Определение 1.11 на с. 58).

Отметим, что локальная ненасыщаемость предпочтений потребителя влечет за собой то, что решение задачи потребителя выводит бюджетное ограничение на равенство. Однако этот факт не добавляет ничего нового к характеристикам равновесия, поскольку, как показано выше, в любом равновесии бюджетное ограничение выполнено как равенство.

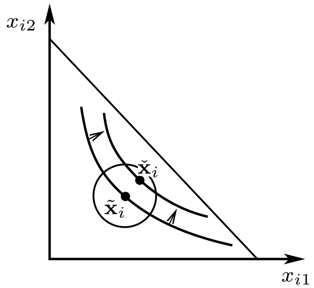


Рис. 4.7. *Иллюстрация к доказательству первой теоремы благосостояния*

Аналогично для прочих потребителей $\bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{x}}_i \geqslant \beta_i$. Действительно, в противном случае (при $\bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{x}}_i < \beta_i$) существовала бы окрестность набора $\tilde{\mathbf{x}}_i$, все точки которой удовлетворяли бы бюджетному ограничению, и по условию локальной ненасыщаемости в этой окрестности нашелся бы альтернативный допустимый набор $\check{\mathbf{x}}_i \in X_i$, который лучше для потребителя, чем $\tilde{\mathbf{x}}_i$, и удовлетворяет бюджетному ограничению (см. Рис. 4.7). Этот набор лучше для потребителя, чем равновесный набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, что невозможно.

Суммируя полученные неравенства по всем потребителям, получаем

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\mathbf{x}}_i > \sum_{i\in I}\beta_i.$$

(2) Далее вычислим сумму доходов потребителей в равновесии:

$$\sum_{i\in I}\beta_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K}\bar{p}_k\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\sum_{k\in K}\bar{p}_k\bar{y}_{jk} + S_i\right) =$$
$$= \sum_{k\in K}\bar{p}_k\left(\sum_{i\in I}\omega_{ik}+\sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}\sum_{i\in I}\gamma_{ij}\right)+\sum_{i\in I}S_i = \sum_{k\in K}\bar{p}_k\left(\sum_{i\in I}\omega_{ik}+\sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}\right)$$

или

$$\sum_{i\in I}\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j.$$

(3) Поскольку $\bar{\mathbf{y}}_j$ — оптимальная технология для j-го предприятия при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, то

$$\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant \bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}}_j.$$

Суммируя по всем предприятиям, получим

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\mathbf{y}}_j.$$

(4) Сопоставим три полученных выше соотношения:

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\mathbf{x}}_i > \sum_{i\in I}\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant \bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\mathbf{y}}_j$$

или

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\mathbf{x}}_i > \bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\mathbf{y}}_j.$$

Это последнее неравенство противоречит тому, что $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние, поскольку в допустимом состоянии должны выполняться балансы

$$\sum_{i\in I}\tilde{\mathbf{x}}_i = \sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J}\tilde{\mathbf{y}}_j.$$

Получено противоречие, поэтому для $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ нельзя найти Парето-улучшение. Это означает, что $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимум. ■

Рассмотрим пример экономики с потребителем, обладающим локально насыщаемыми предпочтениями, и проиллюстрируем его с помощью ящика Эджворта.

Пример 4.5

Первый потребитель имеет функцию полезности с «толстой» кривой безразличия

$$u_1 = \begin{cases} x_{11}x_{12}, & x_{11}x_{12} \leqslant 2, \\ 2, & 2 \leqslant x_{11}x_{12} \leqslant 3, \\ x_{11}x_{12} - 1, & x_{11}x_{12} \geqslant 3. \end{cases}$$

У второго же потребителя функция полезности линейна

$$u_2 = x_{21} + x_{22}.$$

Начальные запасы в экономике достаточно большие.

Данная ситуация представляет собой контрпример к первой теореме благосостояния и показывает важность условия локальной ненасыщаемости. Точки в заштрихованной области на Рис. 4.8?? принадлежат слабой границе Парето, но не принадлежат сильной. Их можно реализовать как равновесие при ценах $p_1 = p_2 = 1$, но они не являются Парето-оптимальными. △

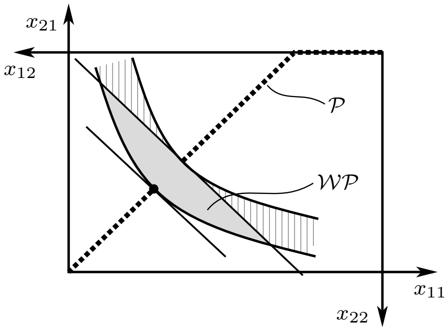


Рис. 4.8. *Контрпример к первой теореме благосостояния*

Перейдем к доказательству того, что всякое Парето-оптимальное состояние можно реализовать как равновесие (вторая теорема благосостояния). Мы докажем здесь эту теорему в предположении дифференцируемости функций с использованием теоремы Куна—Таккера.

Теорема 4.6 (вторая теорема благосостояния):
Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики, причем

- функции полезности и производственные функции дифференцируемы;
- множества X_i выпуклы, а функции полезности и производственные функции вогнуты[20];
- рассматриваемый Парето-оптимум внутренний (т. е. для всех потребителей $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$);
- в рассматриваемом состоянии градиенты всех функций полезности и производственных функций не равны нулю:

$$\nabla u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0} \ \forall i \in I \quad \text{и} \quad \nabla g_j(\hat{\mathbf{y}}_j) \neq \mathbf{0} \ \forall j \in J.$$

Тогда найдется вектор цен $\mathbf{p}$ и трансферты S_i, $i = 1, \ldots, m$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — общее равновесие. ┘

Доказательство: Выше мы доказали, что в условиях теоремы найдутся множители Лагранжа $\lambda_i > 0$ $(i \in I)$, $\mu_j > 0$ $(j \in J)$ и σ_k $(k \in K)$, такие что в состоянии $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ выполняются следующие условия первого порядка:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \sigma_k \ \forall i, k \quad \text{и} \quad \mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \forall j, k.$$

[20] Здесь достаточно потребовать квазивогнутость.

Возьмем в качестве равновесных цен множители Лагранжа для балансовых ограничений, т. е. $p_k = \sigma_k$ $(k \in K)$ и выберем такие трансферты S_i, чтобы доход каждого потребителя совпадал с расходами, требуемыми на покупку набора $\hat{\mathbf{x}}_i$ при ценах $\mathbf{p}$ $(\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i)$, т. е.

$$S_i = \beta_i - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j \in J} \gamma_{ij}\mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}_j = \mathbf{p}\Big(\hat{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j \in J} \gamma_{ij}\hat{\mathbf{y}}_j\Big).$$

Нетрудно проверить, что сумма этих трансфертов равна нулю.

Для того чтобы доказать, что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является равновесием, нам достаточно доказать, (1) что для всех потребителей $\hat{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходах $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$ и (2) что для всех производителей $\hat{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\mathbf{p}$.

(1) Очевидно, что набор $\hat{\mathbf{x}}_i$ является допустимым в задаче потребителя. Докажем, что он является оптимальным. Для этого воспользуемся обратной теоремой Куна—Таккера.

Требуется найти неотрицательный множитель Лагранжа ν_i для бюджетного ограничения, такой что для $k \in K$ выполнены условия (см. п. 4.2.1)

$$\frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k.$$

Этому требованию удовлетворяет $\nu_i = 1/\lambda_i$, поскольку выполнено $\lambda_i \partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik} = \sigma_k$ и $\lambda_i > 0$.

Условие дополняющей нежесткости для бюджетного ограничения выполнено, поскольку в точке $\hat{\mathbf{x}}_i$ бюджетное ограничение активно. Так как функция полезности вогнута[21], бюджетное ограничение задается линейной (а значит, вогнутой) функцией, множество X_i выпукло, то выполнены все требования обратной теоремы Куна—Таккера. Следовательно, $\hat{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя.

(2) Докажем теперь, что технология $\hat{\mathbf{y}}_j$ является оптимальной для j-го производителя. Требуется найти неотрицательный множитель Лагранжа κ_j для технологического ограничения, такой что для $k \in K$ выполнены условия (см. п. 4.2.1)

$$\kappa_j \frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} = p_k.$$

Этому требованию удовлетворяет $\kappa_j = \mu_j$. Условие дополняющей нежесткости для технологического ограничения выполнено, посколь-

[21] Фактически здесь достаточно квазивогнутости, поскольку $\nabla u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0}$ (см. Теорему B.71 в Приложении B, с. 1143).

ку соответствующее условие с точностью до замены μ_j на κ_j выполнено в Парето-оптимуме. Таким образом, выполнены условия Куна—Таккера, и, поскольку целевая функция (прибыль) линейна, а неявная производственная функция, задающая ограничение задачи, вогнута, то $\hat{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя. ■

Замечание: В экономике без трансфертов, чтобы доходы β_i равнялись требуемым расходам $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$, следует соответствующим образом распределить собственность, т. е. указать начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i$ и доли в прибылях γ_{ij}. Для этого достаточно найти долю θ_i каждого потребителя в совокупных расходах потребителей

$$\theta_i = \frac{\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i}{\sum_{s\in I}\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_s}$$

и поделить собственность в соответствующих пропорциях, т. е. взять $\gamma_{ij} = \theta_i$ для всех $i \in I, j \in J$ и $\boldsymbol{\omega}_i = \theta_i\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ для всех $i \in I$, где $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ — совокупные начальные запасы.

В экономике чистого обмена достаточно выбрать $\boldsymbol{\omega}_i = \hat{\mathbf{x}}_i$.

Использование теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме — только один из возможных путей доказательства. Мы воспользовались им здесь, поскольку этот подход понадобится нам в дальнейшем для проверки противоположных утверждений — о неоптимальности несовершенных рынков. Условия дифференцируемости функций во второй теореме благосостояния на самом деле избыточны.

Теорема 4.7 (вторая теорема благосостояния без дифференцируемости):

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — оптимальное по Парето состояние и выполнено следующее:

- у всех потребителей множества допустимых потребительских наборов X_i выпуклы, предпочтения $\langle \succ_i, \succsim_i, \sim_i \rangle$ выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы;
- технологические множества Y_i каждого производителя выпуклы;
- $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in I$ (т. е. данное Парето-оптимальное состояние является внутренним).

Тогда существуют цены $\mathbf{p}$ и трансферты S_i, $i = 1, \ldots, m$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является общим равновесием. ┘

Доказательство: Введем ряд обозначений которые нам понадобятся в дальнейшем для доказательства этого утверждения.

Обозначим множество наборов, которые лучше для потребителя i, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$, через $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$:

$$L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i) = \{\, \mathbf{x}_i \in X_i \mid \mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i \,\}.$$

Поскольку предпочтения потребителей выпуклы, и множества допустимых потребительских наборов X_i выпуклы, то, как нетрудно показать, $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$ также выпуклы, а значит, их сумма

$$L^{++}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i \in I} L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i) = \left\{ \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i \;\middle|\; \mathbf{x}_i \in X_i, \mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i \ \forall i \in I \right\}$$

выпукла. Кроме того, $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$ непусты по локальной ненасыщаемости, значит, и $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ непусто.

Множество производственных возможностей

$$Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_{j \in J} Y_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \left\{ \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \;\middle|\; \mathbf{y}_j \in Y_j \ \forall j \in J \right\}$$

тоже является выпуклым в силу выпуклости технологических множеств и непустым, так как ему принадлежит точка $\sum_{j \in J} \hat{\mathbf{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$.

Поскольку $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — оптимум Парето, то множества $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ и $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ не имеют общих точек:

$$L^{++}(\hat{\mathbf{x}}) \cap (Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = \varnothing.$$

Предположим, что существует общая точка $\mathbf{z} \in L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ и $\mathbf{z} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Это означало бы, что существует состояние экономики $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, такое что $\mathbf{x}_i \in X_i$, $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i \ \forall i$, $\mathbf{y}_j \in Y_j \ \forall j$, $\sum_{i \in I} \mathbf{x}_i = \mathbf{z}$ и $\sum_{j \in J} \mathbf{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \mathbf{z}$. Тем самым мы нашли бы допустимое состояние экономики, которое доминирует[22] оптимальное по Парето состояние $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, чего быть не может.

Поскольку множества $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ и $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ выпуклы, непусты и не пересекаются, к ним применима теорема отделимости[23]. Поэтому существуют вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ и число $r \in \mathbb{R}$, такие что

$$\mathbf{pz} \geqslant r, \ \text{ если } \mathbf{z} \in L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$$

и

$$\mathbf{pz} \leqslant r, \ \text{ если } \mathbf{z} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

[22]Причем строго доминирует.

[23]См. Теорему В.41 на с. 1125 в Приложении В.

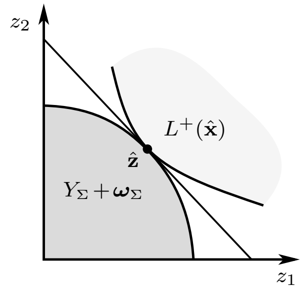


Рис. 4.9. *Иллюстрация к доказательству второй теоремы благосостояния*

Пусть $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)$ — такой набор допустимых потребительских наборов, что $\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i \ \forall i$, что можно по аналогии записать как $\mathbf{x} \in L^+(\hat{\mathbf{x}})$. Покажем, что $\mathbf{p}\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i \geqslant r$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что для любого натурального числа N в окрестности $V_{1/N}(\mathbf{x}_i)$ набора $\mathbf{x}_i$ существует набор $\mathbf{x}_i^N$, такой что $\mathbf{x}_i^N \succ_i \mathbf{x}_i$, где $V_{1/N}(\mathbf{x}_i)$ — шар с центром $\mathbf{x}_i$ и радиусом $1/N$. Так как $\mathbf{x}_i^N \succ_i \mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i$, то $\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i^N \in L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$, откуда $\mathbf{p}\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i^N \geqslant r$. Последовательность $\mathbf{x}_i^N$ сходится к $\mathbf{x}_i$. Переходя к пределу по N, получим требуемое неравенство.

Введем обозначение

$$\hat{\mathbf{z}} = \sum_{i\in I}\hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{j\in J}\hat{\mathbf{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

(Второе равенство здесь является следствием балансов по благам.) С одной стороны, так как $\hat{\mathbf{z}} \in L^+(\hat{\mathbf{x}})$ (по рефлексивности отношения $\succcurlyeq_i$ — каждый из наборов $\hat{\mathbf{x}}_i$ не хуже себя самого), то $\mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} \geqslant r$. С другой стороны, так как Парето-оптимум технологически допусти́м, то $\hat{\mathbf{z}} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и $\mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} \leqslant r$. Следовательно, $r = \mathbf{p}\hat{\mathbf{z}}$.

Таким образом, мы нашли гиперплоскость, проходящую через точку $\hat{\mathbf{z}}$ и разделяющую множества $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и $L^+(\hat{\mathbf{x}})$ (см. Рис. 4.9). Возьмем коэффициенты $\mathbf{p}$, соответствующие этой гиперплоскости, в качестве цен и покажем, что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является равновесием при соответствующем подборе трансфертов.

Покажем сначала, что при этих ценах максимум прибыли предприятия j достигается на технологии $\hat{\mathbf{y}}_j$. Пусть $\mathbf{y}_j \in Y_j$. Тогда

$$\mathbf{y}_j + \sum_{s\neq j}\hat{\mathbf{y}}_s + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$$

и выполнено

$$\mathbf{p}\Big(\mathbf{y}_j + \sum_{s \neq j} \hat{\mathbf{y}}_s + \boldsymbol{\omega}_\Sigma\Big) \leqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{p}\Big(\sum_{s \in J} \hat{\mathbf{y}}_s + \boldsymbol{\omega}_\Sigma\Big).$$

Отсюда $\mathbf{p}\mathbf{y}_j \leqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}_j$. Другими словами, производитель не может при ценах $\mathbf{p}$ увеличить свою прибыль, выбрав $\mathbf{y}_j$ вместо $\hat{\mathbf{y}}_j$, т. е. $\hat{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя.

Аналогичным образом доказывается, что любой набор $\mathbf{x}_i \in X_i$, который не хуже $\hat{\mathbf{x}}_i$ ($\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i$), не может стоить дешевле, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$, в ценах $\mathbf{p}$. Действительно, так как $(\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n)$ не хуже для каждого потребителя, чем $\hat{\mathbf{x}}$, то

$$\mathbf{p}\Big(\mathbf{x}_i + \sum_{s \neq i} \hat{\mathbf{x}}_s\Big) \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{p} \sum_{s \in I} \hat{\mathbf{x}}_s.$$

Таким образом, из $\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i$ следует $\mathbf{p}\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$.

Докажем, что при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$ полезность каждого потребителя i максимальна в точке $\hat{\mathbf{x}}_i$. Для этого требуется усилить только что доказанный факт и доказать, что из $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$ следует $\mathbf{p}\mathbf{x}_i > \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Другими словами, требуется доказать, что лучший набор $\mathbf{x}_i$ ($\mathbf{x}_i \in X_i$ и $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$) должен стоить дороже, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$ в ценах $\mathbf{p}$. Мы уже доказали, что $\mathbf{p}\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$, поэтому осталось показать, что равенство здесь достигаться не может.

Предположим, что это не так и $\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$, притом что $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$.

Условие $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ означает, что $\hat{\mathbf{x}}_i$ принадлежит множеству X_i вместе с некоторой своей окрестностью. Поскольку не все цены равны нулю ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), то в этой окрестности найдется набор $\mathbf{x}'_i$, который в ценах $\mathbf{p}$ стоит дешевле $\hat{\mathbf{x}}_i$ и, следовательно, дешевле $\mathbf{x}_i$. Действительно, пусть $p_k \neq 0$ для некоторого блага k. Если $p_k > 0$, то можно немного уменьшить потребление этого блага по сравнению с $\hat{x}_{ik}$, а если $p_k < 0$, то немного увеличить. Таким образом, существует допустимый набор $\mathbf{x}'_i$, такой что $\mathbf{p}\mathbf{x}'_i < \mathbf{p}\mathbf{x}_i$.

Рассмотрим выпуклые комбинации $\alpha\mathbf{x}'_i + (1-\alpha)\mathbf{x}_i$, $\alpha \in [0, 1]$. Поскольку множество допустимых потребительских наборов X_i выпукло, то все такие наборы допустимы. В силу непрерывности предпочтений, если положительное α является достаточно малым, то набор

$$\mathbf{x}''_i = \alpha\mathbf{x}'_i + (1-\alpha)\mathbf{x}_i$$

лучше, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$. Кроме того, так как $\mathbf{p}\mathbf{x}'_i < \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i$, то $\mathbf{p}\mathbf{x}''_i < \mathbf{p}\mathbf{x}_i$. (См. Рис. 4.10.)

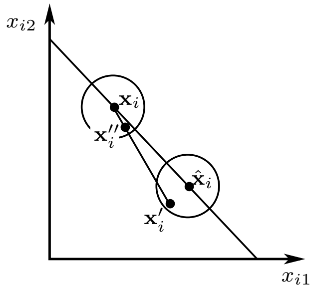


Рис. 4.10. *Иллюстрация к доказательству второй теоремы благосостояния*

В то же время, из $\mathbf{x}''_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$ следует, что $\mathbf{p}\mathbf{x}''_i \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Получили противоречие.

Таким образом, $\mathbf{p}\mathbf{x}_i > \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Значит, невозможно найти допустимый набор, который был бы лучше $\hat{\mathbf{x}}_i$, но стоил бы не дороже, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$. Таким образом, $\hat{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$.

Для того чтобы доказать, что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — равновесие Вальраса, нам осталось найти такие трансферты, равные в сумме нулю, чтобы с учетом трансфертов $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Рассуждения здесь повторяют рассуждения Теоремы 4.6. ■

Рассмотрим примеры того, что отказ от предположений второй теоремы благосостояния приводит к тому, что она перестает быть верной. При этом удобно воспользоваться для иллюстрации ящиком Эджворта. Для того чтобы на основе Парето-оптимума можно было построить равновесие, требуется найти прямую, которая бы разделяла множества $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$ на диаграмме Эджворта. Например, на Рис. 4.1 такая гиперплоскость имеется, поэтому точка $\bar{\mathbf{x}}$ является одновременно Парето-оптимальной и равновесной. На Рис. 4.4 изображена ситуация, когда первый потребитель имеет невыпуклые предпочтения и Парето-оптимальную точку $\hat{\mathbf{x}}$ нельзя реализовать как равновесие — не существует прямой, которая бы разделяла $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$. Приведем еще несколько примеров.

Пример 4.6
Пусть потребители имеют функции полезности $u_1 = x_{11} + \sqrt{x_{12}}$ и $u_2 = x_{22}$.

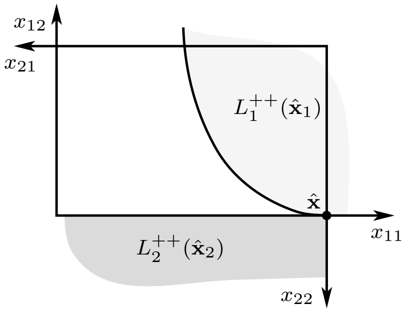


Рис. 4.11. *Контрпример ко второй теореме благосостояния: не внутренний Парето-оптимум*

Правый нижний угол ящика Эджворта ($\hat{\mathbf{x}}$) лежит на границе Парето, но не может быть реализован как равновесие ни при каких ценах (см. Рис. 4.11). Такая экономика представляет собой контрпример ко второй теореме благосостояния с не внутренним оптимумом Парето. Прямая, разделяющая $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$, существует — она проходит горизонтально. Однако это разделение нестрогое, поскольку частично эта прямая лежит в $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$. Действительно, нетрудно проверить, что при ценах $p_1 = 0$ и $p_2 > 0$ набор $\hat{\mathbf{x}}_1$ не является решением задачи первого потребителя, так как полезность не ограничена сверху. △

В следующем примере вместо ящика Эджворта используется диаграмма, аналогичная той, что изображена на Рис. 4.2.

Пример 4.7

Пусть в экономике имеется один потребитель с локально насыщаемыми предпочтениями и один производитель. Точка Парето-оптимума $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} + \hat{\mathbf{y}}$ лежит на границе производственных возможностей и находится внутри «толстой» кривой безразличия (см. Рис. 4.12). Так как множество производственных возможностей и множество лучших наборов $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ не имеют на диаграмме общих точек, то это действительно оптимум.

Чтобы точка $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} + \hat{\mathbf{y}}$ была равновесной, нужно, чтобы отношение цен было равно наклону границы производственных возможностей в этой точке. Однако в рамках бюджетного ограничения, соответствующего такому наклону бюджетной прямой, точка $\hat{\mathbf{x}}$ не будет решением задачи потребителя, так как гипотетический бюджетный треугольник имеет общие точки с множеством $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$.

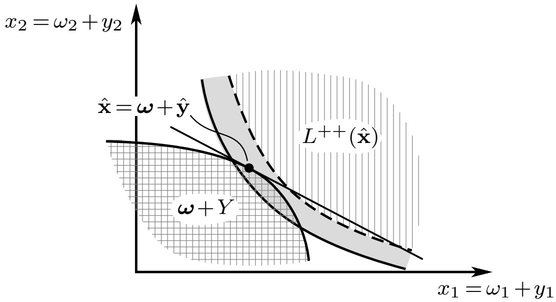


Рис. 4.12. *Контрпример ко второй теореме благосостояния: предпочтения потребителя не являются локально ненасыщаемыми*

Аналогичный пример можно построить, если взять Парето-оптимум внутри множества производственных возможностей и внутри «толстой» кривой безразличия. Из такого оптимума нельзя сконструировать равновесие, поскольку (при ненулевых ценах) решение задачи производителя должно лежать на границе технологического множества. На этом примере видно, что рыночное равновесие, в отличие от концепции оптимальности по Парето, предполагает самостоятельную роль предприятий и технологическую эффективность. В равновесии достигается технологическая эффективность даже тогда, когда с общественной точки зрения она бесполезна.

Оба эти примера демонстрируют некоторую содержательную недостаточность второй теоремы благосостояния. Дело в том, что в обеих экономиках имеются Парето-оптимумы, эквивалентные рассматриваемым Парето-оптимумам с точки зрения потребителей (в данном случае — единственного потребителя), на основе которых уже *можно* сконструировать равновесие. △

Задачи

4.43 Найдите равновесие и Парето-границу в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями:

$$u_1(\mathbf{x}_1) = \ln(x_{11}) + \ln(x_{12}), \qquad u_2(\mathbf{x}_2) = \ln(x_{21}) + \ln(x_{22}),$$
$$\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 3), \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = (3, 1).$$

Проиллюстрируйте этот анализ на диаграмме Эджворта и дайте графическую интерпретацию обеим теоремам благосостояния.

4.44 В экономике с двумя потребителями и двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 2\sqrt{x_{12}} \quad \text{и} \quad u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы первого потребителя равны $(1, 3)$, а второго — $(2, 1)$.

Пусть $x_{11} = 2$, $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $S_1 = -1$, $S_2 = 1$, где S_i — величина трансфертов.

(A) Покажите формально, что $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ является равновесием с трансфертами.

(B) Является ли это равновесие оптимальным по Парето? Обоснуйте свой ответ.

4.45 В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = 2\sqrt{x_1} + x_2,$$

а его начальные запасы равны $(3, 1)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g = -y_1 + 2\sqrt{-y_2}.$$

Пусть $x_1 = 4$, $x_2 = 3/4$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1/4$.

(A) Покажите формально, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является Парето-оптимальным состоянием.

(B) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

4.46 В экономике с двумя потребителями и двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 4\sqrt{x_{12}} \quad \text{и} \quad u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы первого потребителя равны $(2, 4)$, а второго — $(1, 1)$. Пусть $x_{11} = 1$, $x_{12} = 2$, $x_{21} = 2$, $x_{22} = 3$.

(A) Покажите формально, что $\mathbf{x}$ является Парето-оптимальным состоянием.

(B) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

4.47 В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = x_1 + 2\sqrt{x_2},$$

а его начальные запасы равны $(3, 0)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g = 4\sqrt{-y_1} - y_2.$$

Пусть $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $y_1 = -1$, $y_2 = 4$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$.

(А) Покажите формально, что $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ является равновесием.

(В) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

4.48 Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы неприменима из-за нарушения предположений и равновесие нарушало бы ее утверждение. Можно привести графический пример, либо указать конкретные начальные запасы, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, функции полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ и равновесие $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$.

4.49 Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы неприменима из-за нарушения предположений, но утверждение первой теоремы благосостояния оставалось бы справедливым.

4.50 Привести пример экономики обмена с двумя потребителями и двумя благами, для которой вторая теорема благосостояния неприменима и

(А) утверждение второй теоремы благосостояния остается справедливым;

(В) утверждение второй теоремы благосостояния неверно.

Этом может быть графический пример или же пример с конкретными начальными запасами $\boldsymbol{\omega}$, функциями полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ и состоянием этой экономики $\mathbf{x}$.

4.51 Сформулируйте и докажите теоремы благосостояния для модели экономики обмена в условиях строгой монотонности, строгой выпуклости предпочтений и положительности совокупных начальных запасов.

4.52 Для каждого из предположений второй теоремы благосостояния покажите (приведя соответствующий пример), что отказ от этого предположения приводит к тому, что утверждение теоремы оказывается неверным.

4.53 Что можно сказать о соотношениях предельных норм замены товаров в потреблении и производстве в точке равновесия? Связано ли это соотношение с отсутствием Парето-улучшающего изменения состояния? Если данное соотношение нарушается, как следует строить Парето-улучшение данного состояния экономики?

4.54 Пусть допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{0}$. Определите, какие из следующих функций полезности представляют предпочтения, удовлетворяющие условиям первой и (или) второй теоремы благосостояния:

(A)	$u(x_1, x_2) = x_1$;	(B)	$u(x_1, x_2) = \exp(x_1)x_2$;
(C)	$u(x_1, x_2) = \text{const}$;	(D)	$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
(E)	$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$;	(F)	$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
(G)	$u(x_1, x_2) = -x_1$;	(H)	$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$;
(I)	$u(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$;	(J)	$u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.

4.55 Пусть начальные запасы в экономике обмена лежат на Парето-границе. Какие дополнительные условия гарантируют, что на основе точки начальных запасов можно построить равновесие?

4.56 Пусть в экономике обмена с двумя потребителями их функции полезности равны

$$u_1(\mathbf{x}_1) = x_{11}^2 + x_{12}^2 \quad \text{и} \quad u_2(\mathbf{x}_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2.$$

Найти Парето-границу. Какие из точек Парето-границы можно реализовать как равновесие подбором цен и распределения собственности? Решите эту задачу для случаев, когда

(A) суммарные начальные запасы двух благ одинаковы;

(B) суммарные начальные запасы двух благ различаются.

4.57 В классической экономике обмена с двумя потребителями, функции полезности которых, заданные на $\mathbb{R}_+^2$, равны

(1) $u_1 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 + x_1 - x_2$;

(2) $u_1 = \min\{x_1, x_2\}, \quad u_2 = 6 - x_1 + x_2$;

(3) $u_1 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 - x_1 - x_2$.

(A) Определите, в каких из трех экономик окажется, что любое равновесие Парето-оптимально (почему именно в этих, а в других — нет?).

(B) Определите, в каких из трех экономик окажется, что любое Парето-оптимальное состояние $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ можно превратить в равновесие подбором распределения собственности (почему именно в этих, а в других — нет?).

4.58 Докажите, что общее равновесие принадлежит слабой границе Парето. Какие предположения здесь требуется сделать?

4.59 Сформулируйте и докажите вариант первой теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) на основе сопоставления дифференциальных характеристик Парето-оптимальных и равновесных состояний. Какие дополнительные предположения о свойствах функций полезности (помимо дифференцируемости) необходимо сделать?

4.60 Первая теорема благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) доказывается от противного: предполагаем, что существует альтернативное к равновесному состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, более желательное для некоторого потребителя i. Условие локальной ненасыщаемости предпочтений (сформулировать) используется для того, чтобы проверить, что...

- альтернативный вариант дороже чем равновесный для потребителя i;
- спрос сбалансирован с предложением в равновесии;
- . . . .

Укажите словами верный вариант взамен приведенных и запишите его формулой.

4.61 В доказательстве первой теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), не использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того, чтобы применить теорему . . . . . . к множествам . . . . Сформулируйте применяемую теорему и определение соответствующих множеств.

4.62 В доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того чтобы с помощью теоремы . . . . . . доказать, что соответствующие компоненты построенного состояния экономики являются решениями задач . . . . Сформулируйте применяемую теорему, соответствующие задачи и способ применения теоремы.

4.63 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия), использующем дифференцируемость, условия на градиенты функций нужны для того, чтобы применить Теорему . . . . . . к задаче . . . .

4.64 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при отсутствии свойства локальной ненасыщаемости не удается показать, что . . . . . . , так как может оказаться, что . . . . (Сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

4.65 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия выпуклости предпочтений не удается показать, что . . . . . . , так как может оказаться, что ...... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

4.66 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия, что рассматриваемая точка — внутренняя, не удается показать, что ......, так как может оказаться, что ...... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

4.67 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесных распределений) при невыполнении условия локальной ненасыщаемости, не удается показать, что ......, так как может оказаться, что ...... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

4.68 Пусть два потребителя (потребление первого обозначим x, потребление второго обозначим z) в классической ситуации обмена имеют функции полезности

$$u_x(\mathbf{x}) = x_1^a + x_2^b, \quad u_z(\mathbf{z}) = cz_1 + dz_2,$$

где $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$, и обладают начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_x$ и $\boldsymbol{\omega}_z$.

(A) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно гарантировать, что состояние экономики, не улучшаемое по Парето, можно реализовать как равновесие?

(B) Предположим, что в этой экономике осуществилось равновесие. При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно гарантировать, что оно не улучшаемо по Парето?

(C) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно утверждать, что для обоих потребителей равновесие не лучше, чем начальное состояние?

(D) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно утверждать, что для одного из потребителей равновесие не лучше, чем начальное состояние? о каком из потребителей идет речь?

4.69 В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, а другой — $u_z(z_1, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (1, 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2, 1)$.

(A) Укажите функцию $u_z(\cdot)$ и равновесие Вальраса такие, что равновесное состояние не является Парето-оптимальным состоянием данной экономики.

(B) Какое условие теоремы (какой?) при этом будет нарушаться?

(C) Объясните, почему это равновесие не Парето-оптимально.

4.70 В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2)$, а другой — $u_z(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (4, 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2, 2)$.

(A) Укажите функцию $u_x(\cdot)$ и равновесие Вальраса в соответствующей экономике такие, что равновесное состояние этой экономики не является Парето-оптимальным. Объяснить, почему это равновесие не Парето-оптимально.

(B) Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

4.71 В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, а другой — $u_z(z_1, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (3, 2)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2, 1)$.

(A) Укажите такую функцию $u_z(\cdot)$, чтобы не каждый Парето-оптимум можно было реализовать как равновесие. Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

(B) Какие именно Парето-оптимальные состояния нельзя реализовать как равновесие? Объяснить, почему.

4.72 В экономике имеются один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(\mathbf{y}) = -y_1 - \sqrt{y_2}$, и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (2, 0)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, Bx_2)$, $u = \max(Ax_1, Bx_2)$ или же $u = Ax_1 + Bx_2$. Выберите функцию и подберите параметры A и B так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1, 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

4.73 В экономике имеются потребители $i = 1, 2$ с функциями полезности $u_i(x_{iA}, x_{iB})$, где $x_{iA}, x_{iB} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma A}, \omega_{\Sigma B}) = (2, 2)$. Известно, что $u_2 = \sqrt{x_{2A}} + x_{2B}$, а другая функция полезности может быть одного из трех видов: $u_1 = \alpha \ln(1 + x_{1A}) + \beta \ln(1 + x_{1B})$, $u_1 = \alpha x_{1A} + \beta x_{1B}$ или же $u_1 = \alpha (x_{1A})^2 + \beta (x_{1B})^2$. Выберите функцию и подберите параметры α и β так, чтобы точка $(x_{1A}, x_{1B}) = (2, 0)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

4.74 В экономике имеются один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(\mathbf{y}) = -y_1 - y_2$, и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (1, 3)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, x_2)$, $u = Ax_1 + x_2$ или же $u = \max(x_1 x_2, A)$. Выберите функцию и подберите параметр A так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1, 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему ее нельзя реализовать как равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

4.75 В экономике два потребителя $i = 1, 2$ с функциями полезности $u_i(x_{iA}, x_{iB})$, где $x_{iA}, x_{iB} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma A}, \omega_{\Sigma B}) = (2, 2)$. Известно, что $u_1 = (x_{1A})^2 + (x_{1B})^2$, а другая функция полезности может быть одного из трех видов: $u_2 = \max(x_{2A}, \alpha + x_{2B})$, $u_2 = \alpha x_{2A} + x_{2B}$ или же $u_2 = \alpha x_{2A} x_{2B}$. Выберите функцию и подберите параметр α так, чтобы точка $(x_{1A}, x_{1B}) = (1, 2)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

4.76 Для выполнения первой теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...
(A) только локальной ненасыщаемости,
(B) локальной ненасыщаемости и вогнутости,
(C) дифференцируемости и вогнутости,
(D) только вогнутости.

4.77 Для выполнения второй теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...
(A) локальной ненасыщаемости,
(B) локальной ненасыщаемости и вогнутости,
(C) вогнутости,
(D) вогнутости и дифференцируемости.

4.78 Если функция полезности одного из потребителей является локально ненасыщаемой, то...
(A) первая теорема благосостояния несправедлива;
(B) бюджетное ограничение выполняется как равенство;
(C) точка равновесия не является внутренней;

(D) вторая теорема благосостояния несправедлива.

4.79 Вторая теорема благосостояния может не выполняться, если...

(A) у одного из потребителей в его множестве потребительских наборов есть наилучший набор;

(B) технологические множества выпуклы;

(C) функция полезности хотя бы одного из потребителей недифференцируема;

(D) функция полезности хотя бы одного из потребителей локально ненасыщаема.

4.80 При каких дополнительных предположениях относительно параметров модели обмена (с m потребителями) и совпадающими, выпуклыми и строго монотонными предпочтениями, представимыми непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, распределение, состоящее из векторов начальных запасов, можно реализовать как равновесие? при каких ценах?

4.81 Рассмотрите экономику обмена с двумя благами, двумя потребителями с функциями полезности $u_1 = x_{11}$, $u_2 = x_{21}$ $(x_{ik} \geqslant 0)$ и положительными совокупными начальными запасами $(\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0)$. Покажите формально, что выполнены следующие утверждения:

(A) Любая точка ящика Эджворта $(\mathbf{x}_1 \in [0, \omega_{\Sigma 1}] \times [0, \omega_{\Sigma 2}])$ принадлежит слабой и сильной границе Парето.

(B) Каждую из точек ящика Эджворта можно реализовать как равновесие, и при этом $p_2 = 0$.

4.82 Рассмотрите экономику обмена с двумя благами, двумя потребителями с функциями полезности $u_1 = x_{11}$, $u_2 = x_{22}$ $(x_{ik} \geqslant 0)$ и положительными совокупными начальными запасами $(\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0)$. Покажите формально, что выполнены следующие утверждения:

(A) Правая $(x_{11} = \omega_{\Sigma 1},\ x_{12} \in [0, \omega_{\Sigma 2}])$ и нижняя $(x_{11} \in [0, \omega_{\Sigma 1}],\ x_{12} = 0)$ стороны ящика Эджворта составляют слабую границу Парето, а правый нижний угол $(\mathbf{x}_1 = (\omega_{\Sigma 1}, \omega_{\Sigma 2}))$ — (сильную) границу Парето.

(B) Сильную границу Парето можно реализовать как равновесие при любых неотрицательных ценах.

4.83 В ситуации Примера 4.5 при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально сильную и слабую границы Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие. Как соотносятся между собой эти три множества?

4.84 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности, заданные на $X_i = \mathbb{R}^2_+$:

$$u_1 = -(x_{11} - 1)^2 - (x_{12} - 1)^2 \quad \text{и} \quad u_2 = 2x_{21} + x_{22}.$$

При достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

4.85 В ситуации Примера 4.6 при положительных совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

4.86 Могут ли в экономике обмена с одинаковыми предпочтениями потребителей и одинаковыми начальными запасами существовать возможности для взаимовыгодных обменов?

4.87 Могут ли в экономике обмена с одинаковыми выпуклыми предпочтениями потребителей и одинаковыми начальными запасами существовать возможности для взаимовыгодных обменов?

Приложение 4.А Теоремы существования равновесия

4.А.1 Существование равновесия в экономике обмена

Приведем альтернативный вариант теоремы существования равновесия в модели обмена, в котором, в отличие от теоремы существования, приведенной в основном тексте, используются более слабые условия на избыточный спрос.

Теорема 4.8:

Предположим, что функция $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ удовлетворяет следующим условиям:

* $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ непрерывна на $\mathcal{S}_{+}^{l-1} = \{\, \mathbf{p} > \mathbf{0} \mid \sum_{k \in K} p_k = 1 \,\}$;
* $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ положительно однородна нулевой степени на $\mathcal{S}_{+}^{l-1}$;
* выполнено тождество $\mathbf{pE}(\mathbf{p}) = 0 \ \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}_{+}^{l-1}$ (закон Вальраса);
* функции избыточного спроса ограничены снизу, т. е. существует число t, такое что

$$E_k(\mathbf{p}) > t \ \forall k \ \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1};$$

* если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности, т. е. если $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\mathbf{p}^n \to \mathbf{p}^0$ при $n \to \infty$, причем существует благо k', такое что $p_{k'}^0 = 0$, то

$$\max_k (E_k(\mathbf{p}^n)) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда существует вектор $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, такой что $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. ┘

Доказательство: Доказательство условно разобьем на три этапа:

(1) построение отображения единичного симплекса $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя;

(2) проверка замкнутости графика и выпуклозначности построенного отображения и применение к нему теоремы о неподвижной точке;

(3) демонстрация того, что найденная неподвижная точка является вектором равновесных цен в рассматриваемой экономике.

(1) Каждой цене $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1}_+$ сопоставим множество

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \;\middle|\; \mathbf{qE}(\mathbf{p}) \geqslant \mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}) \;\forall \mathbf{q}' \in \mathcal{S}^{l-1} \right\} = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1}} \mathbf{qE}(\mathbf{p})$$

и тем самым построим отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ из $\mathcal{S}^{l-1}_+$ в $\mathcal{S}^{l-1}$. Другими словами, значение отображения $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ — множество всех векторов цен из $\mathcal{S}^{l-1}$, максимизирующих стоимость избыточного спроса, вычисленного при старых ценах $\mathbf{p}$. Можно заметить, что любому неравновесному вектору цен $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1}_+$ (т. е. в данном случае вектору $\mathbf{p}$, такому что $\mathbf{E}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$) данное отображение ставит в соответствие подмножество (грань меньшей размерности) симплекса цен, а любому равновесному вектору — весь симплекс цен.

На границе симплекса цен $\mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}^{l-1}_+$ определим $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ по правилу:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \;\middle|\; \mathbf{qp} = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \;\middle|\; q_k = 0, \text{ если } p_k > 0 \right\}.$$

Отметим, что множество $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ непусто при любом $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1}$.

(2) Выпуклозначность построенного отображения очевидна в силу того, что условия, определяющие множества $\mathbf{g}(\mathbf{p})$, линейны. Таким образом, для доказательства существования неподвижной точки остается показать, что отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график.

Предположим, что последовательности $\{\mathbf{p}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\{\mathbf{q}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ с пределами $\mathbf{p}^0$ и $\mathbf{q}^0$ соответственно таковы, что $\mathbf{q}^n \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^n)$. Покажем, что $\mathbf{q}^0 \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^0)$. Возможны две ситуации: $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1}_+$ ($\mathbf{p}^0$ лежит внутри симплекса) или $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}^{l-1}_+$ ($\mathbf{p}^0$ лежит на границе симплекса).

В случае $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1}_+$ существует N, такое что при $n > N$ выполнено $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1}_+$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{q}' \in \mathcal{S}^{l-1}$. При $n > N$ выполнено

$$\mathbf{q}^n\mathbf{E}(\mathbf{p}^n) \geqslant \mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}^n).$$

Переходя к пределу, получим, что $\mathbf{q}^0\mathbf{E}(\mathbf{p}^0) \geqslant \mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}^0)$. Тем самым мы показали, что в этом случае $\mathbf{q}^0 \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^0)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1}$. Пусть k — благо, для которого $p_k^0 > 0$. Покажем, что при достаточно больших n выполнено $q_k^n = 0$. Тем самым мы покажем, что $q_k^0 = \lim q_k^n = 0$, и, следовательно, $\mathbf{q}^0 \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^0)$.

Если $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1}$, то по определению отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ имеем $q_k^n = 0$. Таким образом, нам осталось доказать в случае $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}_+^{l-1}$, что если $p_k^0 > 0$, то при достаточно больших n выполнено $q_k^n = 0$. По закону Вальраса имеем

$$p_k^n E_k(\mathbf{p}^n) = -\sum_{k' \neq k} p_{k'}^n E_{k'}(\mathbf{p}^n).$$

Из ограниченности снизу функции избыточного спроса следует, что

$$-\sum_{k' \neq k} \mathbf{p}_{k'}^n E_{k'}(\mathbf{p}^n) \leqslant -t \sum_{k' \neq k} \mathbf{p}_{k'}^n = -t(1 - p_k^n).$$

Отсюда

$$E_k(\mathbf{p}^n) \leqslant -\frac{t(1 - p_k^n)}{p_k^n}.$$

Поскольку p_k^n сходится к положительному пределу, это означает, что значение $E_k(\mathbf{p}^n)$ ограничено сверху. С другой стороны, величина $\max_s\{E_s(\mathbf{p}^n)\}$ стремится к бесконечности. Поэтому при достаточно больших n выполнено неравенство

$$E_k(\mathbf{p}^n) < \max_s\{E_s(\mathbf{p}^n)\}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n вектор $\mathbf{q} \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^n)$ должен иметь $q_k = 0$. Действительно, согласно определению $\mathbf{g}(\cdot)$ для любого вектора $\mathbf{q}'$ из $\mathcal{S}^{l-1}$ должно быть выполнено $\mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}^n) \leqslant \mathbf{q}\mathbf{E}(\mathbf{p}^n)$. Однако если бы $q_k > 0$, то при $E_k(\mathbf{p}^n) < \max_s\{E_s(\mathbf{p}^n)\}$ мы могли бы построить на основе вектора $\mathbf{q}$ вектор $\mathbf{q}'$, для которого $\mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}^n) > \mathbf{q}\mathbf{E}(\mathbf{p}^n)$. Пусть s — такое благо, для которого $E_k(\mathbf{p}^n) < E_s(\mathbf{p}^n)$. Чтобы получить требуемое противоречие можно взять $\mathbf{q}' = \mathbf{q} - q_k\mathbf{e}^k + q_k\mathbf{e}^s$, где $\mathbf{e}^k$ и $\mathbf{e}^s$ — соответствующие орты.

Тем самым мы полностью доказали, что отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график.

Поскольку отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график, выпуклозначно и отображает непустое компактное выпуклое множество $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя, то к нему применима теорема Какутани[24] и существует непо-

[24]См. Теорему В.48 на с. 1129 в Приложении В.

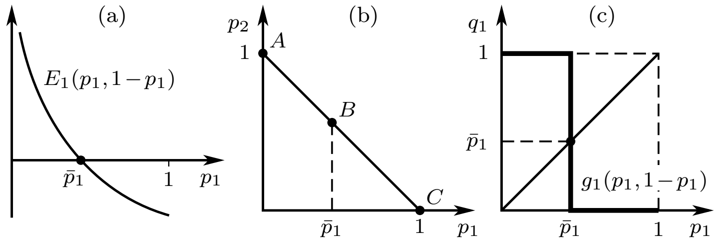


Рис. 4.13. *Иллюстрация доказательства теоремы существования*

движная точка $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{S}^{l-1}$:

$$\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}}).$$

(3) Покажем, что неподвижная точка отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ является вектором цен равновесия.

Неподвижная точка $\bar{\mathbf{p}}$ отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ не может принадлежать границе симплекса цен $(\mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1})$. Этот факт следует из того, что согласно определению $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ для $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1}$ при всех $\mathbf{q} \in \mathbf{g}(\mathbf{p})$ должно быть выполнено равенство $\mathbf{qp} = 0$. Если бы $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}})$, где $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1}$, то мы имели бы $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{p}} = \|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 0$. Этому условию удовлетворяет только точка $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, не принадлежащая симплексу цен.

Таким образом, $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ и поэтому, как было отмечено при определении отображения, $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. Покажем это формально.

Предположим противное. В силу закона Вальраса, если $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) \neq \mathbf{0}$ и $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, то существуют блага s и s', такие что $E_s(\bar{\mathbf{p}}) > 0$ и $E_{s'}(\bar{\mathbf{p}}) < 0$. Поскольку $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}})$ и $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, то по определению $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}})$ для любого $\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1}$ должно быть выполнено $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) \geqslant \mathbf{q}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$. Однако так как $E_s(\bar{\mathbf{p}}) > E_{s'}(\bar{\mathbf{p}})$, то нетрудно подобрать вектор цен $\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1}$ так, что будет выполнено противоположное неравенство $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) < \mathbf{q}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$. Можно взять, например, следующий вектор $\mathbf{q}$: $q_s = \bar{p}_s + \bar{p}_{s'}$, $q_{s'} = 0$, $q_k = \bar{p}_k$, $k \neq s, s'$. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Тем самым мы доказали существование цен $\bar{\mathbf{p}}$, при которых избыточный спрос равен нулю. ■

Приведенное доказательство можно проиллюстрировать графически (см. Рис. 4.13). Отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ определено на симплексе AC (Рис. 4.13(b)). Рассмотрим точки внутренней части отрезка AB. Они соответствуют таким ценам, при которых избыточный спрос на первое благо на Рис. 4.13(a) положителен (при этом, как следствие закона Вальраса, спрос на второе благо отрицателен). Таким точкам отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ сопоставляет множество всех векторов цен из симплекса, при которых стоимость соответствующего избыточного спроса максимальна. Есть только один подобный вектор цен — с максимально возможной ценой первого блага и минимально возможной ценой второго блага, т. е. точка C. Аналогично точки внутренней части отрезка BC (которым соответствуют отрицательный избыточный спрос на первое благо) отображаются в точку A. Далее, точке B соответствует нулевой избыточный спрос. Стоимость нулевого избыточного спроса при всех ценах нулевая, поэтому точка B отображается в весь симплекс (отрезок AC). Граничная точка A отображается в точку C (для $\mathbf{p} = (0, 1)$ имеется только один вектор $\mathbf{q}$ из симплекса, такой что $\mathbf{pq} = 0$,— это $\mathbf{q} = (1, 0)$). Аналогично C отображается в A.

На Рис. 4.13(c) показан график отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ в части, относящейся к ценам первого блага. При цене $\bar{p}_1$ этот график пересекается с диагональю квадрата с единичной стороной. Видим, что $(\bar{p}_1, 1 - \bar{p}_1)$ — неподвижная точка отображения $\mathbf{g}(\cdot)$. Это точка B на Рис. 4.13(b).

Опираясь на доказанную Теорему 4.8, можно показать, что в моделях обмена при непрерывности, строгой выпуклости и строгой монотонности предпочтений потребителей равновесие существует, если *совокупные* начальные запасы строго положительны, т. е. $\boldsymbol{\omega}_\Sigma > \mathbf{0}$. Это утверждение очевидно в силу того, что функция избыточного спроса в модели обмена при данных условиях на предпочтения потребителей является непрерывной, положительно однородной нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса на $\mathcal{S}_+^{l-1}$. Ограниченность избыточного спроса снизу следует из того факта, что спрос потребителей неотрицателен (в качестве константы t можно взять $t = -\max_k \omega_{\Sigma k}$).

Для того чтобы продемонстрировать выполнение условий Теоремы 4.8 для случая непрерывных, строго выпуклых и строго монотонных предпочтений, осталось показать выполнение последнего условия теоремы: если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности. Покажем это формально.

Из $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\boldsymbol{\omega}_\Sigma > \mathbf{0}$ следует $\mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$. Таким образом, существует потребитель i, такой что $\mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega}_i > 0$. Следующее утверждение демонстрирует, что спрос этого потребителя по крайней мере на одно из благ стремится к бесконечности по мере того как $\mathbf{p}^n$ стремиться к $\mathbf{p}^0$, т. е.

$$\max_k x_{ik}(\mathbf{p}^n) \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

что и доказывает, что

$$\max_k E_k(\mathbf{p}^n) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 4.9:

Пусть $\{\mathbf{p}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ — последовательность цен, причем $\mathbf{p}^n \to \mathbf{p}^0$ при $n \to \infty$, и существует благо k, такое что $p_k^0 = 0$. Пусть, кроме того,

- потребитель имеет строго монотонные непрерывные предпочтения, заданные на $X_i = \mathbb{R}_+^l$;
- начальные запасы потребителя $\boldsymbol{\omega}$ таковы, что $\mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega} > 0$[25].

Тогда

$$\max_k x_k(\mathbf{p}^n) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство: Предположим противное. Пусть спрос потребителя на все товары ограничен, т. е. существует некоторое число A, такое что $\mathbf{0} \leqslant x_k(\mathbf{p}) \leqslant A$ для всех $k \in K$. В силу того что бесконечная последовательность на компакте имеет точки сгущения, найдется некоторая подпоследовательность $\{\mathbf{p}^{n_t}\}$, такая что

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) \to \bar{\mathbf{x}}.$$

Так как $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$ — оптимальное решение задачи потребителя, а предпочтения строго монотонны, то при ценах $\mathbf{p}^{n_t}$ выполняется бюджетное равенство, т. е.

$$\mathbf{p}^{n_t}\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) = \mathbf{p}^{n_t}\boldsymbol{\omega}.$$

Переходя в этом тождестве к пределу, получим, $\mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega}$.

Пусть $p_k^0 = 0$ для некоторого блага $k \in K$. Тогда в силу строгой монотонности предпочтений $\bar{\mathbf{x}} + \sigma\mathbf{e}^k \succ \bar{\mathbf{x}}$, где σ — произвольное положительное число, а $\mathbf{e}^k$ — орт. В силу того, что предпочтения потребителей непрерывны, найдется такое $\delta > 0$, что $\hat{\mathbf{x}} \succ \bar{\mathbf{x}}$, где $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \sigma\mathbf{e}^k - \delta\mathbf{e}^s$, а $s \in K$ — индекс блага, для которого $p_s^0 > 0$. Очевидно также, что

$$\mathbf{p}^0\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}} + \sigma p_k^0 - \delta p_s^0 = \mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}} - \delta p_s^0 < \mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}}.$$

В силу непрерывности предпочтений существует N, такое что $\hat{\mathbf{x}} \succ \mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$ для каждого $t > N$.

[25] Индекс потребителя для упрощения не вводим.

Так как $\mathbf{p}^{n_t} \to \mathbf{p}^0$ и $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) \to \bar{\mathbf{x}}$, то

$$\lim \mathbf{p}^{n_t}(\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) - \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^0(\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) > 0.$$

Из определения предела следует, что найдется число M, такое что для каждого t, большего M, справедливо, что $\mathbf{p}^{n_t}(\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) - \hat{\mathbf{x}}) > 0$, т. е.

$$\mathbf{p}^{n_t}\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) > \mathbf{p}^{n_t}\hat{\mathbf{x}}.$$

Таким образом, мы получили, что при $t > \max\{M, N\}$ набор $\hat{\mathbf{x}}$ строго лучше набора $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$ и при этом стоит дешевле. Тем самым мы получили противоречие с оптимальностью набора $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$. Таким образом, не существует такого A, чтобы $\mathbf{0} \leqslant x_k(\mathbf{p}) \leqslant A$ для всех k, т. е. $\max_k x_k(\mathbf{p}^n) \to \infty$ при $n \to \infty$. ■

Резюмируя проделанные выше рассуждения, сформулируем утверждение о существовании равновесия в экономике обмена при более слабых, чем ранее, предположениях.

Теорема 4.10:

Пусть в экономике обмена предпочтения потребителей заданы на $X_i = \mathbb{R}^l_+$, локально ненасыщаемы, непрерывны, строго выпуклы и монотонны, а совокупные начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > \mathbf{0}$). Тогда в этой экономике существует равновесие, такое что $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$. ┘

4.A.2 Существование равновесия в экономике Эрроу—Дебре

Ниже будет предложено утверждение (о существовании квазиравновесия), на основе которого могут быть установлены различные условия существования равновесия (доказаны теоремы о существовании равновесия) в модели Эрроу—Дебре.

Предваряя это утверждение, сформулируем для потребителей вспомогательную задачу, решение которой при определенных условиях совпадает с решением обычной задачи потребителя. Вместе с тем решения этой задачи ведут себя «достаточно хорошо» при изменении ее параметров (отображение, которое ставит в соответствие вектору цен множество решений данной задачи является полунепрерывным сверху), чем мы и воспользуемся при доказательстве существования квазиравновесия и равновесия.

Модифицированная задача потребителя:

Найти $\bar{\mathbf{x}}_i$, такой что

- $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i \leqslant \beta_i$,
- $\bar{\mathbf{x}}_i$ не хуже, чем любой другой набор $\mathbf{x}_i \in X_i$, который стоит в ценах $\mathbf{p}$ меньше, чем β_i.

$(\mathcal{C}^*)$

Следующее утверждение устанавливает свойства решений данной задачи. Это, в частности, характеристика условий, при которых решение модифицированной задачи потребителя $(\mathcal{C}^*)$ является самым дешевым из тех, которые не хуже для этого потребителя, чем $\bar{\mathbf{x}}_i$. В свою очередь, такая задача минимизации потребительских расходов является взаимной к обычной задаче потребителя, и при определенных условиях эти задачи фактически эквивалентны (см. Теорему 2.6 на с. 127). В данном утверждении, таким образом, приведены условия, при которых решение задачи $(\mathcal{C}^*)$ является решением обычной задачи потребителя.

Теорема 4.11:

Предположим, что предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи $(\mathcal{C}^*)$ при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i. Тогда

{i} любой набор $\mathbf{x}_i \in X_i$, который не хуже $\bar{\mathbf{x}}_i$, сто́ит не меньше β_i $(\mathbf{p}\mathbf{x}_i \geqslant \beta_i)$;

{ii} потребительский набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i = \beta_i$ и минимизирует затраты на достижение уровня благосостояния, определяемого вектором $\bar{\mathbf{x}}_i$, при ценах $\mathbf{p}$, т. е. решает следующую задачу:

$$\begin{gathered} \mathbf{p}\mathbf{x}_i \to \min \\ \mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \bar{\mathbf{x}}_i. \end{gathered}$$ ⌟

Доказательство: {i} Пусть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи $(\mathcal{C}^*)$ и пусть существует допустимый набор $\mathbf{x}_i$, который сто́ит меньше β_i $(\mathbf{p}\mathbf{x}_i < \beta_i)$ и который не хуже $\bar{\mathbf{x}}_i$. Тогда найдется окрестность набора $\mathbf{x}_i$, все наборы в которой дешевле β_i. В этой окрестности существует потребительский набор, который лучше $\mathbf{x}_i$, а значит, и лучше $\bar{\mathbf{x}}_i$, в противоречие с тем, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи $(\mathcal{C}^*)$.

Пункт {ii} является очевидным следствием пункта {i}. ■

Теорема 4.12:

Предположим, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи $(\mathcal{C}^*)$ при ценах $\mathbf{p}$

и доходе β_i, множество X_i выпукло, предпочтения потребителя непрерывны и существует $\mathbf{x}_i \in X_i$, такой что $\mathbf{p}\mathbf{x}_i < \beta_i$. Тогда $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя[26]. ⌟

Доказательство: Утверждение доказывается аналогично пункту {ii} теоремы взаимности (см. Теорему 2.6 на с. 103). ■

Прежде чем приступить к доказательству теорем существования, введем вспомогательное понятие квазиравновесия, основанное на модифицированной задаче потребителя ($\mathcal{C}^*$).

Определение 4.10:

Набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ называется квазиравновесием экономики Эрроу—Дебре, если выполняются следующие условия:

- для каждого потребителя $\bar{\mathbf{x}}_i$ удовлетворяет условиям задачи ($\mathcal{C}^*$) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходах $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j$;
- $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи j-го производителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
- выполнены балансы по каждому благу $k \in K$:

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{j\in J} \bar{y}_{jk} + \sum_{i\in I} \omega_{ik}.$$ ◀

Заметим, что на приобретение потребительского набора, соответствующего квазиравновесию, каждый потребитель тратит весь свой бюджет, т. е. *бюджетное ограничение выполняется как равенство.* Действительно, если хотя бы одно неравенство строгое, то совокупное потребление сто́ит меньше совокупного дохода, а это противоречит допустимости квазиравновесия.

Понятие квазиравновесия отличается от понятия равновесия только формулировкой задачи потребителя. Полунепрерывность сверху спроса для задачи ($\mathcal{C}^*$) имеет место при более общих условиях, чем для обычной задачи потребителя. Соответственно условия существования квазиравновесия оказываются достаточно общими (см. приведенную ниже Теорему 4.13). Выполнение же условий совпадения квазиравновесия и равновесия для многих моделей общего равновесия проверяется достаточно просто. Поэтому представляется удобным разделить условия существования равновесия на условия существования квазиравновесия и условия совпадения квазиравновесия и равновесия. Это позволяет установить на основе одной Теоремы 4.13 серию теорем существования равновесия. С технической точки зрения

[26]Такой $\mathbf{x}_i \in X_i$ существует, например, при условии, что $\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ и $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

преимущество такого двухэтапного подхода заключается в том, что в его рамках условия совпадения решения задачи ($\mathcal{C}^*$) и обычной задачи потребителя требуется обеспечить и проверить только в найденной точке квазиравновесия, а не при всех возможных параметрах задачи потребителя, что, как правило, значительно проще. С содержательной точки зрения такой подход удачен тем, что не требует чрезмерно «смелых» предположений о предпочтениях потребителей и множествах допустимых потребительских наборов.

Теорема 4.13:

Предположим, что

* для каждого потребителя $i \in I$ предпочтения $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ локально ненасыщаемы, выпуклы и непрерывны, X_i — выпуклое замкнутое множество[27], $X_i \subset \mathbb{R}^l_+$, $\boldsymbol{\omega}_i \in X_i$;
* для каждого производителя $j \in J$ технологическое множество Y_j выпукло, замкнуто и содержит нулевой вектор (допустимость бездеятельности);
* совокупное технологическое множество $Y_\Sigma = \sum_{j \in J} Y_j$ обладает свойствами отсутствия рога изобилия (из $\mathbf{y}_\Sigma \in Y_\Sigma \cap \mathbb{R}^l_+$ следует, что $\mathbf{y}_\Sigma = \mathbf{0}$) и необратимости (из $\mathbf{y}_\Sigma \in Y_\Sigma$ и $-\mathbf{y}_\Sigma \in Y_\Sigma$ следует, что $\mathbf{y}_\Sigma = \mathbf{0}$).

Тогда в этой экономике существует квазиравновесие $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$. ⌟

Доказательство: Прежде всего отметим, что из условий теоремы следует ограниченность множества допустимых состояний экономики. В произвольном допустимом состоянии рассматриваемой экономики $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ все потребительские наборы $\mathbf{x}_i$ не содержат отрицательных элементов и, следовательно, их сумма тоже неотрицательна: $\sum_{i \in I} \mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{0}$. Отсюда следует, что множество векторов совокупного производства, соответствующих допустимым состояниям экономики, ограничено снизу:

$$\sum_{j \in J} \mathbf{y}_j \geqslant -\boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

Из предположений теоремы относительно множеств Y_j и Y_Σ следует, что наборы технологий $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_j)_{j \in J}$, такие что $\mathbf{y}_j \in Y_j$ и $\sum_{j \in J} \mathbf{y}_j \geqslant -\boldsymbol{\omega}_\Sigma$, составляют множество, которое является ограниченным. Дока-

[27] Рассуждения остаются по существу теми же, если взять в качестве X_i произвольные выпуклые замкнутые, ограниченные снизу множества.

зательство этого факта достаточно длинное и техническое, и мы его опускаем[28].

Как следствие, можно указать такое число N, что в произвольном допустимом состоянии экономики выполнено $|y_{jk}| \leqslant N$ для всех $j \in J, k \in K$ и $\omega_{\Sigma k} + \sum_{j \in J} y_{jk} \leqslant N$ для всех $k \in K$. Можно выбрать число N таким (это мы используем в дальнейшем), чтобы $\omega_{\Sigma k} \leqslant N$ для всех $k \in K$. При таком выборе N в произвольном допустимом состоянии экономики суммарное потребление по каждому благу $k \in K$ должно удовлетворять ограничениям $0 \leqslant \sum_{i \in I} x_{ik} \leqslant N$, и такому же ограничению удовлетворяют наборы всех потребителей: $0 \leqslant x_{ik} \leqslant N$.

Подобно рассмотренным ранее доказательствам существования мы будем искать квазиравновесие как неподвижную точку некоторого специальным образом сконструированного отображения из выпуклого, компактного, непустого множества $\Theta = \bigtimes_{i=1}^{m} \hat{X}_i \times \bigtimes_{j=1}^{n} \hat{Y}_j \times P$ в себя. Здесь

$$\hat{X}_i = \{ \mathbf{x}_i \in X_i \mid x_{ik} \leqslant N + \varepsilon \; \forall k \in K \},$$
$$\hat{Y}_j = \left\{ \mathbf{y}_j \in Y_j \;\middle|\; |y_{jk}| \leqslant N + \varepsilon \; \forall k \in K \right\},$$
$$P = \left\{ \mathbf{p} \geqslant \mathbf{0} \;\middle|\; \|\mathbf{p}\|^2 \leqslant 1 \right\},$$

где ε — произвольное положительное число. Типичный элемент множества Θ будем обозначать через $\boldsymbol{\theta}$, где $\boldsymbol{\theta} = \left\langle (\mathbf{x}_i)_{i \in I}, (\mathbf{y}_j)_{j \in J}, \mathbf{p} \right\rangle$.

Покажем, что каждое из этих множеств выпукло, непусто, замкнуто и ограничено, а значит, их произведение Θ тоже выпукло, непусто, замкнуто и ограничено. Замкнутость и выпуклость модифицированных множеств допустимых потребительских наборов $\hat{X}_i$ и технологических множеств $\hat{Y}_j$ следует из того, что они являются пересечениями выпуклых замкнутых множеств. Множество $\hat{X}_i$ непусто, поскольку содержит по крайней мере начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i$ ($\boldsymbol{\omega}_i \in X_i$ и $\omega_{ik} \leqslant N$). Кроме того, $\mathbf{0} \in \hat{Y}_j$, т. е. эти множества тоже непусты. Замкнутость, выпуклость и непустота множества цен P очевидны.

Рассмотрим отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon \Theta \rightrightarrows \Theta$ вида

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = \bigtimes_{i \in I} \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) \times \bigtimes_{j \in J} \boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) \times \boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta}),$$

[28] Его можно найти в классической статье K. J. Arrow and G. Debreu• Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* **22** (1954): 265–290. См. также Х. Никайдо• *Выпуклые структуры и математическая экономика*, М.: Мир, 1972.

где отдельные компоненты определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) =$$
$$= \left\{ \mathbf{x}_i' \in \hat{X}_i \;\middle|\; \mathbf{p}\mathbf{x}_i' \leqslant \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}),\ \mathbf{x}_i' \not\succ \mathbf{x}_i''\ \forall \mathbf{x}_i'' \in \hat{X}_i \colon \mathbf{p}\mathbf{x}_i'' < \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \right\},$$

где $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \max\{0, \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\mathbf{p}\mathbf{y}_j\} + 1 - \|\mathbf{p}\|^2$,

$$\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{y}_j' \in \hat{Y}_j} \mathbf{p}\mathbf{y}_j',$$

$$\boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{p}' \in P} \left\{ \mathbf{p}' \Big(\sum_{i\in I} \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\omega}_\Sigma - \sum_{j\in J} \mathbf{y}_j \Big) \right\}.$$

Поясним смысл компонент отображения $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$.

Отображение $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$ сопоставляет каждому вектору цен и состоянию экономики решение задачи ($\mathcal{C}^*$) с $X_i = \hat{X}_i$ и $\beta_i = \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Заметим, что используемое здесь определение дохода потребителя $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ гарантирует непустоту модифицированного бюджетного множества $\{ \mathbf{x}_i' \in \hat{X}_i \mid \mathbf{p}\mathbf{x}_i' \leqslant \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \}$ при любых производственных планах $\mathbf{y}$ и ценах $\mathbf{p} \in P$. Бюджетное множество изменено по трем направлениям. Во-первых, в него включаются только потребительские наборы из модифицированного множества потребительских наборов $\hat{X}_i$ (которое является замкнутым и ограниченным). Во-вторых, если доходы от прибыли предприятий отрицательны, то потребитель не несет соответствующих убытков. В-третьих, к доходам потребителя добавляется «субсидия» $1 - \|\mathbf{p}\|^2$ (обеспечивающая, в частности, при $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ наличие в потребительском множестве наборов, стоимость которых меньше величины дохода потребителя).

Отображение $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta})$ сопоставляет вектору цен решение задачи производителя на модифицированном («усеченном») технологическом множестве $\hat{Y}_j$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta})$ ставит в соответствие вектору избыточного спроса такие векторы цен из множества P, при которых этот избыточный спрос имеет максимальную стоимость.

Докажем, что если $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{p}})$ — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$, т. е.

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{\varphi}(\bar{\boldsymbol{\theta}}),$$

то она является квазиравновесием рассматриваемой экономики. Для этого, в соответствии с определением квазиравновесия, требуется показать, что

(1) $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики,

(2) $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя ($\mathcal{C}^*$) для каждого $i \in I$,

(3) $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи потребителя для каждого $j \in J$.

Докажем, что в данном состоянии выполнены балансы. Другими словами, докажем, что равен нулю избыточный спрос $\bar{\mathbf{e}} = \sum_{i\in I} \bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_\Sigma - \sum_{j\in J} \bar{\mathbf{y}}_i$. Пусть это не так, т. е. $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$.

Поскольку выполнено $\bar{\mathbf{p}} \in \boldsymbol{\varphi}_p(\bar{\boldsymbol{\theta}})$, то $\bar{\mathbf{p}}$ является решением следующей задачи:

$$\mathbf{p}\bar{\mathbf{e}} \to \max_{\mathbf{p}\colon \|\mathbf{p}\|^2 \leqslant 1}.$$

Мы предположили, что $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$, поэтому, как несложно проверить, решение данной задачи единственно и имеет вид $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{e}}/\|\bar{\mathbf{e}}\|$, причем $\|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 1$. Соответствующий максимум равен $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} = \|\bar{\mathbf{e}}\|^2/\|\bar{\mathbf{e}}\| = \|\bar{\mathbf{e}}\|$. Так как $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$, то $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} > 0$.

Поскольку каждый производственный план $\bar{\mathbf{y}}_j$ максимизирует прибыль при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{0} \in \hat{Y}_j$, то $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant 0$. Таким образом, доход потребителя в точке $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ имеет обычный вид: $\beta_i(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j$. Складывая бюджетные неравенства, соответствующие точке $\bar{\boldsymbol{\theta}}$, по всем потребителям, получим, что для экономики в целом выполнено соотношение:

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\bar{\mathbf{x}}_i \leqslant \sum_{i\in I}\beta_i(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_\Sigma + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j,$$

т. е. $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} \leqslant 0$. С другой стороны, как мы видели, $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} > 0$. Получили противоречие. Таким образом мы доказали, что $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$, т. е. рассматриваемое состояние сбалансировано.

По определению отображения все потребительские наборы и векторы чистого выпуска в $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ допустимы. Таким образом, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ соответствует допустимому состоянию экономики. Чтобы доказать, что $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ является квазиравновесием, нам остается убедиться в том, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ и $\bar{\mathbf{y}}_i$ являются решениями соответствующих задач потребителя и производителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$.

Дополнительные количественные ограничения в условиях, определяющих отображения $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\cdot)$ и $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\cdot)$, выполнены как строгие неравенства, поскольку $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ соответствует допустимому состоянию экономики:

$$\bar{x}_{ik} \leqslant N < N + \varepsilon, \quad |\bar{y}_{jk}| \leqslant N < N + \varepsilon.$$

Нам требуется показать, что эти ограничения несущественны в том смысле, что если их убрать, то решения соответствующих задач потребителя и производителя не изменятся[29].

Предположим, что для потребителя i это не так, и, следовательно, существует такой набор $\mathbf{x}'_i \in X_i$, что $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}'_i < \beta_i(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{y}})$ и $\mathbf{x}'_i \succ_i \bar{\mathbf{x}}_i$. Так как $\bar{x}_{ik} < N + \varepsilon$, то на отрезке, соединяющем $\bar{\mathbf{x}}_i$ и $\mathbf{x}'_i$, найдется набор $\mathbf{x}''_i$ (достаточно близкий к $\bar{\mathbf{x}}_i$), такой что $x''_{ik} \leqslant N + \varepsilon$. Для этого набора, с одной стороны, $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}''_i < \beta_i(\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}})$, а с другой стороны, $\mathbf{x}''_i \succcurlyeq_i \bar{\mathbf{x}}_i$ (поскольку предпочтения выпуклы), а это согласно Теореме 4.11 противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}}_i \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$.

Схожим образом доказывается, что $\bar{\mathbf{y}}_j$ при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ максимизирует прибыль на всем множестве Y_j. Если это не так, то найдется вектор $\mathbf{y}'_j \in Y_j$, который дает более высокую прибыль. Так как $|y_{jk}| < N+\varepsilon$, то на отрезке между $\bar{\mathbf{y}}_j$ и $\mathbf{y}'_j$ найдется $\mathbf{y}''_j$, для которого $|y''_{jk}| < N+\varepsilon$ и который дает более высокую прибыль, чем $\bar{\mathbf{y}}_j$, а этого не может быть по определению множества $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$.

Покажем теперь, что $\|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 1$. Бюджетные ограничения потребителей должны выполняться как равенства, поскольку предпочтения локально ненасыщаемы (см. Теорему 4.11). Сложив все бюджетные ограничения, получим,

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\bar{\mathbf{x}}_i = \sum_{i\in I}\beta_i(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_\Sigma + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j + m(1 - \|\bar{\mathbf{p}}\|^2).$$

Поскольку, как мы показали, экономика сбалансирована, то отсюда следует, что $1 - \|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 0$.

Таким образом, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ действительно является квазиравновесием, причем $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$.

Выше мы показали, что Θ выпукло, непусто, замкнуто и ограничено. Для того чтобы показать, что рассматриваемая неподвижная точка существует, требуется проверить выполнение других условий теоремы Какутани: что значение отображения $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta})$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ непусто и выпукло, а также, что это отображение имеет замкнутый график.

Очевидно, что множества $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta})$ и $\boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta})$ непусты, поскольку каждое из них является множеством решений задачи максимизации непрерывной (линейной) функции на компактном множестве.

Множество $\{\, \mathbf{x}'_i \in \hat{X}_i \mid \mathbf{p}\mathbf{x}'_i \leqslant \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \,\}$ содержит $\boldsymbol{\omega}_i$ и является компактным. Задача нахождения наилучшего набора на этом множе-

[29]Следует понимать, что тот факт, что ограничение выполняется как строгое неравенство, не означает автоматически, что при отказе от ограничения решение не изменится!

стве имеет хотя бы одно решение, поскольку предпочтения потребителя предполагаются непрерывными (следовательно, их можно представить непрерывной функцией полезности). Любое такое решение принадлежит и множеству $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Действительно, пусть $\hat{\mathbf{x}}_i$ — такое решение, т. е. $\hat{\mathbf{x}}_i$ не хуже любого набора $\mathbf{x}_i'' \in \hat{X}_i$, такого что $\mathbf{p}\mathbf{x}_i'' \leqslant \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Очевидно, что $\hat{\mathbf{x}}_i$ также не хуже любого набора $\mathbf{x}_i'' \in \hat{X}_i$, такого что $\mathbf{p}\mathbf{x}_i'' < \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$, а это и означает по определению, что $\hat{\mathbf{x}}_i \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Отсюда следует, что множество $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$ непусто.

Множество решений задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве представляет собой выпуклое множество, поэтому множества $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta})$ и $\boldsymbol{\varphi}_{p}(\boldsymbol{\theta})$ выпуклы.

Докажем выпуклость множества $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\mathbf{x}_i'$ и $\mathbf{x}_i''$ — два различных набора, принадлежащие этому множеству. Рассмотрим их выпуклую комбинацию $\mathbf{x}_\alpha = \alpha\mathbf{x}_i' + (1-\alpha)\mathbf{x}_i''$ $(\alpha \in (0,1))$. Покажем, что $\mathbf{x}_\alpha$ тоже принадлежит $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Поскольку модифицированное бюджетное множество выпукло, то $\mathbf{x}_\alpha$ ему принадлежит. Нужно показать, что $\mathbf{x}_\alpha$ не хуже любого набора из модифицированного бюджетного множества, который стоит дешевле $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Пусть это не так и существует набор $\tilde{\mathbf{x}}_i \in \hat{X}_i$, такой что $\mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i < \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$, который лучше $\mathbf{x}_\alpha$. По определению $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$ наборы $\mathbf{x}_i'$ и $\mathbf{x}_i''$ должны быть не хуже $\tilde{\mathbf{x}}_i$. Следовательно, оба они лучше своей выпуклой комбинации $\mathbf{x}_\alpha$. Но это невозможно, поскольку по условию теоремы предпочтения потребителя выпуклы.

Для доказательства теоремы осталось проверить, что построенное отображение множества Θ в себя имеет замкнутый график. Предположим, что последовательности $\{\boldsymbol{\theta}^n\} \in \Theta$ и $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}^n\} \in \Theta$ с пределами $\boldsymbol{\theta}^0$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}^0$ соответственно таковы, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}^n \in \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta}^n)$. Нам требуется показать, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta}^0)$.

Покажем, что $\hat{\mathbf{x}}_i^0 \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}^0)$. Так как $\hat{\mathbf{x}}_i^n \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}^n)$, то $\mathbf{p}^n\hat{\mathbf{x}}_i^n \leqslant \beta(\mathbf{p}^n, \mathbf{y}^n)$. С учетом того, что $\beta(\cdot)$ является непрерывной функцией, в этих неравенствах можно перейти к пределу: $\mathbf{p}^0\hat{\mathbf{x}}_i^0 \leqslant \beta(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0)$. Так как множество $\hat{X}_i$ замкнуто, то $\hat{\mathbf{x}}_i^0$ лежит в $\hat{X}_i$ как предел последовательности, целиком принадлежащей $\hat{X}_i$. Пусть $\mathbf{x}_i' \in \hat{X}_i$ — набор, такой что он лучше $\hat{\mathbf{x}}_i^0$. Покажем, что он не может стоить меньше $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Действительно, поскольку предпочтения непрерывны, то найдется номер M, такой что $\mathbf{x}_i' \succ \hat{\mathbf{x}}_i^n$ при $n > M$. Тогда, по определению множеств $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}^0)$, при $n > M$ должно выполняться $\mathbf{p}^n\hat{\mathbf{x}}_i' \geqslant \beta(\mathbf{p}^n, \mathbf{y}^n)$. Переходя к пределу, получим $\mathbf{p}^0\hat{\mathbf{x}}_i' \geqslant \beta(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0)$.

Доказательство того, что $\hat{\mathbf{y}}_j^0 \in \boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta}^0)$ и $\hat{\mathbf{p}}^0 \in \boldsymbol{\varphi}_{p}(\boldsymbol{\theta}^0)$ не представляет особой сложности, поскольку отображения $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\cdot)$ и $\boldsymbol{\varphi}_{p}(\cdot)$

основаны на задачах максимизации линейной функции на замкнутом множестве. ■

Как анонсировалось выше, на основе Теоремы 4.13 (с учетом Теорем 4.11 и 4.12) можно доказать несколько различных вариантов теорем существования вальрасовского равновесия в модели Эрроу—Дебре при дополнительных предположениях, гарантирующих, что найденное квазиравновесие является равновесием.

Теорема 4.14:

Пусть выполнены условия Теоремы 4.13 и $\boldsymbol{\omega}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in I$[30]. Тогда верны следующие утверждения.

{i} В рассматриваемой экономике существует равновесие по Вальрасу $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$.

{ii} Если предпочтения хотя бы одного из потребителей (i') монотонны и выполнено $X_{i'} + \mathbb{R}^l_+ \subset X_{i'}$, то в рассматриваемой экономике существует равновесие по Вальрасу $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} \geqslant\neq \mathbf{0}$. ┘

Доказательство: {i} Пусть $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, в котором не все цены равны нулю (согласно Теореме 4.13 оно существует). Покажем, что это квазиравновесие является равновесием. Рассмотрим произвольного потребителя i. Доход данного потребителя в квазиравновесии имеет вид $\bar{\beta}_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j$. Второе слагаемое — доход от прибыли предприятий — неотрицательная величина, поскольку, по предположению, $\mathbf{0} \in Y_j$. Таким образом, $\bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i \leqslant \bar{\beta}_i$. Набор $\mathbf{x}^\varepsilon_i = \boldsymbol{\omega}_i - \varepsilon \bar{\mathbf{p}}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ является допустимым для потребителя i. Стоимость этого набора в ценах $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$ меньше $\bar{\beta}_i$, поскольку $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}^\varepsilon_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i - \varepsilon \|\bar{\mathbf{p}}\|^2 < \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i \leqslant \bar{\beta}_i$. Согласно Теореме 4.12 наличие такого набора $\mathbf{x}^\varepsilon_i$ означает, что набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, являющийся решением модифицированной задачи потребителя $(\mathcal{C}^*)$ при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{\beta}_i$, должен быть также решением соответствующей обычной задачи потребителя. Таким образом, $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ является также и вальрасовским равновесием.

{ii} Как показано в предыдущем пункте, каждое квазиравновесие является равновесием. Покажем, что в квазиравновесии все цены неотрицательны. Пусть это не так и $\bar{p}_k < 0$ для некоторого блага k. Увеличивая количество этого блага у потребителя i', найдем допустимый набор, который не хуже набора $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ (по монотонности

[30] Например, множества допустимых потребительских наборов имеют вид $X_i = \mathbb{R}^l_+$, и $\boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$.

предпочтений) и сто́ит меньше его. Это, согласно Теореме 4.11, противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ — решение задачи ($\mathcal{C}^*$). ■

Теорема 4.15:

Пусть выполнены условия Теоремы 4.13, для каждого потребителя $i \in I$ предпочтения строго монотонны, множество допустимых потребительских наборов удовлетворяет условию $X_i + \mathbb{R}^l_+ \subset X_i$ и содержит некоторый набор $\underline{\mathbf{x}}_i$, такой что $\underline{\mathbf{x}}_i \leqslant\neq \boldsymbol{\omega}_i$. Пусть также $\sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i > \sum_{i\in I} \underline{\mathbf{x}}_i$. Тогда в рассматриваемой экономике существует равновесие по Вальрасу $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$. ┘

Доказательство: Согласно Теореме 4.13 существует квазиравновесие $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$. По аналогии с предыдущей теоремой доказывается, что в этом квазиравновесии $\bar{\mathbf{p}} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Умножая неравенство $\sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i > \sum_{i\in I} \underline{\mathbf{x}}_i$ на цены, получим $\bar{\mathbf{p}} \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i > \bar{\mathbf{p}} \sum_{i\in I} \underline{\mathbf{x}}_i$, откуда следует, что хотя бы для одного потребителя i' выполнено $\bar{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{x}}_{i'} < \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_{i'} \leqslant \bar{\beta}_i$. Таким образом, по Теореме 4.12 набор $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ является решением задачи этого потребителя.

Покажем, что в квазиравновесии все цены положительны. Пусть это не так и $\bar{p}_k = 0$ для некоторого блага k. Увеличивая количество этого блага у потребителя i', найдем допустимый набор, который лучше набора $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ (по строгой монотонности предпочтений) и сто́ит столько же. Это противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ — решение задачи потребителя. Таким образом, $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$.

Для произвольного потребителя, умножая соотношение $\underline{\mathbf{x}}_i \leqslant\neq \boldsymbol{\omega}_i$ на положительные цены, получим $\bar{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{x}}_i < \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i \leqslant \bar{\beta}_i$. Таким образом, согласно Теореме 4.12 набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя. ■

Задачи к главе

4.88 Покажите, что в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, если предпочтения гомотетичны и одинаковы, то граница Парето совпадает с диагональю ящика Эджворта. Как найти равновесие в такой экономике, используя свойства границы Парето?

4.89 В моделях общего равновесия часто рассматривают альтернативную концепцию допустимого состояния экономики, заменяя балансы благ

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \omega_{ik} + \sum_{j=1}^{n} y_{jk} \ \forall k \in K$$

на полубалансы

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \omega_{ik} + \sum_{j=1}^{n} y_{jk} \ \forall k \in K.$$

Обозначим такую экономику $\mathcal{E}_A$.

Равновесием в этом случае называют набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, удовлетворяющий следующим условиям:

- цены $\bar{\mathbf{p}}$ неотрицательны;
- каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \sum_{k\in K} \bar{p}_k \omega_{ik} + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\pi_j$;
- каждый вектор $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
- состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ является допустимым;
- выполнен закон Вальраса, т. е.

$$\bar{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}} \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathbf{y}}_j.$$

Рассмотрите также экономику с одним дополнительным производителем, технологическое множество которого имеет вид $Y_{n+1} = -\mathbb{R}^l_+$ (технология утилизации благ без издержек), и с балансами в виде равенств. Обозначим такую экономику $\mathcal{E}_U$. Рассмотрите равновесие в этой экономике и продемонстрируйте его эквивалентность равновесию в экономике $\mathcal{E}_A$, а именно:

(A) Покажите, что в любом равновесии экономики $\mathcal{E}_U$ цены благ неотрицательны.

(B) Покажите, что если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_A$, то $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}_{n+1}))$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_U$, где

$$\bar{\mathbf{y}}_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{x}}_i - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathbf{y}}_j.$$

(C) Покажите, что если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}_{n+1}))$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_U$, тогда $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_A$.

4.90 Рассмотрим экономику чистого обмена с m потребителями. *Коалицией* называется любое подмножество множества потребителей. Говорят, что коалиция $S \subset I$ *блокирует* данное состояние экономики $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, если существует состояние экономики $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m)$, такое что $\mathbf{y}_i \succ_i \mathbf{x}_i$ для всех i из S и $\sum_{i\in S} \mathbf{y}_i \leqslant \sum_{i\in S} \boldsymbol{\omega}_i$, где $\boldsymbol{\omega}_i$ — начальные запасы потребителя i, а $\succ_i$ — его предпочтения (другими словами, участники коалиции могут, обмениваясь только друг с другом, улучшить свое положение, по сравнению с рассматриваемым состоянием $\mathbf{x}$). Наконец, *ядро* данной экономики состоит из распределений $\mathbf{x}$, которые не блокируются ни одной из коалиций.

Предположим, что допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{0}$.

(A) Докажите, что если предпочтения потребителей строго монотонны и непрерывны, то каждое распределение из ядра Парето-оптимально.

(B) Покажите, приведя соответствующий контрпример, что отказ от условия строгой монотонности делает утверждение, вообще говоря, неверным.

(C) Докажите следующий аналог первой теоремы благосостояния: если предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то равновесное распределение принадлежит ядру экономики.

4.91 Приведите пример экономики обмена, ядро которой…

(A) совпадает с границей Парето;
(B) содержит границу Парето как собственное подмножество;
(C) содержит только одно состояние экономики.

4.92 Найдите ядро в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых описываются функциями Кобба—Дугласа, а начальные запасы равны $(1, a)$ и $(b, 1)$ соответственно при разных значениях $a, b \geqslant 0$.

4.93 Найти в соответствующей экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами (и потребительским множеством, удовлетворяющим ограничениям $\mathbf{x}_i \geqslant 0$) и с начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (1, 1)$

- равновесие,
- границу Парето,
- ядро.

Функции полезности обоих потребителей одинаковы и имеют вид

(A) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$;
(B) $u(x_1, x_2) = \alpha_1\sqrt{x_1} + \alpha_2\sqrt{x_2}$;
(C) $u(x_1, x_2) = \alpha_1\sqrt{x_1} + \alpha_2 x_2$;
(D) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} \exp(\alpha_2 x_2)$.

4.94 Предположим, что предпочтения потребителей в модели обмена допускают представление линейными функциями полезности. Какие свойства этих функций гарантируют, что каждое равновесие этой модели…

- принадлежит слабой границе Парето;

- принадлежит сильной границе Парето.

4.95 Покажите, что выпуклость предпочтений потребителей и Парето-эффективность состояния экономики с начальными запасами в качестве потребительских наборов не гарантирует, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

4.96 Покажите, что в экономике обмена прирост начальных запасов потребителя может привести к падению его полезности в точке равновесия. (*Указание:* Рассмотрите экономику с двумя товарами и двумя потребителями с одинаковыми предпочтениями, описываемыми квазилинейной функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + x_2$. Рассмотрите сравнительную статику потребителя 1 в зависимости от изменения начальных запасов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.)

4.97 (A) Предположим, что в экономике обмена с непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными квазилинейными сепарабельными предпочтениями происходит перераспределение начальных запасов. Покажите, что если начальные запасы потребителя возрастают, то его полезность не может уменьшиться.

(B) Рассмотрим, как и выше, передачу ресурсов от первого потребителя ко второму, но на этот раз предпочтения не квазилинейные. Предположите, что передаваемое количество мало́ и что изменение (относительное) равновесной цены мало́. Покажите, что полезность потребителя 1 может уменьшиться. Проинтерпретируйте с точки зрения соотношения между эффектом замены и эффектом дохода.

(C) Покажите, что в экономике с двумя товарами и двумя потребителями этот парадокс может произойти только в случае единственности равновесия. (*Указание:* Покажите, что если передача начальных запасов потребителя 1 ведет к уменьшению его полезности, то в первоначальной ситуации должно существовать еще одно равновесие с еще более низким уровнем полезности у потребителя 1.)

4.98 Рассмотрим экономику обмена с двумя благами и тремя потребителями, которые имеют положительные начальные запасы и следующие функции полезности:

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = e^{x_{11}} x_{12}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = \sqrt{x_{21}} + \sqrt{x_{22}},$$
$$u_3(x_{31}, x_{32}) = \min\{x_{31}, x_{32}\}.$$

(A) Найдите функции спроса потребителей, опишите их свойства.

(B) Найдите функции избыточного спроса и проверьте, что они являются положительно однородными нулевой степени и удовлетворяют закону Вальраса.

(C) При каких начальных запасах известные вам утверждения гарантируют существование равновесия в этой экономике?

(D) Вычислите равновесие при следующих начальных запасах:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (2, 3), \quad \boldsymbol{\omega}_2 = (1, 4), \quad \boldsymbol{\omega}_3 = (2, 1).$$

4.99 Пусть начальные запасы в экономике обмена лежат на Парето-границе. При каких дополнительных условиях можно гарантировать существование и единственность равновесия в этой экономике?

4.100 Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ, дав доказательство единственности равновесия либо приведя пример неединственности.

4.101 Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ, дав доказательство единственности равновесия либо приведя пример неединственности.

4.102 (A) Рассмотрите экономику обмена (с m потребителями) с совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей, представимыми непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, и совпадающими начальными запасами. Покажите, что равновесие, если существует, единственно. Какими будут при этом равновесные цены и равновесное распределение?

(B) Какие дополнительные предположения относительно этой экономики гарантируют существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

4.103 Рассмотрите модель обмена с m одинаковыми потребителями со строго выпуклыми предпочтениями.

(A) Покажите, что эгалитарное распределение $\mathbf{x}_i = \sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_i / m$ принадлежит границе Парето.

(B) Принадлежит ли это распределение ядру данной экономики?

(C) При каких дополнительных предположениях это эгалитарное распределение можно реализовать как равновесие? при каких ценах?

(D) Что можно сказать о таких ценах в случае, если предпочтения представимы строго монотонной дифференцируемой функцией полезности?

(E) Остается ли это утверждение справедливым при отказе от предположения о выпуклости предпочтений?

Глава

Квазилинейная экономика и частное равновесие

5

В этой главе мы рассмотрим теоретическое основание моделей частного равновесия, т. е. таких моделей, в которых рассматривается равновесие на рынке одного товара в предположении, что цены всех остальных товаров остаются фиксированными. Такие модели были популяризированы Альфредом Ма́ршаллом в классической книге «Принципы экономикс»[1]. Теперь этот подход чрезвычайно широко используется в начальных курсах микроэкономики, поскольку он позволяет проводить простой графический анализ многих экономических явлений.

Как известно, спрос и предложение каждого блага в моделях *общего равновесия* зависят, вообще говоря, от цен всех рассматриваемых благ. Такая зависимость не позволяет анализировать рынки благ по отдельности, поскольку изменения на одном рынке влияют на ситуацию на других рынках, приводя к сдвигу кривых спроса и предложения на этих рынках. Это, в свою очередь, приводит к сдвигам кривых спроса и предложения на данном рынке и т. д. Поэтому частный равновесный анализ оказывается корректным только в ситуациях, когда указанные зависимости отсутствуют. Это случай так называемых квазилинейных предпочтений. Если предпочтения потребителей *квазилинейны*, то функция спроса, соответствующая этим предпочтениям, характеризуется отсутствием эффекта дохода (по всем благам, кроме одного). Если к тому же предпочтения и технологии *сепарабельны*, то рынки (всех благ, кроме одного) оказываются полностью независимыми и при изменениях на одном из них состояния прочих рынков остаются неизменными. В данной главе нам предстоит проиллюстрировать сказанное. Таким образом, экономика с квазилинейными сепарабельными предпочтениями годится для моделирования ситуаций, в которых в первом приближении можно пренебречь эффектом дохода и взаимозависимостью рынков.

[1] A. Marshall. *Principles of Economics*, London: Macmillan & Co., 1890; рус. пер. А. Маршалл. *Принципы экономической науки*, М.: Прогресс, 1983.

Экономику с квазилинейными предпочтениями потребителей назовем квазилинейной. Приведем соответствующие обозначения и определения. Рассмотрим экономику с $l+1$ благом, m потребителями и n производителями. Обозначим через $I = \{1, \ldots, m\}$ множество потребителей, а через $J = \{1, \ldots, n\}$ множество производителей.

Предположим, что предпочтения i-го потребителя описываются функцией полезности следующего вида: $u_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}, z_i) = v_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}) + z_i$. Эту функцию полезности принято называть квазилинейной. Последнее благо будем интерпретировать как деньги[2]. В дальнейшем будем делать два различных предположения о допустимых значениях величины z_i: что $z_i \in \mathbb{R}$ (может принимать и отрицательные значения[3]) или же что $z_i \geqslant 0$. Будем предполагать, что множество физически допустимых потребительских наборов потребителя i имеет вид $X_i \times \mathbb{R}$ ($X_i \times \mathbb{R}_+$ соответственно), где X_i — множество физически допустимых потребительских наборов из первых l благ. Обычно предполагается, что $X_i = \mathbb{R}^l_+$, но можно анализировать также случаи, когда некоторое благо потребляется в дискретных количествах, например, когда $x_{ik} = 0$ или 1 (благо потребляется или нет), или когда $x_{ik} = 0, 1, 2, \ldots$ (благо потребляется в целых неотрицательных количествах).

Как обычно, каждый потребитель сталкивается с бюджетным ограничением, формируемым его начальными запасами и доходами, получаемыми от его доле́й в фирмах. Пусть каждый потребитель обладает начальными запасами только $(l+1)$-го блага. Другими словами, начальный запас потребителя i имеет вид $(0, 0, \ldots, 0, \omega_i)$, причем $\omega_i \geqslant 0$. Предполагается также, что потребитель $i \in I$ получает доход от владения активами в виде доле́й от прибылей фирм. Числа $\gamma_{ij} \geqslant 0$ ($i \in I$, $j \in J$) задают распределение прав на получение прибыли, т. е. γ_{ij} обозначает долю потребителя i в прибыли фирмы j.

Производители в модели представлены технологиями вида $(\mathbf{y}, -r) = (y_1, \ldots, y_l, -r)$, где y_k для $k = 1, \ldots, l$ — объемы выпуска первых l благ, а r — затраты последнего, $(l+1)$-го, блага на производство первых l благ. Таким образом, предполагается, что единственным затрачиваемым благом в каждом технологическом процессе являет-

[2]Тем самым мы имеем в виду следующую интерпретацию: рассматриваемая нами экономика является малой частью некоторой большей экономики, в которой эти деньги можно потратить на покупку производимых там товаров.

[3]Это предположение введено для упрощения анализа. В дальнейшем предлагаются условия, которые гарантируют неотрицательность значений z_i в рассматриваемых состояниях равновесия.

ся $(l + 1)$-е благо — деньги[4]. В анализе удобно описывать технологии с помощью функции издержек $c_j(y_1, \ldots, y_l)$, которая каждому вектору объемов первых l благ сопоставляет необходимые для производства этих объемов затраты $(l + 1)$-го блага. Для того чтобы формально установить связь функции издержек с технологическим множеством j-го предприятия (Y_j), рассмотрим следующую задачу:

$$r \to \min_r$$
$$(y_1, \ldots, y_l, -r) \in Y_j.$$

Функция $c_j(\mathbf{y})$ сопоставляет каждому вектору выпусков $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_l)$ значение целевой функции этой задачи.

Пусть $Y_j^o \subset \mathbb{R}^l$ — множество всех векторов выпуска, которые могут быть произведены при помощи некоторых затрат $(l+1)$-го блага при данном производственном множестве Y_j, т. е.

$$Y_j^o = \{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^l \mid (\mathbf{y}, -r) \in Y_j \text{ для некоторого } r \in \mathbb{R} \,\}.$$

Если предположить, что для данного $\mathbf{y} \in Y_j^o$ множество тех затрат r, которые его могут обеспечить, является ограниченным снизу (например, затраты не могут быть меньше нуля) и что производственное множество Y_j замкнуто, то в указанной задаче существует оптимальное решение. Для такого вектора выпуска определено значение издержек $c_j(\mathbf{y})$.

Свойства определенной таким образом функции издержек тесно связаны со свойствами функции издержек, как она определена в гл. 3. В частности, из выпуклости множества Y_j следует выпуклость функции $c_j(\cdot)$ (см. пункт {vi} Теоремы 3.14).

В разных моделях возникают различные множества Y_j^o. В некоторых случаях допустимы только неотрицательные целочисленные выпуски, т. е. $Y_j^o = \{0, 1, 2, \ldots\}$ в случае одного блага $(l = 1)$. Есть модели с конечным числом возможных выпусков, например, $Y_j^o = \{0, 1\}$. Но чаще всего предполагается, что $Y^o = \mathbb{R}_+^l$, или же, если имеет место свободное расходование произведенной продукции (возможность избавиться от нее), что $Y_j^o = \mathbb{R}^l$.

Учитывая особый характер $(l + 1)$-го блага в квазилинейной экономике, естественно предположить, что производственные множества характеризуются свободой расходования этого блага, т. е. если

[4] Вообще говоря, мы можем предполагать, что некоторые из первых l благ затрачиваются в производстве и для них может выполняться $y_k < 0$; это мало повлияет на анализ.

$(\mathbf{y}, -r) \in Y_j$, то $(\mathbf{y}, -r') \in Y_j$ для всех $r' \geqslant r$. При этом предположении, если $c_j(\cdot)$ определена на всем множестве Y_j^o, то производственное множество Y_j однозначно описывается функцией издержек:

$$(\mathbf{y}, -r) \in Y_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} \in Y_j^o \text{ и } r \geqslant c_j(\mathbf{y}).$$

(Доказательство этого факта тривиально; см. задачу 5.1). В дальнейшем будем считать, что данные условия выполнены.

Следует понимать, что помимо того, что из соображений удобства делаются дополнительные предположения и вводятся обозначения, о которых говорилось выше, само по себе производство в моделях квазилинейной экономики мало чем отличается от производства в моделях экономики общего вида. То есть в производстве нет ничего специфически «квазилинейного» — экономика квазилинейна только постольку, поскольку предпочтения потребителей являются квазилинейными. В то же время, квазилинейная экономика будет сепарабельной, только если сепарабельными являются как предпочтения потребителей, так и функции издержек.

Мы будем рассматривать два типа экономик. В одной из них (экономика $\mathcal{E}_Q$) потребитель не сталкивается с ограничением типа $z_i \geqslant 0$ (может «брать в долг» неограниченную сумму денег), в другой же эти ограничения присутствуют (экономика $\mathcal{E}_Q^+$).

Под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q$ мы будем понимать такое состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{r}) = \langle(\mathbf{x}_1, z_1), \ldots, (\mathbf{x}_m, z_m), (\mathbf{y}_1, r_1), \ldots, (\mathbf{y}_n, r_n)\rangle$, что выполнены соотношения

$$\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{j \in J} y_{jk} \ \text{ при } k = 1, \ldots, l,$$
$$\sum_{i \in I} z_i + \sum_{j \in J} r_j = \sum_{i \in I} \omega_i,$$
$$r_j \geqslant c_j(\mathbf{y}_j) \ \forall j \in J,$$
$$\mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \quad \mathbf{y}_j \in Y_j^o \ \forall j \in J.$$

Соответственно под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q^+$ будем понимать такое состояние, что выполнены все вышеприведенные условия и, кроме того, $z_i \geqslant 0$ для всех потребителей.

5.1 Характеристика Парето-оптимальных состояний в квазилинейных экономиках

Квазилинейностью предпочтений потребителей объясняется ряд особых свойств рассматриваемой экономики. В частности, анализировать Парето-оптимальные состояния в квазилинейной экономике можно с помощью следующей задачи оптимизации:

Задача максимизации благосостояния

$$\begin{gathered}\sum_{i\in I} v_i(\mathbf{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\mathbf{y}_j) \to \max_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \\ \sum_{i\in I} x_{ik} = \sum_{j\in J} y_{jk} \ \forall k = 1,\ldots,l, \\ \mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \quad \mathbf{y}_j \in Y_j^o \ \forall j \in J.\end{gathered} \qquad (\mathcal{W})$$

Целевая функция этой задачи представляет собой индикатор благосостояния, о котором речь пойдет ниже. Следующая теорема дает полное описание границы Парето в экономике $\mathcal{E}_Q$ с помощью задачи $(\mathcal{W})$.

Теорема 5.1:

Состояние $\hat{S} = \langle(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{y}}_n, \hat{r}_n)\rangle$ является Парето-оптимальным состоянием в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$ тогда и только тогда, когда

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m, \hat{\mathbf{y}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{y}}_n)$$

является решением задачи $(\mathcal{W})$,

$$\hat{r}_j = c_j(\hat{\mathbf{y}}_j)$$

и

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - c_j(\hat{\mathbf{y}}_j).$$

⌟

Доказательство: $(\Rightarrow)$ Докажем сначала, что если $\hat{S}$ — Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$, то $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи $(\mathcal{W})$.

Напомним, что Парето-оптимальное состояние при любом $i_0 \in I$ является решением следующей задачи условной максимизации:

$$
\begin{gathered}
v_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}) + z_{i_0} \to \max_{\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{r}} \\
v_i(\mathbf{x}_i) + z_i \geqslant v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \hat{z}_i \ \forall i \neq i_0, \\
\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{j \in J} y_{jk} \ \forall k = 1, \ldots, l, \\
\sum_{i \in I} z_i + \sum_{j \in J} r_j = \sum_{i \in I} \omega_i, \\
r_j \geqslant c_j(\mathbf{y}_j) \ \forall j \in J, \\
\mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \quad \mathbf{y}_j \in Y_j^o \ \forall j \in J.
\end{gathered}
$$

Нетрудно показать, в этой задаче первое и четвертое ограничения можно заменить на равенства, не изменяя множество решений задачи. Это связано с тем, что у всех потребителей полезность возрастает по «квазилинейному» благу. Выражая из этих равенств z_i и r_j и исключая их из оставшихся неравенств, видим, что данная задача сводится к задаче ($\mathcal{W}$).

($\Leftarrow$) Обратно, пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи ($\mathcal{W}$). Рассмотрим произвольные $\hat{z}_i$, удовлетворяющие балансам

$$
\sum_{i \in I} \hat{z}_i = \sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{j \in J} \hat{r}_j, \tag{$*$}
$$

где $\hat{r}_j = c_j(\hat{\mathbf{y}}_j)$ для всех $j \in J$. Нетрудно видеть, что состояние $\hat{S}$ является допустимым состоянием экономики $\mathcal{E}_Q$. Докажем, что оно Парето-оптимально.

Пусть это не так и существует другое допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_Q$

$$
\tilde{S} = \langle (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n) \rangle
$$

такое что для всех потребителей выполнено

$$
v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \hat{z}_i
$$

и существует по крайней мере один потребитель i_0, для которого выполнено

$$
v_{i_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{i_0}) + \hat{z}_{i_0}.
$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$
\sum_{i \in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \sum_{i \in I} \tilde{z}_i > \sum_{i \in I} v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \sum_{i \in I} \hat{z}_i. \tag{$**$}
$$

Так как $\tilde{S}$ — допустимое состояние, то

$$\sum_{i \in I} \tilde{z}_i + \sum_{j \in J} \tilde{r}_j = \sum_{i \in I} \omega_i$$

и

$$\tilde{r}_j \geqslant c_j(\tilde{\mathbf{y}}_j)$$

для всех $j \in J$, откуда

$$\sum_{i \in I} \tilde{z}_i \leqslant \sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{j \in J} c_j(\tilde{\mathbf{y}}_j). \qquad (***)$$

Складывая $(*)$, $(**)$ и $(***)$, получаем

$$\sum_{i \in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \sum_{j \in J} c_j(\tilde{\mathbf{y}}_j) > \sum_{i \in I} v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) - \sum_{j \in J} c_j(\hat{\mathbf{y}}_j).$$

Поскольку $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ является допустимым в задаче $(\mathcal{W})$, то это означает, что существование состояния $\tilde{S}$ противоречит оптимальности $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ в задаче $(\mathcal{W})$. ■

Как видно из доказанной теоремы, задача поиска Парето-оптимума для экономики $\mathcal{E}_Q$ эквивалентна задаче $(\mathcal{W})$. В то же время множество допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_Q^+$ является подмножеством множества допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_Q$. Поэтому не исключена ситуация, в которой Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q^+$ не является Парето-оптимумом экономики $\mathcal{E}_Q$ и, следовательно, не будет решением задачи $(\mathcal{W})$.

Несложно придумать пример экономики $\mathcal{E}_Q^+$, такой чтобы в какой-нибудь точке Парето-границы ограничение $z_i \geqslant 0$ оказалось активным для одного из потребителей и чтобы при снятии этого ограничения можно было бы увеличить полезность одного из потребителей, не уменьшая полезность остальных. Читатель может сконструировать такой пример самостоятельно (см. задачу 5.2). Но даже если в Парето-оптимуме экономики $\mathcal{E}_Q^+$ все ограничения $z_i \geqslant 0$ выполняются как строгие неравенства, снятие данных ограничений может позволить осуществить Парето-улучшение. Приведем пример.

Пример 5.1

Рассмотрим экономику с одним потребителем ($m = 1$), одним производителем ($n = 1$) и двумя благами ($l + 1 = 2$). Для упрощения обозначений индексы будем опускать. Предпочтения потребителя заданы функцией $v(x) = 5x^3 - 9x^2 + 6{,}9x$ ($x \geqslant 0$), а технологическое множество фирмы — функцией издержек $c(y) = y^4$ ($y \geqslant 0$). В Парето-

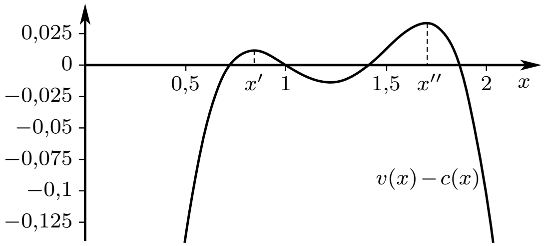


Рис. 5.1. *Пример существенности ограничения неотрицательности потребления* $(l+1)$*-го блага*

оптимуме должны выполняться равенства $y = x$, $r = c(x)$ и $z + r = \omega$. Исключая z, y и r, видим, что поиск Парето-оптимума сводится к максимизации функции

$$v(x) - c(x)$$

по x на отрезке $[0, c^{-1}(\omega)]$. (Здесь ограничение $x \leqslant c^{-1}(\omega)$ соответствует ограничению $z \geqslant 0$.)

Пусть $\omega = 1$; при этом $c^{-1}(\omega) = 1$. Функция $v(x) - c(x)$ имеет два локальных максимума: $x' \approx 0{,}83473$ и $x'' \approx 1{,}6988$ (Рис. 5.1). Только второй из этих максимумов является глобальным. Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q^+$ достигается при $x = x'$, поскольку допустимые значения x составляют отрезок $[0, 1]$. В то же время Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q$ и, следовательно, оптимум в задаче $(\mathcal{W})$ достигается при $x = x''$. △

В этом примере ключевым моментом является то, что функция $v(\cdot)$ не является вогнутой. Можно было построить подобный пример иначе — так, чтобы функция $v(\cdot)$ была вогнутой, но функция издержек не была выпуклой (см. задачу 5.3). Таким образом, для доказательства аналога первой части предыдущей теоремы в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ следует потребовать, чтобы эта эконимика была «выпуклой», т. е. все функции $v_i(\cdot)$ были вогнутыми, а функции $c_j(\mathbf{y}_j)$ — выпуклыми.

Для доказательства аналога второй части предыдущей теоремы следует сделать дополнительное предположение, что совокупные начальные запасы достаточно велики.

Теорема 5.2:

{i} Предположим, что функции $v_i(\cdot)$ вогнуты, а функции издержек $c_j(\cdot)$ выпуклы, и пусть

$$\hat{S} = \langle(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{z}_1), \dots, (\hat{\mathbf{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{r}_1), \dots, (\hat{\mathbf{y}}_n, \hat{r}_n)\rangle \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q^+$, причем $\hat{z}_i > 0$ для всех $i \in I$. Тогда набор $(\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ является решением задачи ($\mathcal{W}$).

{ii} Обратно, пусть $(\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_m, \hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_n)$ является решением задачи ($\mathcal{W}$), причем

$$\sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{j \in J} c_j(\hat{\mathbf{y}}_j) \geqslant 0.$$

Тогда для произвольных $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_m \geqslant 0$, удовлетворяющих балансам

$$\sum_{i \in I} \hat{z}_i = \sum_{i \in I} \omega_i - c_j(\hat{\mathbf{y}}_j),$$

набор $\langle(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{z}_1), \dots, (\hat{\mathbf{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\mathbf{y}}_1, c_1(\hat{\mathbf{y}}_1)), \dots, (\hat{\mathbf{y}}_n, c_n(\hat{\mathbf{y}}_n))\rangle$ является Парето-оптимальным состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q^+$.⌟

Доказательство: {i} Доказательство опирается на следующее вспомогательное утверждение: если $\hat{S}$ — Парето-оптимум в экономике $\mathcal{E}_Q^+$, удовлетворяющий условиям теоремы, то он также является Парето-оптимумом в соответствующей экономике $\mathcal{E}_Q$. Если это утверждение верно, то доказываемое является тривиальным следствием предыдущей Теоремы 5.1.

Докажем это вспомогательное утверждение от противного. Пусть в соответствующей экономике $\mathcal{E}_Q$ существует допустимое состояние

$$\tilde{S} = \langle(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \dots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \dots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n)\rangle,$$

которое доминирует по Парето состояние $\hat{S}$. Рассмотрим выпуклую комбинацию этих двух состояний:

$$S(\alpha) = \alpha\hat{S} + (1-\alpha)\tilde{S}, \ \alpha \in [0,1].$$

Существует достаточно малое $\alpha > 0$, такое что $S(\alpha)$ является допустимым в экономике $\mathcal{E}_Q^+$. Однако при $\alpha > 0$ состояние $S(\alpha)$ представляет собой Парето-улучшение в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ по сравнению с $\hat{S}$, что противоречит предположению теоремы.

Подробное изложение доказательства оставляется читателю в качестве упражнения.

{ii} Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 5.4). ■

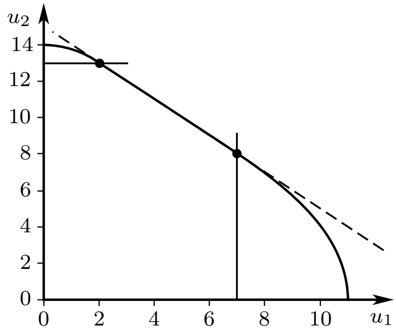


Рис. 5.2. *Парето-граница в экономике типа* $\mathcal{E}_Q^+$

Приведенные выше результаты позволяют в случае квазилинейной экономики использовать задачу ($\mathcal{W}$) для анализа Парето-оптимальных состояний.

В ситуации, когда функции $v_i(\cdot)$ строго вогнуты, а функции $c_j(\cdot)$ выпуклы, решение задачи ($\mathcal{W}$) единственно, поэтому два Парето-оптимальных состояния в экономике $\mathcal{E}_Q$ (в экономике $\mathcal{E}_Q^+$, если $\tilde{z}_i$ и $\check{z}_i$ положительны)

$$\langle(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n)\rangle,$$
$$\langle(\check{\mathbf{x}}_1, \check{z}_1), \ldots, (\check{\mathbf{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\mathbf{y}}_1, \check{r}_1), \ldots, (\check{\mathbf{y}}_n, \check{r}_n)\rangle$$

могут различаться лишь объемами потребления $(l+1)$-го блага. Другими словами, $\tilde{\mathbf{x}}_i = \check{\mathbf{x}}_i$ для всех $i \in I$ и $\tilde{\mathbf{y}}_j = \check{\mathbf{y}}_j$ для всех $j \in J$. Поэтому, как нетрудно заметить, в случае экономики $\mathcal{E}_Q$ граница Парето представляет собой гиперплоскость вида

$$\sum_{i \in I} u_i = \text{const}.$$

(Читателю предлагается доказать этот результат самостоятельно; см. задачу 5.5.)

В экономике $\mathcal{E}_Q^+$ граница Парето может «изгибаться» из-за того, что некоторые из ограничений $z_i \geqslant 0$ являются существенными. Покажем это на примере.

Пример 5.2

На Рис. 5.2. изображена Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_Q^+$ в координатах (u_1, u_2) со следующими параметрами: два блага $(l + 1 = 2)$,

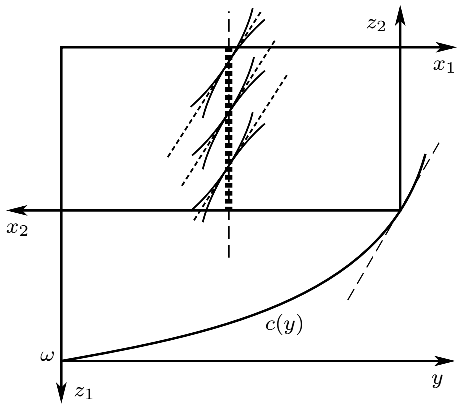


Рис. 5.3. *Внутренняя часть Парето-границы в экономике типа* $\mathcal{E}_Q^+$

два потребителя с функциями полезности

$$u_1 = 2\sqrt{x_1} + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = 4\sqrt{x_2} + z_2$$

и один производитель с функцией издержек $c(y) = y$. Начальные запасы второго блага равны 10.

Нетрудно проверить, что решение задачи ($\mathcal{W}$) дает $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Однако это решение описывает точки границы Парето только при $u_1 \in [2, 7]$. Парето-граница при этом имеет вид

$$u_2 = 15 - u_1.$$

При $u_1 \in [0, 2]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 14 - \frac{u_1^2}{4},$$

а при $u_1 \in [7, 11]$ —

$$u_2 = 4\sqrt{11 - u_1}. \qquad \triangle$$

В случае двух благ можно привести графическую иллюстрацию внутренней части Парето-границы экономики типа $\mathcal{E}_Q^+$ с производством на основе диаграммы Эджворта (Рис. 5.3). Внутренняя часть границы Парето показана на рисунке жирной пунктирной линией.

Так как в достаточно широком классе случаев решения задачи ($\mathcal{W}$) описывают Парето-границу, то целевую функцию задачи ($\mathcal{W}$)

можно использовать для решения вопроса о принадлежности некоторого допустимого состояния к Парето-границе. В связи с этим естественно рассматривать функцию

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i) - \sum_{j \in J} c_j(\mathbf{y}_j)$$

в качестве индикатора благосостояния. Основанием для этого является следующая теорема. (Ее доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 5.6).)

Теорема 5.3:

Пусть

$$\tilde{S} = \langle (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n) \rangle,$$

и

$$\check{S} = \langle (\check{\mathbf{x}}_1, \check{z}_1), \ldots, (\check{\mathbf{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\mathbf{y}}_1, \check{r}_1), \ldots, (\check{\mathbf{y}}_n, \check{r}_n) \rangle \text{ —}$$

два допустимых состояния в квазилинейной экономике ($\mathcal{E}_Q$ или $\mathcal{E}_Q^+$), причем для всех $j \in J$ выполнено[5] $\tilde{r}_j = c_j(\tilde{\mathbf{x}}_j)$ и $\check{r}_j = c_j(\check{\mathbf{x}}_j)$.

{i} Если каждый из потребителей в состоянии $\tilde{S}$ имеет не меньшую полезность, чем в состоянии $\check{S}$, т. е.

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\check{\mathbf{x}}_i) + \check{z}_i \text{ для всех } i \in I,$$

то

$$W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \geqslant W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}).$$

Более того, если существует потребитель i_0, такой что

$$v_{i_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\check{\mathbf{x}}_{i_0}) + \check{z}_{i_0}$$

(т. е. состояние $\tilde{S}$ доминирует $\check{S}$ по Парето), то

$$W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) > W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}).$$

{ii} Для экономики $\mathcal{E}_Q$ выполнено и обратное: если для состояний $\tilde{S}$ и $\check{S}$ верно $W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) > W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, то можно подобрать $\tilde{z}'_1, \ldots, \tilde{z}'_m$ такие, что состояние экономики

$$\langle (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}'_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}'_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n) \rangle$$

[5] Это условие технологической эффективности будет, например, выполнено в классическом общем равновесии. Естественно ожидать его выполнения и в других равновесных моделях.

будет допустимым, причем

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \tilde{z}'_i > v_i(\check{\mathbf{x}}_i) + \check{z}_i \text{ для всех } i \in I. \qquad \lrcorner$$

Первая часть данного утверждения говорит о том, что любое Парето-улучшение сопровождается ростом индикатора $W(\cdot)$. Смысл второй части приведенного утверждения состоит в том, что если $W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) > W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, то можно в состоянии $\tilde{S}$ произвести такие трансферты (перераспределить деньги), что новое состояние будет строго доминировать состояние $\check{S}$ по Парето. Таким образом, мы можем сравнить любые два состояния квазилинейной экономики по единому показателю — благосостоянию. Если уровень благосостояния в текущем состоянии экономики меньше, чем мог бы быть, то теоретически возможно проведение экономической реформы, от которой выиграет *каждый* потребитель. Заметим, что некоторые z_i при этом могут оказаться отрицательными, поэтому вторая часть утверждения, вообще говоря, неприменима к экономике $\mathcal{E}_Q^+$.

В Парето-оптимуме квазилинейной экономики индикатор благосостояния достигает максимума. Пусть $\hat{W}$ — это максимальное значение. Разность между $\hat{W}$ и уровнем индикатора $W(S)$ в некотором состоянии S называется чистыми потерями благосостояния:

$$DL = \hat{W} - W(S).$$

Сравнение уровней благосостояния в анализируемом состоянии и в идеальной ситуации позволяет количественно оценить, насколько далеко данное неэффективное состояние от границы Парето и сколько экономика в целом теряет вследствие неэффективности.

5.2 Характеристика поведения потребителей в квазилинейных экономиках

Рассмотрим особенности анализа поведения потребителя, имеющего квазилинейные предпочтения. Как и ранее, будем исходить из стандартного предположения, что потребители являются ценополучателями. Естественно ожидать, что цена $(l+1)$-го блага в равновесии будет положительной (поскольку все потребители «любят» это благо). Удобно принять эту цену за единицу. Выбирая потребительский набор $(\mathbf{x}_i, z_i)$ при рыночных ценах благ $(\mathbf{p}, 1)$ и доходе β_i, потребитель в экономике $\mathcal{E}_Q$ решает следующую задачу:

Задача потребителя в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$

$$\begin{gathered} v_i(\mathbf{x}_i) + z_i \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i, z_i} \\ \mathbf{p}\mathbf{x}_i + z_i \leqslant \beta_i. \end{gathered} \qquad (\mathcal{C}_Q^0)$$

Соответствующая задача в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ включает дополнительное ограничение $z_i \geqslant 0$. (Будем обозначать эту задачу $(\mathcal{C}_Q^{0+})$.)

Так как квазилинейные предпочтения локально ненасыщаемы, то очевидно, что потребитель, решающий задачу $(\mathcal{C}_Q^0)$, полностью израсходует свой доход β_i, так что в любом решении $z_i = \beta_i - \mathbf{p}\mathbf{x}_i$. Подставляя z_i в целевую функцию и убрав несущественную константу β_i, получим эквивалентную задачу:

$$v_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i} . \qquad (\mathcal{C}_Q)$$

При естественном предположении, что $v_i(\mathbf{0}) = 0$, величина $v_i(\mathbf{x}_i)$ представляет собой денежную оценку потребителем потребления благ $k = 1, \ldots, l$ в количестве $\mathbf{x}_i$. Величину $v_i(\mathbf{x}_i)$ принято называть готовностью платить, поскольку это та сумма денег (количество $(l+1)$-го блага), которую потребитель будет готов отдать за приобретение набора $\mathbf{x}_i$, если у него нет в наличии ни одного из благ $k = 1, \ldots, l$. Разность $v_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i$ (при $v_i(\mathbf{0}) = 0$) принято называть потребительским излишком. Это разность между той суммой, которую *готов отдать* потребитель, и той суммой, которую он *реально отдает* за набор $\mathbf{x}_i$, если сталкивается с рыночными ценами $\mathbf{p}$. В дальнейшем мы еще вернемся к потребительскому излишку.

Следующая теорема устанавливает связь между задачами $(\mathcal{C}_Q^0)$ и $(\mathcal{C}_Q)$. (Ее доказательство, как и доказательство других теорем этого параграфа, оставляется читателю в качестве упражнения.)

Теорема 5.4:

Набор $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ является решением задачи потребителя $(\mathcal{C}_Q^0)$ при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i тогда и только тогда, когда $\bar{z}_i = \beta_i - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i$, и $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи $(\mathcal{C}_Q)$ при ценах $\mathbf{p}$. ┘

Из данной теоремы следует, в частности, что спрос потребителя на первые l благ не зависит от его дохода.

Аналог Теоремы 5.4 верен и в случае задачи $(\mathcal{C}_Q^{0+})$, когда допустимые потребительские наборы удовлетворяют дополнительному условию $z_i \geqslant 0$, что показывает следующая теорема.

Теорема 5.5:

{i} Предположим, что $v_i(\cdot)$ — вогнутая функция, а $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ — решение задачи потребителя $(\mathcal{C}_Q^{0+})$ при ценах $\mathbf{p}$ и некотором доходе β_i, такое что $\bar{z}_i > 0$. Тогда $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи $(\mathcal{C}_Q)$ при ценах $\mathbf{p}$.

{ii} Обратно, пусть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи $(\mathcal{C}_Q)$ при ценах $\mathbf{p}$ и пусть $\beta_i \geqslant \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i$. Тогда $(\bar{\mathbf{x}}_i, \beta_i - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i)$ — решение задачи $(\mathcal{C}_Q^{0+})$ при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i. ┘

В классе квазилинейных экономик важную роль играет случай, когда предпочтения всех потребителей помимо свойства квазилинейности обладают свойством сепарабельности, т. е. когда множество допустимых наборов первых l благ имеет вид $X_i = \bigtimes_{k=1}^{l} X_{ik}$, а функции полезности представимы в виде

$$u_i(\mathbf{x}_i, z_i) = v_i(\mathbf{x}_i) + z_i = \sum_{k\in K} v_{ik}(x_{ik}) + z_i.$$

Если функция полезности i-го потребителя имеет такой вид, то задачу потребителя $(\mathcal{C}_Q)$ можно разложить на l задач — по одной на каждое благо за исключением $(l+1)$-го:

$$v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik} \to \max_{x_{ik}\in X_{ik}}. \qquad (\mathcal{C}_{Qk})$$

Теорема 5.6:

Набор $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ является решением задачи потребителя $(\mathcal{C}_Q^0)$ при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i тогда и только тогда, когда $\bar{z}_i = \beta_i - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i$ и $\bar{x}_{ik}$ является решением каждой из задач $(\mathcal{C}_{Qk})$ при цене p_k $(k = 1, \ldots, l)$. ┘

Из данной теоремы следует, что функция спроса на k-е благо зависит только от цены на это благо, т. е. имеет вид $x_{ik}(p_k)$.

Предположим дополнительно дифференцируемость[6] функции $v_i(\cdot)$, определенной на $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Тогда для решения задачи оптимального выбора потребителя $(\mathcal{C}_Q^0)$ (или $(\mathcal{C}_Q^{0+})$ при $z_i > 0$) должно выполняться следующее условие:

$$\nabla v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \leqslant \mathbf{p},$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$\frac{\partial v_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

[6] Более точно, мы предполагаем, что функция $v_i(\cdot)$ определена на открытом множестве, содержащем $\mathbb{R}^l_+$, и дифференцируема на нем.

Это обычное для квазилинейной экономики условие, что *предельная полезность (предельная оценка) блага равна его цене*. Если решение задачи потребителя внутреннее по всем благам ($\bar{\mathbf{x}}_i > \mathbf{0}$ и, кроме того, $z_i > 0$ в случае задачи ($\mathcal{C}_Q^{0+}$)), то

$$\nabla v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{p}.$$

Другими словами, градиент функции $v_i(\cdot)$, вычисленный для набора благ, совпадающего со спросом потребителя, равен вектору рыночных цен этих благ. Таким образом, градиент функции $v_i(\cdot)$ представляет собой *обратную функцию спроса* $\mathbf{p}_i(\mathbf{x}_i)$ потребителя i — вектор цен первых l благ, при котором потребитель предъявляет спрос именно на этот набор благ.

При сепарабельности функции полезности необходимое условие оптимальности потребительского набора $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ (как в случае экономики $\mathcal{E}_Q$, так и в случае $\mathcal{E}_Q^+$ при $z_i > 0$) имеет вид

$$v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) \leqslant p_k,$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) = p_k$$

Это условие является также и достаточным, если предельная полезность убывает.

Рассмотрим теперь существование и единственность решения задачи ($\mathcal{C}_Q^0$) и свойства соответствующих функций спроса. Сделаем это только для случая, когда функция полезности сепарабельна. Из Теоремы 5.6 следует, что вместо исходной задачи мы можем использовать для анализа спроса на k-е благо задачу ($\mathcal{C}_{Qk}$): решение исходной задачи ($\mathcal{C}_Q^0$) существует тогда и только тогда, когда существуют решения задач ($\mathcal{C}_{Qk}$) при любом $k = 1, \ldots, l$. Таким образом анализ спроса сводится к исследованию свойств задачи ($\mathcal{C}_{Qk}$).

Будем предполагать, что для любого блага k функция $v_{ik}(x_{ik})$ определена на $\mathbb{R}_+$ и непрерывно дифференцируема, и что предельная полезность $v'_{ik}(x_{ik})$ убывает. Для анализа спроса можно воспользоваться приведенными выше условиями первого порядка для задачи ($\mathcal{C}_Q$). Они совпадают с условиями первого порядка (необходимыми условиями оптимальности) для задач ($\mathcal{C}_{Qk}$). Заметим, что убывание предельной полезности гарантирует, что если решение задачи ($\mathcal{C}_{Qk}$) существует, то оно единственно (проверьте этот факт самостоятельно). Очевидно, что это единственное решение ($x_{ik}(p_k)$) есть значение функции спроса рассматриваемого потребителя на k-е благо при данном p_k.

Нам понадобятся следующие обозначения:

$$p_k^c = v'_{ik}(0) \quad \text{и} \quad p_k^0 = \inf_{x_{ik}>0} v'_{ik}(x_{ik}).$$

Здесь p_k^c — это так называемая цена «удушения» спроса. При любой цене $p_k \geqslant p_k^c$ в точке $x_{ik} = 0$ выполнено условие первого порядка $v'_{ik}(0) \leqslant p_k$. Нетрудно понять, что в силу убывания предельной полезности это необходимое условие оптимальности является также и достаточным. Отсюда следует, что при $p_k \geqslant p_k^c$ спрос на данное благо существует и равен нулю, т. е. $x_{ik}(p_k) = 0$.

При любой цене p_k из отрезка (p_k^0, p_k^c), решение задачи ($\mathcal{C}_{Qk}$) существует, т. е. спрос на k-е благо определен. Действительно, в силу непрерывности функции $v'_{ik}(\cdot)$, существует уровень потребления $\bar{x}_{ik}$, такой что $v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) = p_k$. Очевидно, что $\bar{x}_{ik} > 0$. Этот $\bar{x}_{ik}$ должен быть решением задачи потребителя при ценах p_k. Из убывания предельной полезности следует, что функция спроса $x_{ik}(\cdot)$ на отрезке (p_k^0, p_k^c) является убывающей.

При цене $p_k \leqslant p_k^0$ задача ($\mathcal{C}_{Qk}$) не имеет решения. Если бы такое решение $\bar{x}_{ik}$ существовало, то оно удовлетворяло бы условию первого порядка $v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) \leqslant p_k$. Но тогда предельная полезность для любого уровня потребления, превышающего $\bar{x}_{ik}$, в силу убывания предельной полезности была бы ниже инфимума p_k^0, чего быть не может. Поскольку при такой цене с ростом потребления данного блага потребительский излишек возрастает, можно считать, что потребитель будет предъявлять бесконечный спрос на это благо.

Рассмотрим теперь случай, когда благо k может потребляться только в положительных количествах ($X_{ik} = \mathbb{R}_{++}$). Предположим, что функция $v_{ik}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_{++}$, предельная полезность $v'_{ik}(\cdot)$ убывает и $\lim_{x_{ik}\to 0} v'_{ik}(x_{ik}) = \infty$. Последнее условие фактически означает, что цена удушения спроса бесконечна ($p_k^c = \infty$)[7].

Как и в предыдущем случае, при $p_k \leqslant p_k^0$ решения задачи ($\mathcal{C}_{Qk}$) не существует (спрос бесконечен). При любой цене $p_k > p_k^0$ по непрерывности предельной полезности уравнение $v'_{ik}(x_{ik}) = p_k$ будет иметь решение $x_{ik}(p_k)$. Это решение будет также решением задачи ($\mathcal{C}_{Qk}$), причем единственным. Таким образом, данное уравнение определяет

[7]Примером такой функции является $v_{ik}(x_{ik}) = \ln x_{ik}$. Мы могли бы также рассмотреть случай, когда благо k может потребляться в любых неотрицательных количествах ($X_{ik} = \mathbb{R}_+$), но предельная полезность в нуле не определена и предел ее равен бесконечности. Это, в частности, позволило бы распространить анализ на функцию $v_{ik}(x_{ik}) = \sqrt{x_{ik}}$. Оказывается, что выводы будут такими же, как в рассматриваемом случае (см. задачу 5.8).

функцию спроса $x_{ik}(p_k)$ при $p_k > p_k^0$. Из убывания предельной полезности следует, что функция спроса является убывающей. Кроме того, так как предельная полезность убывает, то для всякого $\varepsilon > 0$ при ценах $p_k > v'_{ik}(\varepsilon)$ выполнено $0 < x_{ik}(p_k) < \varepsilon$. Таким образом, $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$, т. е. спрос «убывает до нуля» при росте цены блага.

В обоих рассмотренных случаях функция спроса определена для всех цен, превышающих p_k^0, и убывает (до нуля). Как правило, в примерах, иллюстрирующих применение микроэкономического анализа, а также в приложениях используются функции, для которых $p_k^0 = 0$, т. е. спрос определен при всех положительных ценах.

5.2.1 Потребительский излишек: определение, связь с прямой и обратной функциями спроса

Как уже говорилось выше, потребительским излишком (излишком потребителя) называется разность между готовностью платить за данный набор благ $v_i(\mathbf{x}_i) - v_i(\mathbf{0})$ и фактически заплаченной за этот набор суммой (обозначим ее через t_i):

$$CS_i = v_i(\mathbf{x}_i) - v_i(\mathbf{0}) - t_i.$$

Такое определение включает и случай, когда затраты на приобретение благ нелинейно зависят от приобретаемого количества благ[8]. В классическом случае $t_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i$, так что

$$CS_i = v_i(\mathbf{x}_i) - v_i(\mathbf{0}) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i.$$

В дальнейшем без потери общности будем предполагать, что $v_i(\mathbf{0}) = 0$.

Рассмотрим случай квазилинейных сепарабельных функций полезности, т. е. $v_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}) = \sum_{k=1}^{l} v_{ik}(x_{ik})$. Потребительский излишек при этом получается суммированием потребительских излишков, получаемых потребителем на рынках отдельных благ:

$$CS_i = \sum_{k=1}^{l} (v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik},$$

где $CS_{ik} = v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}$.

[8] Это может быть, в частности, следствием нелинейного ценообразования, с помощью которого монополия может проводить ценовую дискриминацию потребителей (см. гл. 12).

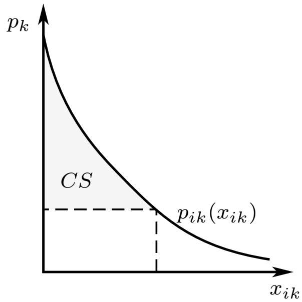


Рис. 5.4. *Излишек потребителя*

Пользуясь выведенными выше характеристиками потребительского выбора, проанализируем связь излишка потребителя с площадью под кривой спроса потребителя. Пусть $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$, т. е. является спросом потребителя при ценах $\mathbf{p}$. В этом случае геометрически излишек потребителя на рынке k-го блага равен площади фигуры, лежащей под графиком обратной функции спроса выше цены этого блага (Рис. 5.4).

Поясним это. Рассмотрим потребительский излишек как функцию цен:

$$CS_i(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{l}[v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)] = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p_k).$$

Функции $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)$ определены при всех ценах $p_k \geqslant p_k^0$ и, кроме того, не могут быть отрицательными[9].

Как было доказано, $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$, откуда $v_{ik}(x_{ik}(p_k)) \to 0$ при $p_k \to \infty$. Поскольку $p_k x_{ik}(p_k) \leqslant v_{ik}(x_{ik}(p_k))$, то при росте цены блага расходы на его приобретение стремятся к нулю, т. е. $p_k x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Функция $CS_i(\mathbf{p})$ является дифференцируемой, если функция полезности дважды дифференцируема. Дифференцируя ее, получаем (с учетом условий первого порядка для задачи потребителя), что при $x_{ik}(p_k) > 0$

$$x_{ik}(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

[9]Так как $x_{ik} = 0$ является допустимым в задаче потребителя ($\mathcal{C}_{Qk}$), то $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k) \geqslant v_{ik}(0) - p_k \cdot 0 = 0$ и тем самым $CS_{ik}(p_k) \geqslant 0$.

(Читателю предоставляется проверить этот факт самостоятельно; см. задачу 5.9.)

Если $x_{ik}(t) > 0$ при всех $t \geqslant p_k$, то, проинтегрировав обе части этого дифференциального уравнения, получим

$$-\int_{p_k}^{\infty} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t) dt.$$

Отсюда

$$CS_{ik}(p) - \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t) dt,$$

что позволяет выразить излишек потребителя i от потребления блага k в виде[10]

$$CS_{ik}(p) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t) dt + \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t).$$

Так как второе слагаемое в этом соотношении равно нулю:

$$\lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = 0,$$

то

$$CS_{ik}(p) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t) dt.$$

В силу того, что функция $p_{ik}(\cdot)$ является обратной к функции $x_{ik}(\cdot)$, имеет место соотношение[11]

$$CS_{ik}(p) = \int_{0}^{x_{ik}(p)} p_{ik}(q) dq - p x_{ik}(p).$$

[10] Заметим, что если существует цена p_k^c, такая что $x_k(t) > 0$ при всех $t < p_k^c$ и $x_k(t) = 0$ при всех $t \geqslant p_k^c$, то при $p_k \leqslant p_k^c$

$$-\int_{p_k}^{p_k^c} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{p_k^c} x_{ik}(t) dt.$$

[11] Равенство доказывается интегрированием по частям и заменой переменных.

По-видимому, впервые подобный метод вычисления потребительского излишка (и в целом вычисление чистых потерь интегрированием) был введен французским инженером Жюлем Дюпюи (J. Dupuit. De la Mesure de l'Utilité des Travaux Publics, *Annales des Ponts et Chaussées* **8** (1844): 332–375; рус. пер. Ж. Дюпюи. О мере полезности гражданских сооружений, в кн. *Теория потребительского поведения и спроса*, В. М. Гальперин (ред.), СПб.: Экономическая школа, 1993: 28–66.

В итоге общий потребительский излишек потребителя i получаем суммированием этих интегралов по всем рынкам:

$$CS_i(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p) = \sum_{k=1}^{l} \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t)dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{l} \int_{0}^{x_{ik}(p)} p_{ik}(t)dt - p\sum_{k=1}^{l} x_{ik}(p).$$

5.3 Характеристика поведения производителей в квазилинейных экономиках

Проанализируем теперь поведение производителей в квазилинейной экономике. Как уже говорилось, с точки зрения производства квазилинейная экономика фактически ничем не отличается от экономики более общего вида. Теория поведения производителя, являющегося ценополучателем, уже рассматривалась в общем виде в гл. 3. Здесь же мы отойдем от предположения о совершенстве конкуренции и будем считать, что, возможно, производители не являются ценополучателями. Это позволяет применять данную модель в случае несовершенной конкуренции (см. гл. 12 и 13).

Пусть, как и ранее, Y_j^o — множество возможных векторов выпуска и пусть функция издержек $c_j(\cdot)$ определена на всем множестве Y_j^o. Предположим, что j-й производитель сталкивается с некоторой обратной функцией спроса на производимые им блага

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j),$$

определенной на Y_j^o. Прибыль формируется как разница между выручкой и издержками:

$$\pi_j(\mathbf{y}_j) = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j)\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j).$$

Как обычно, мы предполагаем, что производитель выбирает объемы производства, максимизирующие прибыль:

$$\pi_j(\mathbf{y}_j) \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j^o}.$$

В случае, если функции полезности сепарабельны, спрос на каждое благо зависит только от его цены. В этом случае цена любого блага зависит только от продаваемого количества блага, т. е.

$$p_{jk} = p_{jk}(y_{jk}).$$

Если предположить, что функция издержек производителя также сепарабельна, т. е.

$$c_j(\mathbf{y}_j) = \sum_{k=1}^{l} c_{jk}(y_{jk}),$$

то прибыль приобретает следующий сепарабельный по благам вид:

$$\pi_j(\mathbf{y}_j) = \sum_{k=1}^{l} [p_{jk}(y_{jk})y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})],$$

как если бы предприятие состояло из l заводов, каждый из которых специализировался бы на производстве только одного вида продукции. Задача максимизации прибыли распадается, таким образом, на l независимых задач.

Предположим, что функции $\mathbf{p}_j(\cdot)$ и $c_j(\cdot)$ определены и дифференцируемы на множестве[12] $Y_j^o = \mathbb{R}_+^l$. В этом случае необходимые условия оптимальности выпуска $\mathbf{y}_j$ производителя j имеют вид

$$\frac{\partial \pi_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} = p_{jk}(\mathbf{y}_j) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial p_{js}(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} - \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} \leqslant 0 \text{ для } k = 1, \ldots, l,$$

причем если $y_{jk} > 0$, то

$$p_{jk}(\mathbf{y}_j) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial p_{js}(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} = \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}}.$$

Это условие говорит о том, что в оптимуме задачи производителя предельная выручка должна быть равна предельным издержкам.

В случае сепарабельности условия первого порядка приобретают более простой вид:

$$p_{jk}(y_{jk}) + p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p_{jk}(y_{jk}) + p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} = c'_{jk}(y_{jk}).$$

[12]Более точно, на открытом множестве, содержащем $\mathbb{R}_+^l$.

Альтернативно, можно предположить, что $Y_j^o = \mathbb{R}^l$, производственное множество характеризуется свободой расходования и

$$c_j(y_1, \ldots, y_l) = c_j(\min\{y_1, 0\}, \ldots, \min\{y_l, 0\}),$$

т. е. отрицательные выпуски возможны, только если блага «выбрасываются».

Если цены спроса не зависят от продаваемого объема блага, т. е.

$$\mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j) = \mathbf{p}_j = \text{const},$$

(производители являются ценополучателями, в отрасли складывается ситуация совершенной конкуренции), то все производные функции $\mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j)$ равны нулю и условия первого порядка приобретают вид

$$p_{jk} \leqslant \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}},$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p_{jk} = \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}},$$

т. е. для оптимального выпуска цена равна предельным издержкам.

В случае сепарабельности функции издержек последнее соотношение можно переписать в виде

$$p_{jk} = c'_{jk}(y_{jk}).$$

Оно задает функцию предложения k-го блага j-м предприятием. Эта функция зависит только от цены k-го блага. Предельные издержки $c'_{jk}(\cdot)$ фактически представляют собой обратную функцию предложения, т. е. показывают для данного (положительного) выпуска ту цену, при которой производитель выберет этот выпуск.

5.3.1 Излишек производителя

Предположим, что фирма, произведя $\mathbf{y}_j$, получила от этой продукции валовой доход (выручку) t_j. В то же время ее издержки на производство в объеме $\mathbf{y}_j$ составили $c_j(\mathbf{y}_j)$, и, по-видимому, она готова была бы произвести и отдать объем $\mathbf{y}_j$ именно за такую сумму. По аналогии с излишком потребителя можно назвать эту величину излишком производителя. Очевидно, что эта величина совпадает с прибылью:

$$PS_j = \pi_j = t_j - c_j(\mathbf{y}_j).$$

Если произведенная продукция продана по ценам $\mathbf{p}$, то выручка равна $\mathbf{p}\mathbf{y}_j$ и

$$PS_j = \pi_j = \mathbf{p}\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j).$$

Заметим, что сумму, за которую производитель готов был бы произвести и отдать объем $\mathbf{y}_j$, можно определять по-разному. (Поэтому, отождествляя эту сумму с издержками, мы сказали «по-видимому».)

Все зависит от того, какие возможности есть у данного производителя и какой смысл вкладывается в слова «готов отдать». В частности, такую сумму можно определить как разность между издержками при объеме производства $\mathbf{y}_j$ и издержками при нулевом объеме производства, т. е. как величину $c_j(\mathbf{y}_j) - c_j(\mathbf{0})$. При этом излишек производителя следует определить как

$$t_j - c_j(\mathbf{y}_j) + c_j(\mathbf{0}) = \pi_j + c_j(\mathbf{0}).$$

Но нам удобнее отождествить излишек производителя с прибылью, и в дальнейшем мы будем придерживаться именно такого определения.

В случае, если функция издержек сепарабельна, излишек производителя можно представить как сумму излишков по l рынкам:

$$PS_j = \sum_{k=1}^{l} [p_k y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})] = \sum_{k=1}^{l} PS_{jk}.$$

Подобно излишку потребителя излишек производителя на k-м рынке можно представить в виде интеграла:

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt - c_{jk}(0).$$

Он равен (с точностью до константы $c_{jk}(0)$) площади фигуры, образуемой прямой, проходящей через точку $(0, p_{jk})$ параллельно оси абсцисс, и кривой предельных издержек $c'_{jk}(y_{jk})$ (см. Рис. 5.5). В случае, когда $c_{jk}(0) = 0$, получаем, что излишек производителя равен

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt.$$

(Заметим, что это также формула для излишка производителя, если определять излишек производителя как $\pi_j + c_j(\mathbf{0})$.)

Если рассматривать производителя как ценополучателя, то, как уже говорилось, предельные издержки совпадают для положительных выпусков с обратной функцией предложения. По аналогии с излишком потребителя мы можем вычислять излишек производителя как площадь под соответствующей кривой предложения $y_{jk}(p_k)$:

$$PS_{ik}(p) = py_{jk}(p) - \int_{c'_{jk}(0)}^{p} y_{jk}(t)dt - c_{jk}(0).$$

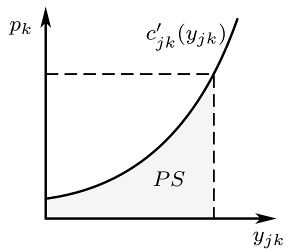


Рис. 5.5. *Излишек производителя*

5.4 Связь излишков потребителя и производителя с индикатором благосостояния

Предположим, что в результате работы некоторого рыночного механизма реализовалось допустимое состояние экономики $S = \langle(\mathbf{x}_1, z_1), \ldots, (\mathbf{x}_m, z_m), (\mathbf{y}_1, r_1), \ldots, (\mathbf{y}_n, r_n)\rangle$, и пусть при этом потребительские расходы i-го потребителя ($i \in I$) составили t_i, а выручка j-й фирмы ($j \in J$) — t_j. Предположим также, что денежные потоки в экономике сбалансированы[13], т. е. выполнено

$$\sum_{i \in I} t_i = \sum_{j \in J} t_j.$$

При этом величину благосостояния, соответствующее рассматриваемому состоянию экономики, можно записать в следующем виде:

$$W(S) = \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i) - \sum_{j \in J} c_j(\mathbf{y}_j) = \\ = \sum_{i \in I}(v_i(\mathbf{x}_i) - t_i) + \sum_{j \in J}(t_j - c_j(\mathbf{y}_j)) = CS + PS,$$

где

$$CS = \sum_{i \in I} CS_i \text{ —}$$

суммарный потребительский излишек,

$$PS = \sum_{j \in J} \pi_j = \sum_{j \in J} PS_j \text{ —}$$

[13] В величины t_i и t_j следует включить любые государственные трансферты, налоги, и т. п.

суммарный производительский излишек. Другими словами, индикатор благосостояния $W(S)$ равен сумме излишков потребителей и производителей. Часто его называют общественным излишком.

В частном случае, когда товары покупаются и продаются по единым ценам $\mathbf{p}$ и выполнено $t_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i$, $t_j = \mathbf{p}\mathbf{y}_j$, сбалансированность доходов является следствием выполнения балансов по благам в допустимом состоянии экономики:

$$\sum_{i \in I} t_i - \sum_{j \in J} t_j = \sum_{i \in I} \mathbf{p}\mathbf{x}_i - \sum_{j \in J} \mathbf{p}\mathbf{y}_j = \mathbf{p}\left(\sum_{i \in I} \mathbf{x}_i - \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j\right) = 0.$$

При этом

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \in I}(v_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i) + \sum_{j \in J}(\mathbf{p}\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j)).$$

В сепарабельной экономике излишки потребителей и производителей представляют собой суммы соответствующих излишков на l рынках:

$$CS = \sum_{k=1}^{l} CS_k, \quad PS = \sum_{k=1}^{l} PS_k,$$

где CS_k и PS_k представляют собой, в свою очередь, суммы излишков отдельных экономических субъектов:

$$CS_k = \sum_{i \in I} CS_{ik}, \quad PS_k = \sum_{j \in J} PS_{jk}.$$

Для квазилинейной сепарабельной экономики можно определить чистые потери благосостояния отдельно для каждого блага (рынка): DL_k. Это разность между максимально достижимой величиной общего излишка на данном рынке $\sum_{i \in I} v_{ik}(\hat{x}_{ik}) - \sum_{j \in J} c_{jk}(\hat{y}_{jk})$, где через $\hat{x}_{ik}$ и $\hat{y}_{jk}$ мы обозначили соответствующие Парето-оптимальные объемы, и фактически достигнутой величиной общего излишка $CS_k + PS_{jk}$. Таким образом,

$$DL_k = \sum_{i \in I} v_{ik}(\hat{x}_{ik}) - \sum_{j \in J} c_{jk}(\hat{y}_{jk}) - \left(\sum_{i \in I} v_{ik}(x_{ik}) - \sum_{j \in J} c_{jk}(y_{jk})\right).$$

Ясно, что совокупные чистые потери благосостояния по экономике складываются из чистых потерь по рынкам отдельных благ:

$$DL = \sum_{k=1}^{l} DL_k.$$

5.5 Представление суммарного спроса посредством модели репрезентативного потребителя

Часто при изучении моделей частного равновесия бывает удобно использовать предположение, что суммарный спрос порождается решением задачи *одного* потребителя. Если такой потребитель существует, его называют репрезентативным потребителем.

Покажем что репрезентативный потребитель в экономике $\mathcal{E}_Q$ существует, причем его предпочтения на множестве потребительских наборов $(\mathbf{x}, z)$ $(\mathbf{x} \in X)$, могут быть представлены квазилинейной функцией полезности вида

$$u(\mathbf{x}, z) = v(\mathbf{x}) + z,$$

где множество допустимых наборов первых l благ имеет вид

$$X = \sum_{i \in I} X_i = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} = \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i,\, \mathbf{x}_i \in X_i \; \forall i \in I \right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу распределения некоторого фиксированного общего количества $\mathbf{x}_\Sigma \in X$ первых k благ таким образом, чтобы достигался максимум суммарной оценки потребителями потребления этих благ:

$$\begin{gathered} \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m} \\ \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i \leqslant \mathbf{x}_\Sigma, \\ \mathbf{x}_i \in X_i \; \forall i \in I. \end{gathered} \tag{❄}$$

Тогда в качестве $v(\mathbf{x})$ мы можем взять значение этой задачи при $\mathbf{x}_\Sigma = \mathbf{x}$. Если решение единственно, то его можно записать в виде функции параметра: $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_\Sigma)$. В этих обозначениях

$$v(\mathbf{x}_\Sigma) = \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_\Sigma)).$$

Если $X_i = \mathbb{R}^l_+$, то множество допустимых решений задачи (❄) непусто (при $\mathbf{x}_\Sigma \in X$) и компактно, поэтому если функции $v_i(\cdot)$ непрерывны, то задача имеет решение. Задача также всегда имеет решение, если множества X_i конечны и если они имеют вид $X_i =$

$0, 1, 2, \ldots$. Если X_i выпуклы, а функции $v_i(\cdot)$ строго вогнуты, то решение единственно.

Пусть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи i-го потребителя при некоторых ценах $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$. Докажем, что $(\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_m)$ являются решением задачи (❄) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}}$, где $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i$ — совокупный спрос при ценах $\mathbf{p}$.

Заметим, во-первых, что $(\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_m)$ допустимы в задаче (❄) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}}$. Если эти наборы не составляют оптимальное решение, то, рассуждая от противного, мы должны предположить существование другого допустимого решения задачи (❄) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}}$, $(\check{\mathbf{x}}_1, \ldots, \check{\mathbf{x}}_m)$, такого что

$$\sum_{i \in I} v_i(\check{\mathbf{x}}_i) > \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i).$$

Это альтернативное допустимое решение должно удовлетворять ограничению задачи:

$$\sum_{i \in I} \check{\mathbf{x}}_i \leqslant \bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i.$$

Умножим последнее неравенство на неотрицательные цены $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} \sum_{i \in I} \check{\mathbf{x}}_i \leqslant \mathbf{p} \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i.$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\sum_{i \in I} v_i(\check{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\check{\mathbf{x}}_i > \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i.$$

Это означает, что по крайней мере для одного из потребителей выполнено

$$v_i(\check{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\check{\mathbf{x}}_i > v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i,$$

что противоречит оптимальности набора $\bar{\mathbf{x}}_i$ при ценах $\mathbf{p}$ для этого потребителя.

Из доказанного следует, что

$$v(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i).$$

Это означает, что индикатор благосостояния в экономике с одним репрезентативным потребителем упорядочивает интересующие нас состояния экономики так же, как и индикатор благосостояния первоначальной экономики.

Далее, в предположении, что при любом $\mathbf{x}_\Sigma \in X$ существует решение задачи (❄) и, следовательно, определена величина $v(\mathbf{x}_\Sigma)$, покажем, что если $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи i-го потребителя при ценах

$\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, то $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи репрезентативного потребителя с функцией полезности $v(\mathbf{x}) + z$ при ценах $\mathbf{p}$. Будем доказывать от противного.

Задачу репрезентативного потребителя по свойствам квазилинейных предпочтений можно записать в эквивалентной форме:

$$v(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\mathbf{x} \to \max_{x \in X}.$$

Пусть существует $\tilde{\mathbf{x}} \in X$, такой что

$$v(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} > v(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}.$$

Здесь $v(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i \in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, где $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\mathbf{x}_\Sigma = \tilde{\mathbf{x}}$. Умножив ограничение задачи на неотрицательные цены, получим

$$\sum_{i \in I} \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i \leqslant \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}.$$

Таким образом, имеем следующую цепочку соотношений:

$$\sum_{i \in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i \geqslant v(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} > v(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i.$$

(Последнее равенство следует из того, что, как мы доказали, $(\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_m)$ является решением задачи (❄) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i$.) Мы пришли к противоречию, так как это означает, что по крайней мере для одного из потребителей $\bar{\mathbf{x}}_i$ не является наилучшим выбором при ценах $\mathbf{p}$:

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i > v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i.$$

Задачи к главе

5.1 Пусть функция издержек определена на всем множестве возможных выпусков Y_j^o и производственное множество Y_j характеризуются свободой расходования $(l+1)$-го блага. Покажите, что производственное множество Y_j однозначно описывается функцией издержек, т. е. что $(\mathbf{y}, -r) \in Y_j$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} \in Y_j^o$ и $r \geqslant c_j(\mathbf{y})$.

5.2 Постройте контрпример с вогнутыми функциями $v_i(\cdot)$ и выпуклыми функциями $c_j(\cdot)$, который показывал бы, что условие $\hat{z}_i > 0\ \forall i$ существенно в пункте {i} Теоремы 5.2.

5.3 Постройте контрпример, который показывал бы, что условие выпуклости функции издержек существенно в пункте {i} Теоремы 5.2.

5.4 Докажите пункт {ii} Теоремы 5.2.

5.5 Покажите, что в случае квазилинейной экономики без ограничений на «квазилинейное» благо ($\mathcal{E}_Q$) Парето-граница в координатах полезностей u_i представляет собой гиперплоскость вида $\sum_{i \in I} u_i = \text{const}$.

5.6 Докажите Теорему 5.3.

5.7 Докажите Теоремы 5.4, 5.5 и 5.6.

5.8 Рассмотрите задачу ($\mathcal{C}_{Qk}$), предполагая, что благо k может потребляться в любых неотрицательных количествах ($X_{ik} = \mathbb{R}_+$), функция $v_{ik}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_{++}$, предельная полезность $v'_{ik}(\cdot)$ убывает и $\lim_{x_{ik} \to 0} v'_{ik}(x_{ik}) = \infty$. Покажите, что $x_{ik} = 0$ не может являться решением задачи потребителя. Покажите, что выводы в этом случае повторяют те, которые получены для случая $X_{ik} = \mathbb{R}_{++}$.

5.9 Докажите, что при $x_{ik}(p_k) > 0$ выполнено

$$x_{ik}(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

5.10 Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{r})$ — допустимое состояние квазилинейной экономики, такое что технология каждой фирмы $j \in J$ лежит на эффективной границе ее технологического множества. Докажите, что

$$\sum_{i \in I} u_i(\mathbf{x}_i, z_i) = W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i \in I} \omega_i.$$

5.11 В экономике два блага ($l + 1 = 2$) и два потребителя, имеющие функции полезности $u_1 = \sqrt{x_1} + z_1$ и $u_2 = 2\sqrt{x_2} + z_2$. Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

5.12 Решите предыдущую задачу с функциями полезности $u_1 = -9/x_1^3 + z_1$ и $u_2 = -3/x_2^3 + z_2$.

5.13 Потребители ($i = 1, \ldots, m$) имеют квазилинейные функции полезности вида

(A) $u_i = 2\alpha_i \sqrt{x_i} + z_i$, (B) $u_i = -\alpha_i^2 \frac{1}{x_i} + z_i$,

(C) $u_i = \alpha_i \ln x_i + z_i$.

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя в каждом из случаев.

5.14 Пусть предпочтения потребителей представляются квазилинейными сепарабельными функциями полезности. Тогда без потери общности можно считать, что в экономике два блага ($l + 1 = 2$). Пусть $x_i(p)$ — спрос на первое благо i-го потребителя при ценах p, $D(p) =$

$\sum x_i(p)$ — суммарный спрос потребителей на первое благо, а $p(x) = D^{-1}(x)$ — обратная функция спроса. Предположим, что функция $p(x)$ является непрерывной и убывающей при $x \geqslant 0$. Докажите, что если

$$v(x) = \int_0^x p(q)dq,$$

то $v(x) + z$ является функцией полезности репрезентативного потребителя.

5.15 В ситуации предыдущей задачи функция спроса на благо имеет вид

$$D(p) = \frac{1}{4p^2}.$$

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

5.16 Пусть в экономике имеется два блага и цена второго блага равна 1. Функция спроса потребителя на первое благо является линейной убывающей функцией цены этого блага и не зависит от дохода. Покажите, что предпочтения потребителя можно представить квазилинейной функцией полезности. Найдите эту функцию полезности.

5.17 Пусть в экономике имеется $l + 1$ благо и цена $(l + 1)$-го блага равна 1. Функция спроса потребителя на каждое из первых l благ является убывающей функцией цены этого блага и не зависит от дохода и цен остальных благ. Покажите, что предпочтения потребителя можно представить квазилинейной сепарабельной функцией полезности. Как найти эту функцию полезности на основе функции спроса?

5.18 Сформулируйте и докажите для квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q$ теоремы благосостояния, исключив $(l + 1)$-е благо, т. е. используйте задачу $(\mathcal{W})$ для характеристики Парето-оптимальных состояний, задачу $(\mathcal{C}_Q)$ — для характеристики спроса потребителей и т. д.

Глава

Риск и неопределенность

6

Принятие экономическим субъектом решений в условиях риска (неопределенности) означает, что его благосостояние в будущем зависит от двух факторов: его решения в данный момент и от того, какое состояние мира (состояние природы) реализуется в будущем: какая будет погода, экономическая конъюнктура и т. п. Что именно произойдет, человек, принимающий решение, может только догадываться. Когда же определенное состояние реализуется, то принятое решение уже нельзя изменить.

Таким образом, для характеристики ситуации выбора в условиях неопределенности мы должны, в дополнение к множеству возможных решений A, описать множество состояний мира S и множество исходов (результатов) принятия решений X. При этом исход $\mathbf{x}_a(s) \in X$ описывает, что «получает» данный субъект в состоянии мира $s \in S$, если принимает решение $a \in A$. Это может быть, например, некоторый набор из множества допустимых потребительских наборов. Часто рассматривают случай, когда $X = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$). В этом случае исходы обычно называют выигрышами (денежными выигрышами). Ряд положений теории выбора в условиях неопределенности не зависит от природы рассматриваемых исходов.

Предполагается, что на множестве состояний мира S задано тем или иным способом распределение вероятностей. Этот объект называется вероятностным пространством. Тогда с точки зрения теории вероятностей множество состояний мира S — это множество элементарных событий, а функция $\mathbf{x}_a(\cdot)$, описывающая исходы действия a во всех состояниях мира,— это случайная величина. Соответствующую случайную величину будем обозначать $\tilde{\mathbf{x}}_a$. В дальнейшем, чтобы не усложнять анализ техническими деталями, мы, как правило, будем предполагать, что множество состояний мира S конечно: $S = \{1, \ldots, N\}$. Тогда случайная величина $\tilde{\mathbf{x}}_a$ является дискретной и может быть описана следующей таблицей:

1	2	$\cdots$	N
$\mathbf{x}_{a1}$	$\mathbf{x}_{a2}$	$\cdots$	$\mathbf{x}_{aN}$
μ_{a1}	μ_{a2}	$\cdots$	μ_{aN}

Здесь $\mu_{as} \geqslant 0$ — вероятность того, что реализуется состояние мира s при условии, что осуществлены действия a (принято решение a). Сумма вероятностей равна единице: $\sum_{s \in S} \mu_{as} = 1$.

Мы будем часто говорить об $\tilde{\mathbf{x}}_a$ как о случайных величинах, но, вообще говоря, речь неявно идет и о соответствующих вероятностных пространствах. А именно, объект $\tilde{\mathbf{x}}_a$ включает в себя не только информацию о функции $\mathbf{x}_a(\cdot)$, но и о вероятностях состояний мира μ_{as}, т. е. всю информацию, содержащуюся в приведенной таблице. Будем называть $\tilde{\mathbf{x}}_a$ случайным потребительским набором.

Как обычно, мы следуем неоклассической парадигме и предполагаем, что индивидуум осуществляет принятие решения в условиях риска на основе своих *предпочтений*. Вообще говоря, для предсказания поведения индивидуума достаточно задать его предпочтения на множестве возможных решений A. Однако хотелось бы иметь более общее описание, чтобы анализировать поведение в условиях риска не в одной конкретной ситуации, задаваемой набором исходов $\mathbf{x}_{as}$ и вероятностей состояний мира μ_{as}, а в некотором достаточно богатом множестве таких ситуаций. Таким образом, следует предположить существование предпочтений на множестве $A \times \tilde{X}$ пар $(a, \tilde{\mathbf{x}})$, где случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{x}}$ включает исходы $\mathbf{x}_s$ и их вероятности μ_s $(s \in S)$, $\tilde{X}$ — множество допустимых случайных потребительских наборов.

Рассматривая предпочтения на $A \times \tilde{X}$, мы неявно предполагаем, что, вообще говоря, индивидууму не безразлично, какие действия a он предпринял. Содержательно это означает, что при принятии решения важны как исходы $\mathbf{x}_s$ принятого решения при всех возможных состояниях мира S, так и (говоря неформально) возможные издержки получения исходов, связанные с действиями a. Однако все последствия предпринятых действий мы можем включить в наборы $\mathbf{x}_s$, так что сами по себе действия a будут носить «нейтральный» характер. Другими словами, без потери общности мы можем рассматривать ситуацию, когда экономическому субъекту безразлично, какое решение привело к данным результатам:

> Для любых двух решений $a, b \in A$ и любого случайного потребительского набора $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$ выполнено $(a, \tilde{\mathbf{x}}) \sim (b, \tilde{\mathbf{x}})$.

Таким образом, можно считать, что предпочтения заданы на множестве $\tilde{X}$.

В следующих двух параграфах мы опишем классический, наиболее часто используемый способ задания предпочтений на множестве случайных потребительских наборов $\tilde{X}$. При таком способе задания предпочтений существует представляющая их функция полезности $U(\cdot)$ особого вида (линейная по вероятностям состояний мира). Этот материал может быть опущен без ущерба для понимания последующего изложения.

Итак, наша цель состоит в том, чтобы ввести некоторые упрощающие предположения и показать, что при этих предположениях представляющая рассматриваемые предпочтения функция полезности имеет вид

$$U(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s).$$

Функция $U(\cdot)$ такого вида называется функцией Неймана—Моргенштерна (ожидаемой полезностью), а функция $u(\cdot)$, заданная на множестве исходов X,— элементарной функцией полезности (функцией Бернулли)[1].

6.1 Представление предпочтений линейной функцией полезности

Классический подход к моделированию предпочтений на случайных потребительских наборах исходит из предположения, что для потребителя не имеет значения само по себе состояние мира. Это предположение позволяет характеризовать предпочтения на случайных потребительских наборах $\tilde{\mathbf{x}}$ посредством предпочтений на *лотереях* — объектах более простой природы. Если для потребителя не имеет значения само по себе состояние мира и потребление $\mathbf{x}_s$ в нескольких различных состояниях мира совпадает, то можно «объединить» эти состояния и сложить их вероятности. Получившийся объект и будет называться лотереей. Лотерея включает информацию только о результатах, которые непосредственно влияют на потреби-

[1] Эта функция впервые была выведена на основе аксиом Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в их знаменитой книге J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944 (рус. пер. Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение*, М.: Наука, 1970). Сама идея ожидаемой полезности появилась гораздо раньше (см., напр., работу Даниила Бернулли, упоминаемую в сноске 5 на с. 394).

теля, и о вероятностях получения этих результатов, но не содержит информации о том, как эти результаты получены и каким состояниям мира они соответствуют. При таком подходе можно изначально задать предпочтения на лотереях, а затем перенести на случайные потребительские наборы.

Покажем, как построить такие лотереи по случайным потребительским наборам. Пусть, например, имеется три равновероятных состояния мира: «желтое», «фиолетовое» и «голубое». В желтом состоянии мира потребитель потребит 1 кг огурцов и 2 л кваса, в фиолетовом также 1 кг огурцов и 2 л кваса, а в голубом — 3 кг огурцов и 1 л кваса. В результате получаем лотерею, в которой набор $(1, 2)$ имеет вероятность $2/3$, а набор $(3, 1)$ — вероятность $1/3$.

В общем случае пусть $\tilde{\mathbf{x}}$ — случайный потребительский набор. Рассмотрим множество $\{\dot{\mathbf{x}}_j\}$ всех различающихся между собой исходов $\mathbf{x}_s$ из этого случайного набора, которым соответствуют положительные вероятности (другими словами, это носитель соответствующей случайной величины). Каждому исходу $\dot{\mathbf{x}}_j$ сопоставляется вероятность p_j, равная сумме вероятностей состояний мира, в которых исход равен $\dot{\mathbf{x}}_j$, т. е.

$$p_j = \sum_{s\colon x_s = \dot{x}_j} \mu_s.$$

Такие объекты (множества различных исходов и их вероятности) принято называть лотереями на множестве X. Построенную на основе исходного случайного потребительского набора $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$ лотерею будем обозначать $\ell(\tilde{\mathbf{x}})$.

Множеству $\tilde{X}$ допустимых случайных потребительских наборов соответствует множество $\mathcal{L} = \{\, \ell(\tilde{\mathbf{x}}) \mid \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X} \,\}$ получающихся на их основе лотерей. Если множество состояний мира конечно, то все полученные таким образом лотереи $\ell(\tilde{\mathbf{x}})$ будут простыми.

Определение 6.1:

Простой лотереей называют лотерею с конечным носителем, т. е. пару $(X_p, \mathbf{p})$, где X_p — конечное подмножество множества исходов X, а $\mathbf{p}$ — вектор (положительных) вероятностей получения исходов из X_p. ◀

Простую лотерею можно представить следующей таблицей (где, как говорилось выше, все $\dot{\mathbf{x}}_j$ предполагаются различными):

$\dot{\mathbf{x}}_1$	$\dot{\mathbf{x}}_2$	$\cdots$	$\dot{\mathbf{x}}_k$
p_1	p_2	$\cdots$	p_k

В дальнейшем удобно простую лотерею представлять в виде функции $p(\cdot)$, заданной на всем множестве X, считая, что $p(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} \notin X_p$ и $p(\mathbf{x}_j) = p_j$. Тогда без потери общности простую лотерею $(X_p, \mathbf{p})$ можно отождествлять с $\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ понимается как сокращенное обозначение функции $p(\cdot)$. В дальнейшем будем придерживаться этого упрощения. Будем обозначать соответствующее $\mathbf{p}$ множество X_p, т. е. носитель лотереи, через $\operatorname{Supp}(\mathbf{p})$.

$$\operatorname{Supp}(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in X \;\middle|\; p(\mathbf{x}) > 0 \right\}.$$

Понятно, что по определению вероятности

$$\sum_{\mathbf{x} \in \operatorname{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x}) = 1.$$

Множество всех простых лотерей обозначим через $\mathcal{S}$. Сначала мы охарактеризуем условия существования функции полезности Неймана—Моргенштерна для предпочтений, заданных на множестве $\mathcal{S}$. Позже мы покажем, что предпочтения на $\mathcal{S}$ задают предпочтения на $\tilde{X}$ и функция Неймана—Моргенштерна на $\mathcal{S}$ задает функцию Неймана—Моргенштерна на $\tilde{X}$.

Первое предположение, которое мы сделаем, состоит в том, что у потребителя существуют предпочтения, упорядочивающие все возможные пары элементов множества $\mathcal{S}$, причем эти предпочтения являются рациональными в стандартном неоклассическом смысле (см. Определение 1.3 на с. 33).

(A1) На множестве простых лотерей $\mathcal{S}$ заданы неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$.

Кроме предположения о наличии рациональных предпочтений на лотереях, нам потребуются еще два важных предположения о свойствах комбинаций лотерей.

Определение 6.2:

Для любой пары простых лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0, 1]$ определим выпуклую комбинацию или, другими словами, смесь лотерей $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ как простую лотерею, носителем которой является объединение носителей лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$\operatorname{Supp}(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \operatorname{Supp}(\mathbf{p}) \cup \operatorname{Supp}(\mathbf{q}),$$

а вероятность исхода $\mathbf{x} \in \operatorname{Supp}(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}))$ рассчитывается по формуле

$$\alpha p(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) q(\mathbf{x})$$

(соответственно 0, если $\mathbf{x} \notin \operatorname{Supp}(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q})$). ◄

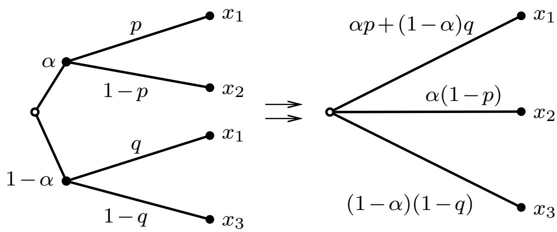


Рис. 6.1. *Две простые лотереи* $\mathbf{p}$ *и* $\mathbf{q}$ *и их выпуклая комбинация* $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$

Легко понять, что множество всех простых лотерей $\mathcal{S}$ содержит все выпуклые комбинации своих элементов: если $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$, тогда $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ для всех $\alpha \in [0, 1]$.

Построение выпуклой комбинации лотерей с различающимися множествами исходов проиллюстрировано на Рис. 6.1.

Одна из возможных интерпретаций операции выпуклой комбинации лотерей $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ состоит в том, что рассматривается двухэтапная лотерея: лотерея с двумя исходами, которые, в свою очередь, являются обычными одноэтапными лотереями. В первоначальной лотерее вероятности равны α и $1 - \alpha$: с вероятностью α реализуется исход $\mathbf{p}$, а с вероятностью $1-\alpha$ — исход $\mathbf{q}$. При этом предполагается, что оценка лотереи потребителем не зависит от способа ее реализации, т. е. двухэтапная и соответствующая ей одноэтапная лотереи эквивалентны. Другими словами, в оценке любой лотереи потребитель ориентируется лишь на исходы этой лотереи и вероятности, с которыми эти исходы реализуются. Так, две показанные на Рис. 6.1 лотереи эквивалентны, поскольку приводят в конечном итоге к одним и тем же исходам с одинаковыми вероятностями этих исходов, и поэтому их можно рассматривать как одну и ту же альтернативу.

Мы будем исходить из того, что для выпуклых комбинаций лотерей верны следующие два предположения.

(A2) Аксиома независимости от посторонних альтернатив
Пусть $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея. Тогда для любого $\alpha \in (0, 1]$ выполняется соотношение $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$.

Эту аксиому можно интерпретировать через двухэтапные лотереи. Предположим, что индивидуум считает лотерею $\mathbf{p}$ более предпочтительной, чем $\mathbf{q}$. Если проводится лотерея, в которой с вероятностью $1-\alpha$ потребителю достается лотерея $\mathbf{r}$, а с вероятностью α — по желанию $\mathbf{p}$ или $\mathbf{q}$, то в последнем случае потребитель всегда будет выбирать $\mathbf{p}$, какова бы ни была лотерея $\mathbf{r}$. Что будет, если предложить потребителю выбрать между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ *заранее*? Естественно предположить, что он тоже выберет $\mathbf{p}$. Но это фактически то же, что выбирать между двумя двухэтапными лотереями: лотереей, где исходами являются $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ с вероятностями α и $1-\alpha$ соответственно, и лотереей, где исходами являются $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ с вероятностями α и $1-\alpha$. Следовательно, индивидууму следует выбрать первую из этих двухэтапных лотерей, что и означает, что $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$.

(A3) Аксиома исчерпания Архимеда

Если $\mathbf{p} \succ \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$, то существуют числа $\alpha, \beta \in (0,1)$, такие что

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{r}.$$

Эта аксиома утверждает, что если лотерея $\mathbf{q}$ лучше $\mathbf{r}$, но хуже $\mathbf{p}$, то не может быть так, чтобы *все* нетривиальные смеси лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ были либо лучше, либо хуже $\mathbf{q}$: найдется хотя бы одна смесь, которая хуже $\mathbf{q}$, и хотя бы одна смесь, которая лучше $\mathbf{q}$. Смысл аксиомы состоит в том, что предпочтения на лотереях в определенном смысле непрерывны.

При этих предположениях предпочтения на простых лотереях можно описать функцией, которая линейна по вероятностям (имеет вид Неймана—Моргенштерна).

Определение 6.3:

Функция полезности $U\colon \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$, представляющая предпочтения на простых лотереях, называется функцией полезности Неймана—Моргенштерна, если существует функция $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$, такая что

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}).$$

◀

Мы хотим доказать следующий результат[2].

Теорема 6.1:

Если предпочтения на множестве простых лотерей $\mathcal{S}$ удовлетворяют предположениям (A1)–(A3), то существует представляющая их функция полезности $U(\cdot)$, имеющая вид Неймана—Моргенштерна. Такое представление единственно с точностью до линейного преобразования. ⌟

[2]Здесь используется не та система аксиом, которая предложена в книге фон Неймана и Моргенштерна. Мы исходим из ставшей традиционной системы аксиом Н. Йенсена (N. Jensen. An Introduction to Bernoullian Utility Theory, I: Utility Functions, *Swedish Journal of Economics* **69** (1967): 163–183.).

Доказательство этой теоремы достаточно громоздкое. Оно приведено в следующем параграфе.

Данная теорема говорит о том, что мы можем определить полезность U как функцию от лотереи $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$. Эта же функция косвенным образом задает предпочтения на множестве исходных случайных потребительских наборов $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$. Как мы видели, каждому случайному потребительскому набору соответствует лотерея $\ell(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathcal{S}$. Естественно сопоставить набору $\tilde{\mathbf{x}}$ величину полезности $U = U(\ell(\tilde{\mathbf{x}}))$.

Определенная таким образом функция $U(\tilde{\mathbf{x}})$ оказывается линейной по исходным вероятностям μ_s. Для того чтобы это показать, следует вспомнить, как мы построили вероятности $p(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in \operatorname{Supp}(\mathbf{p})$ на основе исходных вероятностей состояний мира μ_s:

$$
\begin{aligned}
U = \sum_{\mathbf{x}\in\operatorname{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{k} p_j u(\dot{x}_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{s:\ x_s=\dot{x}_j} \mu_s u(x_j) = \sum_{s\in S} \mu_s u(x_s).
\end{aligned}
$$

Окончательно получаем следующий вид для функции полезности, представляющей исходные предпочтения на $\tilde{X}$:

$$
U(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{s\in S} \mu_s u(x_s).
$$

Заметим, что, в соответствии с определением функции Неймана—Моргенштерна, ее можно записать в следующем виде:

$$
U(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}}).
$$

где E — оператор математического ожидания. Заметим также, что этот вид не зависит от предположений о конечности множества состояний мира. Если это множество не является конечным, то соответствующие суммы по $s \in S$ заменяются интегралами. В дальнейшем мы чаще всего будем пользоваться оператором E, а не соответствующей суммой, поскольку это упрощает обозначения и позволяет формулировать и доказывать утверждения в более общей форме. Что именно спрятано за оператором E имеет значение в основном тогда, когда требуется брать производные от $U(\cdot)$.

Сделаем еще ряд существенных замечаний.

Можно было бы исходить из того, что на случайных потребительских наборах из множества $\tilde{X}$ заданы предпочтения, и предположить, что при сравнении разных $\tilde{\mathbf{x}}$ принимаются во внимание только исходы и вероятности их получения, т. е. они удовлетворяют следующему свойству:

$$\text{Если для } \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{X} \text{ выполнено } \ell(\tilde{\mathbf{x}}) = \ell(\tilde{\mathbf{y}}), \text{ то } \tilde{\mathbf{x}} \sim \tilde{\mathbf{y}}.$$

Тогда предпочтения на множестве $\tilde{X}$ порождают предпочтения на множестве лотерей, порожденных этими величинами, более конкретно, на множестве $\mathcal{L} = \{\, \ell(\tilde{\mathbf{x}}) \mid \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X} \,\}$. Ясно, что подобные предпочтения на множестве $\mathcal{L}$ будут неоклассическими, если исходные предпочтения являются таковыми.

Множество $\mathcal{L}$ является подмножеством множества простых лотерей $\mathcal{S}$, если множество состояний мира конечно. Однако при этом $\mathcal{L}$ не может содержать *все* простые лотереи, поскольку количество исходов в носителе лотереи не может быть больше числа состояний мира. Таким образом, предпочтения на множестве всех простых лотерей $\mathcal{S}$ будут заданы только частично.

Можно было бы рассмотреть вопрос о том, возможно ли дополнить эти частично заданные предпочтения таким образом, чтобы они удовлетворяли предположениям (A1)–(A3). Однако эта проблема выходит далеко за рамки данного учебника. Поэтому мы просто постулируем существование рациональных предпочтений на простых лотереях. Поскольку многие ситуации выбора в условиях риска изначально представляются как ситуации выбора на множестве лотерей, такой подход имеет и самостоятельное значение.

В ряде приложений теории выбора в условиях риска предпочтения оказываются заданными на лотереях более общего типа, например на непрерывных распределениях. В этой связи возникает вопрос об условиях существования функций полезности Неймана—Моргенштерна, представляющих такие предпочтения. Мы не будет останавливаться детально на описании таких условий. Укажем лишь на тот факт, что множество простых лотерей (простых мер) — всюду плотное подмножество множества борелевских мер (а значит, и непрерывных распределений). Поэтому если предпочтения заданы на некотором подмножестве борелевских мер и непрерывны в слабой топологии, то при некоторых дополнительных предположениях функцию полезности, определенную на простых мерах, можно по непрерывности распространить и на более широкий класс лотерей. Читатель может попробовать доказать соответствующие утверждения самостоятельно, обращаясь, в случае необходимости, к учебникам по математическому анализу и топологии.

В заключение этого параграфа укажем на на то, что, рассматривая предпочтения на лотереях, мы исходим из предположения, что для потребителя не имеет значения само по себе состояние мира, однако такое предположение содержательно далеко не всегда оправданно. Во многих реальных ситуациях польза от блага зависит от того, в каком состоянии мира происходит потребление этого блага. Можно, например, рассмотреть два состояния — «солнечная погода» и «дождливая погода» и два блага — солнцезащитные очки и зонтик. Ясно, что наличие очков в дождливую погоду не приносит никакой пользы потребителю. То же верно и для зонтика в ясную погоду. Решение этой проблемы состоит в том, чтобы рассматривать лотереи не на самих по себе потребительских благах, а на тех «услугах», которые они оказывают потребителю. В рассматриваемом примере следует перейти от набора благ (количество солнцезащитных очков, количество зонтиков) к набору услуг, которые они оказывают: (услуга защиты глаз от солнца, услуга защиты от дождя).

В общем случае, пусть имеется функция $\mathbf{z}_s(\mathbf{x})$, ставящая в соответствие потребительскому набору $\mathbf{x}$ в состоянии мира s оказываемые этим набором потребителю услуги $\mathbf{z}$. Предполагается, что польза от услуг уже не связана с состоянием мира. В этом случае можно применить рассматриваемую теорию к лотереям, заданным на $\mathbf{z}$, а потом построить на этой основе функцию полезности, заданную на наборах благ $\mathbf{x}$. Если $u_0(\mathbf{z})$ — элементарная функция полезности, заданная на «услугах» благ, то $u_s(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{z}_s(\mathbf{x}))$ — соответствующая элементарная функция полезности, заданная на благах. Заметьте, что она *зависит от состояния мира*. При этом функция полезности Неймана—Моргенштерна принимает следующий более общий вид:

$$U = \sum_{s \in S} \mu_s u_s(\mathbf{x}_s).$$

6.2 Доказательство представимости предпочтений на множестве простых лотерей линейной функцией полезности

В этом параграфе нам предстоит доказать Теорему 6.1. Для упрощения выкладок понадобятся некоторые свойства операции смеси (выпуклой комбинации) лотерей. Доказательство их достаточно очевидно (см. задачу 6.1).

Теорема 6.2:

Операция выпуклой комбинации лотерей на множестве всех простых лотерей $\mathcal{S}$ обладает следующими свойствами:

* $\mathbf{p} \diamond 1 \diamond \mathbf{q} = \mathbf{p}$,
* $\mathbf{p} \diamond 0 \diamond \mathbf{q} = \mathbf{q}$,
* $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} = \mathbf{q} \diamond (1-\alpha) \diamond \mathbf{p}$,
* $(\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}) \diamond \alpha \diamond (\mathbf{p} \diamond \gamma \diamond \mathbf{q}) = \mathbf{p} \diamond (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) \diamond \mathbf{q}$. ┘

Сначала сформулируем две леммы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 6.3:

Пусть для предпочтений на простых лотереях выполнены свойства (A1)–(A3). Тогда верны следующие утверждения.

{i} Для любой пары лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, таких что $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$, и пары чисел $\alpha, \beta \in [0,1]$ условие

$$\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\beta > \alpha$.

{ii} Если $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, и $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея, то для любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется соотношение $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \sim \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$. ┘

Доказательство: {i} Докажем сначала, что из $\beta > \alpha$ следует $\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$.

Рассмотрим лотерею $\mathbf{r} = \mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta} \diamond \mathbf{q}$. Для нее выполнено

$$\mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} = \left(\mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta} \diamond \mathbf{q}\right) \diamond \beta \diamond \mathbf{q} = \mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta}\beta \diamond \mathbf{q} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Так как $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$, то по аксиоме (A2) при $\frac{\alpha}{\beta} \in [0,1)$ выполнено

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \diamond \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \diamond \mathbf{p} \succ \mathbf{q} \diamond \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \diamond \mathbf{p} = \mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta} \diamond \mathbf{q} = \mathbf{r}.$$

Полученное соотношение $\mathbf{p} \succ \mathbf{r}$ позволяет при $\beta \in (0,1]$ еще раз применить аксиому (A2):

$$\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q},$$

откуда получаем $\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$.

Докажем обратное. Пусть для некоторых α и β выполнено $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \prec \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}$, но при этом $\alpha \geqslant \beta$. Если $\alpha > \beta$, то по только что доказанному $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}$, а это противоречит асимметричности строгого отношения предпочтения. Если же $\alpha = \beta$, то лотереи $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ и $\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}$ совпадают, и получаем противоречие с иррефлексивностью отношения $\succ$. Таким образом, утверждение доказано.

{ii} Доказательство этого пункта оставляем читателю как упражнение (см. задачи 6.3 и 6.4). ■

Нам понадобится еще тот факт, что функция Неймана—Моргенштерна — это синоним функции линейной по вероятностям. Под линейностью по вероятностям здесь понимается следующее.

Определение 6.4:

Будем называть функцию полезности $U : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$, представляющую предпочтения на лотереях, линейной (по вероятностям), если для произвольных лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0, 1]$ верно соотношение

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1 - \alpha)U(\mathbf{q}). \quad ◀$$

Докажем, что линейность функции полезности эквивалентна тому, что это функция Неймана—Моргенштерна.

Теорема 6.4:

Функция $U(\cdot)$ является линейной функцией полезности, представляющей предпочтения на множестве лотерей $\mathcal{S}$, тогда и только тогда, когда она имеет вид Неймана—Моргенштерна. ┘

Доказательство: Пусть функция $U(\cdot)$ линейна. Обозначим через $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$ лотерею, в которой $\mathbf{x}$ является единственным исходом, т. е.

$$\mathrm{Supp}(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{x}\}.$$

Определим функцию $u(\cdot)$ на множестве элементарных исходов X по формуле

$$u(\mathbf{x}) = U(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})).$$

Тогда $U(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$. Докажем это утверждение по индукции.

Очевидно, что для лотереи с одним исходом это утверждение выполнено. Предположим, что утверждение верно для лотерей с k и менее исходами. Пусть $\mathbf{p}$ — лотерея с $k+1$ исходом, и пусть $\mathbf{x}'$ — один из этих исходов, т. е. $\mathbf{x}' \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p})$. Тогда

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}') \diamond p(\mathbf{x}') \diamond \mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}$ — лотерея с $\mathrm{Supp}(\mathbf{q}) = \mathrm{Supp}(\mathbf{p}) \setminus \{\mathbf{x}'\}$ и $q(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})/(1 - p(\mathbf{x}'))$ при $\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{q})$.

Так как функция $U(\cdot)$ линейна, то

$$U(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}') \diamond p(\mathbf{x}') \diamond \mathbf{q}) = p(\mathbf{x}')u(\mathbf{x}') + (1 - p(\mathbf{x}'))U(\mathbf{q}).$$

В силу предположения индукции

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{q})} q(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{q})} \frac{p(\mathbf{x})}{1-p(\mathbf{x}')}\,u(\mathbf{x}).$$

В итоге получим требуемый результат:

$$U(\mathbf{p}) = p(\mathbf{x}')u(\mathbf{x}') + (1-p(\mathbf{x}'))\left(\sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{q})} \frac{p(\mathbf{x})}{1-p(\mathbf{x}')}\,u(\mathbf{x})\right) =$$
$$= \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}).$$

Доказательство обратного достаточно очевидно. ■

Следующая теорема является обратной к той, которую мы хотим доказать.

Теорема 6.5:

Если предпочтения на множестве лотерей представимы линейной функцией полезности $U(\cdot)$, то эти предпочтения удовлетворяют свойствам (A1)–(A3). ┘

Доказательство: (A1) Это свойство очевидно. Если предпочтения заданы функцией полезности, то предпочтения являются неоклассическими.

(A2) Пусть $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$. Тогда $U(\mathbf{p}) > U(\mathbf{q})$.

Пусть $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея, α — число, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда

$$U(\mathbf{p}\diamond\alpha\diamond\mathbf{r}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{r}) >$$
$$> \alpha U(\mathbf{q}) + (1-\alpha)U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{q}\diamond\alpha\diamond\mathbf{r}).$$

Поэтому $\mathbf{p}\diamond\alpha\diamond\mathbf{r} \succ \mathbf{q}\diamond\alpha\diamond\mathbf{r}$. Значит, предпочтения удовлетворяют свойству независимости от посторонних альтернатив.

(A3) Пусть $\mathbf{p} \succ \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$, то есть

$$U(\mathbf{p}) > U(\mathbf{q}) > U(\mathbf{r}).$$

Тогда если

$$1 \geqslant \alpha > \frac{U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{r})}{U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{r})},$$

то $\alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{r}) > U(\mathbf{q})$, откуда по свойству линейности $\mathbf{p}\diamond\alpha\diamond\mathbf{r} \succ \mathbf{q}$. Аналогично если

$$0 \leqslant \beta < \frac{U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{r})}{U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{r})},$$

то $\mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{r}$. Значит, выполнена «аксиома исчерпания Архимеда». ■

Если предпочтения потребителя на лотереях удовлетворяют аксиомам (A1)–(A3), то можно подобрать линейную функцию полезности, которая представляет эти предпочтения, притом такая линейная функция полезности единственна с точность до линейного преобразования. Ниже мы докажем это[3], используя следующее вспомогательное предположение (теорема верна и без этого предположения[4]):

(A4) Множество $\mathcal{S}$ содержит наихудший $\mathbf{w}$ и наилучший $\mathbf{b}$ элементы:
$$\mathbf{w} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{b} \text{ для всех } \mathbf{p} \in \mathcal{S}.$$

Для доказательства общей теоремы докажем еще две леммы. Всюду предполагается, что выполнены свойства (A1)–(A4).

В случае, когда $\mathbf{b} \sim \mathbf{w}$, все лотереи из множества $\mathcal{S}$ эквивалентны и построение функции полезности с нужными свойствами не вызывает затруднений:
$$U(\mathbf{p}) = C,$$
где C — произвольное число. (Понятно, что константа — линейная функция.) Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mathbf{w} \succ \mathbf{b}$.

Будем обозначать через $\mathbf{f}(\alpha)$ выпуклую комбинацию лучшей и худшей лотерей с коэффициентом $\alpha \in [0, 1]$, т. е.
$$\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{b} \diamond \alpha \diamond \mathbf{w}.$$
Обозначим множество таких лотерей через $\mathbf{f}([0, 1])$. Напомним, что мы рассматриваем только случай $\mathbf{b} \succ \mathbf{w}$. Из Теоремы 6.3 следует, что функция $\mathbf{f}(\cdot)$ задает взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0, 1]$ и множеством $\mathbf{f}([0, 1])$. Следующее утверждение показывает, что на основе функции $\mathbf{f}(\cdot)$ можно построить функцию полезности.

Теорема 6.6:

Для любой лотереи $\mathbf{p}$ из $\mathcal{S}$ найдется единственное число $U(\mathbf{p}) \in [0, 1]$ такое, что справедливо $\mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$. Функция $U(\cdot)$ является функцией полезности, представляющей данные предпочтения. ⌟

---

[3]Эти доказательства можно сделать более элегантными, если предположить конечность множества X.

[4]См., напр., P. C. Fishburn. *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley & Sons, 1970 (рус. пер. П. Фишбёрн. *Теория полезности для принятия решений*, М.: Наука, 1978). В задаче 6.5 предлагается доказать это утверждение самостоятельно в виде серии утверждений.

Доказательство: Для любой лотереи $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ нам нужно установить, что существует эквивалентная ей лотерея из $\mathbf{f}([0,1])$.

Когда $\mathbf{p} \sim \mathbf{b}$ или же $\mathbf{p} \sim \mathbf{w}$, доказательство существования числа $U(\mathbf{p})$ тривиально — оно равно 1 и 0 соответственно.

Рассмотрим случай $\mathbf{w} \prec \mathbf{p} \prec \mathbf{b}$.

Обозначим множество чисел, соответствующих лотереям из $\mathbf{f}([0, 1])$, которые лучше, чем $\mathbf{p}$, через A^+:

$$A^+ = \{\, \alpha \in [0,1] \mid \mathbf{p} \prec \mathbf{f}(\alpha) \,\}.$$

Аналогично множество чисел, соответствующих лотереям из $\mathbf{f}([0, 1])$, которые хуже, чем $\mathbf{p}$, обозначим через A^-:

$$A^- = \{\, \alpha \in [0,1] \mid \mathbf{f}(\alpha) \prec \mathbf{p} \,\}.$$

Эти два множества непусты, поскольку $1 \in A^+$ и $0 \in A^-$.

Так как множества A^+, A^- непусты и ограничены, то существуют числа

$$\alpha^+ = \inf A^+, \ \alpha^- = \sup A^-.$$

Для этих чисел справедливо соотношение $\alpha^- \leqslant \alpha^+$; в противном случае нашелся бы общий элемент $\alpha \in A^-$, $\alpha \in A^+$, что противоречит иррефлексивности $\succ$.

Покажем, что $\mathbf{f}(\alpha^+) \preccurlyeq \mathbf{p} \preccurlyeq \mathbf{f}(\alpha^-)$, т.е. $\alpha^+ \notin A^+$ и $\alpha^- \notin A^-$. Предположим противное. Пусть, например, $\mathbf{w} \prec \mathbf{p} \prec \mathbf{f}(\alpha^+)$. В таком случае в силу (A3) существует $\gamma > 0$, такое что для лотереи $\mathbf{w} \diamond \gamma \diamond \mathbf{f}(\alpha^+)$ справедливо соотношение

$$\mathbf{w} \diamond \gamma \diamond \mathbf{f}(\alpha^+) \succ \mathbf{p}.$$

Поскольку

$$\mathbf{w} \diamond \gamma \diamond \mathbf{f}(\alpha^+) = \mathbf{w} \diamond \gamma \diamond (\mathbf{b} \diamond \alpha^+ \diamond \mathbf{w}) = \mathbf{b} \diamond \alpha^+(1-\gamma) \diamond \mathbf{w} = \mathbf{f}(\alpha^+(1-\gamma)),$$

то это означает, что $\mathbf{f}(\alpha^+(1-\gamma)) \succ \mathbf{p}$. Значит, $\alpha^+(1-\gamma) \in A^+$, а это противоречит определению числа α^+. Итак, предположение $\mathbf{f}(\alpha^+) \succ \mathbf{p}$ неверно. Поэтому $\mathbf{f}(\alpha^+) \preccurlyeq \mathbf{p}$. Рассуждения для α^- аналогичны. Таким образом,

$$\mathbf{f}(\alpha^+) \preccurlyeq \mathbf{p} \preccurlyeq \mathbf{f}(\alpha^-).$$

Если сопоставить это с вытекающим из Теоремы 6.3 и из неравенства $\alpha^- \leqslant \alpha^+$ соотношением

$$\mathbf{f}(\alpha^-) \preccurlyeq \mathbf{f}(\alpha^+),$$

то

$$\mathbf{f}(\alpha^-) \sim \mathbf{p} \sim \mathbf{f}(\alpha^+).$$

Таким образом, мы можем выбрать $U(\mathbf{p}) = \alpha^+$. Существование числа $U(\mathbf{p})$ доказано.

Единственность числа $U(\mathbf{p})$ следует из Теоремы 6.3.

Теперь покажем, что $U(\mathbf{p})$ есть функция полезности. Из Теоремы 6.3 следует, что из двух лотерей из $\mathbf{f}([0,1])$ хуже та, коэффициент которой меньше и обратно:

$$\mathbf{f}(\alpha) \prec \mathbf{f}(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Для двух произвольных лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ соотношение $\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$ эквивалентно тому, что $\mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \prec \mathbf{f}(U(\mathbf{q}))$. Поэтому

$$\mathbf{p} \prec \mathbf{q} \Leftrightarrow U(\mathbf{p}) < U(\mathbf{q}). \qquad \blacksquare$$

Докажем теперь, что построенная таким образом функция является единственной линейной функцией, представляющей рассматриваемые предпочтения.

Теорема 6.7:

Функция полезности $U(\cdot)$, такая что $\mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$, является линейной.

Эта функция — единственная (с точностью до линейного преобразования) линейная функция полезности, представляющая данные предпочтения. ⌟

Доказательство: (Линейность) Мы хотим доказать, что для любых лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{q}).$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ доказываемое очевидно.

Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$.

Пусть утверждение теоремы неверно. Пусть например для некоторых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) < \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{q}).$$

Тогда можно подобрать числа $0 \leqslant \beta \leqslant U(\mathbf{p})$ и $0 \leqslant \gamma \leqslant U(\mathbf{q})$, такие что

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma,$$

причем либо $\beta < U(\mathbf{p})$, либо $\gamma < U(\mathbf{q})$. При этом

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \sim \mathbf{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma).$$

По свойствам операции комбинирования лотерей

$$\mathbf{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) = \mathbf{b} \diamond (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) \diamond \mathbf{w} = \\ = (\mathbf{b} \diamond \beta \diamond \mathbf{w}) \diamond \alpha \diamond (\mathbf{b} \diamond \gamma \diamond \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma).$$

Если $\beta < U(\mathbf{p})$, то $\mathbf{f}(\beta) \prec \mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$, и по аксиоме (A2) получим

$$\mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \prec \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma).$$

Если же $\beta = U(\mathbf{p})$, то $\mathbf{f}(\beta) = \mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$ и согласно пункту {ii} Теоремы 6.3

$$\mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \sim \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma).$$

Аналогичным образом, если $\gamma < U(\mathbf{q})$, то верно соотношение $\mathbf{f}(\gamma) \prec \mathbf{f}(U(\mathbf{q})) \sim \mathbf{q}$, и по аксиоме (A2)

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) = \mathbf{f}(\gamma) \diamond (1-\alpha) \diamond \mathbf{p} \prec \mathbf{q} \diamond (1-\alpha) \diamond \mathbf{p} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Если же $\gamma = U(\mathbf{q})$, то $\mathbf{f}(\gamma) \sim \mathbf{q}$ и по пункту {ii} Теоремы 6.3

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \sim \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Получаем цепочку соотношений

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \sim \mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \preccurlyeq \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \preccurlyeq \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Одно из соотношений «не хуже» будет строгим («хуже»). Значит, получено противоречие.

Аналогичным образом можно прийти к противоречию с аксиомой (A1), предположив, что $U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) > \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{q})$. Значит,

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{q}).$$

(Единственность) Предположим, что $V(\cdot)$ — другая линейная функция полезности. Обозначим

$$V^*(\mathbf{p}) = \frac{V(\mathbf{p}) - V(\mathbf{w})}{V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{w})}.$$

Данное преобразование является линейным. Покажем, что $V^*(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})$. Поскольку $V(\cdot)$ линейна, то $V^*(\mathbf{p})$ также линейна. Кроме того, функции $V^*(\cdot)$ и $U(\cdot)$ совпадают для худшей и лучшей лотерей:

$$V^*(\mathbf{w}) = U(\mathbf{w}) = 0 \quad \text{и} \quad V^*(\mathbf{b}) = U(\mathbf{b}) = 1.$$

Это означает, что функции $V^*(\cdot)$ и $U(\cdot)$ в силу линейности совпадают на $\mathbf{f}([0,1])$. Так как любая лотерея из $\mathcal{S}$ эквивалентна лотерее из $\mathbf{f}([0,1])$, то $V^*(\cdot)$ и $U(\cdot)$ совпадают на любой лотерее из $\mathcal{S}$. ■

Сопоставляя доказанные в этом параграфе теоремы, видим, что мы фактически доказали Теорему 6.1. Правда, при этом мы использовали дополнительное предположение (A4). (Способ доказательства Теоремы 6.1 обрисован в задаче 6.5.)

Задачи

6.1 Докажите свойства операции смеси лотерей, указанные в Теореме 6.2.

6.2 Пусть для предпочтений на простых лотереях выполнены свойства (A1) и (A2). Покажите, что если $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$, $\mathbf{r} \succ \mathbf{s}$, то $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{s}$ при $\alpha \in [0, 1]$.

6.3 Пусть для предпочтений на простых лотереях выполнены свойства (A1) и (A2). Покажите, что если $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, то $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \sim \mathbf{p} \sim \mathbf{q}$ $(\alpha \in [0, 1])$.

Указание: Предположите, что $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, но $\mathbf{s} \prec \mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, где $\mathbf{s} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ и $\alpha \in (0, 1)$. Покажите, что из $\mathbf{s} \prec \mathbf{p}$ следует, что $\mathbf{s} \prec \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{s}$, а из $\mathbf{q} \succ \mathbf{s}$ следует, что $\mathbf{s} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{s}$, т. е. получите противоречие.

6.4 Пусть выполнены свойства (A1)–(A3). Покажите, что если $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, и $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея, то $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \sim \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$ $(\alpha \in [0, 1])$.

Указание: В случае $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \sim \mathbf{r}$ можно воспользоваться утверждением из задачи 6.3.

Пусть $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, но $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$ при некотором $\mathbf{r}$ и $\alpha \in (0, 1)$. Требуется получить противоречие, рассмотрев два случая для $\mathbf{r}$: $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \prec \mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$.

Выбрав случай $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \prec \mathbf{r}$, покажите, что из $\mathbf{r} \succ \mathbf{p}$ следует $\mathbf{r} \succ \mathbf{s} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$, где $\mathbf{s} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$. Объясните, почему существует число $\beta \in (0, 1)$, такое что

$$\mathbf{s} \succ \mathbf{r} \diamond \beta \diamond (\mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}).$$

Далее, покажите, что из $\mathbf{r} \succ \mathbf{q}$ следует $\mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p}$, из чего, в свою очередь, следует

$$(\mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}) \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{s}$$

и

$$\mathbf{r} \diamond \beta \diamond (\mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}) \succ \mathbf{s}.$$

Аналогичное противоречие получается в случае $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$.

6.5 Докажите Теорему 6.1, т. е. «подправьте» доказательства, приведенные в этом параграфе, таким образом, чтобы не требовалось использовать предположение (A4).

Указание: Пусть $\mathbf{b}$ и $\mathbf{w}$ — две простые лотереи, такие что $\mathbf{b} \succ \mathbf{w}$ (не обязательно лучшая и худшая). Для любой пары лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, таких что $\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w}$ и $\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{q} \succcurlyeq \mathbf{w}$, их смесь $\mathbf{s} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ тоже удовлетворяет $\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{s} \succcurlyeq \mathbf{w}$ (это требуется доказать). Тогда, как было показано выше, существует функция полезности Неймана—Моргенштерна, определенная на множестве простых лотерей $\{\, \mathbf{p} \mid \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w} \,\}$. Пусть теперь $\mathbf{p}$ — любая лотерея. Тогда, в силу отрицательной транзитивности $\succ$ выполняется одно из трех соотношений:

$$\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w}, \quad \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w}, \quad \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w} \succcurlyeq \mathbf{p}.$$

Предположим, что функция полезности Неймана—Моргенштерна, представляющая отношение предпочтения, определена на множестве $\{\, \mathbf{p} \mid \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w} \,\}$, и пусть $\mathbf{p}$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w}$ ($\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w} \succcurlyeq \mathbf{p}$). Тогда существует (и единственно) число α такое, что

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{w} \text{ (соответственно, } \mathbf{w} = \mathbf{b} \diamond \alpha \diamond \mathbf{p})$$

Определим $U(\cdot)$ следующим образом:

$$U(\mathbf{b}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1 - \alpha) U(\mathbf{w})$$

$$\text{(соответственно, } U(\mathbf{w}) = \alpha U(\mathbf{b}) + (1 - \alpha) U(\mathbf{p})).$$

Демонстрация линейности определенной таким образом функции в значительной степени воспроизводит этапы доказательства теоремы в частном случае, когда $U(\cdot)$ определена лишь на множестве $\{\, \mathbf{p} \mid \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w} \,\}$.

6.3 Предпочтения потребителя в условиях неопределенности

Модифицируем модель поведения потребителя, чтобы учесть в ней неопределенность. Следуя Эрроу, будем различать блага не только по их физическим характеристикам, но и по состояниям мира, в которых они потребляются. Будем называть такие блага контингентными или условно-случайными. Каждое контингентное благо характеризуется двумя индексами — индексом блага $k \in K$ и индексом состояния мира $s \in S$. Тогда x_{ks} — количество блага k, которое потребитель потребил (планирует потребить) в состоянии мира s.

Таким образом, к параметрам экономики добавляется множество состояний мира $S = \{1, \ldots, \hat{s}\}$. Мы будем считать его конечным. Потребляемый набор благ для i-го потребителя будет описываться вектором $\mathbf{x}_i = (x_{iks})_{k \in K, s \in S}$, $\mathbf{x}_i \in X_i \times \cdots \times X_i$. В предположении, что потребитель приписывает состояниям мира вероятности их реализации μ_{is}, каждому такому потребительскому набору $\mathbf{x}_i$ соответствует случайная величина, которую мы будем обозначать $\tilde{\mathbf{x}}_i$ (это l-мерная дискретная случайная величина, принимающая значения $\mathbf{x}_{is}$ с вероятностями μ_{is}). Будем называть ее случайным потребительским набором. Следуя сложившейся традиции, будем предполагать, что на множестве допустимых случайных потребительских наборов $\tilde{X}_i$ потребитель имеет неоклассические (рациональные) предпочтения, которые допускают представление функцией полезности. Эту функцию полезности будем обозначать $U_i(\cdot)$ ($U_i\colon \tilde{X}_i \mapsto \mathbb{R}$). В этой функции в общем случае должны быть учтены как услуги для потребителя каждого товара в каждом состоянии мира (например, зонт полезнее в дождь), так и его личные гипотезы о вероятностях событий.

Поскольку в этом параграфе анализируется поведение одного и того же потребителя, индекс i будем опускать.

В предположении, что оценки вероятностей состояний мира у данного потребителя не меняются, можно считать, что его функция полезности $U(\cdot)$ задана на различных потребительских наборах из множества допустимых потребительских наборов $X \times \cdots \times X$, и записывать $U(\mathbf{x})$ вместо $U(\tilde{\mathbf{x}})$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что множество X является выпуклым.

Различают следующие типы потребителей в соответствии с их поведением в ситуациях с неопределенностью (свойствами предпочтений).

Определение 6.5:

Будем называть потребителя имеющим неприятие риска, если его функция полезности $U(\cdot)$ (как функция $\mathbf{x}$) квазивогнута.

Будем называть потребителя имеющим строгое неприятие риска или рискофобом, если его функция полезности $U(\cdot)$ строго квазивогнута.

Будем называть потребителя нейтральным к риску, если $U(\cdot)$ линейна.

Будем называть потребителя рискофилом, если $U(\cdot)$ строго квазивогнута. ◀

Напомним, что функция квазивогнута тогда и только тогда, когда множества потребительских наборов, предпочитаемых наборам на кривой безразличия, выпуклы для каждой кривой безразличия. Вогнутость функции влечет за собой ее квазивогнутость, но не наоборот.

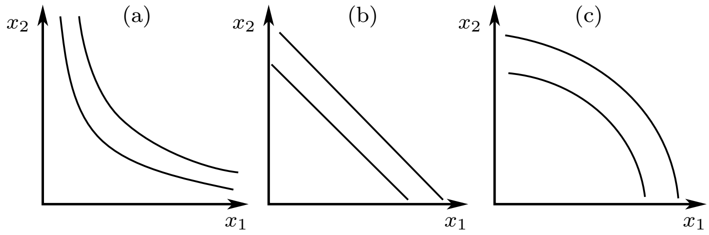


***Рис. 6.2.** Кривые безразличия для потребителей с разным отношением к риску: (a) рискофоб, (b) нейтральный к риску, (c) рискофил*

На Рис. 6.2 эти понятия иллюстрируются для случая одного (физического) блага и двух состояний мира. На графиках изображены кривые безразличия для потребителей с разным отношением к риску в предположении, что x_1 — потребление данного блага в первом, а x_2 — во втором состоянии мира.

В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что функция $U(\cdot)$ имеет вид Неймана—Моргенштерна. Это частный, но наиболее удобный и поэтому наиболее часто используемый для анализа случай функции полезности $U(\cdot)$:

$$U(\mathbf{x}) = \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(\mathbf{x}_s),$$

где μ_s — оценки потребителем вероятностей состояний мира $s \in S$, $\mathbf{x}_s \in X$ — потребительский набор в состоянии мира s (контингентный потребительский набор), а $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ — элементарная функция полезности (функция Бернулли) рассматриваемого потребителя, не зависящая от состояния мира, а зависящая только от потребления благ как таковых. Как правило, будем предполагать, что элементарная функция полезности является возрастающей. Вероятности, заложенные в функции полезности потребителя могут быть и ошибочными, поэтому в общем случае их следует рассматривать как субъективные вероятности.

Переопределим для функции Неймана—Моргенштерна отношение к риску в терминах элементарной функции полезности.

Определение 6.6:

Будем называть потребителя с глобальной функцией полезности $U(\cdot)$ типа Неймана—Моргенштерна имеющим (строгое) неприятие риска (рискофобом), если его элементарная функция полезности

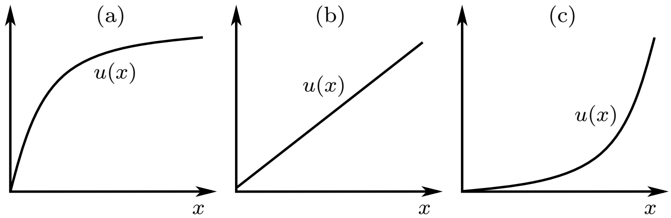


Рис. 6.3. *Элементарные функции полезности для потребителей с разным отношением к риску: (a) рискофоб, (b) нейтральный к риску, (c) рискофил*

$u(\cdot)$ (строго) вогнута, нейтральным к риску, если она линейна, и (строго) предпочитающим риск (рискофилом), если она (строго) выпукла. ◀

Данные определения иллюстрируются на Рис. 6.3.

Можно показать, что из определения неприятия риска в терминах $u(\cdot)$ следует определение неприятия в терминах $U(\cdot)$ (обратное, вообще говоря, неверно). Из вогнутости $u(\cdot)$ следует вогнутость $U(\cdot)$, а следовательно, и квазивогнутость.

В дальнейшем будем рассматривать только поведение экономических субъектов, характеризующихся неприятием риска, как более типичное.

Часто рассматривают ситуации, когда контингентные потребительские наборы содержат единственное благо — деньги. Соответствующие лотереи называют денежными. Количество денег x_s, которое получает индивидуум в состоянии мира s, будем называть *доходом* в этом состоянии мира или *выигрышем*. При этом используют следующие понятия (индекс блага опускаем).

Ожидаемый доход $\mathsf{E}\,\tilde{x}$ — это математическое ожидание дохода. В данном случае он вычисляется как

$$\mathsf{E}\,\tilde{x} = \sum_{s \in S} \mu_s x_s.$$

В терминах ожидаемого дохода рассмотренные выше три группы потребителей в зависимости от их отношения к риску характеризуются следующими соотношениями между ожидаемой полезностью денежной лотереи и полезностью ожидаемого дохода от нее:

- рискофилы: $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) > u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$;
- рискофобы: $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) < u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$;
- нейтральные по отношению к риску: $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) = u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$.

Здесь $\tilde{\mathbf{x}}$ — любая «нетривиальная» случайная величина (формально это означает, что вероятность того, что она не совпадает со своим математическим ожиданием, не равна нулю).

Заметим, что соотношение $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) \geqslant u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$ (так называемое неравенство Йенсена) выполнено для всех случайных величин тогда и только тогда, когда функция $u(\cdot)$ вогнута. Фактически это и есть определение вогнутой функции. Строгое неравенство $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) < u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$ для произвольной «нетривиальной» случайной величины $\tilde{\mathbf{x}}$ выполнено тогда и только тогда, когда функция строго вогнута.

Безрисковым или гарантированным называется такой случайный потребительский набор $\tilde{x}$, что в любом состоянии мира потребитель имеет один и тот же доход: $x_s = \mathsf{E}\,\tilde{x}$ для всех $s \in S$.

Безрисковым или гарантированным эквивалентом данного потребительского набора $\tilde{x}$ называется такой доход x^*, что соответствующий безрисковый потребительский набор $\tilde{x}^*$ дает потребителю ту же самую полезность:

$$\mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = \sum_{s\in S} \mu_s u(x_s) = \mathsf{E}\,u(\tilde{x}^*) = u(x^*).$$

Величина Δx называется вознаграждением за риск для данного потребительского набора $\tilde{x}$, если $\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x$ является безрисковым эквивалентом $\tilde{x}$:

$$\mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = u(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x).$$

Эта величина показывает, какую сумму денег (в терминах ожидаемого дохода) готов потерять потребитель, чтобы избавиться от риска.

У рискофобов безрисковый эквивалент ниже ожидаемого дохода от любой рискованной денежной лотереи (величина вознаграждения за риск положительна). Соответственно у рискофилов он выше ожидаемого дохода (величина вознаграждения за риск отрицательна), а у нейтральных по отношению к риску потребителей совпадает (величина вознаграждения за риск равна нулю). Читателю предоставляется показать это самостоятельно (см. задачу 6.6).

Проиллюстрируем введенные понятия графически. На Рис. 6.4 изображена элементарная функция полезности потребителя с неприятием риска (функция вогнута). Потребитель предполагает, что могут произойти два события (A и B) с некоторыми вероятностями (μ_A и μ_B). Его потребительский набор имеет вид $\mathbf{x} = (x_A, x_B)$, где x_A и x_B — доходы, которые получит потребитель, если произойдут события A и B соответственно. Как нетрудно понять, точка $(\mathsf{E}\,\tilde{x}, U)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $(x_A, u(x_A))$ и $(x_B, u(x_B))$, и делит его в отношении μ_B к μ_A. Здесь $\mathsf{E}\,\tilde{x}$ — ожидаемый доход набора,

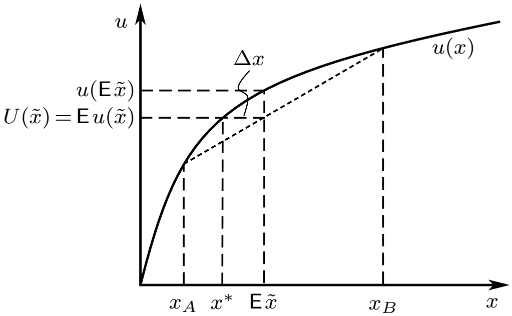


Рис. 6.4. *Различные характеристики лотереи с двумя событиями*

а U — полезность. Поскольку потребитель не любит риск, то график функции полезности лежит выше указанного отрезка и ожидаемая полезность $U = \mathsf{E}\,u(\tilde{x})$ больше полезности ожидаемого дохода $u(\mathsf{E}\,\tilde{x})$. Гарантированный эквивалент $\tilde{x}$ выбирается так, чтобы $U(\tilde{x}) = u(x^*)$. Плата за риск Δx равна разности между ожидаемой доходностью и доходностью гарантированного эквивалента.

Пример 6.1 (санкт-петербургский парадокс[5])
«Петр бросает вверх монету, пока она не упадет лицевой стороной вверх; если это происходит после первого броска, он должен дать Павлу 1 дукат, но если только после второго — 2 дуката, после третьего — 4, после четвертого — 8 и так далее, так что после каждого броска число дукатов удваивается. Спрашивается: какова оценка жребия для Павла?».

Ожидаемый доход от этой игры для Павла бесконечно велик, однако вряд ли кто согласится заплатить за право участия в такой игре неограниченно большую сумму. В этом и состоит парадокс. Объяснение парадокса состоит в том, что «ценность денег» для игрока не является постоянной. Она определяется некоторой возрастающей вогнутой элементарной функцией полезности.

Предположим, что исходный (безрисковый) доход игрока составляет сумму ω дукатов. В таком случае он сталкивается с лотереей,

[5]Описание и объяснение этого парадокса приводятся в статье известного швейцарского ученого Даниила Бернулли: D. Bernoulli. Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **5** (1738): 175–192 (рус. пер. Д. Бернулли. Опыт новой теории измерения жребия, в кн. *Теория потребительского поведения и спроса*, В. М. Гальперин (ред.), СПб.: Экономическая школа, 1993: 11–27).

приносящей ему доход $\omega + 2^{k-1}$ с вероятностью 2^{-k} $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$. Ожидаемый доход (с учетом цены p, уплаченной за участие в игре) равен

$$\mathsf{E}\,\tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\omega + 2^{k-1} - p) = \infty.$$

Если $u(\cdot)$ — элементарная функция полезности игрока, то ожидаемая полезность равна

$$U = \mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u(\omega + 2^{k-1} - p).$$

Если x^* — безрисковый эквивалент этой лотереи, то игрок будет готов заплатить за право участвовать в игре $x^* - \omega$.

Например, если $u(x) = \ln(x)$ и $\omega = 100$, то максимальная цена, которую Павел будет готов отдать за участие в игре, определяется уравнением

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln(100 + 2^{k-1} - p) = \ln(100).$$

Решая численно это уравнение, получим

$$p \approx 4{,}36 < \infty. \qquad \triangle$$

Задачи

6.6 Докажите, что у рискофобов безрисковый эквивалент ниже ожидаемого дохода от любой рискованной денежной лотереи, у рискофилов он выше ожидаемого дохода, а у нейтральных по отношению к риску потребителей совпадает с ожидаемым доходом.

6.7 Потребитель имеет элементарную функцию полезности $u(x) = \sqrt{x}$. Он получает доход 9 с вероятностью 2/3 и доход 25 с вероятностью 2/3. Найти плату за риск.

6.8 Индивидуум имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна. Элементарная функция полезности строго возрастает и зависит только от одного аргумента (денег). Лотерея \$3 и \$5 с вероятностями 1/2 и 1/2 и лотерея \$3 и \$9 с вероятностями 2/3 и 1/3 для него эквивалентны. Может ли быть верным, что этот индивидуум

- рискофоб,
- нейтрален к риску,
- рискофил?

6.9 Пусть имеется одно благо (деньги), элементарная функция полезности потребителя имеет вид $u(x) = \sqrt{x}$, а начальный запас (гарантированная сумма) денег равен \$9. Существует лотерейный билет, который может выиграть \$0 с вероятностью 0,5 (если выпадет «орел») и \$7 с вероятностью 0,5 (если выпадет «решка»). Рассмотрите три альтернативные ситуации.

(A) За какую сумму x потребитель купил бы такой билет?

(B) За какую сумму y потребитель согласился бы сам эмитировать (продать) такой лотерейный билет (можно считать, что его гарантированный запас состоит из девяти билетов по \$1, выигрывающих в состоянии мира «орел», и девяти билетов по \$1, выигрывающих в состоянии мира «решка»)?

(C) Если потребителю подарят такой билет, за какую сумму z он бы его продал?

6.10 Рискофоб с элементарной функцией полезности (функцией Бернулли) вида $u(x) = -1/x$ имеет \$900 и лотерейный билет, который дает \$900 с вероятностью 1/2 и \$0 с вероятностью 1/2. За сколько он продал бы этот билет?

6.11 Богатство потребителя равно 100. Элементарная функция полезности равна квадратному корню из дохода. Лотерейный билет дает выигрыш 0 с вероятностью π и 20 с вероятностью $(1 - \pi)$. Цена билета равна 5. При каких вероятностях потребитель

(A) купит билет;

(B) продаст билет (сам его эмитирует);

(C) продаст билет, если ему его подарят?

(Решать не обязательно, достаточно составить неравенство.)

6.12 Рассмотрим следующую игру: если игрок называет число z ($z \in [-\omega, \omega]$), то получает дополнительно к имеющейся у него сумме ω сумму z с вероятностью 1/3 и $(-z)$ с вероятностью 2/3. Какое число назовет игрок, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$?

(A) $u(x) = \sqrt{x}$; (B) $u(x) = -e^{-ax}$;

(C) $u(x) = -\frac{1}{x}$; (D) $u(x) = \ln x$;

(E) $u(x) = x - ax^2$ $(a > 0)$.

6.13 Пусть рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, владеет суммой денег ω рублей и лотерейным билетом, выигрывающим a рублей с вероятностью 1/2. Покажите, что при уменьшении a до нуля цена, за которую он готов продать этот лотерейный билет, стремится к величине ожидаемого выигрыша по этому билету.

6.14 Индивидуум, чьи предпочтения на лотереях описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, располагает суммой денег ω рублей. Ему предлагают приобрести лотерейный билет, выигрывающий a рублей с вероятностью $1/2$. Пусть p — максимальная цена, которую он готов уплатить за лотерейный билет.

(A) Чему равна p при $\omega = 9$ и $a = 16$?

(B) Покажите, что p растет при увеличении величины выигрыша a .

(C) Покажите, что p растет при увеличении суммы денег ω.

(D) Покажите, что p не может превышать величину $a/4$ рублей.

6.15 Нейтральный к риску фермер может посеять капусту на берегу реки и получить доход \$1000, но рискует потерять весь урожай при наводнении. Он может посеять вдали от берега, где урожайность на 20% меньше, но нет риска. Фермер оценивает вероятность наводнения в 0,1. Как он поступит без дополнительной информации? Сколько бы он отдал за точную информацию о наводнении?

6.16 Золотоискатель с запасом \$900, функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна и функцией Бернулли вида $u(x) = \sqrt{x}$ решает, купить ли по цене \$300 золотоносный участок, где с равной вероятностью ожидает получить выигрыш в \$900 или ничего не получить.

За сколько он купил бы у геолога соответствующий прогноз, если положительный прогноз означает, что с вероятностью 0,75 золото есть, а отрицательный — что с вероятность 0,75 золота нет?

6.4 Задача потребителя при риске

В экономике с неопределенностью естественно ожидать заключения контрактов, условных по состояниям мира. Соответственно блага следует рассматривать как условные по состояниям мира — контингентные (условно-случайные) блага. Каждое контингентное благо характеризуется парой (k, s). Контингентное благо естественно интерпретировать как актив, дающий право получить единицу блага k, если (и только если) реализуется состояние мира s. Такой актив получил название актива Эрроу. (Нам понадобится понятие актива Эрроу ниже, когда речь пойдет о модели Раднера. В данном контексте это только интерпретация контингентного блага.)

Если ничто не препятствует заключению контрактов, условных по состояниям мира (т. е. купле-продаже контингентных благ), то можно предположить, что любое контингентное благо можно обменять на любое другое контингентное благо. Иными словами, можно предположить, что любое благо k_1 в любом состоянии мира s_1 можно поменять (прямо или косвенно) на любое благо k_2 в любом состоянии мира s_2. Это предположение о *полноте рынков* контингентных благ.

Следует отметить, что предположение о полноте рынков контингентных благ является достаточно ограничительным и, как правило, не позволяет адекватно моделировать реальные рынки с риском. Тем не менее, модели, основанные на этом предположении, оказываются полезными для анализа реальных феноменов и для понимания причин фиаско рынка при наличии неопределенности.

Другое предположение, которое мы сделаем,— это предположение о совершенной конкуренции на рынках контингентных благ. С точки зрения задачи потребителя это, в частности, стандартное предположение о том, что потребитель считает цены данными. Через p_{ks} будем обозначать рыночную цену контингентного блага (k, s) (это цена контракта на поставку единицы блага k в ситуации, если реализуется состояние мира s, т. е. цена соответствующего актива Эрроу).

Эти предположения позволяют записать задачу потребителя.

Задача потребителя при риске:

$$U_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{s \in S} \mu_s u_i(\mathbf{x}_{is}) \to \max_{\mathbf{x}_i}$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_{ks} \omega_{iks},$$

$$\mathbf{x}_{is} \in X_i \text{ для всех } s \in S.$$

По сути, задача потребителя имеет тот же вид, что и в классической модели, только индекс блага становится двойным, и суммирование в бюджетном ограничении идет по двум индексам — k и s. Дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя тоже совершенно аналогична дифференциальной характеристике выбора потребителя в отсутствие неопределенности:

$$\frac{\partial U_i / \partial x_{ik_1 s_1}}{\partial U_i / \partial x_{ik_2 s_2}} = \frac{p_{k_1 s_1}}{p_{k_2 s_2}}$$

для всех благ $k_1, k_2 \in K$ и всех состояний мира $s_1, s_2 \in S$.

С учетом того что целевая функция имеет специфический вид (Неймана—Моргенштерна), дифференциальную характеристику можно переписать в терминах элементарной функции полезности:

$$\frac{\mu_{s_1} u'_{ik_1}(\mathbf{x}_{is_1})}{\mu_{s_2} u'_{ik_2}(\mathbf{x}_{is_2})} = \frac{p_{k_1 s_1}}{p_{k_2 s_2}} \ \forall k_1, k_2 \in K, \ \forall s_1, s_2 \in S,$$

где $u'_{ik}(\cdot)$ — производная элементарной функции полезности по k-му благу.

Проиллюстрируем введенные понятия простым примером.

Пример 6.2 (страхование имущества)
Предположим, что потребитель имеет имущество стоимостью ω_1, которое в случае состояния мира 1 (при отсутствии пожара) сохранится, а в случае пожара — состояния мира 2 — окажется равным ω_2 ($\omega_2 < \omega_1$). На (совершенном) рынке страховых услуг этот потребитель может приобрести страховой контракт $(\gamma,\ y)$, где — $\gamma \in [0, 1]$ — цена контракта, а y — страховая сумма. То есть если потребитель застрахуется на сумму y, то он вне зависимости от состояния мира заплатит γy и получит y в случае пожара. При отсутствии пожара доход потребителя будет равен

$$x_1 = \omega_1 - \gamma y,$$

если же пожар произойдет, то доход составит

$$x_2 = \omega_2 + y - \gamma y.$$

Таким образом, мы имеем одно благо — деньги — и два состояния мира (отсутствие и наличие страхового случая).

Бюджетное ограничение того вида, что выше (в терминах контингентных потребительских наборов), можно получить, исключив y:

$$(1 - \gamma)x_1 + \gamma x_2 \leqslant (1 - \gamma)\omega_1 + \gamma\omega_2.$$

Покупая страховой контракт, потребитель тем самым меняет благо «деньги в состоянии 1» на благо «деньги в состоянии 2» в отношении

$$p^1/p^2 = (1 - \gamma)/\gamma.$$

Предположим далее, что потребитель имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна

$$U = (1 - \mu)u(x_1) + \mu u(x_2),$$

такую что производная элементарной функции полезности $u'(\cdot)$ положительна и строго убывает (т. е. потребитель характеризуется строгим неприятием риска), где μ — вероятность пожара. Дифференциальная характеристика решения задачи потребителя, как обычно,

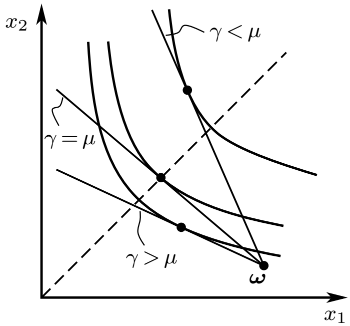


Рис. 6.5. *Различные соотношения между ценой и вероятностью страхового случая в задаче страхования имущества*

имеет вид
$$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{(1-\mu)u'(x_1)}{\mu u'(x_2)} = \frac{1-\gamma}{\gamma}.$$
Опираясь на то, что $u'(\cdot)$ — убывающая функция, можно сделать выводы об оптимальном решении потребителя в зависимости от соотношения вероятности пожара μ и цены страховки γ. При $\gamma = \mu$ (актуарно справедливая цена страховки) имеем
$$u'(x_1) = u'(x_2).$$
Таким образом, в этом случае потребитель застрахуется на такую сумму, что $x_1 = x_2$, т. е. на всю сумму потенциального ущерба:
$$y = \omega_1 - \omega_2.$$
Нетрудно проверить, что если цена будет высокой ($\gamma > \mu$), то он застрахуется так, что
$$u'(x_1) < u'(x_2),$$
откуда $x_1 > x_2$. То есть страховая сумму будет меньше величины ущерба. Наоборот, при $\gamma < \mu$ страховая сумма будет превосходить величину ущерба.

В предположении, что потребитель является рискофобом, этот результат можно обобщить на случай, когда элементарная функция полезности не является дифференцируемой. Будем рассматривать доход потребителя как случайную величину $\tilde{\mathbf{x}}$, которая принимает значение x_1 с вероятностью $(1-\mu)$ и значение x_2 с вероятностью μ.

Тогда при $\gamma = \mu$ ожидаемый доход $\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}$ равен $(1-\gamma)\omega_1 + \gamma\omega_1$, т. е. не зависит от суммы страховки y. Рискофоб предпочитает среди таких лотерей ту, которая не связана с риском, т. е. дает один и тот же доход вне зависимости от состояния мира. А к такой лотерее приводит страхование на полную сумму потерь.

При $\gamma > \mu$ ($\gamma < \mu$) с ростом страховой суммы y величина ожидаемого дохода $\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}$ уменьшается (увеличивается). Поэтому потребителю невыгодно выбирать y больше (меньше) величины ущерба. Действительно, если бы он застраховался в точности на сумму ущерба, то риск отсутствовал бы, а ожидаемый доход $\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}$ был бы выше. Таким образом, если $\gamma > \mu$, то $y \leqslant \omega_1 - \omega_2$, а если $\gamma < \mu$, то $y \geqslant \omega_1 - \omega_2$. Строгие неравенства можно гарантировать только при дифференцируемости функции полезности. Если она не является дифференцируемой, то при $\gamma \neq \mu$ оптимальным может быть страхование на полную сумму ущерба ($y = \omega_1 - \omega_2$) (см. задачу 6.19).

Проведенный анализ иллюстрирует Рис. 6.5. △

Задачи

6.17 Предпочтения судовладельца описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности от богатства x вида $u(x)$, причем $u(\cdot)$ имеет положительную убывающую производную. Он владеет богатством \$40000 и может потерять в случае аварии судна \$10000.

(A) Пусть вероятность аварии равна 0,02 и известно, что он застраховался на сумму \$9000. Возможно ли, что цена страхования на \$1 равна \$0,02? Если нет, то больше или меньше, чем \$0,02? Объясните.

(B) Пусть цена страхования на \$1 равна \$0,02 и известно, что он застраховался на сумму \$11000. Возможно ли, что вероятность аварии равна 0,02? Если нет, то больше или меньше, чем 0,02? Объясните.

(C) Пусть вероятность аварии равна 0,01 и известно, что цена страхования на \$1 равна \$0,02. Возможно ли, что он застраховался на сумму \$10000? Если нет, то бо́льшую или меньшую, чем \$10000? Объясните.

6.18 Предположим, что в ситуации задачи 6.16 на с. 397 золотоискатель не купил прогноз, а застраховался на сумму в \$300 на случай отсутствия золота и купил участок. По какой цене продавались страховые контракты?

6.19 Приведите пример, когда для рискофоба оптимальным является страхование на полную сумму ущерба, притом что цена страховки не является актуарно справедливой.

6.20 Пусть в экономике с риском имеется одно физическое благо, а предпочтения потребителя-рискофоба представимы функцией Неймана—Моргенштерна. Покажите, что предельная норма замещения блага в состоянии мира s на благо в состоянии мира t убывает при росте его потребления в состоянии мира s и равна отношению вероятностей этих состояний, когда потребление одинаково.

6.21 Пусть в экономике с риском цены благ пропорциональны вероятностям состояний мира.

(A) Докажите, что рискофоб, предпочтения которого представимы функцией Неймана—Моргенштерна, выберет такой набор, что потребление каждого блага не зависит от состояние мира.

(B) Продемонстрируйте, что обратное утверждение неверно, приведя соответствующий контрпример.

(C) Продемонстрируйте, что предположение о том, что потребитель — рискофоб, существенно, приведя соответствующий контрпример.

6.22 Пусть в экономике с риском при ценах $\mathbf{p}$ потребитель с локально ненасыщаемыми предпочтениями выбрал набор $\mathbf{x}$. Рассмотрим потребительский набор, равный ожидаемому потреблению, т. е. $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{s\in S} \mu_s \mathbf{x}_s$, и «агрегированный» вектор цен $\bar{\mathbf{p}} = \sum_{s\in S} \mathbf{p}_s$.

(A) Покажите, что $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}} \geqslant \sum_{s\in S} \mathbf{p}_s \mathbf{x}_s$.

(B) Покажите, что если потребитель является рискофобом и в равновесии потребление хотя бы одного из благ различно хотя бы в двух состояниях мира, то неравенство строгое.

6.23 Предприниматель планирует завтра получить от внешнеторговых операций 1000 песо. Это будет весь его капитал на завтрашний день. Сам он заинтересован в рублях и имеет некоторую элементарную функцию полезности $u(x)$, выраженную в рублях ($u'(x) > 0$, $u'(x)$ убывает). Он предполагает, что с вероятностью $2/3$ завтрашний курс песо будет равен 15 руб., а с вероятностью $1/3$ — 24 руб. Ему предлагают сегодня продать его завтрашние песо за завтрашние рубли по курсу p руб. Пусть $z \geqslant 0$ — сумма сделки в песо. (Предполагается, что можно выбрать $z > 1000$, а завтра докупить недостающие песо.)

(A) При каком курсе p предприниматель выберет такую сумму сделки z, что полностью избавится от риска? Чему будет при этом равна z?

(в) В какую сторону изменится выбор z по сравнению с предыдущим пунктом, если $p = 16$ руб.? В каком случае предприниматель окажется в лучшем положении — при высоком или при низком курсе песо?

(с) Ответьте на тот же вопрос для $p = 20$ руб.

6.5 Модель инвестора (выбор оптимального портфеля)

К выбору наиболее предпочтительной денежной лотереи сводятся многочисленные модели инвестиционного поведения. Мы проведем анализ поведения инвестора в рамках следующей простой двухпериодной модели.

Рассмотрим задачу распределения одного блага — капитала[6] — между несколькими активами $k \in K = \{1, \dots, l\}$. Модель двухпериодная. В первом периоде инвестор вкладывает капитал в активы, а во втором получает доход от этих активов. Величину капитала будем обозначать ω ($\omega > 0$).

Каждый актив характеризуется своей доходностью (отношением дохода от единицы актива к цене). Пусть $\tilde{r}_k$ — валовая доходность k-го актива, т. е. валовой доход на рубль вложений (тильда означает, что это случайная величина). Если считать пространство состояний мира дискретным, как и выше, то доходность $\tilde{r}_k$ является дискретной случайной величиной и принимает значения r_{ks} ($s \in S$) с соответствующими вероятностями μ_s.

Инвестор должен выбрать размеры вложений z_k в каждый из доступных активов $k \in K$ при следующих ограничениях:

- можно покупать актив, но не эмитировать его, т. е.

$$z_k \geqslant 0;$$

- общая сумма вложений не должна превышать величину капитала, т. е.

$$\sum_{k \in K} z_k \leqslant \omega.$$

Последнее неравенство представляет собой аналог бюджетного ограничения.

[6] Возможно, первоначально капитал имеется в виде безрискового актива $k = 0$ (см. далее). Может быть, начальный запас имеет более общий вид: $(\omega_0, \dots, \omega_l) = \boldsymbol{\omega}$.

Вектор $(z_k)_{k\in K}$ будем называть портфелем. Общий (валовой) доход от портфеля равен

$$\tilde{x} = \sum_{k\in K} z_k \tilde{r}_k.$$

Если пространство состояний мира дискретное, то доход от портфеля $\tilde{x}$ — дискретная случайная величина и принимает значения

$$x_s = \sum_{k\in K} z_k r_{ks}$$

с вероятностями μ_s.

Как обычно, предполагаем, что предпочтения инвестора описывается функцией типа Неймана—Моргенштерна

$$U = \mathsf{E}\, u(\tilde{x}) = \sum_{s\in S} \mu_s u(x_s).$$

В дальнейшем везде будем считать, что $u(\cdot)$ — дифференцируемая функция, причем производная $u'(\cdot)$ положительна и убывает (инвестор — рискофоб).

Поскольку капитал ω — постоянная величина (выбор между накоплением и потреблением остается за рамками модели), то полезность определяется структурой портфеля, и можно вместо величины вложений в k-й актив, z_k, рассматривать долю этого актива в портфеле

$$\alpha_k = z_k/\omega.$$

Тогда

$$\tilde{x} = \omega \sum_{k\in K} \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Получим следующую задачу.

Задача инвестора:

$$\begin{gathered} U = \mathsf{E}\, u(\tilde{x}) = \mathsf{E}\, u\Bigl(\omega \sum_{k\in K} \alpha_k \tilde{r}_k\Bigr) \to \max_{(\alpha_k)} \\ \sum_{k\in K} \alpha_k \leqslant 1, \\ \alpha_k \geqslant 0 \ \forall k \in K. \end{gathered} \tag{❀}$$

Принято вводить еще безрисковый актив $k = 0$ с гарантированной доходностью $\tilde{r}_k = r_0$ (его можно интерпретировать как государственные ценные бумаги или вклад до востребования). Этот актив имеет одну и ту же доходность r_0 независимо от состояния мира. При этом $K = \{0, \ldots, l\}$.

Еще одно предположение, которое принято делать,— отсутствие ограничения на неотрицательность вложений в безрисковый актив, т. е. может быть $\alpha_k < 0$. Смысл этого предположения состоит в том, что можно взять кредит на любую сумму по той же ставке r_0.

Так как производная $u'(x)$ положительна, то целевая функция ненасыщаема и поэтому «бюджетное ограничение» в задаче инвестора выходит на равенство, т. е. $\alpha_0 = 1 - \sum_{k\neq 0} \alpha_k$. Исключив α_0, преобразуем задачу инвестора (❁) к виду

$$\mathsf{E}\, u\left(\omega\left(r_0 + \sum_{k\neq 0} \alpha_k(\tilde{r}_k - r_0)\right)\right) \to \max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l \geqslant 0}.$$

При соответствующих условиях регулярности производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной[7]. Будем предполагать, что эти условия выполнены. Тогда условия первого порядка решения задачи инвестора заключаются в том, что для всех активов $k \neq 0$

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\omega(\tilde{r}_k - r_0)] \leqslant 0$$

или

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] \leqslant r_0\, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}).$$

Кроме того, если $\alpha_k > 0$, то это условие выполняется как равенство:

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] = r_0\, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}).$$

Нетрудно проверить, что в силу свойств функции $u(\cdot)$ (инвестор — рискофоб) и линейности оператора E ожидаемая полезность портфеля как функция доле́й вложений в соответствующие активы является вогнутой. Поэтому эти условия — достаточные условиями оптимальности портфеля.

Рассмотрим частный случай данной задачи. Пусть имеется два актива — безрисковый и рискованный. Задача инвестора имеет сле-

[7] Достаточно, чтобы пространство состояний мира было дискретным. Для непрерывных распределений условие регулярности заключается в том, что носитель распределения не зависит от параметра, по которому берется производная.

дующий вид:

$$\mathsf{E}\,u(\omega(\alpha_0 r_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1)) \to \max_{\alpha_0,\alpha_1}$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \leqslant 1,$$
$$\alpha_1 \geqslant 0.$$

Исключив α_0, получим следующую задачу одномерной максимизации:

$$U = \mathsf{E}\,u(\omega(r_0 + \alpha_1(\tilde{r}_1 - r_0))) \to \max_{\alpha_1 \geqslant 0}.$$

Обозначим максимизируемую функцию через $U(\alpha_1)$ и вычислим ее производную:

$$\frac{\partial U(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \mathsf{E}[u'(\omega(r_0 + \alpha_1(\tilde{r}_1 - r_0)))\omega(\tilde{r}_1 - r_0)] =$$
$$= \omega(\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] - r_0\,\mathsf{E}\,u'(\tilde{x})).$$

Решение задачи инвестора (если оно существует) может быть либо внутренним ($\alpha_1 > 0$), либо граничным ($\alpha_1 = 0$) (Рис. 6.6).

(1) Если в оптимальном портфеле $\alpha_1 > 0$, то $\partial U(\alpha_1)/\partial \alpha_1 = 0$, откуда

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] = r_0\,\mathsf{E}\,u'(\tilde{x}).$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $u'(\tilde{x})$ является убывающей функцией $\tilde{r}_1$, ковариация $u'(\tilde{x})$ и $\tilde{r}_1$ отрицательна и поэтому

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] < \mathsf{E}\,u'(\tilde{x})\bar{r}_1,$$

где мы ввели обозначение $\bar{r}_1 = \mathsf{E}\,\tilde{r}_1$ для ожидаемой доходности рискованного актива. Таким образом, поскольку $\mathsf{E}\,u'(\tilde{x}) > 0$ (ожидание положительной случайной величины положительно), необходимое условие внутреннего решения состоит в том, что $r_0 < \bar{r}_1$

(2) Если в оптимальном портфеле рискованный актив отсутствует ($\alpha_1 = 0$), то $\tilde{x} = \omega r_0$ (т. е. доход портфеля не случайная величина). Значит,

$$\frac{\partial U(0)}{\partial \alpha_1} = \omega u'(\omega r_0)(\bar{r}_1 - r_0).$$

Поскольку для граничного решения $\partial U(0)/\partial \alpha_1 \leqslant 0$ и производная элементарной функции полезности положительна, получим следующее необходимое условие оптимальности граничного решения:

$$\bar{r}_1 \leqslant r_0.$$

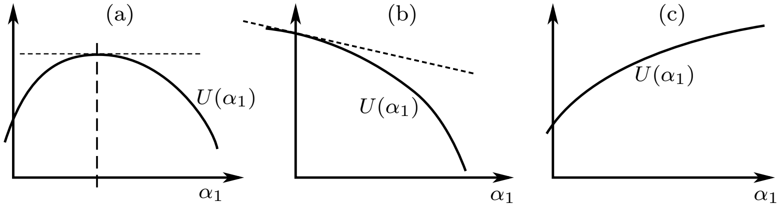


Рис. 6.6. *Возможные ситуации в случае выбора из двух активов: (a) внутреннее решение, (b) граничное решение, (c) решение отсутствует*

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием того, что первый актив войдет в портфель ($\alpha_1 > 0$) является то, что его ожидаемая доходность больше гарантированной ($\bar{r}_1 > r_0$).

Тот факт, что для случая двух активов условие $\bar{r}_1 > r_0$ является достаточным условием того, что рискованный актив войдет в портфель, является частным случаем более общего результата, который называется теоремой о диверсификации[8].

Теорема 6.8 (теорема Самуэльсона о диверсификации[9]):

Пусть инвестор характеризуется целевой функцией типа Неймана—Моргенштерна с дифференцируемой элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ и пусть, кроме того,

* функция $u'(\cdot)$ положительна и убывает;
* доходности активов (статистически) независимы в совокупности[10];
* ограничение $\alpha_0 \geqslant 0$ в задаче инвестора отсутствует (возможен кредит по безрисковой ставке);
* выполнены условия регулярности, обеспечивающие, что производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной.

Тогда любой актив $k \in K$, ожидаемая доходность которого выше доходности безрискового актива ($\bar{r}_k > r_0$, где $\bar{r}_k = \mathsf{E}\,\tilde{r}_k$) войдет в портфель, т. е. $\alpha_k > 0$. ⌟

[8] Неформально содержание теоремы состоит в том, что не следует класть все яйца в одну корзину.

[9] См. P. A. Samuelson. General Proof that Diversification Pays, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **2** (1967): 1–13.

[10] В модели Марковица достаточно некоррелированности (см. ниже).

Доказательство: Как было показано выше, условия первого порядка для задачи инвестора при всех $k \neq 0$ имеют вид

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] \leqslant r_0 \, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}).$$

Предположим, что $\alpha_k = 0$ для некоторого $k \neq 0$ (k-й актив не входит в портфель). При этом величи́ны $\tilde{r}_k$ и $\tilde{x}$ должны быть между собой независимы ($\tilde{x}$ зависит только от доходностей остальных активов). Следовательно, $\tilde{r}_k$ и $u'(\tilde{x})$ также независимы (функции от независимых случайных величин тоже независимы). Воспользовавшись тем, что математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, получим, что

$$\bar{r}_k \, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}) \leqslant r_0 \, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}).$$

Так как $\mathsf{E}\, u'(\tilde{x}) > 0$ (ожидание положительной случайной величины положительно), то $\bar{r}_k \leqslant r_0$. Следовательно, если $\bar{r}_k > r_0$, то не может быть $\alpha_k = 0$, значит, такой актив войдет в портфель. ■

Если несколько преобразовать условия первого порядка, можно привести интересную интерпретацию этих условий. По определению ковариации для двух случайных величин ξ и η выполнено

$$\mathsf{E}(\xi\eta) = \mathsf{Cov}(\xi, \eta) + \mathsf{E}(\xi)\, \mathsf{E}(\eta).$$

С учетом этого соотношения условия оптимальности (если k-й актив вошел в портфель, т. е. $\alpha_k > 0$)

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] = r_0 \, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x})$$

можно записать в виде

$$\bar{r}_k = r_0 - \frac{\mathsf{Cov}(u'(\tilde{x}), \tilde{r}_k)}{\mathsf{E}\, u'(\tilde{x})}.$$

Величина $\bar{r}_k - r_0$ представляет собой превышение ожидаемой доходности k-го актива над доходностью безрискового актива и носит название премии за риск.

Заметим, что полученное соотношение означает, что включение актива в оптимальный портфель определяется не только его средней доходностью, но и величиной корреляции его доходности с доходностью всего портфеля. Премия за риск положительна, если доходность актива и доходность портфеля положительно коррелированы. Это объясняется тем, что если доходность актива и доходность портфеля положительно коррелированы, то доходность актива и предельная полезность отрицательно коррелированы, поскольку предельная полезность у рискофоба является убывающей функцией. Следовательно, такой актив включается в оптимальный портфель, только если он характеризуется положительной премией за риск (т. е. $\bar{r}_k - r_0 > 0$).

С другой стороны, премия за риск является отрицательной, если доходность актива и доходность портфеля отрицательно коррелированы. Такой актив может входить в оптимальный портфель, несмотря на то, что он характеризуется отрицательной премией за риск (т. е. $\bar{r}_k - r_0 < 0$). Так, например, у страховых полисов ожидаемая чистая доходность, как правило, меньше нуля, но они часто включаются в портфель рискофоба, так как их доходность отрицательно коррелирует с ожидаемым доходом от портфеля. Подобный способ защиты от риска (включение в портфель активов, доходность которых отрицательно коррелирована с доходностью других входящих в портфель активов) называется хеджированием.

Задачи

6.24 Пусть инвестор с функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна сталкивается с m активами, один из которых — гарантированный, с возможностью кредита. Какие достаточные условия гарантируют, что все рискованные активы войдут в портфель?

6.25 Пусть инвестор с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln x$ имеет возможность вложить свое богатство ω в n рискованных активов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_i = 1 + 1/i$ и в гарантированный актив с доходностью $r_0 = 1{,}1$. Укажите гипотезы и условия на параметры, при которых все рискованные активы войдут в портфель.

6.26 Инвестор со строгим неприятием риска выбирает, какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью r_0, а сколько вложить в рискованные активы двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1 > r_0$, $\bar{r}_2 > r_0$. Пусть функция полезности инвестора типа Неймана—Моргенштерна и возможен кредит в банке, а доходность рискованных активов вероятностно независима.

Какие из перечисленных ниже исходов возможны?

(A) Все три актива войдут в портфель.

(B) Войдут только один рискованный и один безрисковый.

(C) Только два рискованных войдут в портфель.

6.27 Инвестор выбирает, какую долю α своего капитала K вложить в рискованный актив, а какую — в безрисковый.

(A) Пусть его элементарная функция полезности равна $u(x) = -e^{-\gamma x}$ $(\gamma > 0)$. Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *сумму* (αK).

(B) Пусть $u(x) = x^\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$, $u(x) = -x^{-\gamma}$ $(\gamma > 0)$ или $u(x) = \ln x$. Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *долю* капитала (α).

(C) Пусть $u(x) = x - ax^2$ $(a > 0)$. Докажите, что когда величина вложений в рискованный актив положительна, она является линейной убывающей функцией величины капитала.

6.28 Инвестор имеет элементарную функцию полезности $u(x) = -1/x$. Состояния мира A и B могут осуществиться с вероятностями $\mu_A = 1/5$ и $\mu_B = 4/5$. Инвестор может вложить свои 10 единиц капитала в два предприятия. Доходности двух предприятий в двух состояниях мира равны $r_{1A} = 1$, $r_{2A} = 2$, $r_{1B} = 4$, $r_{2B} = 3$. Найдите оптимальный портфель.

6.29 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 2 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/2$) и β во втором состоянии мира, а безрисковый — 1 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.30 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 2 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/2$) и 10 во втором состоянии мира, а безрисковый — β (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.31 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 4 в первом состоянии мира (с вероятностью β) и 1 во втором состоянии мира, а безрисковый — 2 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.32 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 4 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/4$) и β во втором состоянии мира, а безрисковый — 1 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий только безрисковый актив в положительном количестве (отрицательные количества невозможны). Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.33 Инвестору доступны безрисковый актив с доходностью r_0 и рискованный актив, причем норма доходности рискованного актива изменяется следующим образом в зависимости от некоторой базовой нормы доходности $\tilde{r}$ ($\bar{r} > r_0$, где $\bar{r} = \mathsf{E}\,\tilde{r}$) и параметра $\tau \in [0, 1]$:

(A) $\tilde{r}_1 = \tilde{r} - \tau(\tilde{r} - r_0)$;

(B) $\tilde{r}_1 = \tilde{r} - \tau(\tilde{r} - \bar{r})$.

Как меняется структура оптимального портфеля инвестора-рискофоба в зависимости от параметра τ? Дайте интерпретацию полученных результатов[11].

Проиллюстрируйте анализ на диаграмме для простого случая, когда есть всего два состояния природы (в системе координат «богатство в первом состоянии» — «богатство во втором состоянии»).

6.34 ⟦Аткинсон, Стиглиц⟧ Рассмотрим ситуацию, когда инвестору доступны приносящие доход безрисковый и рискованный активы и чистый доход от инвестиций облагается налогом по ставке τ. Поскольку среднеквадратичное отклонение доходности портфеля пропорционально величине $\alpha(1 - \tau)$, то эта величина измеряет изменение рискованности вложений для инвестора при изменении ставки налога. Поэтому величину $\alpha(1 - \tau)$ будем называть частным риском.?? определить α.

Докажите, что увеличение ставки подоходного налога от инвестиций увеличивает (уменьшает, оставляет постоянным) частный риск, когда эластичность по общему объему инвестиций спроса на рискованный актив положительна (отрицательна, постоянна). Проиллюстрируйте его графически для случая двух состояний природы.

6.6 Ранжирование индивидуумов по их отношению к риску

В этом параграфе мы ранжируем индивидуумов-рискофобов по их отношению к риску, введя подходящие измерители такого отно-

[11] Возможная интерпретация приведенного преобразования доходностей — налогообложение доходов от инвестиций по ставке τ, причем если доходность рискованных вложений оказывается ниже доходности вложений в безрисковый актив (соответственно средней доходности инвестиций), то делается соответствующий налоговый вычет (выплачивается субсидия).

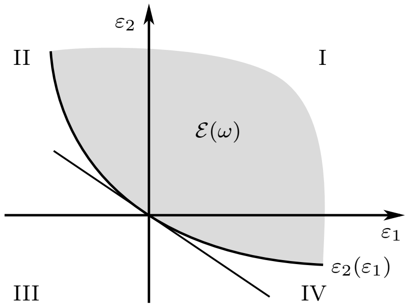


Рис. 6.7. *Лотерейные билеты, которые потребитель готов приобрести*

шения и на их основе попытаемся ответить на следующие вопросы, относящиеся к сравнительной статике поведения в условиях риска:

- Какие условия на предпочтения инвестора гарантируют рост вложений в рискованную часть портфеля при росте величины суммарных инвестиций?
- Какие условия на предпочтения двух инвесторов гарантирую бо́льшую величину вложений в рискованную часть портфеля одного из них при равных величинах суммарных инвестиций?

Ответ на первый вопрос формулируется в терминах характеристик отношения к риску, к анализу которых мы переходим.

Рассмотрим лотерейный билет, который приносит чистый выигрыш ε_1 с вероятностью μ и ε_2 с вероятностью $1-\mu$. Обозначим соответствующую случайную величину через $\tilde{\varepsilon}$. Потребитель, располагающий суммой денег ω, приобретет этот лотерейный билет, если лотерея, описываемая случайной величиной $\tilde{x}=\omega+\tilde{\varepsilon}$, предпочитается вырожденной лотерее, дающей ω с вероятностью 1, т. е.

$$\mathsf{E}(u(\omega+\tilde{\varepsilon})) \geqslant u(\omega).$$

или

$$\mu u(\omega+\varepsilon_1)+(1-\mu)u(\omega+\varepsilon_2) \geqslant u(\omega).$$

Обозначим множество всех лотерейных билетов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, которые потребитель согласен приобрести, через $\mathcal{E}(\omega)$.

Изобразим на плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ множество $\mathcal{E}(\omega)$ (см. Рис. 6.7). Потребителю выгодно приобрести любой лотерейный билет, представленный точкой из I квадранта, и невыгодно приобретать любой лотерейный билет, представленный точкой из III квадранта. Выгодность

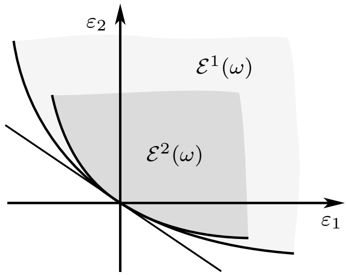


Рис. 6.8. *Сравнение отношения к риску двух потребителей*

приобретения билетов, представленных точками из II и IV квадрантов, зависит, в частности, от отношения к риску рассматриваемого потребителя. Если элементарная функция полезности $u(\cdot)$ вогнута, то множество $\mathcal{E}(\omega)$ выпукло (докажите это; см. задачу 6.35).

Для любой лотереи, лежащей на границе этого множества, выполняется:

$$\mu u(\omega + \varepsilon_1) + (1 - \mu)u(\omega + \varepsilon_2) = u(\omega). \qquad (\mathcal{E})$$

Это уравнение задает зависимость $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ в виде неявной функции. Стандартные свойства элементарной функции полезности и условие $\mu < 1$ гарантируют существование такой функции и ее дифференцируемость. Подставим $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ в $(\mathcal{E})$ и продифференцируем по ε_1 в точке 0. Используя тот факт, что $\varepsilon_2(0) = 0$, получим

$$\mu u'(\omega) + (1 - \mu)u'(\omega)\varepsilon_2'(0) = 0.$$

Это уравнение описывает касательную к $\mathcal{E}(\omega)$ в точке $(0, 0)$. Эта касательная имеет наклон $-\frac{\mu}{1-\mu}$. Поскольку выпуклое множество лежит выше своей касательной, то точки, лежащие ниже этой касательной, не принадлежат $\mathcal{E}(\omega)$. Таким образом, если ε_2 будет меньше, чем $-\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_1$, то потребитель заведомо не примет участия в такой лотерее (какова бы ни была вероятность μ).

Рассмотрим двух рискофобов. Пусть первый из них принимает лотереи, принадлежащие множеству $\mathcal{E}^1(\omega)$, а второй — множеству $\mathcal{E}^2(\omega)$. Если $\mathcal{E}^2(\omega) \subset \mathcal{E}^1(\omega)$, то естественно считать, что из этих двух рискофобов второй характеризуется (нестрого) бóльшим неприятием риска, чем первый (Рис. 6.8).

Если ни одно из включений $\mathcal{E}^2(\omega) \subset \mathcal{E}^1(\omega)$ и $\mathcal{E}^1(\omega) \subset \mathcal{E}^2(\omega)$ не выполнено, то мы не можем проранжировать рассматриваемых потребителей, используя данное правило (т. е. соответствующее отношение не является полным).

Заметим, что линейная аппроксимация этих множеств (полуплоскость, задаваемая касательной в нуле) одна и та же и не отражает различия в отношении к риску. Поэтому следует рассмотреть аппроксимацию второго порядка.

В предположении, что элементарная функция полезности дважды непрерывно дифференцируема, продифференцируем соотношение ($\mathcal{E}$) по ε_1 дважды в точке 0. Получим

$$\mu u''(\omega) + (1-\mu)\Big[u''(\omega)(\varepsilon_2'(0))^2 + u'(\omega)\varepsilon_2''(0)\Big] = 0.$$

С учетом того, что $\varepsilon_2'(0) = -\frac{\mu}{1-\mu}$, получим

$$\varepsilon_2''(0) = -\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}\frac{\mu}{(1-\mu)^2}.$$

Мы убедились, что уравнения границ множеств $\mathcal{E}^1(\omega)$ и $\mathcal{E}^2(\omega)$ в первом приближении всегда совпадают, а во втором приближении могут различаться. При этом, если $\varepsilon_2''(0)$ у первого потребителя меньше, чем у второго, то в окрестности нуля $\mathcal{E}^2(\omega)$ содержится в $\mathcal{E}^1(\omega)$. (Понятно, что глобально это может не выполняться.) Поэтому величину $-u''(\omega)/u'(\omega)$ можно рассматривать как локальную меру неприятия риска. Эти рассуждения мотивируют введение следующей характеристики предпочтений потребителя.

Определение 6.7:

Мерой неприятия риска Эрроу—Пратта[12] называется величина

$$\rho(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

◀

При определенных условиях эту меру неприятия риска можно рассматривать и как глобальную меру неприятия риска. В терминах меры Эрроу—Пратта можно считать, что тот из двух потребителей характеризуется бо́льшим неприятием риска, у которого мера Эрроу—Пратта всегда больше.

Предложенный Эрроу и Праттом подход — это не единственный способ измерить отношение к риску. Выше мы ввели вознаграждение за риск, которое тоже можно рассматривать как меру отношения

[12] См. J. W. Pratt. Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica* **32** (1964): 122–136 и K. J. Arrow. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Helsinki: Yrjö Jahnsson Foundation, 1965.

к риску. Напомним, что величина $\Delta x(\tilde{x})$ называется вознаграждением за риск для данного потребительского набора $\tilde{x}$, если $\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x(\tilde{x})$ является безрисковым эквивалентом $\tilde{x}$:

$$\mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = u(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x(\tilde{x})).$$

Также напомним, что для любого рискофоба вознаграждение за риск — величина неотрицательная. Естественно считать, что в терминах вознаграждения за риск из двух потребителей тот характеризуется бóльшим неприятием риска, у которого вознаграждение за риск всегда больше.

Можно предложить еще один способ ранжирования рискофобов по их отношению к риску — по «степени вогнутости» элементарной функции полезности. Можно считать, что $u(\cdot)$ «более вогнута», чем $v(\cdot)$, если существует такая строго вогнутая возрастающая функция $G(\cdot)$, что $u(x) = G(v(x))$ при всех x. Тогда потребитель с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ характеризуется бóльшим неприятием риска. Соответственно нестрогое сопоставление получим, если $G(\cdot)$ здесь является вогнутой (но не обязательно строго вогнутой) возрастающей функцией.

Оказывается, что все эти способы ранжирования эквивалентны, о чем свидетельствует следующее утверждение.

Теорема 6.9 (Пратт):

Предпочтения двух потребителей характеризуются дважды непрерывно дифференцируемыми элементарными функциями полезности $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, такими что $u_i'(x) > 0$ и $u_i''(x) \leqslant 0$ $\forall x, i = 1, 2$. Следующие три условия эквивалентны:

{i} $\rho_1(x) \geqslant \rho_2(x)$ для всех x, где $\rho_i(\cdot)$ — мера неприятия риска Эрроу—Пратта, соответствующая $u_i(\cdot)$;

{ii} существует такая вогнутая возрастающая функция $G(\cdot)$, что $u_1(x) = G(u_2(x))$ для всех x;

{iii} для любого случайного дохода $\tilde{x}$ выполнено $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$.⌟

Доказательство: {i} ⇔ {ii} Имеется функция $G(\cdot)$, такая что

$$u_1(x) = G(u_2(x)).$$

(При доказательстве утверждения в направлении {i} ⇒ {ii} можем определить $G(\cdot)$ на области значений функции $u_2(\cdot)$ следующим образом:

$$G(x) = u_1(u_2^{-1}(x)).$$

Поскольку $u_2(\cdot)$ строго монотонна, она обратима.)

Заметим, что функция $G(\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемой и возрастающей. Дважды продифференцируем последнее соотношение:

$$u_1'(x) = G'(u_2(x))u_2'(x),$$

$$u_1''(x) = G''(u_2(x))u_2'(x) + G'(u_2(x))u_2''(x).$$

Из первого равенства следует, что $G'(u_2(x)) > 0$. Поделив вторую производную на первую, получим

$$-\rho_1(x) = -\rho_2(x) + \frac{G''(u_2(x))}{G'(u_2(x))}.$$

Так как $G'(u_2(x)) > 0$, то $\rho_1(x) \geqslant \rho_2(x)$ эквивалентно $G''(y) \leqslant 0\ \forall y = u_2(x)$, т. е. функция $G(\cdot)$ вогнута в своей области определения тогда и только тогда, когда $\rho_1(x) \geqslant \rho_2(x)$ для всех x.

{ii} $\Leftrightarrow$ {iii} Если функции $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ связаны между собой соотношением $u_1(x) = G(u_2(x))\ \forall x$, то для произвольной случайной величины $\tilde{x}$ по определению вознаграждения за риск имеют место равенства

$$u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_1(\tilde{x})) = \mathsf{E}\,u_1(\tilde{x}) = \mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})),$$
$$u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_2(\tilde{x})) = G(u_2(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_2(\tilde{x}))) = G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x})).$$

Из монотонности $u_1(\cdot)$ следует, что $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$ тогда и только тогда, когда $u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_1(\tilde{x})) \leqslant u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_2(\tilde{x}))$, т. е. тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})) \leqslant G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x}))$.

Если функция $G(\cdot)$ вогнута, то по неравенству Йенсена $\mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})) \leqslant G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x}))$, и поэтому $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$.

Наоборот, выполнение неравенства $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$ для всех $\tilde{x}$ влечет $\mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})) \leqslant G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x}))$ для всех $\tilde{x}$, а это свойство эквивалентно вогнутости функции $G(\cdot)$[13]. ■

Введенная мера Эрроу—Пратта называется *абсолютной мерой Эрроу—Пратта*. Часто используют также относительную меру Эрроу—Пратта, которая определяется по формуле

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)}.$$

[13]Проверьте, что обычное определение вогнутой функции является частным случаем неравенства Йенсена.

Относительная мера Эрроу—Пратта является эластичностью предельной полезности по капиталу инвестора.

Меры Эрроу—Пратта являются полезными инструментами анализа поведения инвестора в условиях риска, так как в их терминах можно получать ответы на стандартные вопросы сравнительной статики: как изменяется структура инвестиционного портфеля при изменении размера инвестиций, доходностей активов и т. д. А к проблемам сравнительной статики сводятся многие проблемы прикладной экономики: характер спроса на деньги в портфельной теории формирования спроса на деньги, влияние налогообложения и т. д.

В терминах (абсолютной) меры Эрроу—Пратта можно охарактеризовать спрос на рискованный актив как функцию величины инвестиций в рассматриваемый портфель из двух активов. Как мы видели, в этом случае задача инвестора имеет вид

$$U = \mathsf{E}\, u(\omega r_0 + z(\tilde{r} - r_0)) \to \max_{\alpha \geqslant 0}.$$

Мы предполагаем, что решение $z(\omega)$ существует для любой величины капитала $\omega \geqslant 0$ и что $\mathsf{E}\,\tilde{r} > r_0$, т. е. что решение внутреннее ($z(\omega) > 0$).

Теорема 6.10:

Если мера Эрроу—Пратта $\rho(x)$ убывает, то рискованный актив является нормальным благом, т. е. $z'(\omega) > 0$. ┘

Доказательство: Условие оптимальности портфеля, как мы видели, имеет вид

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] = 0,$$

где $\tilde{x} = \omega r_0 + z(\omega)(\tilde{r} - r_0)$. Продифференцируем его по капиталу ω, рассматривая как тождество:

$$\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)(r_0 + z'(\omega)(\tilde{r} - r_0))] = 0.$$

Отсюда

$$r_0\, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] = -z'(\omega)\, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2]$$

или

$$z'(\omega) = -r_0 \frac{\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)]}{\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2]}.$$

Ясно, что знаменатель здесь меньше нуля, так как в силу строгой вогнутости функции полезности $u''(x) < 0$. Покажем, что числитель больше нуля.

Рассмотрим случайную величину $\tilde{r} - r_0$: она принимает как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим случай $\tilde{r} = r > r_0$. В силу убывания функции $\rho(\cdot)$ при $z > 0$

$$\rho(\omega r_0 + z(r - r_0)) < \rho(\omega).$$

По определению меры Эрроу—Пратта

$$-\frac{u''(\omega r_0 + z(r - r_0))}{u'(\omega r_0 + z(r - r_0))} < \rho(\omega).$$

Умножив это неравенство на знаменатель и на $-(r - r_0)$, получаем:

$$u''(\omega r_0 + z(r - r_0))(r - r_0) > -\rho(\omega)u'(\omega r_0 + z(r - r_0))(r - r_0).$$

Нетрудно видеть, что при $\tilde{r} = r < r_0$ это неравенство тоже верно. Это означает, что верно соотношение

$$\mathsf{E}[u''(\omega r_0 + z(\omega)(\tilde{r} - r_0))(r - r_0)] > -\rho(\omega)\,\mathsf{E}\,u'[(\omega r_0 + z(\omega)(\tilde{r} - r_0))(r - r_0)]$$

или

$$\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] > -\rho(\omega)\,\mathsf{E}[u'(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)].$$

Правая часть здесь равна нулю, откуда и следует доказываемое неравенство. Следовательно, $z'(\omega) > 0$. Другими словами, рискованный актив является нормальным благом. ■

Отметим, однако, что данное свойство не выполняется для случая двух и более рискованных активов.

Задачи

6.35 Докажите, что множество $\mathcal{E}(\omega)$, обсуждаемое в данном параграфе выпукло, если элементарная функция полезности $u(\cdot)$ вогнута.

6.36 Покажите, что если абсолютная мера Эрроу—Пратта неприятия риска убывает, то $u''' \leqslant 0$. Покажите, что обратное неверно.

6.37 Приведите примеры элементарной функции полезности с возрастающей, убывающей и постоянной абсолютной и относительной мерой Эрроу—Пратта.

6.38 Пусть на рынке доступны лишь два актива — рискованный и безрисковый. Покажите, что при увеличении объема инвестиций доля инвестиций в рискованный актив (в сумме инвестиций в оптимальный портфель) постоянна (возрастает, убывает), если относительная мера Эрроу—Пратта убывает (возрастает, постоянна).

6.39 Опираясь на результаты предыдущей задачи, определите, как изменяется величина вложений в рискованный актив при росте суммы инвестиций, если предпочтения инвестора представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$. Решите задачу для следующих функций:

(A) $u(x) = \sqrt{x}$; (B) $u(x) = -e^{-ax}$;
(C) $u(x) = -\frac{1}{x}$; (D) $u(x) = \ln x$;
(E) $u(x) = x - ax^2$ $(a > 0)$;
(F) $u(x) = \sqrt{x} + ax$ $(a > 0)$.

6.40 Пусть в ситуации с двумя активами — рискованным и безрисковым, рассмотренной выше, $\alpha(r_0)$ — оптимальная доля вложений в рискованный актив как функция доходности безрискового актива. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу—Пратта является возрастающей функцией и решение внутреннее $(0 < \alpha(r_0) < 1)$, то $d\alpha(r_0)/dr_0 < 0$, т. е. уменьшение доходности безрискового актива приводит к увеличению доли вложений в рискованный актив.

Указание: Покажите, продифференцировав условие первого порядка, что

$$\frac{d\alpha(r_0)}{dr_0} = \frac{\mathsf{E}\, u'(\tilde{x}) - \omega(1-\alpha(r_0))\, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)]}{\omega\, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2]}.$$

Отсюда следует требуемый результат, поскольку $\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] < 0$ вследствие возрастания $\rho(\cdot)$.

6.41 Докажите, что эластичность спроса на рискованные активы по общей величине вложений имеет тот же знак, что и величина

$$\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)].$$

6.42 Установите соотношение между эластичностью спроса на рискованные активы по общей величине вложений и мерой Эрроу—Пратта отношения к риску.

6.43 ⟦Аткинсон, Стиглиц⟧ Предположим, что (в мире с двумя состояниями) имеется один рискованный (с нормой доходности $\tilde{r}$) и один не приносящий дохода безрисковый актив. Охарактеризуйте в терминах относительной и абсолютной меры неприятия риска Эрроу—Пратта (эластичности по богатству спроса на рискованный актив) представленные на Рис. 6.9 возможные структуры оптимальных портфелей при разных уровнях богатства. Линия PP' представляет совокупность фактических портфелей (при разных уровнях инвестиций в портфель), линии SS' (TT') — совокупность портфелей при условии, что портфели содержат лишь безрисковые (рискованные)

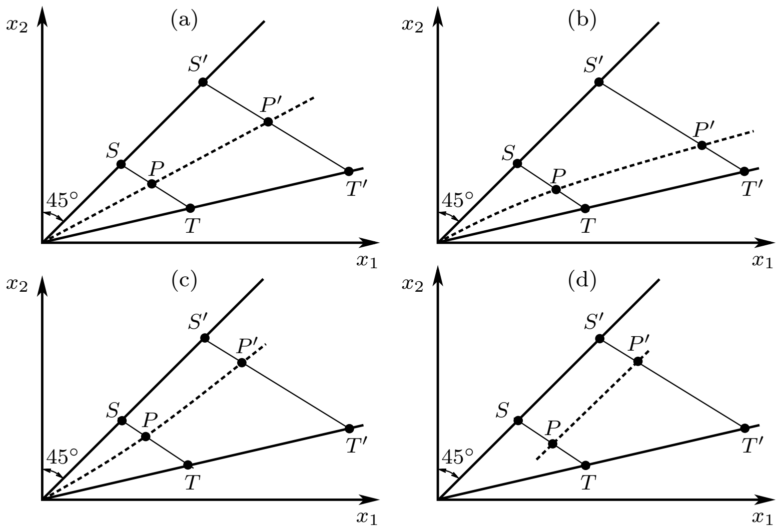


Рис. 6.9. *Рисунок к задаче 6.43*

активы. Линии ST ($S'T'$) представляют совокупность допустимых портфелей при данном уровне инвестиций.

6.44 Докажите, что если у двух индивидуумов меры неприятия риска $\rho_1(\cdot)$ и $\rho_2(\cdot)$ таковы, что при всех x выполнено $\rho_1(x) \leqslant \rho_2(x)$, то для любого исходного уровня богатства ω выполнено $\mathcal{E}_2(\omega) \subset \mathcal{E}_1(\omega)$. (Заметим, что обратное утверждение фактически доказано в тексте параграфа.)

6.45 Пусть $\tilde{x}(t)$ — семейство случайных величин, принимающих значения $\omega + t$ и $\omega - t$ с равными вероятностями, и пусть $\Delta(t)$ — вознаграждение за риск для $\tilde{x}(t)$ для потребителя с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$, такой что $u'(x) > 0$ и $u''(x) \leqslant 0$. Покажите, что $\Delta(0) = 0$, $\Delta'(0) = 0$ и $\Delta''(0) = -u''(\omega)/u'(\omega) = \rho(\omega)$.

6.46 Пусть $\tilde{x}(t)$ — семейство случайных величин, принимающих значения $\omega + t$ и $\omega - t$ с равными вероятностями, и пусть $\pi(t)$ — вероятностное вознаграждение за риск для этих случайных величин, которое определяется по формуле

$$u(\omega) = \left(\frac{1}{2} + \pi(t)\right)u(\omega + t) + \left(\frac{1}{2} - \pi(t)\right)u(\omega - t).$$

(А) Покажите, что если элементарная функция полезности $u(\cdot)$ строго вогнута, то $\pi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\pi(0) = 0$.

(В) Покажите, что $4\pi'(0) = -u''(\omega)/u'(\omega) = \rho(\omega)$.

6.47 Рассмотрите лотереи вида $\omega + t\varepsilon$, где $\mathsf{E}\,\varepsilon = 0$. Покажите, что в первом приближении (при малых t) вознаграждение за риск равно

$$\rho(\omega)\,\mathsf{Var}(\varepsilon)t^2/2,$$

где $\rho(\cdot)$ — абсолютная мера Эрроу—Пратта.

6.7 Стохастическое доминирование

Ранее мы рассмотрели ранжирование индивидуумов по их отношению к риску. В этом параграфе вводится ранжирование лотерей (случайных потребительских наборов) двух типов. В терминах первого ранжирования дается ответ на вопрос о том, какие свойства двух лотерей гарантируют, что одну из них всегда предпочитает любой индивидуум, предпочтения которого представляются возрастающей функцией полезности Неймана—Моргенштерна. В терминах второго ранжирования дается ответ на вопрос о том, какие свойства двух лотерей гарантируют, что одну из них всегда предпочитает любой индивидуум-рискофоб (индивидуум, предпочтения которого представляются возрастающей вогнутой функцией полезности Неймана—Моргенштерна).

Если две лотереи соотносятся между собой подобным образом, т. е. можно сказать, что одна из них предпочтительнее другой, даже не зная точного вида предпочтений и предполагая только самые общие свойства таких предпочтений, то про такие лотереи говорят, что одна стохастически доминирует другую[14].

Простейший случай стохастического доминирования одного случайного потребительского набора ($\tilde{\mathbf{x}}$) над другим ($\tilde{\mathbf{y}}$) заключается в том, что в любом состоянии мира набор $\tilde{\mathbf{x}}$ обеспечивает не меньший уровень потребления благ, чем $\tilde{\mathbf{y}}$, т. е. $\mathbf{x}_s \geqslant \mathbf{y}_s$ для всех $s \in S$. Это нестрогое доминирование. Если же при этом $x_{sk} \neq y_{sk}$ хотя бы для одного состояния мира $s \in S$ (имеющего ненулевую вероятность) и хотя бы для одного блага k, то доминирование будет строгим. При этом предполагается строгая монотонность предпочтений (строгая монотонность элементарной функции полезности). В терминах тео-

[14] См. J. Hadar and W. R. Russell. Rules for Ordering Uncertain Prospects, *The American Economic Review* **59** (1969): 25–34.

рии вероятностей это означает, что $\tilde{\mathbf{x}}$ с вероятностью единица не меньше (соответственно больше) $\tilde{\mathbf{y}}$.

Это стохастическое доминирование по состояниям мира. Если перевести его на язык лотерей, то получим так называемое стохастическое доминирование первого порядка. В дальнейшем будем рассматривать только денежные лотереи, т. е. только одномерные распределения вероятностей. Сначала дадим определение в терминах лотерей общего вида, а затем перенесем его на простые лотереи. Произвольной лотерее соответствует некоторая функция распределения F, которая ставит в соответствие каждой величине $x \in \mathbb{R}$ вероятность $F(x)$ того, что выигрыш окажется ниже x.

Определение 6.8:

Лотерея F нестрого стохастически доминирует по первому порядку лотерею G, если $F(x) \leqslant G(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Лотерея F строго стохастически доминирует по первому порядку лотерею G, если, кроме того, существует $x \in \mathbb{R}$, для которого $F(x) < G(x)$. ◀

Другими словами, F доминирует G, если для любого заданного уровня x лотерея F всегда обеспечивает не меньшую вероятность выигрыша, равного или превышающего x, чем лотерея G. Часто стохастическое доминирование первого порядка для краткости называют просто *стохастическим доминированием.*

Стохастическое доминирование первого порядка исходит из того, что потребитель всегда предпочитает больший выигрыш меньшему, т. е. из возрастания элементарной функции полезности. При этом не делается предположений относительно того, как потребитель относится к риску. Таким образом, данная концепция доминирования является довольно слабой.

Рис. 6.10 иллюстрирует понятие стохастического доминирования первого порядка для случая, когда лотереям соответствуют непрерывные функции распределения. Лотерея F стохастически доминирует лотерею G, так что функция распределения F лежит под G, а плотность распределения $f = F'$ сдвинута вправо по сравнению с плотностью $g = G'$.

Перенесем определение стохастического доминирования первого порядка на простые лотереи. Рассмотрим простые лотереи $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Пусть выигрыши $x_1, \ldots, x_n$ составляют объединение носителей этих лотерей $(\mathrm{Supp}(\mathbf{p}) \cup \mathrm{Supp}(\mathbf{q}))$. Предположим, что эти выигрыши упорядочены по возрастанию, т. е. $x_1 < \cdots < x_n$. Тогда лотерея $\mathbf{p}$ нестрого доминирует по первому порядку лотерею $\mathbf{q}$, если $\sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} q_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$, где мы ввели обозначения $p_i = p(x_i)$

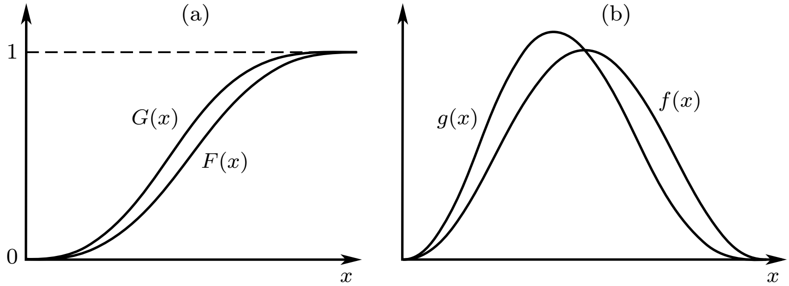


Рис. 6.10. *Стохастическое доминирование первого порядка: (a) функции распределения, (b) плотности распределения*

и $q_i = q(x_i)$. Строгое доминирование получаем в том случае, если хотя бы одно неравенство строгое.

Следующая теорема обосновывает введенное определение стохастического доминирования первого порядка.

Теорема 6.11:

Для двух простых лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ неравенство $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)$ выполняется для всех возрастающих элементарных функций полезности $u(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} q_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$. ⌟

Доказательство: Введем следующие обозначения: $u_i = u(x_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. При этом $u_i = u_n - \sum_{k=i}^{n-1} \Delta u_k$. С учетом этого ожидаемую полезность от лотереи $\mathbf{p}$ можно представить следующим образом:

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) = u_n - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{k=i}^{n-1} \Delta u_k = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

Аналогично для лотереи $\mathbf{q}$

$$U(\mathbf{q}) = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \sum_{i=1}^{k} q_i.$$

Разность между двумя значениями ожидаемой полезности равна

$$U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \left(\sum_{i=1}^{k} q_i - \sum_{i=1}^{k} p_i \right).$$

При возрастании функции $u(\cdot)$ выполнено $\Delta u_i > 0$, поэтому если выражение в скобках неотрицательно, то $U(\mathbf{p}) \geqslant U(\mathbf{q})$.

Обратное доказывается от противного. Пусть существует k^*, для которого $\sum_{i=1}^{k^*} q_i < \sum_{i=1}^{k^*} p_i$. Зафиксируем некоторые $\Delta u_i > 0$ при $i \neq k^*$. Если выбрать Δu_{k^*} достаточно большим, то будет выполнено $\sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \left(\sum_{i=1}^{k} q_i - \sum_{i=1}^{k} p_i \right) < 0$. Для данных $\Delta u_i > 0$ несложно подобрать возрастающую функцию $u(\cdot)$ так, чтобы $\Delta u_i = u(x_{i+1}) - u(x_i)$. Для такой элементарной функции полезности получим, что ожидаемая полезность от лотереи $\mathbf{p}$ ниже, чем ожидаемая полезность от лотереи $\mathbf{q}$. Поэтому если $U(\mathbf{p}) \geqslant U(\mathbf{q})$ для любой элементарной полезности, то $\sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} q_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$. ■

Аналогичное утверждение можно доказать и для распределений произвольного вида, если предположить, что элементарная функция полезности дифференцируема (см. задачу 6.55).

Распределения на Рис. 6.11a несравнимы по стохастическому доминированию первого порядка, поскольку ни одна из функций распределения не лежит под другой. В то же время, если судить по плотностям распределения (Рис. 6.11b), то видно, что лотерея F менее рискованная, чем лотерея G, и дает более высокий ожидаемый доход. Скорее всего, любой рискофоб предпочтет лотерею F лотерее G. Можно также рассмотреть крайний случай, когда лотерея G является рискованной, а лотерея F — безрисковой, причем F дает не менее высокий ожидаемый выигрыш, чем G.

В подобных случаях концепция стохастического доминирования первого порядка оказывается слишком слабой и требуется сравнивать лотереи по второму порядку стохастического доминирования. Стохастическое доминирование второго порядка исходит из того, что, помимо монотонности предпочтений, потребитель характеризуется также неприятием риска. Оно определяется таким образом, чтобы все рискофобы с возрастающей элементарной функцией полезности предпочли одну из сравниваемых лотерей другой.

Определение 6.9:

Лотерея F нестрого стохастически доминирует по второму порядку лотерею G, если

$$F^2(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)dt \leqslant G^2(x) = \int_{-\infty}^{x} G(t)dt$$

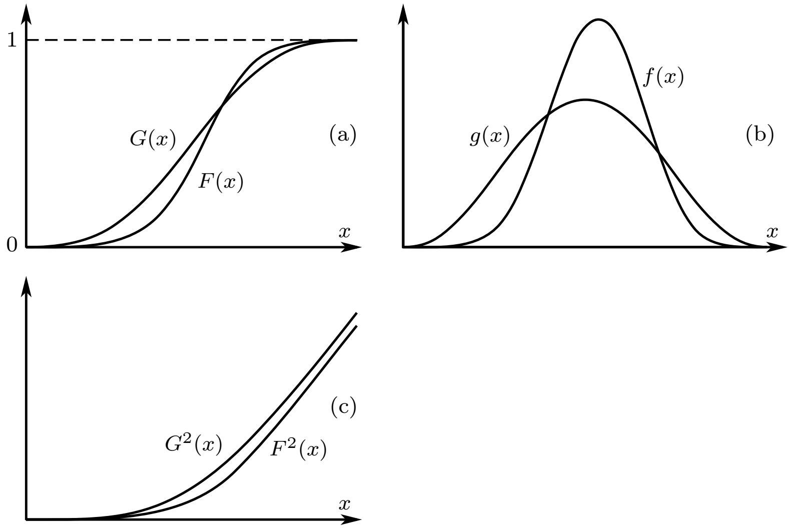


Рис. 6.11. *Стохастическое доминирование второго порядка: (a) функции распределения, (b) плотности распределения, (c) интегралы функций распределения*

для всех $x \in \mathbb{R}$. Лотерея F строго стохастически доминирует по второму порядку лотерею G, если, кроме того, существует $x \in \mathbb{R}$, для которого неравенство строгое. ◀

Заметим, что стохастическое доминирование первого порядка влечет стохастическое доминирование второго порядка (но не наоборот). Действительно, неравенство $F(x) \leqslant G(x)$ для функций распределения влечет соответствующее неравенство для интегралов этих функций.

Рассмотрим теперь, как определение стохастического доминирования второго порядка конкретизируется для случая простых лотерей. В тех же обозначениях и предположениях, что и ранее, лотерея $\mathbf{p}$ нестрого доминирует по второму порядку лотерею $\mathbf{q}$, если

$$\sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} q_i$$

для всех $s = 1, \ldots, n-1$. Строгое доминирование получаем в том случае, если хотя бы одно неравенство строгое.

Само по себе определение стохастического доминирования второго порядка, как оно приведено выше, не является интуитивно понятным и требует обоснования. Следующая теорема дает такое обоснование (ее доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 6.56).

Теорема 6.12:

Для двух простых лотерей, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, неравенство $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)$ выполняется для всех возрастающих вогнутых элементарных функций полезности $u(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $P_s \leqslant Q_s$ для всех $s = 1, \ldots, n-1$, где

$$P_s = \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} p_i \quad \text{и} \quad Q_s = \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} q_i.$$

Аналогичное утверждение можно доказать и для распределений произвольного вида, если предположить, что элементарная функция полезности дважды дифференцируема (см. задачу 6.57).

Заметим, что рассмотренные отношения стохастического доминирования между лотереями обладают свойством транзитивности, но не обладают свойством полноты (см. задачи 6.52 и 6.53). Если F не доминирует G, то из этого не следует, что G доминирует F. Но если F стохастически доминирует G, а G доминирует H, то F доминирует H.

Зададимся теперь вопросом о том, когда один случайный потребительский набор *более рискованный*, чем другой (одна лотерея более рискованная, чем другая лотерея)[15].

Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ — случайный потребительский набор, а $\tilde{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu})$ — безрисковый потребительский набор, полученный усреднением $\tilde{\mathbf{x}}$, такой что в каждом состоянии мира $s \in S$

$$\mathbf{x}_s^* = \mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{t \in S} \mu_t \mathbf{x}_t.$$

В этом случае вполне естественно считать, что случайный набор $\tilde{\mathbf{x}}$ является более рискованным, чем $\tilde{\mathbf{x}}^*$. Как уже обсуждалось, из неравенства Йенсена следует, что $\tilde{\mathbf{x}}^*$ даст любому рискофобу более высокую ожидаемую полезность, чем $\tilde{\mathbf{x}}$.

Выпуклую комбинацию $\tilde{\mathbf{x}}^*$ и $\tilde{\mathbf{x}}$ естественно называть менее рискованной, чем $\tilde{\mathbf{x}}$, поскольку она ближе к безрисковому набору $\tilde{\mathbf{x}}^*$, чем

[15] См. M. Rothschild and J. E. Stiglitz. Increasing Risk I: A Definition, *Journal of Economic Theory* **2** (1970): 225–243.

к рискованному набору $\tilde{\mathbf{x}}$. Как показывает следующая теорема, любой рискофоб предпочтет такую комбинацию исходному случайному набору $\tilde{\mathbf{x}}$.

Теорема 6.13:

{i} Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \in \tilde{X}$ — случайный потребительский набор и $\tilde{\mathbf{x}}^\alpha = (\mathbf{x}^\alpha, \boldsymbol{\mu})$ — такой случайный потребительский набор, что в каждом состоянии мира $s \in S$

$$\mathbf{x}_s^\alpha = \alpha \, \mathsf{E} \, \tilde{\mathbf{x}} + (1 - \alpha)\mathbf{x}_s,$$

где $\alpha \in [0, 1]$. Тогда для любого потребителя с вогнутой элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ верно

$$\mathsf{E} \, u(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha) \geqslant \mathsf{E} \, u(\tilde{\mathbf{x}}).$$

{ii} Если, кроме того, хотя бы в двух состояниях мира $s, t \in S$ выполнено $\mathbf{x}_s \neq \mathbf{x}_t$ (случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{x}}$ является рискованным), а элементарная функция полезности потребителя $u(\cdot)$ является строго вогнутой, то при $\alpha \in (0, 1]$

$$\mathsf{E} \, u(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha) > \mathsf{E} \, u(\tilde{\mathbf{x}}).$$ ┘

Доказательство: Доказываемое является простым следствием неравенства Йенсена и определения вогнутой функции (см. задачу 6.58). ■

Другой очевидный случай возрастания риска — когда случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{y}}$ получается из случайного потребительского набора $\tilde{\mathbf{x}}$ добавлением шума — случайной величины $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (соответствующей размерности) с нулевым математическим ожиданием, такой что $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ независимы. При этом независимость $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ можно заменить более слабым предположением, что математическое ожидание добавки, условное относительно $\tilde{\mathbf{x}}$, равно нулю:

$$\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

(Это свойство следует из независимости, но не наоборот.) Данное предположение эквивалентно тому, что математическое ожидание $\tilde{\mathbf{y}}$, условное относительно $\tilde{\mathbf{x}}$, равно $\tilde{\mathbf{x}}$, т. е. $\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}$.

Теорема 6.14:

Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \in \tilde{X}$ и $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}', \boldsymbol{\mu}) \in \tilde{X}$ — два случайных потребительских набора, таких что $\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}$. Тогда для любого потребителя с вогнутой элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ верно $\mathsf{E} \, u(\tilde{\mathbf{x}}) \geqslant \mathsf{E} \, u(\tilde{\mathbf{y}})$. ┘

Доказательство: Имеет место следующее условное неравенство Йенсена (неравенство Йенсена для условных распределений):

$$\mathsf{E}[u(\tilde{\mathbf{y}}) \mid \tilde{\mathbf{x}}] \leqslant u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \tilde{\mathbf{x}}))$$

с вероятностью единица. Это можно переписать как $\mathsf{E}[u(\tilde{\mathbf{y}}) \mid \tilde{\mathbf{x}}] \leqslant u(\tilde{\mathbf{x}})$ (с вероятностью единица). Взяв от обеих частей неравенства безусловное математическое ожидание, получим требуемый результат: $\mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{y}}) \leqslant \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}})$ (здесь используется так называемое правило повторного ожидания: безусловное ожидание от условного ожидания есть безусловное ожидание). ■

Еще одно альтернативное определение возрастания риска можно получить, сравнивая концепции стохастического доминирования первого и второго порядка. При стохастическом доминировании первого порядка «масса» распределения сдвигается в сторону более высоких выигрышей. Стохастическое доминирование второго порядка тоже может заключаться в сдвиге «массы» распределения вправо, но, с другой стороны, может заключаться и в увеличении разброса, так сказать, в растекании массы распределения по сторонам. Этот второй эффект можно считать возрастанием риска. Изложенные идеи формализует следующее определение (графическую иллюстрацию читатель может дать самостоятельно; см. задачу 6.61).

Определение 6.10:

Говорят, что лотерея F является нестрого более рискованной, чем лотерея G (обе с носителем $[a, b]$), если $F^2(x) \leqslant G^2(x)$ для всех $x \in [a, b]$ и $F^2(b) = G^2(b)$. Лотерея F является строго более рискованной, чем лотерея G, если, кроме того, хотя бы для одного x выполнено $F^2(x) < G^2(x)$. ◀

Таким образом, согласно этому определению F — более рискованная лотерея, чем G, если F доминирует G по второму порядку и выполнено $F^2(b) = G^2(b)$. Это последнее равенство эквивалентно равенству математических ожиданий двух лотерей (см. задачу 6.60). Так как более рискованная лотерея доминирует по второму порядку менее рискованную, то с учетом свойств стохастического доминирования второго порядка очевидно, что любой рискофоб с возрастающей элементарной функцией полезности предпочтет менее рискованную лотерею. Оказывается, что возрастания элементарной функции полезности здесь не требуется (в этом читатель может убедиться, проанализировав соответствующие доказательства для доминирования второго порядка, схемы которых даны в задачах 6.56 и 6.57). Таким образом, мы можем утверждать просто, что любой рискофоб предпочтет менее рискованную лотерею более рискованной (что согласуется с термином «рискофоб»).

Определение 6.10 подходит только для одномерных (денежных) лотерей. Можно доказать, что (для денежных лотерей) оно обобщает те интуитивно очевидные случаи «возрастания риска», которые мы рассмотрели ранее (для первого из рассмотренных случаев этот факт предлагается доказать в задаче 6.64).

Задачи

6.48 Пусть $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — две простые лотереи на $X = 1, 2, 3$.

(A) При каких условиях на p_1, p_2 и q_1, q_2 лотерея $\mathbf{p}$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{q}$ по первому порядку?

(B) При каких условиях лотерея $\mathbf{p}$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{q}$ по второму порядку?

6.49 Пусть $\mathbf{p}_x$ и $\mathbf{p}_y$ — две простые лотереи. Первая дает выигрыши x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) с равными вероятностями, а вторая — выигрыши y_1, y_2, y_3 ($y_1 < y_2 < y_3$) с равными вероятностями.

(A) При каких условиях на x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 лотерея $\mathbf{p}_x$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{p}_y$ по первому порядку?

(B) При каких условиях лотерея $\mathbf{p}_x$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{p}_y$ по второму порядку?

6.50 Пусть F — равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, а G — равномерное распределение на отрезке $[c, d]$.

(A) При каких параметрах a, b, c, d лотерея F будет стохастически доминировать лотерею G по первому порядку?

(B) При каких параметрах a, b, c, d лотерея F будет стохастически доминировать лотерею G по второму порядку?

6.51 (A) Объясните, почему, если одна лотерея стохастически доминирует по первому порядку другую лотерею, то первая лотерея дает не меньший ожидаемый выигрыш, чем вторая.

(B) Приведите пример, показывающий, что обратное, вообще говоря, неверно (более высокий ожидаемый выигрыш не влечет стохастическое доминирование первого порядка).

6.52 Докажите, что отношение стохастического доминирования первого порядка является транзитивным, но, вообще говоря, не является полным.

6.53 Докажите, что отношение стохастического доминирования второго порядка является транзитивным, но, вообще говоря, не является полным.

6.54 Приведите пример двух простых лотерей, показывающий, что стохастическое доминирование второго порядка, вообще говоря, не влечет стохастическое доминирование первого порядка.

6.55 Обоснуйте для функций распределения общего вида F и G с носителем $[a, b]$ определение стохастического доминирования первого порядка, доказав аналог Теоремы 6.11.

(A) Введем обозначение $U(F) = \int_a^b u(x)dF(x)$ для функции полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$, сопоставляющей функции распределения F ожидаемую полезность от нее. Предположив дифференцируемость функции $u(\cdot)$ и воспользовавшись интегрированием по частям, покажите, что

$$U(G) - U(F) = -\int_a^b u'(x)[G(x) - F(x)]dx.$$

(B) Покажите, что при возрастании элементарной функции полезности $u(\cdot)$ из того, что $F(x) \leqslant G(x)$ для всех $x \in [a, b]$, следует, что $U(F) \geqslant U(G)$.

(C) Покажите, что указанное условие не только достаточное, но и необходимое: если существует x^*, такой что $F(x^*) > G(x^*)$, то найдется дифференцируемая возрастающая элементарная функция полезности $u(\cdot)$, такая что $U(F) < U(G)$. (*Указание:* Функции распределения являются непрерывными справа.)

6.56 Докажите Теорему 6.12.

(A) Обозначьте $\delta_i = \Delta u_i/\Delta x_i - \Delta u_{i+1}/\Delta x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ и покажите, что

$$\frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} = \sum_{s=k}^{n-2} \delta_s + \frac{\Delta u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}.$$

(B) Покажите, что

$$u_i = u_n - \sum_{k=i}^{n-1} \Delta x_k \sum_{s=k}^{n-2} \delta_s - \frac{\Delta u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} \sum_{k=i}^{n-1} \Delta x_k.$$

(C) Изменив порядок суммирования по i, k, s на s, k, i, покажите, что

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i = u_n - \sum_{s=1}^{n-2} \delta_s P_s - \frac{\Delta u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} P_{n-1},$$

где $P_s = \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} p_i$.

(D) Пользуясь тем, что для возрастающей вогнутой функции $u(\cdot)$ выполнено $\delta_s \geqslant 0$ и $\Delta u_{n-1}/\Delta x_{n-1} > 0$, покажите, что из того, что $P_s \leqslant Q_s$ для всех $s = 1, \ldots, n-1$, следует, что $U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) \geqslant 0$.

(E) Докажите, что указанное условие не только достаточное, но и необходимое. Для этого предположите, что одно из неравенств $P_s \leqslant Q_s$ нарушается. Сконструируйте возрастающую вогнутую элементарную функцию полезности $u(\cdot)$, такую что $U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) < 0$.

6.57 Обоснуйте для функций распределения общего вида F и G с носителем $[a, b]$ определение стохастического доминирования второго порядка, сформулировав и доказав аналог Теоремы 6.12.

Указание: Воспользовавшись два раза интегрированием по частям, покажите, что

$$U(G) - U(F) = -u'(x)[G^2(b) - F^2(b)] + \int_a^b u''(x)[G^2(x) - F^2(x)]dx,$$

где $F^2(x) = \int_a^x F(t)dt$ и $G^2(x) = \int_a^x G(t)dt$.

6.58 Докажите Теорему 6.13.

6.59 Переформулируйте Определение 6.10 для случая пары простых лотерей.

6.60 (A) Используя интегрирование по частям, докажите, что условие $F^2(b) = G^2(b)$ (см. Определение 6.10) эквивалентно равенству ожидаемых доходов от двух лотерей.

(B) Приведите и докажите аналог этого свойства для случая двух простых лотерей.

6.61 Проиллюстрируйте сравнение лотерей по рискованности в смысле Определения 6.10 при помощи графика функций распределения.

6.62 (A) Пусть простая лотерея $\mathbf{p}$ является строго более рискованной, чем простая лотерея $\mathbf{q}$. Покажите, что смесь $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ является строго менее рискованной, чем $\mathbf{p}$, при $\alpha \in [0, 1)$ и строго более рискованной, чем $\mathbf{q}$, при $\alpha \in (0, 1]$.

(B) Пусть лотерея (общего вида) F является строго более рискованной, чем лотерея G. По аналогии с простыми лотереями предложите определение смеси $F \diamond \alpha \diamond G$ и покажите, что такая смесь является строго менее рискованной, чем F, при $\alpha \in [0, 1)$ и строго более рискованной, чем G, при $\alpha \in (0, 1]$.

6.63 Пусть $\mathbf{p}(a)$ — лотерея, дающая $-(1-p)a$ с вероятностью p и pa с вероятностью $1-p$, где $p \in (0, 1)$, a — некоторое число. Покажите, что если $b > a \geqslant 0$, то лотерея $\mathbf{p}(b)$ более рискованная, чем $\mathbf{p}(a)$. Дайте графическую иллюстрацию.

6.64 Пусть $\tilde{x}$ — некоторая нетривиальная случайная величина. Покажите, что при $\alpha \in [0, 1)$ случайной величине $\alpha\tilde{x} + (1 - \alpha)\,\mathsf{E}\,\tilde{x}$ соответствует строго менее рискованная лотерея (в смысле Определения 6.10), чем исходной случайной величине $\tilde{x}$.

6.65 Рассмотрите выбор инвестора, характеризующегося неприятием риска, между одним безрисковым и одним рискованным активом. Приведите пример того, что если рискованный актив становится более рискованным в смысле Определения 6.10, то его доля в портфеле может увеличиться.

Приложение 6.A Модель Марковица и CAPM[16]

Рассмотрим интересный частный случай модели инвестора, предположив, что элементарная функция полезности $u(\cdot)$ имеет вид параболы (Рис. 6.12):

$$u(x) = a_0 + a_1 x - a_2 x^2.$$

(Можно интерпретировать это как квадратичную аппроксимацию первоначальной элементарной функции полезности получаемую разложением в ряд Тейлора вплоть до членов второго порядка в некоторой точке:

$$u(\cdot) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots).$$

Предполагается, что здесь $a_1, a_2 > 0$. Условие $a_2 > 0$ гарантирует, что инвестор является рискофобом. Условие $a_1 > 0$ гарантирует, что при достаточно малых x элементарная функция полезности имеет положительную производную. Очевидно, что квадратичная функция может быть адекватной аппроксимацией не при всех x, поскольку при $x = a_1/(2a_2)$ она достигает максимума, а далее убывает (т. е., по сути, она подразумевает насыщаемость предпочтений инвестора)[17].

[16] H. M. Markowitz • Portfolio Selection, *The Journal of Finance* **7** (1952): 77–91; H. M. Markowitz • *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, New York: John Wiley & Sons, 1959; J. Tobin • Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk, *Review of Economic Studies* **25** (1958): 65–86; J. Tobin • The Theory of Portfolio Selection, in *The Theory of Interest Rates*, F. H. Hahn and F. P. R. Brechling (ed.), London: Macmillan, 1965: 3–51.

[17] У квадратичной функции есть и другие серьезные недостатки, вследствие чего модель Марковица нельзя считать вполне адекватной для описания инвестиционного поведения. Однако она вполне оправданна, если считать ее первым приближением с точки зрения моментов распределения. Очевидно, что если учитывать только первые моменты (ожидаемые доходности), то модель станет совсем неадекватной, поскольку не будет учитывать риск (см. об этом, например,

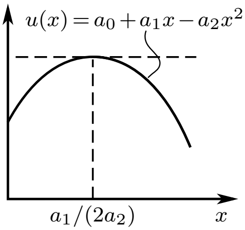


Рис. 6.12. *Квадратичная элементарная функция полезности*

При такой элементарной функции полезности ожидаемая полезность случайного дохода $\tilde{x}$ равна

$$U = \mathsf{E}\, u(\tilde{x}) = a_0 + a_1\, \mathsf{E}\, \tilde{x} - a_2\, \mathsf{E}(\tilde{x}^2).$$

Введем обозначения $\bar{x} = \mathsf{E}\, \tilde{x}$ (ожидаемый доход) и $\sigma_x^2 = \mathsf{Var}\, \tilde{x}$ (дисперсия дохода). По определению дисперсии

$$\mathsf{E}(\tilde{x}^2) = (\mathsf{E}\, \tilde{x})^2 + \mathsf{Var}\, \tilde{x} = \bar{x}^2 + \sigma_x^2.$$

В этих обозначениях ожидаемая полезность примет вид

$$U = a_0 + a_1 \bar{x} - a_2(\bar{x}^2 + \sigma_x^2).$$

Таким образом, при квадратичной элементарной функции полезности целевая функция инвестора зависит от двух характеристик распределения его дохода от портфеля: от математического ожидания дохода (среднего дохода) и от дисперсии дохода (которую можно считать мерой рискованности). Эта парадигма «среднее — дисперсия» Марковица не только упрощает анализ инвестиционного поведения,

---

в статье Г. Марковица). П. Самуэльсон показал, что при малом риске, т. е. в пределе, при стремлении распределения доходностей активов $\tilde{r}_k$ к вырожденному распределению, при котором $\tilde{r}_k$ принимает значение r_0 с вероятностью единица, приближение по двум первым моментам дает верное решение с точки зрения структуры портфеля (P. A. Samuelson • The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments, *Review of Economic Studies* **37** (1970): 537–542). Если учесть более высокие моменты, то приближение будет более точным, но анализ модели существенно усложняется.

Другой случай (помимо квадратичной функции), при котором ожидаемая полезность зависит только от ожидаемой доходности и дисперсии доходности,— это когда доходности активов $\tilde{r}_k$ имеют (многомерное) нормальное распределение. Но нормальное распределение плохо аппроксимирует поведение доходностей реальных финансовых активов.

но и позволяет давать наглядные геометрические интерпретации различных этапов такого анализа, поскольку каждый портфель характеризуется всего двумя параметрами.

Удобно, как и выше, перейти от дохода к валовой доходности портфеля, которую обозначим через $\tilde{r}_P$:

$$\tilde{r}_P = \tilde{x}/\omega.$$

Обозначим через $\bar{r}_P$ ожидаемую доходность портфеля $\mathsf{E}\,\tilde{r}_P$, а через σ_P^2 — дисперсию доходности портфеля $\mathsf{Var}\,\tilde{r}_P$. Так как $\tilde{x} = \omega\tilde{r}_P$, то, вынося константу ω за операторы математического ожидания и дисперсии, получим

$$\bar{x} = \mathsf{E}\,\tilde{x} = \mathsf{E}(\omega\tilde{r}_P) = \omega\,\mathsf{E}\,\tilde{r}_P = \omega\bar{r}_P$$

и

$$\sigma_x^2 = \mathsf{Var}\,\tilde{x} = \mathsf{Var}(\omega\tilde{r}_P) = \omega^2\,\mathsf{Var}\,\tilde{r}_P = \omega^2\sigma_P^2.$$

Подставим эти выражения в функцию полезности:

$$U = a_0 + a_1\omega\bar{r}_P - a_2\omega^2(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2)$$

или, при введении обозначений $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1\omega$, $b_2 = a_2\omega^2$,

$$U = b_0 + b_1\bar{r}_P - b_2(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2).$$

Мы можем нормировать эту функцию, применив к ней соответствующее линейное возрастающее преобразование. Окончательно получаем следующую функцию полезности:

$$U = \bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2).$$

Функция зависит от ожидаемой доходности портфеля и дисперсии доходности портфеля. Коэффициент γ отражает степень неприятия риска.

Доходность портфеля очевидным образом связана с доходностями активов:

$$\tilde{r}_P = \sum_{k\in K} \alpha_k\tilde{r}_k$$

или

$$\tilde{r}_P = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_k$ — вектор долéй активов (структура портфеля), $\tilde{\mathbf{r}}$ — вектор, составленный из доходностей активов. Таким образом, доходность портфеля — это взвешенное среднее доходностей активов, где в качестве весов выступают доли активов в портфеле.

Обозначим через $\bar{\mathbf{r}}$ вектор, составленный из ожидаемых доходностей активов $\bar{r}_k = \mathsf{E}\,\tilde{r}_k$, а через $\mathbf{V}$ — ковариационную матрицу доходностей активов. В этих обозначениях для ожидаемой доходности портфеля выполнено соотношение

$$\bar{r}_P = \mathsf{E}\,\tilde{r}_P = \mathsf{E}(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}}) = \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\,\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) = \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{r}} = \sum_{k\in K}\alpha_k\bar{r}_k$$

(ожидаемая доходность портфеля — это взвешенное среднее ожидаемых доходностей активов), а для дисперсии доходности портфеля выполнено

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \mathsf{Var}(\tilde{r}_P) = \mathsf{Var}(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}}) = \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}} - E(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}}))^2] = \\ &= \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{r}})^2] = \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}))^2] = \mathsf{E}[\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})^\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}] = \\ &= \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\,\mathsf{E}[(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})^\mathsf{T}]\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.\end{aligned}$$

Типичным элементом ковариационной матрицы $\mathbf{V}$ является ковариация между доходностями пары активов:

$$c_{k_1k_2} = \mathsf{Cov}(\tilde{r}_{k_1}, \tilde{r}_{k_2}) = \mathsf{E}[(\tilde{r}_{k_1} - \bar{r}_{k_1})(\tilde{r}_{k_2} - \bar{r}_{k_2})].$$

Ковариационная матрица симметрична и по ее диагонали стоят дисперсии доходностей отдельных активов $\sigma_k^2 = c_{kk} = \mathsf{Var}\,\tilde{r}_k$.

[Напомним, что в дискретном случае величины $\bar{r}_k$, σ_k^2 и $c_{k_1k_2}$ вычисляются по формулам:

$$\bar{r}_k = \sum_{s\in S}\mu_s r_{ks}, \quad \sigma_k^2 = \sum_{s\in S}\mu_s(r_{ks} - \bar{r}_k)^2,$$

$$c_{k_1k_2} = \sum_{s\in S}\mu_s(r_{k_1s} - \bar{r}_{k_1})(r_{k_2s} - \bar{r}_{k_2})).]$$

Дисперсию доходности портфеля можно выразить также через корреляции доходностей активов:

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\rho_{k_1k_2},$$

где σ_k — корень из дисперсии (среднеквадратическое отклонение) доходности k-го актива, $\rho_{k_1k_2}$ — коэффициент корреляции доходностей активов k_1 и k_2, определяемый как

$$\rho_{k_1k_2} = \frac{c_{k_1k_2}}{\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}}.$$

В конечном итоге задача инвестора в модели Марковица приобретает следующий вид:

$$U = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \bar{\mathbf{r}} - \gamma \left((\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \bar{\mathbf{r}})^2 + \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \mathbf{V} \boldsymbol{\alpha} \right) \to \max_{\boldsymbol{\alpha}} .$$

$$\sum_{k \in K} \alpha_k \leqslant 1,$$

$$\alpha_k \geqslant 0 \; \forall k \in K, k \neq 0.$$

В зависимости от рассматриваемой модели безрисковый актив $k = 0$ может присутствовать либо нет в формулировке этой задачи инвестора. Данная задача представляет собой задачу квадратичного программирования, поскольку в нее входят только многочлены второго порядка от доле́й α_k.

В такой упрощенной модели выбора каждый актив характеризуется для инвестора всего двумя параметрами, поэтому задачу инвестирования можно и удобно рассматривать на диаграмме с осями $\sigma, \bar{r}$ (диаграмма риск — доходность). На этой диаграмме каждый актив или портфель активов P можно изобразить точкой $(\sigma_P, \bar{r}_P)$.

Кривые безразличия (линии уровня функции полезности)

$$\bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2) = \text{const}$$

представляют собой окружности с центром в точке $(\sigma_P, \bar{r}_P) = \left(0, \frac{1}{2\gamma}\right)$.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что точка насыщения с доходностью $1/(2\gamma)$ лежит выше доходностей всех доступных инвестору активов.

Для этой модели можно доказать ряд утверждений, характеризующих структуры допустимых и оптимальных портфелей в разных ситуациях (с точки зрения доходностей доступных инвестору активов).

Рассмотрим случай, когда портфель составлен из безрискового актива ($k = 0$) и одного рискованного актива (первого). Дисперсия доходности такого портфеля равна

$$\sigma_P^2 = \mathsf{Var}(\alpha_0 r_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1) = \mathsf{Var}(\alpha_1 \tilde{r}_1) = \alpha_1^2 \, \mathsf{Var}(\tilde{r}_1) = \alpha_1^2 \sigma_1^2.$$

Среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma_P = \alpha_1 \sigma_1,$$

т. е. при комбинировании безрискового и рискованного активов среднеквадратическое отклонение портфеля пропорционально среднеквад-

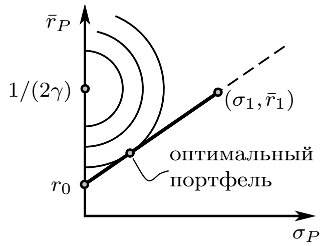


Рис. 6.13. *Оптимальный портфель в случае двух активов*

ратическому отклонению рискованного актива, причем коэффициент пропорциональности равен доле вложений в рискованный актив.

Доходность же портфеля, очевидно, равна

$$r_P = \alpha_0 r_0 + \alpha_1 \bar{r}_1 = (1 - \alpha_1) r_0 + \alpha_1 \bar{r}_1 = r_0 + \alpha_1(\bar{r}_1 - r_0).$$

Таким образом, портфели $(\sigma_P, \bar{r}_P)$, соответствующие различным выпуклым комбинациям этих активов, лежат на отрезке с концами в точках $(0, r_0)$ и $(\sigma_1, \bar{r}_1)$. Это множество допустимых портфелей для случая, когда кредит невозможен (т. е. инвестор не может выбрать $\alpha_0 < 0$). Если кредит доступен, то возможные комбинации лежат на луче, выходящем из точки $(0, r_0)$ и проходящем через точку $(\sigma_1, \bar{r}_1)$. Часть луча за точкой $(\sigma_1, \bar{r}_1)$ соответствует кредиту $(\alpha_0 < 0)$. Этот луч — аналог бюджетной линии для задачи инвестора.

Оптимальному портфелю на графике соответствует точка, в которой кривая безразличия касается луча (см. Рис. 6.13). Доли активов в оптимальном портфеле определяются отношением инвестора к риску (параметром γ). Для того чтобы оптимальный портфель был внутренним (в смысле $\alpha_1 > 0$), необходимо и достаточно, чтобы $\bar{r}_1 > r_0$. В случае же $\bar{r}_1 \leqslant r_0$ наклон луча будет отрицательный и оптимум будет достигаться при $\alpha_1 = 0$ (рискованный актив не войдет в портфель).

Перейдем теперь к рассмотрению портфелей, содержащих несколько рискованных активов. При различных частных предположениях о коррелированности доходностей активов выясним, какова будет структура множества возможных портфелей и каким будет оптимальный портфель.

Сначала рассмотрим случай, когда доходности всех рискованных активов жестко положительно коррелированы, т. е. когда коэффициент корреляции между любой парой активов $k_1, k_2 \neq 0$ равен единице[18]:

$$\rho_{k_1 k_2} = 1.$$

При этом

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} = \sum_{k_1} \alpha_{k_1} \sigma_{k_1} \sum_{k_2} \alpha_{k_2} \sigma_{k_2} = \left(\sum_k \alpha_k \sigma_k \right)^2,$$

откуда

$$\sigma_P = \sum_k \alpha_k \sigma_k.$$

В матричном виде

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sigma_1 & \cdots & \sigma_l \sigma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1 \sigma_l & \cdots & \sigma_l \sigma_l \end{pmatrix} = \sigma \sigma^{\mathsf{T}},$$

где $\sigma = (\sigma_k)_k$ — вектор корней из дисперсий активов. В этих обозначениях

$$\sigma_P^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \mathbf{V} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \sigma \sigma^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \sigma)^2.$$

Для ожидаемой доходности вне зависимости от коррелированности выполняется

$$\bar{r}_P = \sum_k \alpha_k \bar{r}_k.$$

Отсюда следует, что множество точек $(\sigma_P, \bar{r}_P)$ при неотрицательных долях α_k есть выпуклая комбинация точек $(\sigma_k, \bar{r}_k)$, соответствующих рассматриваемым активам:

$$(\sigma_P, \bar{r}_P) = \sum_k \alpha_k (\sigma_k, \bar{r}_k)$$

(риски складываются с весами $\boldsymbol{\alpha}$, как и доходности).

Другими словами, на диаграмме риск — доходность множество возможных рискованных портфелей представляет собой выпуклый многоугольник с вершинами в точках $(\sigma_k, \bar{r}_k)$, соответствующих отдельным активам (Рис. 6.14).

Проанализируем структуру портфелей, содержащих дополнительно безрисковый актив.

Выше мы уже рассмотрели, как комбинировать рискованный *актив* с безрисковым. Нетрудно понять, что по аналогичным форму-

[18]Такое возможно, если доходности зависят от фазы экономического цикла или другого общего параметра.

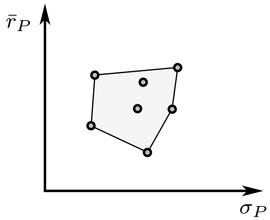


Рис. 6.14. *Возможные рискованные портфели в случае жестко положительно коррелированных активов*

лам вычисляются характеристики портфеля, полученного при комбинировании рискованного *портфеля* с безрисковым активом. Любой такой портфель на диаграмме риск — доходность будет представлять собой точку на отрезке (луче), соединяющем безрисковый актив с данным рискованным портфелем. Действительно, пусть доли активов в исходном рискованном портфеле равны ν_k, тогда этот портфель имеет следующие характеристики:

$$\bar{r}_R = \sum_{k \neq 0} \nu_k \bar{r}_k,$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{k_1 \neq 0} \sum_{k_2 \neq 0} \nu_{k_1} \nu_{k_2} c_{k_1 k_2}.$$

Назовем комбинированным портфелем, состоящим из безрискового актива и исходного портфеля с долями α_0 и $1 - \alpha_0$ соответственно, такой портфель, в котором доли вложений в рискованные активы равны $\alpha_k = \nu_k(1 - \alpha_0)$, а доля вложений в безрисковый актив равна α_0. Такой портфель имеет следующие характеристики:

$$\bar{r}_P = \sum_{k \in K} \alpha_k \bar{r}_k,$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1 \in K} \sum_{k_2 \in K} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} c_{k_1 k_2}.$$

Покажем, что выполнены следующие соотношения:

$$\tilde{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0)\tilde{r}_R,$$
$$\sigma_P = (1 - \alpha_0)\sigma_R,$$
$$\bar{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0)\bar{r}_R,$$

т. е. при таком комбинировании с портфелями можно обращаться так же, как с активами. (Этот результат можно обобщить на случай комбинирования любых портфелей.)

Действительно,

$$\bar r_P = \sum_{k\in K}\alpha_k \bar r_k = \alpha_0 r_0 + \sum_{k\neq 0}\nu_k(1-\alpha_0)\bar r_k = \\ = \alpha_0 r_0 + (1-\alpha_0)\sum_{k\in K}\nu_k \bar r_k = \alpha_0 r_0 + (1-\alpha_0)\bar r_R.$$

Для дисперсии комбинированного портфеля имеем

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2} = \\ = \alpha_0^2 c_{00} + \sum_{k_1\neq 0}\alpha_{k_1}\alpha_0 c_{k_10} + \sum_{k_2\neq 0}\alpha_0\alpha_{k_2}c_{0k_2} + \sum_{k_1\neq 0}\sum_{k_2\neq 0}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Учитывая, что $c_{00} = c_{k_10} = c_{0k_2} = 0$ и $\alpha_k = \nu_k(1-\alpha_0)$, получаем

$$\sigma_P^2 = (1-\alpha_0)^2\sum_{k_1\neq 0}\sum_{k_2\neq 0}\nu_{k_1}\nu_{k_2}c_{k_1k_2} = (1-\alpha_0)^2\sigma_R^2$$

или

$$\sigma_P = (1-\alpha_0)\sigma_R.$$

Вернемся к анализу портфеля, в котором все рискованные активы жестко положительно коррелированы. Учитывая полученный только что результат, охарактеризуем все комбинированные портфели в этом случае. Каждый из них является точкой на луче, выходящем из точки $(0, r_0)$ и проходящем через одну из точек многогранника рискованных активов. Таким образом, множество комбинированных портфелей в данном случае представляет собой выпуклый конус, составленный из таких лучей. Оптимальный портфель должен лежать на верхней границе этого конуса, в точке, где ее касается кривая безразличия инвестора (см. Рис. 6.15).

В оптимальный портфель в «невырожденном» случае войдет только один рискованный актив, имеющий наилучшие характеристики.

Здесь рискованная часть портфеля определяется из задачи

$$\frac{\bar r_k - r_0}{\sigma_k} \to \max_{k=1,\ldots,l}.$$

Выбирается актив, для которого луч будет иметь наибольший наклон. Только он и может войти в портфель с положительным весом.

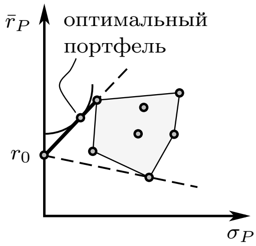


Рис. 6.15. *Оптимальный портфель в случае жестко положительно коррелированных активов*

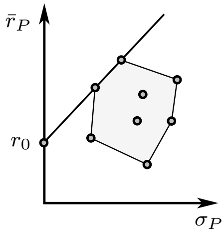


Рис. 6.16. *Жестко положительно коррелированные активы — вырожденный случай*

В вырожденном случае (Рис. 6.16) несколько активов характеризуются максимальным наклоном и все они могут войти в оптимальный портфель. В оптимуме относительные доли вложений в такие активы не определены однозначно.

Мы рассматривали только поведение инвестора, т. е. спрос на активы, но можно рассматривать и предложение активов. Если те, кто предлагает активы, могут менять доходность, но не коэффициенты корреляции, то естественно ожидать, что в равновесии на рынке активов все предлагаемые активы лежат на оптимальном луче. Таким образом, для строго положительно коррелированных активов «вырожденный» случай в определенном смысле довольно естествен.

Второй случай коррелированности — жесткая отрицательная корреляция. Имеет смысл рассматривать только пару таких активов (для более чем двух активов все коэффициенты корреляции не могут равняться -1). Таким образом, пусть имеется два актива 1 и 2, таких что $\rho_{12} = -1$. Применяя общую формулу для расчета диспер-

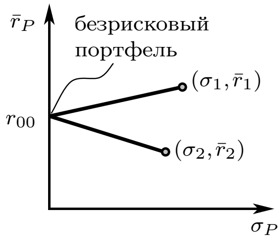


Рис. 6.17. *Возможные рискованные портфели в случае жестко отрицательно коррелированных активов*

сии, получим

$$\sigma_P^2 = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \alpha_1^2\sigma_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 = (\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2)^2,$$

откуда среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma_P = |\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2|.$$

Ожидаемая доходность портфеля равна

$$\bar{r}_P = \alpha_1\bar{r}_1 + \alpha_2\bar{r}_2.$$

Нетрудно понять, что допустимые комбинации таких двух активов составляют ломаную. Точка излома соответствует портфелю с нулевым риском ($\sigma_P = 0$). Это означает, что из двух жестко отрицательно коррелированных активов можно составить безрисковый портфель (Рис. 6.17).

Чтобы получить такую ломаную на графике, нужно отразить одну из точек относительно вертикальной оси и соединить отрезком с другой точкой (Рис. 6.18).

Безрисковый портфель получается при следующей структуре портфеля:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Его доходность, которую мы обозначим r_{00}, равна

$$r_{00} = \frac{\sigma_1\bar{r}_2 + \sigma_2\bar{r}_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Поскольку из двух таких активов можно составить безрисковый портфель, то рассматривать, как эти активы будут сочетаться с безриско-

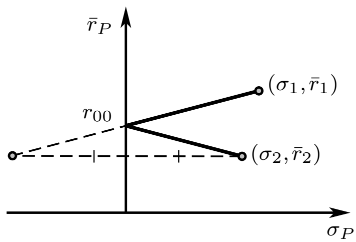


Рис. 6.18. *Построение ломаной возможных рискованных портфелей в случае жестко отрицательно коррелированных активов*

вым активом, не имеет особого смысла. Можно сказать только, что при $r_{00} > r_0$ и возможности кредита по ставке r_0 получается парадоксальный результат — можно брать в кредит по ставке r_0 и инвестировать без риска с доходностью r_{00}. При этом можно получить сколь угодно большую доходность портфеля. (Формально в модели решение существует, так как целевая функция насыщаема.) Ясно, что этого не может происходить в рыночном равновесии. Следует учесть предложение активов. Естественно предположить, что в равновесии должно быть $r_{00} \leqslant r_0$ (отсутствие «рога изобилия»).

Третий случай, который мы рассмотрим — некоррелированные активы. В этом случае

$$V = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_l^2),$$
$$\sigma_P^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} \mathbf{V} \boldsymbol{\alpha} = \sum_k \alpha_k^2 \sigma_k^2,$$
$$\sigma_P = \sqrt{\sum_k \alpha_k^2 \sigma_k^2}.$$

Ожидаемая доходность портфеля, как всегда, равна

$$\bar{r}_P = \sum_k \alpha_k \bar{r}_k.$$

На графике портфели, комбинируемые из двух некоррелированных активов, образуют дугу, изогнутую влево (Рис. 6.19):

$$\bar{r}_P = \alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 = \alpha_1 \bar{r}_1 + (1 - \alpha_1)\bar{r}_2,$$

$$\sigma_P = \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2} = \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha_1)^2 \sigma_2^2}.$$

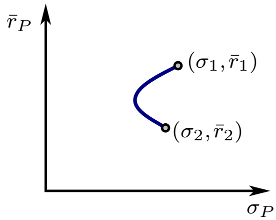


Рис. 6.19. *Возможные рискованные портфели в случае двух некоррелированных активов*

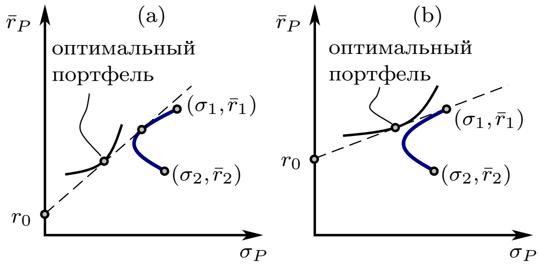


Рис. 6.20. *Оптимальные портфели в случае двух некоррелированных активов*

В отличие от случая жесткой положительной коррелированности риски при некоррелированности не складываются, поэтому риск при комбинировании активов будет снижен. Тогда все активы с доходностью выше гарантированной должны войти в оптимальный портфель (эффект диверсификации). Другими словами, для случая некоррелированных доходностей в модели Марковица выполняется аналог *теоремы о диверсификации*:

> Если доходности всех рискованных активов в модели Марковица некоррелированы, то рискованный актив войдет в оптимальный портфель ($\alpha_k > 0$), если и только если его ожидаемая доходность выше гарантированной ($\bar{r}_k > r_0$).

Доказательство этого утверждения будет приведено ниже.

На Рис. 6.20a оба рискованных актива входят в оптимальный портфель, так как их ожидаемая доходность больше доходности безриско-

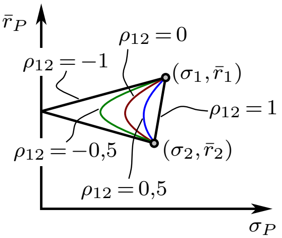


Рис. 6.21. *Возможные портфели из двух рискованных активов при разных коэффициентах корреляции*

вого актива. На Рис. 6.20b только один рискованный актив (первый) входит в оптимальный портфель.

При произвольном коэффициенте корреляции сочетания доходности и риска, достижимые комбинированием двух активов, окажутся на графике некоторой кривой соединяющей эти точки и выгибающейся, при неполной коррелированности, влево. На Рис. 6.21 показаны портфели, которые можно составить из двух активов при разных коэффициентах корреляции. Чем меньше коэффициент корреляции, тем сильнее влево выгибается кривая возможных портфелей.

В общем случае допустимое множество $\mathcal{R}$ всех доступных инвестору портфелей, состоящих из рискованных активов, на диаграмме риск — доходность будет изображаться некоторой связной фигурой, граница которой оказывается кривой, выпуклой влево (как, например, на Рис. 6.22)[19]. Очевидно, что множество $\mathcal{R}$ лежит в пределах, задаваемых наибольшей и наименьшей ожидаемой доходностью доступных активов. То есть для любого рискованного портфеля $(\sigma_M, \bar{r}_M) \in \mathcal{R}$ выполнено

$$\min \bar{r}_k \leqslant \bar{r}_M \leqslant \max \bar{r}_k.$$

Если бы инвестор выбирал портфель из множества $\mathcal{R}$, то он *не стал бы* выбирать такой портфель $(\sigma_M, \bar{r}_M)$, для которого существует другой допустимый портфель $(\sigma'_M, \bar{r}'_M) \in \mathcal{R}$ с лучшими характеристиками, т. е. такой что

$$\sigma'_M \leqslant \sigma_M \quad \text{и} \quad \bar{r}'_M \geqslant \bar{r}_M,$$

[19] Диаграмма изображает множество возможных портфелей, составленных из семи активов, при некоторой матрице корреляций доходностей этих активов.

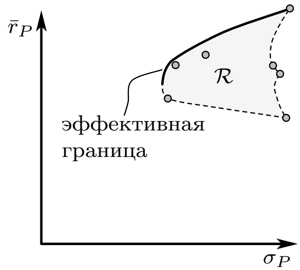


Рис. 6.22. *Множество возможных рискованных портфелей для нескольких активов*

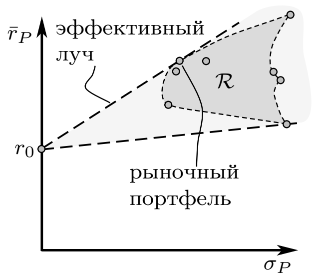


Рис. 6.23. *Множество возможных портфелей для нескольких активов*

причем одно из неравенств строгое. Выбор инвестора всегда лежал бы на эффективной границе, состоящей из портфелей, для которых при заданной величине риска доходность максимальна (см. Рис. 6.22).

Комбинируя рискованные портфели с безрисковым активом получим множество всех возможных портфелей, которое на диаграмме будет выглядеть как конус с вершиной в точке $(0, r_0)$ (см. Рис. 6.23). Этот конус состоит из всех таких лучей, которые выходят из точки $(0, r_0)$ и проходят через одну из точек $(\sigma_M, \bar{r}_M) \in \mathcal{R}$.

Комбинируя наилучшую (по наклону луча) точку из $\mathcal{R}$ с безрисковым активом, как и ранее, получаем наилучший портфель. Оптимальный портфель определяется наиболее крутым лучом (Рис. 6.23), т. е.

$$\frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M} \to \max_{(\sigma_M, \bar{r}_M) \in \mathcal{R}}.$$

Полезность инвестора от оптимального портфеля равна

$$U = \bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2),$$

где величины $\bar{r}_P$ и σ_P^2 следующим образом можно выразить через доли всех активов, кроме безрискового:

$$\bar{r}_P = r_0 + \sum_{k=1}^{l} \alpha_k(\bar{r}_k - r_0),$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1=1}^{l} \sum_{k_2=1}^{l} \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} = \bar{r}_k - r_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha_k} = 2\sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}.$$

Будем рассматривать полезность U как функцию долéй всех рискованных активов. Оптимальный портфель характеризуется долями, максимизирующими эту функцию (при ограничениях на их неотрицательность).

Найдем производную U по α_k:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} - \gamma\left(2\bar{r}_P \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha_k}\right) =$$

$$= \bar{r}_k - r_0 - \gamma\left(2\bar{r}_P(\bar{r}_k - r_0) + 2\sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}\right) =$$

$$= (1 - 2\gamma\bar{r}_P)(\bar{r}_k - r_0) - 2\gamma\sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}.$$

Для оптимального портфеля $\partial U/\partial \alpha_k \leqslant 0$, причем для активов, входящих в портфель ($\alpha_k > 0$), по условию дополняющей нежесткости $\partial U/\partial \alpha_k = 0$.

Из условий дополняющей нежесткости

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0,$$

т. е.

$$(1 - 2\gamma\bar{r}_P)(\bar{r}_P - r_0) - 2\gamma\sigma_P^2 = 0,$$

откуда, исключая обсуждавшийся выше вырожденный случай, когда $\sigma_P^2 = 0$, получим

$$1 - 2\gamma\bar{r}_P = \frac{2\gamma\sigma_P^2}{\bar{r}_P - r_0}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 2\gamma\left(\sigma_P^r \frac{\bar{r}_k - r_0}{\bar{r}_P - r_0} - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}\right).$$

Взвешенная сумма ковариаций в этой формуле равна

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk} = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \operatorname{Cov}(\tilde{r}_j, \tilde{r}_k) = \operatorname{Cov}\left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \tilde{r}_j, \tilde{r}_k\right) =$$
$$= \operatorname{Cov}(\tilde{r}_P - \alpha_0 r_0, \tilde{r}_k) = \operatorname{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_k).$$

Обозначим эту величину через c_{Pk}. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 2\gamma\left(\sigma_P^2 \frac{\bar{r}_k - r_0}{\bar{r}_P - r_0} - c_{Pk}\right).$$

Следовательно, условия первого порядка $\partial U/\partial \alpha_k \leqslant 0$, характеризующие оптимальный портфель, можно записать следующим образом:

$$\sigma_P^2 \frac{\bar{r}_k - r_0}{\bar{r}_P - r_0} \leqslant c_{Pk},$$

причем если k-й актив входит в оптимальный портфель ($\alpha_k > 0$), то здесь достигается равенство. То есть для активов, входящих в портфель, выполнено следующее условие оптимальности:

$$\bar{r}_k - r_0 = \frac{c_{Pk}}{\sigma_P^2}(\bar{r}_P - r_0).$$

Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$ — структура рискованной части портфеля. Величина ν_k представляет собой долю вложений в k-й актив в общих вложениях в рискованные активы. Другими словами если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — оптимальный для инвестора портфель, то

$$\nu_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{j\neq 0} \alpha_j}, k \neq 0.$$

В знаменателе стоит $\sum_{j\neq 0} \alpha_j = 1 - \alpha_0$ — доля рискованной части портфеля. Можно записать это соотношение и в другом виде:

$$\alpha_k = \nu_k(1 - \alpha_0), k \neq 0.$$

Рассмотрим портфель, составленный только из рискованных активов, с долями ν_k. Его доходность обозначим через $\tilde{r}_M$. Она связана с доходностью полного оптимального портфеля как

$$\tilde{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0)\tilde{r}_M.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{r}_P &= \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0)\bar{r}_M, \\ \sigma_P &= (1 - \alpha_0)\sigma_M, \\ c_{Pk} &= \mathsf{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_k) = \mathsf{Cov}((1 - \alpha_0)\tilde{r}_M, \tilde{r}_k) = \\ &= (1 - \alpha_0)\,\mathsf{Cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_k) = (1 - \alpha_0)c_{Mk}. \end{aligned}$$

Используя эти обозначения, условия первого порядка для актива, входящего в оптимальный портфель, можно записать как

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0),$$

где

$$\beta_k = \frac{\mathsf{Cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_k)}{\mathsf{Var}(\tilde{r}_M)} = \frac{c_{Mk}}{\sigma_M^2}.$$

Это *основная формула модели CAPM*[20]. В соответствии с этим соотношением ожидаемую доходность актива, вошедшего в портфель, можно разбить на две части:

- доходность безрискового актива r_0 (это компенсация за отложенное потребление);
- компенсацию за подверженность риску, $\bar{r}_k - r_0$ (премия за риск).

Коэффициент β_k — это ковариация между доходностью k-го актива и доходностью рискованной части оптимального портфеля, нормированная на дисперсию доходности рискованной части оптимального портфеля. Такой нормированный показатель называется величиной бета этого актива.

Для активов, не входящих в оптимальный портфель, выполнено

$$\bar{r}_k - r_0 \leqslant \beta_k(\bar{r}_M - r_0).$$

В частном случае, когда доходности рискованных активов некоррелированы между собой, очевидно, что беты всех активов, не вошедших в оптимальный портфель, будут равны нулю. Следовательно,

[20] См., напр., статью Уильяма Шарпа W. F. Sharpe. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance* **19** (1964): 425–442.

для актива, не вошедшего в портфель, выполнено

$$\bar{r}_k - r_0 \leqslant \beta_k(\bar{r}_M - r_0) = 0.$$

С другой стороны, если актив вошел в портфель, то его бета должна быть положительной. Следовательно, для такого актива

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0) > 0$$

(где мы предполагаем, что $\bar{r}_M > r_0$). Тем самым мы доказали теорему о диверсификации, сформулированную выше.

Интерпретируем теперь полученные результаты в контексте ситуации, когда всем инвесторам на рынке доступны одни и те же активы.

• Множество $\mathcal{R}$ допустимых комбинаций рискованных активов у всех будет одним и тем же.

• Поскольку оптимальный портфель у каждого инвестора лежит на луче с наибольшим наклоном, выходящем из точки $(0, r_0)$ и проходящем через точку множества $\mathcal{R}$, то у всех инвесторов рискованная часть портфеля будет иметь одно и то же отношение $(\bar{r}_M - r_0)/\sigma_M$. Рискованный портфель, характеризующийся этим оптимальным отношением, называется рыночным портфелем. Это точка касания эффективного луча и множества $\mathcal{R}$ (Рис. 6.24). Всякая точка $(\sigma_P, \bar{r}_P)$, лежащая на эффективном луче, удовлетворяет уравнению

$$\bar{r}_P = r_0 + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(\bar{r}_M - r_0)$$

или

$$\frac{\bar{r}_P - r_0}{\sigma_P} = \frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M},$$

где $(\sigma_M, \bar{r}_M)$ — характеристики рыночного портфеля.

> Теорема о разделении (*Separation Theorem*):
>
> Для всякого инвестора (независимо от γ) рискованная часть оптимального портфеля является рыночным портфелем.

Соответственно процесс поиска оптимального портфеля можно разделить на два этапа: сначала определяется оптимальный рискованный портфель $(\sigma_M, \bar{r}_M)$, а затем в зависимости от склонности к риску выбирается его оптимальное сочетание с безрисковым активом. При отождествлении оптимального рискованного портфеля с рыночным задачу первого этапа «решает» рынок и инвестору достаточно выбрать соотношение между безрисковым активом и этим

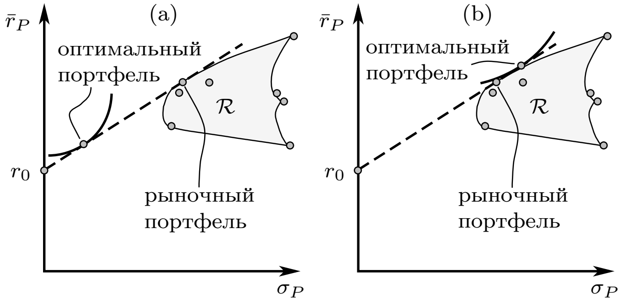


Рис. 6.24. *Оптимальные портфели двух разных инвесторов: (a) доля безрискового актива положительна, (b) доля безрискового актива отрицательна — инвестор берет кредит*

портфелем. Тем самым вместо того, чтобы рассматривать все активы, *инвестору достаточно выбрать соотношение между безрисковым активом и рыночным портфелем.* (Выше мы уже анализировали подобную задачу.)

Это утверждение называют также «теоремой о взаимных фондах» (*“Mutual Fund Theorem”*). Название отражает тот факт, что в «мире Марковица» инвесторы могут доверить составление оптимального портфеля рискованных активов инвестиционным организациям («взаимным фондам»), а сами должны будут лишь комбинировать этот готовый портфель с безрисковым активом в соответствии со своими предпочтениями.

Как мы видели, точка касания $(\sigma_M, \bar{r}_M)$, вообще говоря, может быть не единственной. Кроме того, в общем случае данной паре $(\sigma_M, \bar{r}_M)$ не всегда соответствует единственная структура активов, поэтому рыночный портфель может быть не единственным.

Если мы имеем дело с невырожденным случаем (например, когда матрица корреляций доходностей рискованных активов невырождена), то рыночный портфель $(\nu_1, \ldots, \nu_l)$ единственный и вектор $(\nu_1, \ldots, \nu_l)$ *для любого инвестора* характеризует структуру рискованной части портфеля. Таким образом, этот же вектор характеризует структуру продаж активов на рынке в целом (отсюда и термин «рыночный портфель»).

Показатель бета отдельного актива $\beta_k = c_{Mk}/\sigma_M^2$ представляет собой характеристику актива, общую для всех инвесторов. Бета актива измеряет степень взаимосвязанности доходности актива и до-

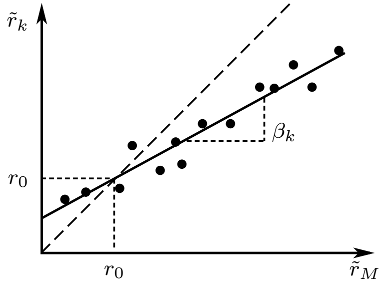


Рис. 6.25. *Интерпретация беты актива как наклона линии регрессии*

ходности рыночного портфеля. Соотношения

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0)$$

показывают, что премия за риск $\bar{r}_k - r_0$ пропорциональна коэффициенту β_k. Коэффициент пропорциональности здесь — премия за риск для рыночного портфеля, $\bar{r}_M - r_0$.

Бета актива фактически представляет собой наклон теоретической линии регрессии доходности актива по доходности рыночного портфеля (отсюда и название). Действительно, можно ввести обозначение $\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{r}_k - r_0 - \beta_k(\tilde{r}_M - r_0)$ для ошибки регрессии. Тогда уравнение регрессии будет иметь вид

$$\tilde{r}_k = (1 - \beta_k)r_0 + \beta_k\tilde{r}_M + \tilde{\varepsilon}_k,$$

где ошибка имеет нулевое математическое ожидание $\mathsf{E}\,\tilde{\varepsilon}_k = \bar{r}_k - r_0 - \beta_k(\bar{r}_M - r_0) = 0$ и некоррелирована с регрессором:

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(\tilde{\varepsilon}_k, \tilde{r}_M) = \mathsf{E}(\tilde{\varepsilon}_k\tilde{r}_M) = \mathsf{E}(\tilde{r}_k\tilde{r}_M) - r_0\bar{r}_M - \beta_k(\mathsf{E}(\tilde{r}_M^2) - \bar{r}_0\bar{r}_M) =\\ = \mathsf{E}(\tilde{r}_k\tilde{r}_M) - \bar{r}_k\bar{r}_M - \beta_k(\mathsf{E}(\tilde{r}_M^2) - \bar{r}_M^2) = c_{Mk} - \beta_k\sigma_M^2 = 0\end{aligned}$$

(Рис. 6.25).

Отметим несколько свойств приведенных равновесных соотношений и коэффициентов бета.

Ожидаемая доходность актива с нулевой бетой (т. е. актива, доходность которого некоррелирована с рыночной доходностью) равна безрисковой ставке r_0. Поскольку такой актив не изменяет риск рыночного портфеля, то он, по сути дела, является безрисковым (несмотря на то, что дисперсия доходности может быть положительной).

Актив с бетой, равной единице, эквивалентен рыночному портфелю и обладает той же ожидаемой доходностью, что и рыночный портфель.

Задачи

6.66 Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(\bar{r}_0, \sigma_0) = (1, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}2, 0{,}3)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}15, 0{,}2)$, $(\bar{r}_3, \sigma_3) = (1{,}3, 0{,}4)$. Рискованные активы жестко положительно коррелированы (с коэффициентом 1). Что можно сказать о структуре рискованной части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

6.67 Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (?, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}1, 0{,}2)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}2, 0{,}2)$. Рискованные активы некоррелированы. При какой величине r_0 рискованная часть оптимального портфеля может иметь характеристики $(\bar{r}_M, \sigma_M) = (1{,}15, \sqrt{0{,}2})$? Поясните словами и графически.

6.68 Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (1, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (0{,}9, 0{,}1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}1, 0{,}2)$. Рискованные активы жестко отрицательно коррелированы (с коэффициентом -1). Что можно сказать о структуре рискованной части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

6.69 В модели Марковица инвестор выбирает, какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью r_0, а сколько вложить в рискованные активы (акции) двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1 > r_0$, $\bar{r}_2 > r_0$. Укажите, могут ли какие-либо условия на коэффициент корреляции ρ и (или) доходности гарантировать, что

(A) все три актива войдут в портфель;
(B) только первый из рискованных активов войдет в портфель;
(C) только два рискованных актива войдут в портфель.

6.70 Пусть в модели Марковица инвестор, обладающий капиталом 100 млн руб. делает выбор между тремя активами: один безрисковый с доходностью $r_0 = 1{,}1$, а другие два — с доходностями $\bar{r}_1 = 1{,}2$ и $\bar{r}_2 = 1{,}5$ соответственно и дисперсиями доходностей $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. Известно, что инвестор выбрал портфель, характеризующейся доходностью $r_P = 1{,}27$ и дисперсией доходности $\sigma_P^2 = 0{,}17$. Доходность рискованной части его портфеля равна $r_M = 1{,}44$.

(A) Найдите суммы, вложенные инвестором в каждый из активов.

(B) Найдите дисперсию доходности рискованной части портфеля этого инвестора.

(C) Найдите коэффициент корреляции доходностей двух рискованных активов.

6.71 В модели Марковица инвестор сталкивается с двумя рискованными активами с характеристиками $\sigma_1^2 = 4$, $\bar{r}_1 = 2$, $\sigma_2^2 = 1$, $\bar{r}_2 = 11/2$, где σ_k^2 — дисперсия доходности k-го актива, а $\bar{r}_k$ — ожидаемая доходность, и с одним безрисковым активом с доходностью $r_0 = 1$. Известно, что инвестор выбрал такой портфель, что его рискованная часть имеет характеристики $\sigma_M^2 = 8/3$, $\bar{r}_R = 12/3$, а сам оптимальный портфель имеет ожидаемую доходность $\bar{r}_P = 12/3$.

(A) Найдите дисперсию доходности оптимального портфеля.

(B) Найдите доли активов в оптимальном портфеле.

(C) Найдите величину корреляции между доходностями двух рискованных активов.

6.72 В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности 1,6. Имеется два вида активов: акции с параметрами риск — доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (2, 1{,}2)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1, 1{,}4)$, причем они некоррелированы. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в рискованной (рыночной) части портфеля инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисуйте ее приблизительный график и объясните ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Выведите функциональную зависимость.

6.73 В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности 1,7. Имеется два вида активов: акции с параметрами риск — доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (1, 0{,}8)$ и облигации с параметрами

$(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1, 1{,}4)$, причем они отрицательно коррелированы с коэффициентом -1. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисуйте ее приблизительный график и объясните ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Выведите функциональную зависимость.

6.74 В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности 1,8. Имеется два вида активов: акции с параметрами риск — доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (2, 1, 4)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1, 1, 3)$, причем они положительно коррелированы с коэффициентом 1. Будет ли строго возрастать или убывать доля акций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисуйте ее приблизительный график и объясните ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Выведите функциональную зависимость.

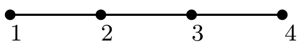
6.75 Некий очень осторожный инвестор всегда предпочитает активы с меньшим риском (дисперсией) вне зависимости от ожидаемой доходности. Пусть он составляет портфель из двух активов с ожидаемыми полезностями $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ и дисперсиями доходности σ_1^2 и σ_2^2. Определите, в какой пропорции войдут в портфель эти активы, если они ...

(A) жестко положительно коррелированы (коэффициент корреляции равен $\rho_{12} = 1$);

(B) некоррелированы ($\rho_{12} = 0$);

(C) строго отрицательно коррелированы ($\rho_{12} = -1$).

6.76 На отрезке в ряд расположены четыре предприятия:



Время от времени происходит стихийное бедствие, которое сокращает прибыли на двух соседних предприятиях наполовину. Без учета этого прибыль на всех предприятиях одинакова. Вероятность стихийного бедствия для каждой пары предприятий $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ одинакова. В какой пропорции распределит свой капитал между акциями этих предприятий инвестор с квадратичной элементарной функцией полезности?

6.77 Покажите, что если инвестору доступны два рискованных актива $(\bar{r}_1, \sigma_1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2)$, доходности которых некоррелированы, и выполнено $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$, то оптимальный портфель обязательно содержит второй актив. Покажите, что условие некоррелированности активов существенно для справедливости этого утверждения, приведя соответствующий контрпример.

6.78 Покажите в явном виде, что если инвестору доступны два рискованных актива $(\bar{r}_1, \sigma_1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2)$, доходности которых некоррелированы, и безрисковый актив, причем выполнено $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$, то оптимальный портфель содержит первый актив тогда и только тогда, когда $r_0 < \bar{r}_1$. Покажите, что условие некоррелированности активов существенно для справедливости этого утверждения, приведя соответствующий контрпример.

6.79 Определим *бету* произвольного *портфеля* следующим образом:

$$\beta_P = \frac{\mathsf{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_M)}{\mathsf{Var}(\tilde{r}_M)} = \frac{c_{MP}}{\sigma_M^2}.$$

(A) Покажите, что бета портфеля — это взвешенное среднее бет активов, составляющих портфель.

(B) Выразите бету произвольного портфеля, лежащего на эффективном луче, через показатели риска этого портфеля и рыночного портфеля. Чему равна бета рыночного портфеля?

(C) Как мы видели, для активов, входящих в оптимальный портфель, выполняется

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0).$$

Покажите, что аналогичная формула верна и для оптимальных портфелей.

Задачи к главе

6.80 Имеется два вида активов — облигации и акции. Их доходности, зависящие от предполагаемого состояния экономики, приведены в Таблице 6.1. Кредит невозможен. Элементарная функция полезности инвестора равна $u(x) = 4x - x^2$.

(A) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом максимизации функции полезности Неймана—Моргенштерна.

(B) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина.

(C) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина, если дополнительно существует безрисковый актив с доходностью 1,3.

Таблица 6.1. *Данные к задаче 6.80*

Состояние экономики	Вероятность события	Доходность облигаций	Доходность акций
Спад	1/3	1,1	1,0
Норма	1/3	1,4	1,6
Подъем	1/3	1,7	2,2

Глава

Рынки в условиях неопределенности

7

В этой главе мы введем неопределенность (риск) в модели общего равновесия способом, предложенным Эрроу и Дебре. Сначала речь пойдет о классической модели Эрроу—Дебре, являющейся естественным расширением модели совершенного рынка из гл. 4. Место обычных благ в этой модели занимают так называемые *контингентные блага* (см. гл. 6). Свойства равновесия в этой модели в целом такие же, однако если предпочтения потребителей представимы функцией полезности Неймана—Моргенштерна, то Парето-оптимальные состояния и равновесия обладают некоторыми особыми свойствами, которые мы ниже опишем. При этом рассмотрим только экономику без производства.

Определенные тонкости связаны с понятием Парето-оптимальности в экономике с риском. Мы рассмотрим два различных толкования этого понятия.

Моделировать возможности обмена в экономике с риском можно с помощью введения ценных бумаг вместо контингентных благ. Один из параграфов этой главы вводит подобную модель — модель Раднера. Мы установим некоторые свойства равновесия в модели Раднера и проведем параллели с равновесием Эрроу—Дебре. Модель Раднера позволяет в явном виде моделировать неполноту рынков, однако мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

7.1 Модель Эрроу—Дебре экономики с риском

Рассмотрим модель общего равновесия с контингентными благами в предположении, что существует конечное множество таких благ, а следовательно, и состояний мира. Как и прежде, будем предполагать, что имеется m потребителей ($i \in I = \{1, \ldots, m\}$) и l товаров ($k \in K = \{1, \ldots, l\}$). $S = \{1, \ldots, \hat{s}\}$ — множество всех возможных состояний мира. Условно можно представить, что рассматриваются два момента времени — «сегодня» и «завтра». Предполагается, что *сегодня* заключаются условные сделки посредством продажи и покупки контингентных благ и уравновешиваются рынки, а выполняться сделки будут уже *завтра*, когда выяснится, какое из состояний мира реализуется. Напомним, что контингентным благом (k, s) является контракт, заключаемый сегодня и гарантирующий поставку единицы товара $k \in K$ завтра в том случае, если реализуется состояние $s \in S$.

Будем рассматривать здесь только экономику без производства (экономику обмена). Как и прежде, будем предполагать, что у каждого потребителя есть распределение вероятностей на состояниях мира. (Эти вероятности могут, вообще говоря, быть субъективными, зависеть от потребителя.) Далее, в каждом из состояний мира $s \in S$ потребитель i обладает начальными запасами $\omega_{is} \in \mathbb{R}^l$. Таким образом, начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{iks})_{k,s}$ потребителя i состоят из наборов контингентных благ. Потребительский набор в данной модели характеризуется вектором $\mathbf{x}_i = (x_{iks})_{k,s} \in \mathbb{R}^{l\hat{s}}$, где x_{iks} — количество контингентного блага (k, s), приобретаемое потребителем i.

Для потребителя i на случайных потребительских наборах (соответствующих стратегии потребления этого потребителя) определены его предпочтения. Будем предполагать, что эти предпочтения представимы функцией полезности $U_i(\mathbf{x}_i)$.

Допустимым будет такой потребительский набор, что $\mathbf{x}_{is} \in X_i$ для всех $s \in S$. Соответствующую экономику назовем экономикой с риском (экономикой Эрроу—Дебре)[1]. Выполнение балансов в такой экономике требуется для каждого из состояний мира $s \in S$ отдельно. То есть состояние экономики с риском допустимо, если для каждого блага $k \in K$ и каждого состояния мира $s \in S$ выполнен баланс:

$$\sum_{i \in I} x_{iks} = \sum_{i \in I} \omega_{iks}.$$

Кроме того, как и ранее, для допустимости состояния экономики требуется допустимость наборов всех потребителей $i \in I$ ($\mathbf{x}_i \in X_i \times \cdots \times X_i$).

Потребители обмениваются между собой только имеющимися у них контингентными благами и заключают сделки в рамках бюджетного ограничения. Каждый из потребителей максимизирует в рамках бюджетного ограничения свою функцию полезности. Цену контингентного блага (k, s) обозначим p_{ks}. Заметим, что контингентное благо покупается и оплачивается (или продается) *сегодня*, когда неиз-

[1] См., напр., G. Debreu. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons, 1959 (Cowles Foundation Monograph No. 17), ch. 7, “Uncertainty”, а также статью К. Эрроу, упомянутую в сноске 8 на с. 477.

вестно, какое состояние мира реализуется. При рассмотрении выбора потребителя будем неявно предполагать, что вектор цен контингентных благ не влияет на оценку каждым потребителем вероятностей состояния мира[2].

Напомним, что задача потребителя имеет вид

$$\begin{gathered} U_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i} \\ \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks}x_{iks} \leqslant \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks}, \\ \mathbf{x}_{is} \in X_i \ \text{ для всех } s \in S. \end{gathered} \tag{$\mathcal{C}_{AD}$}$$

Определение общего равновесия остается фактически прежним.

Определение 7.1:

Назовем $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ равновесием Эрроу—Дебре экономики с риском, если

* $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя $(\mathcal{C}_{AD})$ при ценах $\mathbf{p}$.
* $\bar{\mathbf{x}}$ — допустимое состояние, т. е. для всех благ $k \in K$ и всех состояний мира $s \in S$ выполнено

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_{iks} = \sum_{i\in I} \omega_{iks}.$$

◀

Участники обмена в этой модели имеют собственные (возможно, несовпадающие) представления о вероятностях возможных состояний мира. Частным случаем этой ситуации является рынок, где представления всех участников о вероятностях совпадают. Заметим, что многие свойства данной модели не зависят от того, являются ли эти представления верными или ошибочными. Нетрудно понять, что такая модель рынка ничем не отличается от классической, с точностью до способа спецификации благ (k, s). Этот факт можно использовать при доказательстве теорем благосостояния для равновесия Эрроу—Дебре.

[2]Если потребители обладают достаточным знанием структуры экономики и интеллектом, то, вообще говоря, они могут по наблюдаемым ценам делать заключения о том, какие состояния мира совместимы с этими ценами. В этой логике можно толковать, например, модель Акерлова, которая рассматривается в гл. 11.

7.2 Теоремы благосостояния для экономики Эрроу—Дебре

В этом параграфе мы дадим определение оптимальных состояний экономики с риском и сформулируем аналоги двух теорем благосостояния, характеризующих свойства равновесия в терминах Парето-эффективности. При определении эффективности по Парето в данной экономике мы сталкиваемся с проблемами, связанными с возможными ошибками при оценке вероятностей состояний мира.

Здесь возможны два базовых подхода. Первый исходит из определения Парето-оптимальности для экономики без риска и использует непосредственно те предпочтения, которыми обладают потребители и в соответствии с которыми они осуществляют свой выбор, т. е. предпочтения, основанные на субъективных оценках вероятностей состояний мира, приписываемых потребителями этим состояниям. Второй подход основывается на предпочтениях, которые являются модификациями исходных и которые в соответствии с некими «истинными» значениями вероятностей состояний мира.

Вспомним, что предпочтения потребителей заданы исходно не на наборах контингентных благ $\mathbf{x}_i$, а на случайных потребительских наборах $\tilde{\mathbf{x}}_i$ (см. параграф 6.3). Случайный потребительский набор отличается от соответствующего набора контингентных благ тем, что включает дополнительно информацию о вероятностях состояний мира μ_{is}. Таким образом, случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{x}}_i$ состоит из $\mathbf{x}_i$ и $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{i1}, \ldots, \mu_{i\hat{s}})$. Для того чтобы четко разграничить два определения Парето-оптимальности, уместно использовать для функции полезности обозначение $U_i = U_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\mu}_i)$.

Определение 7.2:

Допустимое состояние экономики с риском $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m)$ будем называть (субъективно) Парето-оптимальным при данных вероятностях $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m$, если не существует другого допустимого состояния $\check{\mathbf{x}} = (\check{\mathbf{x}}_1, \ldots, \check{\mathbf{x}}_m)$, такого что $U_i(\hat{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu}_i) \leqslant U_i(\check{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu}_i)$, причем хотя бы для одного потребителя неравенство строгое. ◀

Определение 7.3:

Пусть функции полезности потребителей в экономике с риском имеют вид $U_i = U_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\mu}_i)$, где $\boldsymbol{\mu}_i$ — субъективные вероятности состояний мира, и пусть $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{\hat{s}})$ — объективные вероятности состояний мира.

Допустимое состояние экономики с риском $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m)$ будем называть (объективно) Парето-оптимальным, если не существует другого допустимого состояния $\check{\mathbf{x}} = (\check{\mathbf{x}}_1, \ldots, \check{\mathbf{x}}_m)$, такого что $U_i(\hat{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu}) \leqslant U_i(\check{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu})$ причем хотя бы для одного потребителя неравенство строгое. ◀

Различие двух определений связано только с корректировкой возможных ошибок в оценке вероятностей состояний мира потребителями. Второе из приведенных определений является в микроэкономике стандартным при оценке ситуаций с неопределенностью[3].

Здесь следует пояснить, что собой представляют «истинные» или «объективные» вероятности. Одно из возможных определений состоит в следующем. Пусть I_i — информация, которой обладает i-й потребитель (сигнал, который он получает). Тогда μ_{is} равны вероятностям состояний мира, условным относительно этого сигнала, т. е. $\mu_{is} = \Pr\{s \mid I_i\}$. Объективные вероятности можно определить как вероятности, условные относительно всей информации, имеющейся в экономике, т. е. $\mu_s = \Pr\{s \mid I_1, \ldots, I_m\}$.

Пусть, к примеру, в случае трех состояний мира и двух потребителей первый потребитель обладает информацией, что первое состояние мира не может реализоваться, а второй потребитель — что второе состояние не может реализоваться. Тогда объективные вероятности равны $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$.

При использовании «субъективного» определения оптимальности для экономики с риском выполнены аналоги теорем благосостояния при стандартных предположениях. В то же время очевидно, что при использовании «объективного» определения аналоги теорем благосостояния при тех же предположениях в общем случае не выполнены. Они верны, только если предпочтения потребителей имеют в основе объективные вероятности (когда все потребители обладают одной и той же информацией или, другими словами, симметрично информированы).

Теорема 7.1:

{i} Пусть $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре экономики с риском, причем предпочтения потребителей локально ненасыщаемы. Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ — (субъективно) Парето-оптимальное состояние.

{ii} Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — внутреннее (субъективно) Парето-оптимальное состояние экономики с риском. Предположим также, что предпочте-

[3]Это относится в первую очередь к различным моделям с асимметричной информацией (см. гл. 11). Характерный пример — модель Акерлова.

Таблица 7.1. *Пример нумерации контингентных благ*

		s			
		1	*2*	*3*	*4*
k	*1*	1	4	7	10
	2	2	5	8	11
	3	3	6	9	12

ния потребителей выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы[4]. Тогда существуют цены $\mathbf{p}$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}})$ является равновесием Эрроу—Дебре при некотором распределении собственности $\boldsymbol{\omega}_i$. ⌟

Доказательство: Перенумеруем контингентные блага: $(k, s) \to k'$ (один из возможных способов нумерации контингентных благ иллюстрирует Таблица 7.1). После такой операции получаем классическую модель Вальраса с $l \times \hat{s}$ «обычными» благами, в которой выполнены предположения первой и второй теорем благосостояния. ■

7.3 Свойства равновесий Эрроу—Дебре и Парето-оптимальных состояний в экономике с риском с функциями полезности Неймана—Моргенштерна

В данном параграфе мы рассмотрим, какие дополнительные свойства равновесия и Парето-оптимальных состояний определяет специфический вид функции полезности Неймана—Моргенштерна (а именно линейность по вероятностям и постоянство элементарных функций полезности по состояниям мира).

Пример 7.1

Рассмотрим экономику с одним благом (деньгами), двумя потребителями и двумя состояниями мира: R (дождь) и S (солнечная погода). Потребители обладают начальными запасами контингентных

[4]Заметим, что в случае, когда предпочтения потребителей представимы функцией полезности Неймана—Моргенштерна, ненасыщаемость предпочтений гарантируется строгой монотонностью элементарной функции полезности, непрерывность — непрерывностью элементарной функции полезности, выпуклость — ее вогнутостью.

благ $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 3)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (3, 1)$. То есть первый потребитель, если обмен не происходит, может рассчитывать на 1 при дожде и на 3 при солнце, а второй — наоборот. Пусть оба считают, что вероятности состояний R и S равны $\mu_R = 0{,}25$ и $\mu_S = 0{,}75$ соответственно, и имеют одинаковые элементарные функции полезности $u_i(x) = \ln(x)$. При этом функции полезности потребителей имеют следующий вид:

$$U_i = 0{,}25 \ln(x_{iR}) + 0{,}75 \ln(x_{iS}),\ i = 1, 2.$$

Описанная экономика представляет собой типичный пример «ящика Эджворта», только интерпретация переменных в ней специфическая. Здесь речь идет не об обмене обычными («физическими») благами, а об *обмене рисками.*

Дифференциальная характеристика Парето-оптимума имеет вид

$$\frac{\partial U_1/\partial x_{1R}}{\partial U_1/\partial x_{1S}} = \frac{0{,}25 x_{1S}}{0{,}75 x_{1R}} = \frac{\partial U_2/\partial x_{2R}}{\partial U_2/\partial x_{2S}} = \frac{0{,}25 x_{2S}}{0{,}75 x_{2R}},$$

откуда

$$x_{1S} x_{2R} = x_{1R} x_{2S}.$$

В Парето-оптимуме также должны выполняться балансы:

$$x_{1R} + x_{1S} = 4, \quad x_{2R} + x_{2S} = 4.$$

Отсюда получаем следующее уравнение границы Парето в координатах (x_{1R}, x_{1S}):

$$x_{1S}(4 - x_{1R}) = x_{1R}(4 - x_{1S})$$

или

$$x_{1S} = x_{1R}.$$

Следовательно, граница Парето совпадает с диагональю ящика Эджворта. Для каждого из потребителей это биссектриса положительного ортанта в его системе координат.

Найдем теперь равновесие. Его дифференциальная характеристика имеет вид

$$\frac{\partial U_1/\partial x_{1R}}{\partial U_1/\partial x_{1S}} = \frac{0{,}25 x_{1S}}{0{,}75 x_{1R}} = \frac{p_R}{p_S},$$
$$\frac{\partial U_2/\partial x_{2R}}{\partial U_2/\partial x_{2S}} = \frac{0{,}25 x_{2S}}{0{,}75 x_{2R}} = \frac{p_R}{p_S}.$$

Равновесие удовлетворяет соотношениям для Парето-оптимальных состояний, т. е., как и предсказывает Теорема 7.1, равновесие лежит

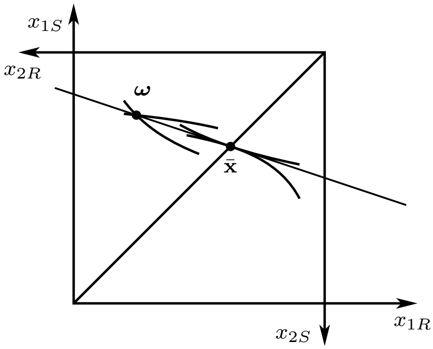


Рис. 7.1. *Иллюстрация к Примеру 7.1*

на границе Парето. Таким образом, в равновесии индивидуальный риск отсутствует: $x_{1S} = x_{1R}$, $x_{2S} = x_{2R}$.

Учитывая это, получим из дифференциальной характеристики равновесия, что отношение цен в двух состояниях мира равно

$$\frac{p_R}{p_S} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, можно выбрать $p_R = 1$, $p_S = 3$.

Поскольку предпочтения потребителей ненасыщаемы, бюджетные ограничения в равновесии выходят на равенство. Для первого потребителя

$$p_R x_{1R} + p_S x_{1S} = p_R + p_S \cdot 3,$$

т. е.

$$x_{1R} + 3x_{1S} = 1 + 3 \cdot 3 = 10.$$

Так как $x_{1S} = x_{1R}$, то $\bar{x}_{1S} = \bar{x}_{1R} = 2{,}5$. С учетом балансов, $\bar{x}_{2S} = \bar{x}_{2R} = 1{,}5$. (См. Рис. 7.1.) $\triangle$

В приведенном примере в любом Парето-оптимальном состоянии (а значит, и в равновесии) потребление обоих потребителей не зависит от состояния мира. Другая его примечательная особенность состоит в том, что отношение цен для двух состояний мира совпадает с отношением вероятностей этих состояний. Оказывается, эти свойства равновесия верны и в более общих случаях, когда, как и в данном примере, суммарные запасы не зависят от состояний мира. Покажем это.

Установим сначала свойства Парето-оптимальных состояний в экономике, где отсутствует системный риск.

Определение 7.4:

Будем говорить, что в экономике с риском отсутствует системный риск, если

$$\sum_{i \in I} \omega_{iks} = \sum_{i \in I} \omega_{ikt} \ \forall k \in K, \ \forall s, t \in S.$$

◀

Теорема 7.2:

Пусть в экономике с риском системный риск отсутствует, предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира и вогнутыми элементарными функциями полезности, заданными на выпуклых множествах допустимых наборов X_i.

Тогда в любом Парето-оптимальном состоянии данной экономики $\hat{\mathbf{x}}$ потребление каждого потребителя $i \in I$ со строго вогнутой элементарной функцией полезности не зависит от состояния мира (другими словами, отсутствует индивидуальный риск), т. е. для любой пары состояний мира $s, t \in S$ выполнено

$$\hat{\mathbf{x}}_{is} = \hat{\mathbf{x}}_{it}.$$

Обратно, если в экономике имеется лишь одно физическое благо и состояние $\hat{\mathbf{x}}$ экономики таково, что потребление каждого потребителя не зависит от состояния мира и элементарные функции полезности являются возрастающими, то данное состояние является Парето-оптимальным. ┘

Доказательство: ($\Rightarrow$) Пусть в в некотором состоянии экономики $\mathbf{x}$ для потребителя j со строго вогнутой элементарной функцией полезности данное свойство не выполнено, например $\mathbf{x}_{js} \neq \mathbf{x}_{jt}$. Найдем для этого состояния Парето-улучшение и тем самым покажем, что такого не может быть в Парето-оптимуме.

Такое Парето-улучшение получим, усреднив потребление по состояниям мира, т. е. взяв для каждого потребителя в каждом состоянии мира набор, равный ожидаемому потреблению:

$$\mathbf{x}^*_{is} = \sum_{t \in S} \mu_t \mathbf{x}_{it} = \mathsf{E}\, \tilde{\mathbf{x}}_i,$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_i$ — случайный потребительский набор, соответствующий $\mathbf{x}_i$.

Проверим, что состояние $\mathbf{x}^*$ является допустимым:

$$\sum_{i\in I}\mathbf{x}^*_{is} = \sum_{i\in I}\sum_{t\in S}\mu_t\mathbf{x}_{it} = \sum_{t\in S}\mu_t\sum_{i\in I}\mathbf{x}_{it} = \sum_{t\in S}\mu_t\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_{it} = \sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_{is}.$$

Здесь в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_{it}$ не зависит от состояния мира и сумма вероятностей состояний мира равна единице.

Проверим теперь, что $\mathbf{x}^*$ является Парето-улучшением. Заметим, что для любого потребителя $\mathbf{x}^*_i$ является безрисковым набором, поэтому $U_i(\mathbf{x}^*_i) = u_i(\mathbf{x}^*_{is})$. В силу неравенства Йенсена полезность усредненного потребительского набора не ниже ожидаемой полезности случайного потребительского набора:

$$U_i(\mathbf{x}^*_i) = u_i(\mathbf{x}^*_{is}) = u_i(\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}_i) \geqslant \mathsf{E}\,u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) = \sum_{s\in S}\mu_s u_i(\mathbf{x}_{is}) = U_i(\mathbf{x}_i).$$

Для потребителя j неравенство здесь строгое: $u_j(\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}_j) > \mathsf{E}\,u_i(\tilde{\mathbf{x}}_j)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — состояние экономики в котором отсутствует индивидуальный риск. Покажем, что оно неулучшаемо по Парето.

Парето-улучшение Парето-улучшения тоже является Парето-улучшением. Заметим, что, во-первых, Парето-улучшение Парето-улучшения тоже является Парето-улучшением, а во-вторых, усреднение потребительских планов данного потребителя (по состояниям мира) не ухудшает его положения в ситуации, когда его элементарная функция полезности вогнута (доказывается так же, как в предыдущем пункте). Таким образом, Парето-улучшение достаточно искать среди состояний, в которых отсутствует индивидуальный риск. Если $\check{\mathbf{x}}$ — одно из таких состояний, не совпадающее с $\hat{\mathbf{x}}$, то (как следует из материальных балансов) найдется потребитель i, для которого $\check{\mathbf{x}}_i < \hat{\mathbf{x}}_i$, и, следовательно, в силу возрастания элементарной функции полезности $U_i(\check{\mathbf{x}}_i) < U_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$. Значит, такое состояние не может являться Парето-улучшением для $\hat{\mathbf{x}}$. ■

Понять смысл доказанной теоремы помогает Рис. 7.1. На нем в точке начальных запасов потребители сталкиваются с риском (эта точка не лежит на диагонали). Если через эту точку провести прямую, наклон которой соответствует отношению вероятностей, то точка пересечения этой прямой с диагональю даст «усредненный» потребительский набор (точку $\bar{\mathbf{x}}$). Этот набор будет Парето-улучшением для первоначального. На графике он лежит между кривыми безразличия, проходящими через точку начальных запасов.

Установим теперь свойства *равновесия* (равновесных цен) в экономиках, где отсутствует системный риск.

Теорема 7.3:

Пусть в экономике с риском системный риск отсутствует и предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира и вогнутыми элементарными функциями полезности.

{i} В равновесии Эрроу—Дебре $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ потребление каждого потребителя $i \in I$ со строго вогнутой элементарной функцией полезности не зависит от состояния мира, т. е. для любой пары состояний мира $s, t \in S$ выполнено

$$\bar{x}_{is} = \bar{x}_{it}.$$

{ii} Если хотя бы у одного потребителя i элементарная функция полезности u_i является дифференцируемой, возрастающей и строго вогнутой, причем в равновесии потребительский набор этого потребителя является внутренним, то отношение цен на одно и то же «физическое» благо $k \in K$ в любых двух состояниях мира $s, t \in S$ равно отношению вероятностей этих состояний[5]:

$$\frac{p_{ks}}{p_{kt}} = \frac{\mu_s}{\mu_t}.$$ ┘

Доказательство: {i} Отсутствие индивидуального риска ($\bar{\mathbf{x}}_{is} = \bar{\mathbf{x}}_{it}\ \forall s, t \in S$) следует из первой теоремы благосостояния и Теоремы 7.2. Локальная ненасыщаемость предпочтений, которая требуется для справедливости первой теоремы благосостояния, следует из возрастания элементарных функций полезности.

{ii} Из того, что дифференцируемая функция является возрастающей и вогнутой следует, что ее градиент положителен[6]. Для потре-

[5] Когда потребительский набор потребителя не является внутренним, это условие выполнено для тех благ, которые потребляются данным потребителем в положительном количестве (в случае, если множество допустимых потребительских наборов состоит из неотрицательных векторов).

[6] Если $f(\cdot)$ является такой функцией, то для нее выполнено

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \nabla f(\mathbf{x})\mathbf{e}^i \geqslant f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}^i) - f(\mathbf{x}) > 0,$$

где $\mathbf{e}^i$ — i-й орт.

бителя i, набор которого является внутренним, выполнена дифференциальная характеристика

$$\frac{\mu_s u'_{ik}(\bar{\mathbf{x}}_{is})}{\mu_t u'_{ik}(\bar{\mathbf{x}}_{it})} = \frac{p_{ks}}{p_{kt}} \ \forall k \in K, \ \forall s, t \in S.$$

Как только что доказано, в равновесии $\bar{\mathbf{x}}_{is} = \bar{\mathbf{x}}_{it}$, откуда и следует требуемое соотношение. ■

В экономике с системным риском, то Парето-оптимальные состояния и равновесия указанными свойствами не обладают. Тем не менее в рассматриваемых в данном параграфе ситуациях — моделях обмена, где предпочтения потребителей допускают представление функциями полезности Неймана—Моргенштерна, равновесия характеризуются некоторыми общими свойствами. В частности, когда в экономике только одно (физическое) благо, два состояния мира и два потребителя, то граница Парето проходит в промежутке между двумя биссектрисами соответствующего ящика Эджворта (который в этом случае не будет квадратом), т. е. потребление каждого потребителя в относительно «скудном» состоянии мира должно быть относительно низким. Тот же факт верен и для равновесия, которое по первой теореме благосостояния должно лежать на границе Парето. Кроме того, цена блага в более «скудном» состоянии мира относительно выше. Действительно, в равновесии выполняется

$$\frac{\mu_R u'_i(\bar{x}_{iR})}{\mu_S u'_i(\bar{x}_{iS})} = \frac{p_R}{p_S}, \ i = 1, 2.$$

Если приравнять друг к другу предельные нормы замещения двух потребителей, то вероятности сократятся, откуда, учитывая балансы, получим

$$\frac{u'_1(\bar{x}_{1R})}{u'_1(\bar{x}_{1S})} = \frac{u'_2(\omega_{\Sigma R} - \bar{x}_{1R})}{u'_2(\omega_{\Sigma S} - \bar{x}_{1S})}.$$

Пусть $\omega_{\Sigma R} < \omega_{\Sigma S}$. Докажем, что $\bar{x}_{1R} < \bar{x}_{1S}$. Если бы было выполнено $\bar{x}_{1R} \geqslant \bar{x}_{1S}$, то $u'_1(\bar{x}_{1R}) \leqslant u'_1(\bar{x}_{1S})$, поскольку предельная полезность для рискофоба — убывающая функция. Отсюда следует, что

$$u'_2(\omega_{\Sigma R} - \bar{x}_{1R}) \leqslant u'_2(\omega_{\Sigma S} - \bar{x}_{1S})$$

и что $\omega_{\Sigma R} - \bar{x}_{1R} \geqslant \omega_{\Sigma S} - \bar{x}_{1S}$. Получили противоречие. Таким образом, $\bar{x}_{1R} < \bar{x}_{1S}$. Аналогично доказывается, что $\bar{x}_{2R} < \bar{x}_{2S}$.

Доказанное верно и для границы Парето, поскольку дифференциальные характеристики равновесий и Парето-оптимальных состояний совпадают.

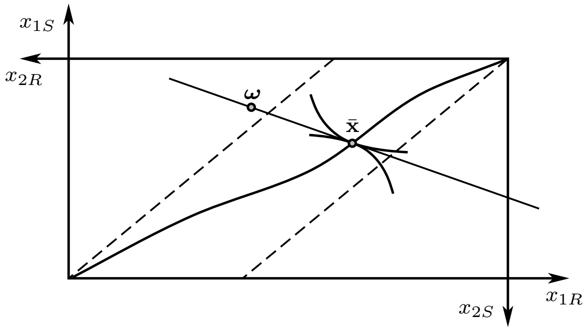


Рис. 7.2. *Парето-граница и равновесие в условиях системного риска*

Кроме того, из $\bar{x}_{iR} < \bar{x}_{iS}$ и дифференциальной характеристики решения задачи потребителя следует, что

$$\frac{\mu_R}{\mu_S} < \frac{\mu_R u_i'(\bar{x}_{iR})}{\mu_S u_i'(\bar{x}_{iS})} = \frac{p_R}{p_S}.$$

Данный случай иллюстрируется на Рис. 7.2.

Охарактеризуем теперь свойства равновесия в случае, когда один из потребителей нейтрален к риску: нейтральный к риску потребитель берет на себя весь риск, если он это может сделать.

Проиллюстрируем это свойство сначала на примере.

Пример 7.2

Пусть функции полезности потребителей имеют следующий вид:

$$U_1(\mathbf{x}_1) = \mu_R x_{1R} + \mu_S x_{1S},$$
$$U_2(\mathbf{x}_2) = \mu_R \ln(x_{2R}) + \mu_S \ln(x_{2S}).$$

Первый из потребителей здесь нейтрален к риску, а второй — рискофоб.

Дифференциальная характеристика границы Парето имеет следующий вид:

$$\frac{\mu_R}{\mu_S} = \frac{\mu_R x_{2S}}{\mu_S x_{2R}},$$

откуда $x_{2S} = x_{2R}$. Это соотношение выполнено только на внутренней части границы Парето. Оно означает, что соответствующая часть границы является биссектрисой положительного ортанта системы координат второго потребителя. Это же свойство должно выполняться и для любого внутреннего равновесия. Содержательно это

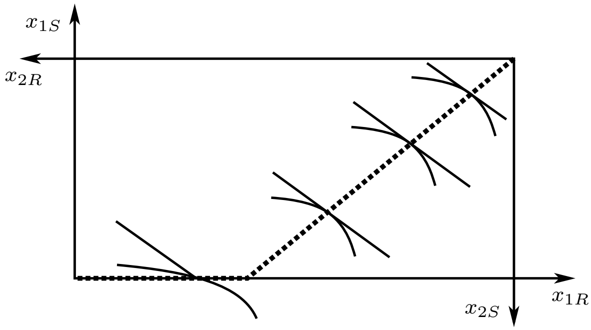


Рис. 7.3. *Парето-граница в случае, когда первый потребитель нейтрален к риску, иллюстрация к Примеру 7.2*

означает, что нейтральный к риску первый потребитель полностью застрахует второго потребителя-рискофоба. Заметим, что второй потребитель сталкивается с риском только в тех ситуациях, когда у первого отсутствует первое благо для осуществления обмена этого блага на второе, т. е. в ситуациях, когда потребительский набор первого потребителя содержит не все блага.

В предположении о допустимости неотрицательных (для второго потребителя — положительных) количеств благ граница Парето изгибается в месте пересечения с одной из осей координат первого потребителя (Рис. 7.3). △

Нетрудно видеть, что указанное свойство Парето-оптимальных состояний и равновесий выполняется и в более общих ситуациях. Так, справедлива следующая теорема

Теорема 7.4:

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира. Предположим, что по крайней мере один из потребителей (j) нейтрален к риску. Тогда имеют место следующие утверждения.

{i} Если $\hat{\mathbf{x}}$ — Парето-оптимальное состояние и $\hat{\mathbf{x}}_j \in \operatorname{int} X_j$ (потребительский набор нейтрального к риску потребителя является внутренним), то потребление каждого потребителя-рискофоба i не зависит от состояния мира.

{ii} Если $\bar{\mathbf{x}}$ является равновесным распределением, $\bar{\mathbf{x}}_j \in \operatorname{int} X_j$, то потребление каждого потребителя-рискофоба i не зависит от состояния мира.

{iii} Если $\bar{\mathbf{x}}$ является равновесным распределением, $\bar{\mathbf{x}}_j \in \operatorname{int} X_j$, и существует потребитель-рискофоб i с дифференцируемой и возрастающей элементарной функцией полезности, причем его потребительский набор является внутренним, то отношение цен на одно и то же «физическое» благо $k \in K$ в любых двух состояниях мира $s, t \in S$ равно отношению вероятностей этих состояний. ┘

Доказательство: {i} Пусть в состоянии $\hat{\mathbf{x}}$ потребитель-рискофоб i сталкивается с индивидуальным риском. Пусть $\mathbf{x}_i^*$ — усредненный потребительский набор, полученный на основе $\hat{\mathbf{x}}_i$, т. е. такой набор, что

$$\mathbf{x}_{is}^* = \sum_{t \in S} \mu_t \hat{\mathbf{x}}_{it}.$$

Рассмотрим потребительские наборы следующего вида ($\alpha \in (0, 1]$):

$$\mathbf{x}_i^\alpha = (1 - \alpha)\mathbf{x}_i^* + \alpha \hat{\mathbf{x}}_i.$$

$$\mathbf{x}_j^\alpha = \hat{\mathbf{x}}_j - \alpha(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i^*).$$

Поскольку $\hat{\mathbf{x}}_j$ — внутренний потребительский набор, то существует достаточно малое число α, такое что набор $\mathbf{x}_j^\alpha$ является допустимым для потребителя j. При таком α мы получим допустимое состояние экономики следующего вида: $\mathbf{x}_i^\alpha$ — набор потребителя i, $\mathbf{x}_j^\alpha$ — набор потребителя j, а потребление остальных потребителей остается без изменений.

Это состояние будет Парето-улучшением. Действительно, такое изменение затрагивает только потребителей i и j, не изменяет благосостояние нейтрального к риску потребителя j (поскольку математическое ожидание случайного потребительского набора нейтрального к риску потребителя j не меняется) и улучшает благосостояние потребителя-рискофоба i (поскольку он получает менее рискованный случайный потребительский набор).

Доказательство пунктов {ii} и {iii} оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 7.3). ■

До сих пор мы рассматривали ситуации, когда потребители одинаково оценивали вероятности состояний мира. Но гипотезы μ_{is} разных участников обмена о вероятностях состояний мира $s \in S$ не обязательно должны совпадать. И это не мешает торговле, а иногда и создает условия для нее. Пример этого получим, изменив параметры экономики, рассмотренной в Примере 7.1.

Пример 7.3 (пари)
Пусть функции полезности потребителей имеют следующий вид:

$$U_1(\mathbf{x}_1) = 0{,}25\ln(x_{1R}) + 0{,}75\ln(x_{1S}),$$
$$U_2(\mathbf{x}_2) = 0{,}75\ln(x_{2R}) + 0{,}25\ln(x_{2S}).$$

Первый потребитель считает второе событие в три раза вероятнее первого, второй — наоборот. Начальные запасы одинаковы у обоих: $\boldsymbol{\omega}_i = (2,2)$. Равновесие в этой модели единственно, равновесные цены, соответствующие разным состояниям природы, совпадают между собой: $p_R = p_S$. Равновесные распределения: $\bar{x}_{1R} = \bar{x}_{2S} = 1$; $\bar{x}_{1S} = \bar{x}_{2R} = 3$. Данный пример можно интерпретировать в том смысле, что потребители, имея разные представления о вероятностях состояний мира, заключают между собой пари. Несмотря на то, что отсутствует риск с точки зрения начальных запасов, обмен будет происходить (равновесие не совпадает с точкой начальных запасов), в результате чего в равновесии потребители сталкиваются с индивидуальным риском.

Отношение цен блага в двух состояниях мира будет лежать в промежутке между отношениями вероятностей:

$$\frac{0{,}25}{0{,}75} < \frac{1}{1} < \frac{0{,}75}{0{,}25},$$

т. е.

$$\frac{\mu_{1R}}{\mu_{1S}} < \frac{p_R}{p_S} < \frac{\mu_{2R}}{\mu_{2S}}.$$

Уравнение субъективной границы Парето здесь будет иметь вид

$$x_{1S} = \frac{9x_{1R}}{1 + 2x_{1R}}.$$

Таким образом, субъективная Парето-граница (ее внутренняя часть) проходит выше диагонали-биссектрисы (см. Рис. 7.4).

В этой модели условием (субъективно) взаимовыгодной торговой сделки является различие в оценках вероятностей реализации различных состояний мира. Так как в рассматриваемой экономике нет системного риска, то вне зависимости от истинных вероятностей состояний мира множество (объективно) Парето-оптимальных состояний совпадает с диагональю ящика Эджворта, что соответствует отсутствию индивидуального риска. Начальные запасы лежат на

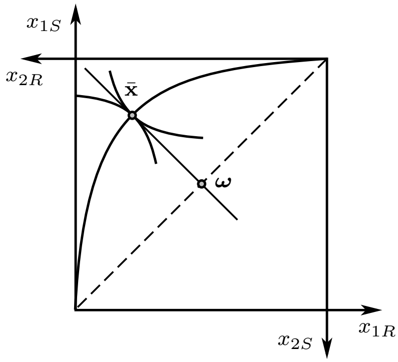


Рис. 7.4. *Иллюстрация к Примеру 7.3*

диагонали, значит, первоначальное состояние (объективно) Парето-оптимально, а рассмотренный обмен ведет к ухудшению реального благосостояния по крайней мере одного потребителя. Таким образом, на этом примере очевидно различие между «субъективным» и «объективным» определениями границы Парето. △

Задачи

7.1 Докажите следующее обобщение пункта {i} Теоремы 7.2: «Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира и вогнутыми элементарными функциями полезности, заданными на выпуклых множествах допустимых наборов X_i. Тогда в любом Парето-оптимальном состоянии данной экономики $\hat{\mathbf{x}}$ потребление каждого потребителя $i \in I$ со строго вогнутой элементарной функцией полезности одинаково в любой паре состояний мира $s, t \in S$, где совокупные начальные запасы одинаковы».

7.2 Обобщите обратное утверждение Теоремы 7.2 на случай экономики с несколькими физическими благами. Укажите дополнительные условия, которые гарантируют его справедливость. (*Указание:* Таким условием является Парето-оптимальность в каждом состоянии мира, т. е. отсутствие в данном состоянии мира обменов, которые приводят к Парето-улучшениям.)

7.3 Докажите пункты {ii} и {iii} Теоремы 7.4.

7.4 В экономике распределения[7] с риском имеется два потребителя с функциями полезности Неймана—Моргенштерна, один товар и два состояния мира — A и B, случающиеся с равными вероятностями. Элементарные функции полезности равны $u_1 = -\exp(-x_1)$ и $u_2 = -\exp(-2x_2)$ соответственно. Общие начальные запасы в экономике равны $(4, 7)$. Найти Парето-оптимум и равновесие, если доходы обоих равны 10.

7.5 В экономике имеется два потребителя, одно физическое благо и N состояний мира. Элементарные функции полезности потребителей одинаковы и имеют вид $u_i(x) = \sqrt{x}$, $i = 1, 2$. Начальные запасы первого потребителя равны $\omega_{1s} = s$, а второго — $\omega_{2s} = N + 1 - s$. Вероятности состояний мира

(A) одинаковы, т. е. $\mu_s = 1/N$;

(B) пропорциональны номеру состояний, т. е. $\mu_s = \lambda s$, где

$$\lambda = \frac{2}{N(N+1)}.$$

Найдите равновесие Эрроу—Дебре случаях (A) и (B). Напомним, что

$$\sum_{s=1}^{N} s = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{s=1}^{N} s^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

7.6 В ситуации предыдущей задачи элементарные функции полезности потребителей имеют вид $u_1(x) = x$, $u_2(x) = \sqrt{x}$. Начальные запасы первого потребителя равны $\omega_{1s} = N$, а второго — $\omega_{2s} = s$. Найдите равновесие Эрроу—Дебре в тех же случаях (A) и (B).

7.7 Рассмотрите экономику с риском, в которой одно физическое благо, два состояния мира и два потребителя, полезности которой представлены функциями Неймана—Моргенштерна. Первый потребитель имеет элементарную функцию полезности вида $u_1(x) = Ax^B$ $(x \geqslant 0)$, начальные запасы $(C, 4 - C)$ и считает вероятность первого состояния мира равной λ. Второй потребитель имеет элементарную функцию полезности $u_2(x)$ $(x \geqslant 0)$ с положительной убывающей производной, начальные запасы $(D, 6-D)$ и считает вероятность первого состояния мира равной μ.

(A) При каких параметрах A, B, C, D, λ, μ можно с уверенностью утверждать, что в этой экономике не может существовать внутреннее равновесие Эрроу—Дебре?

(B) При каких параметрах A, B, C, D, λ, μ можно с уверенностью утверждать, что во внутреннем равновесии Эрроу—Дебре (если та-

[7] См. Определение 4.5 на с. 264.

кое существует) хотя бы один потребитель будет полностью застрахован от риска?

(Попытайтесь перечислить все случаи, которые подпадают под известную вам теорию. Обоснуйте свои утверждения.)

7.4 Равновесие Раднера в экономике с риском

То, что для равновесия Эрроу—Дебре в экономике с риском верны аналоги теорем благосостояния, противоречит интуиции. Известно, что неполнота информации все же представляет проблемы для рынков в реальной жизни. Что-то в сформулированной модели должно быть не так. Одним из объяснений может служить различие в субъективных оценках вероятности (неравномерность распределения информации между экономическими субъектами). Однако это объяснение недостаточно.

Очевидно, что модель нереалистична. Нереалистична она не потому, что в ней фигурируют понятия «сегодня», «завтра» и «контингентные блага». Ту же самую модель можно интерпретировать достаточно широко, в зависимости от конкретной ситуации. Основное нереалистичное предположение данной модели — это *наличие полной системы рынков*. Оно заранее заложено в формулировке модели в виде *единого бюджетного ограничения*. Содержательно полнота рынков означает, что каждый потребитель может обменять любой товар при любом состоянии мира на любой другой товар в любом другом состоянии мира, неважно, непосредственно или с помощью цепочки обменов. Рынок с риском может стать несовершенным, если невозможно обменять ни одно благо в каком-либо состоянии s_1 ни на одно благо в другом состоянии s_2. Такое может быть, если по каким-либо причинам не заключаются соответствующие контракты, *условные по состояниям мира*. При этом бюджеты потребителей уже не будут едиными. Потребители тогда имеют отдельные бюджеты в зависимости от состояния мира.

К. Эрроу предложил моделировать возможности обмена в явном виде, введя в модель экономики с риском активы[8]. Пусть $C = \{1, \ldots, \hat{c}\}$ — активы, имеющие хождение в рассматриваемой экономике (в равной степени доступные всем потребителям). Каждый актив $c \in C$

[8]См. K. J. Arrow. Le rôle des valeurs boursiérespour la répartition la meilleure des risques, in *Económétrie Colloques Internationaux*, Paris: CNRS, 1953: 41–48 (англ. пер. K. J. Arrow. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing, *Review of Economic Studies* **31** (1964): 91–96), а также R. Radner. Competitive Equilibrium under Uncertainty, *Econometrica* **36** (1968): 31–58.

характеризуется матрицей доходностей[9] $\mathbf{a}_c = (a_{ksc})_{k,s}$, где a_{ksc} — количество k-го блага, которое дает этот актив в случае, если во втором периоде реализуется состояние мира s. Будем предполагать, что доходность актива не зависит от того, кто им владеет, т. е. коэффициенты a_{ksc} одинаковы для всех потребителей. Цену этого актива обозначим q_c, а его количество, приобретаемое i-м потребителем, z_{ic}. Ограничений на знак величин z_{ic} не накладывается. Случай $z_{ic} < 0$ можно интерпретировать в том смысле, что потребитель эмитирует соответствующий актив в количестве $|z_{ic}|$ (либо берет соответствующий кредит). В предположении, что

- потребитель принимает цены как данные,
- в первом периоде происходит только обмен активами (обмен физическими благами и потребление происходят во втором периоде),
- начальные запасы активов любого типа у любого потребителя равны нулю[10],

бюджетное ограничение первого периода имеет вид

$$\sum_{c \in C} q_c z_{ic} \leqslant 0.$$

Во втором периоде, после осуществления некоторого состояния мира $s \in S$, происходит обмен благами на так называемых рынках «спот»[11] с учетом обязательств по активам, приобретенным в первом периоде. Соответствующее бюджетное ограничение второго периода для состояния мира $s \in S$ имеет вид

$$\sum_{k \in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k \in K} p_{ks} \omega_{iks} + \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} p_{ks} a_{ksc} z_{ic},$$

[9]Это доходности в натуральном выражении (в физических количествах благ). Соответствующие денежные доходности рассчитываются по формуле

$$r_{sc} = \frac{\sum_{k \in K} p_{ks} a_{ksc}}{q_c} = \frac{\mathbf{p}_s \mathbf{a}_{sc}}{q_c}.$$

При интерпретации доходностей r_{sc} следует учитывать, что в модели Раднера денежные единицы первого периода несопоставимы с денежными единицами второго периода. Более того, они несопоставимы между разными состояниями мира s второго периода.

[10]Это предположение не влияет на анализ модели, но несколько упрощает описание модели и соответствующие выкладки.

[11]От англ. *spot market* — «рынок наличного товара».

где p_{ks} — цена спот блага k в состоянии мира s. Это бюджетное ограничение можно записать также в следующем виде:

$$\sum_{k\in K} p_{ks}x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks}\breve{\omega}_{iks},$$

где $\breve{\omega}_{iks}$ — новые начальные запасы, учитывающие изменения, связанные с выполнением обязательств первого периода. Эти модифицированные начальные запасы рассчитываются по формуле

$$\breve{\omega}_{iks} = \omega_{iks} + \sum_{c\in C} a_{ksc}z_{ic}.$$

Будем предполагать, что активы служат только для передачи покупательной способности между различными состояниями мира (мы обсудим ниже эту их функцию) и не влияют на уровень благосостояния потребителя, поэтому, как и ранее, будем считать, что предпочтения описываются функцией полезности, зависящей лишь от объемов потребления в различных состояниях мира $U_i(\mathbf{x}_i)$ (и от вероятностей состояний мира, хотя мы не будем указывать это в явном виде).

Если бы потребитель в первом периоде, планируя свой портфель активов, знал, в дополнение к ценам активов $\mathbf{q}$, цены благ $\mathbf{p}_s$ в различных состояниях мира $s \in S$ (цены спот), то, в соответствии с предположением о его предпочтениях, он выбрал бы портфель активов и планы потребления в различных состояниях мира, которые были бы решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} U_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i,\mathbf{z}_i} \\ \sum_{c\in C} q_c z_{ic} \leqslant 0, \\ \sum_{k\in K} p_{ks}x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks} + \sum_{c\in C}\sum_{k\in K} p_{ks}a_{ksc}z_{ic}\ \forall s\in S, \mathbf{x}_i\in X_i. \end{gathered} \tag{$\mathcal{C}_R$}$$

Однако в первом периоде цены $\mathbf{p}$ второго периода ему неизвестны. Поэтому, чтобы выбрать портфель активов в первом периоде, потребитель должен сформировать некоторые ожидания $\mathbf{p}_i^e$ по поводу цен второго периода во всех состояниях мира, поскольку ценность его портфеля зависит от будущей конъюнктуры. В модели Раднера предполагается, что эти ожидания оправдываются, т. е. во втором периоде на рынках благ обмен фактически происходит по ценам, которые ожидались в первом периоде при формировании портфеля.

Сказанное мотивирует следующее определение равновесия.

Определение 7.5:

Назовем $\langle \bar{\mathbf{p}}, (\bar{\mathbf{p}}_i^e)_{i\in I}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}} \rangle$ равновесием Раднера экономики с риском, если

* $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{z}}_i)$ — решение задачи потребителя ($\mathcal{C}_R$) при ценах $\bar{\mathbf{p}}_i^e$ и $\bar{\mathbf{q}}$;
* выполнены балансы по всем активам $c \in C$, т. е.

$$\sum_{i\in I} \bar{z}_{ic} = 0;$$

* ожидания потребителей $i \in I$ оправдываются: $\bar{\mathbf{p}}_i^e = \bar{\mathbf{p}}$;
* $\bar{\mathbf{x}}$ — допустимое состояние экономики, т. е. для всех состояний мира $s \in S$ выполнено

$$\sum_{i\in I} \bar{\mathbf{x}}_{is} = \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_{is}.$$

◀

Поскольку в равновесии ожидания оправдываются, определение можно упростить, если считать равновесием Раднера набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ и заменить ожидаемые цены на фактические. В дальнейшем мы всегда будем пользоваться этим сокращенным обозначением.

Таким образом, в модели Раднера мы отказываемся от одного очень сильного предположения модели Эрроу—Дебре — полноты рынков контингентных благ, чтобы заменить его другим (очень ограничительным) предположением — что потребители способны предвидеть будущие равновесные цены в любом возможном состоянии мира.

Как будет показано в дальнейшем, если это предположение дополнить предположением, что множество доступных потребителям активов достаточно «богатое» (условие полноты рынков), то любое равновесие в этой модели будет Парето-оптимальным и любое Парето-оптимальное состояние можно реализовать как такое равновесие. В то же время подход Раднера позволяет моделировать и приводящие к фиаско рынка ситуации, возникающие, когда множество доступных потребителям активов является довольно «бедным» и, следовательно, Парето-оптимум может быть недостижим.

Для анализа равновесия Раднера можно воспользоваться понятием арбитража. Под арбитражем здесь понимаются изменения в портфеле активов с целью увеличить его доходность (по крайней мере, в одном состоянии мира). Всюду в этой главе мы будем использовать термин «арбитраж» в этом несколько специфическом смысле, принятом в микроэкономике.

Под планом арбитража (его также называют арбитражным портфелем) будем понимать вектор $\Delta\mathbf{z} = (\Delta z_c)_{c\in C}$, характеризующий изменения в портфеле активов типичного потребителя ($\mathbf{z}_i$). При таком изменении левая часть бюджета первого периода (чистые расходы на покупку активов) у рассматриваемого потребителя изменится на величину $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z}$. Очевидно, что если $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$ при данном векторе цен активов $\mathbf{q}$, то такой план арбитража не выводит за границы бюджетного множества первого периода. Изменение дохода рассматриваемого потребителя в s-м состоянии мира, вызываемое данным планом арбитража $\Delta\mathbf{z}$, равно

$$\sum_{c\in C}\sum_{k\in K} p_{ks}a_{ksc}\Delta z_c = \mathbf{p}_s\mathbf{A}_s\Delta\mathbf{z},$$

где $\mathbf{A}_s$ — матрица доходностей активов в состоянии мира s. Такой арбитраж имеет целью получить во втором периоде, по крайней мере в одном состоянии мира, прирост дохода потребителя (притом что в остальных состояниях мира доход не уменьшится).

Определение 7.6:

Будем говорить, что в модели Раднера при ценах активов $\mathbf{q}$, ценах благ $\mathbf{p}$ и доходностях активов (a_{ksc}) арбитраж невозможен (или, другими словами, цены $\mathbf{p}$ являются безарбитражными), если не существует такого плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$, что $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$, и для любого состояния мира $s \in S$ выполнено

$$\sum_{c\in C}\sum_{k\in K} p_{ks}a_{ksc}\Delta z_c \geqslant 0,$$

причем хотя бы для одного состояния мира неравенство строгое[12].◄

Если цены в модели Раднера не являются безарбитражными, то такая ситуация не может быть равновесием. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 7.5:

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с некоторой системой активов. Тогда при ценах $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$ и данной системе активов арбитраж невозможен. ┘

[12]Заметьте связь со стохастическим доминированием по состояниям мира, введенным в параграфе 6.7?? на с. 422.

Таблица 7.2. *Пример множества C в экономике с активами Эрроу, $l = 2, \hat{s} = 3$.*

		s 1	2	3
k	1	$\otimes$		$\otimes$
	2		$\otimes$	$\otimes$

Доказательство: Действительно, арбитраж означает, что возможно получить прирост дохода в одном из состояний мира, что противоречит локальной ненасыщаемости (потребителю доступен строго лучший набор). ■

Очевидно, что аналогом контингентных благ из модели Эрроу—Дебре в модели Раднера является актив Эрроу, который дает право получить единицу k-го блага, если реализуется состояние мира s. Формально актив c является активом Эрроу для (k_0, s_0), если $a_{ksc} = 1$ при $k = k_0$, $s = s_0$ и $a_{ksc} = 0$ при остальных k и s. Для таких активов удобно использовать обозначение (k, s).

Прежде чем обратиться к более общему случаю, рассмотрим подробнее частный случай, когда все активы в экономике являются активами Эрроу. Перепишем ключевые соотношения с учетом структуры активов. В задаче потребителя бюджетное ограничение первого периода примет вид

$$\sum_{(k,s)\in C} q_{ks} z_{iks} \leqslant 0.$$

Для каждого из активов Эрроу $(k, s) \in C$ выполнен баланс активов:

$$\sum_{i\in I} z_{iks} = 0.$$

Бюджетное ограничение второго периода будет иметь вид

$$\sum_{k\in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks} + \sum_{(k,s)\in C} p_{ks} z_{iks}.$$

Заметим, что модель Эрроу—Дебре можно рассматривать как частный случай модели Раднера. Если в экономике есть все возможные активы Эрроу, т. е.

$$C = \left\{ (k, s) \;\middle|\; k \in K, s \in S \right\},$$

то модель Раднера — это фактически другая формулировка модели Эрроу—Дебре.

Действительно, из равновесия Эрроу—Дебре $(\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{x}})$ легко сконструировать равновесие Раднера $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$. Для этого достаточно взять

$$\bar{p}_{ks} = \check{p}_{ks}, \ \bar{q}_{ks} = \check{p}_{ks}, \ \bar{x}_{iks} = \check{x}_{iks}, \ \bar{z}_{iks} = \check{x}_{iks} - \omega_{iks}.$$

Тогда обмены в первом периоде при заключении контрактов исчерпывают все возможные выгоды обмена и во втором периоде обменов не будет, поскольку $\breve{\omega}_{iks} = \omega_{iks} - \bar{z}_{iks} = \check{x}_{iks}$. Проверка этого факта предлагается в качестве упражнения.

Для доказательства обратного утверждения — что если в экономике есть все возможные активы Эрроу, то на основе равновесия Раднера можно сконструировать равновесие Эрроу—Дебре — требуется воспользоваться свойствами равновесия Раднера. Если в экономике есть все возможные активы Эрроу, то в равновесии цены активов Эрроу пропорциональны ценам спот. Действительно, предположим, что в равновесии Раднера все цены положительны, и пусть k_1, k_2 — два блага, а s — состояние мира, такие что в равновесии цены активов Эрроу и цены благ не пропорциональны, например:

$$\bar{p}_{k_1 s}/\bar{q}_{k_1 s} > \bar{p}_{k_2 s}/\bar{q}_{k_2 s}.$$

Здесь k_1 — относительно более дорогое благо, что позволяет осуществить арбитраж и получить дополнительный доход в состоянии мира s, включив в портфель несколько большее количество актива (k_1, s) и несколько меньшее — актива (k_2, s), т. е. $\Delta z_{k_1 s} > 0$ и $\Delta z_{k_2 s} < 0$, и не нарушить при этом бюджетное ограничение первого периода. Действительно, если $q_{k_1 s}\Delta z_{k_1 s} + q_{k_2 s}\Delta z_{k_2 s} = 0$, то

$$p_{k_1 s}\Delta z_{k_1 s} + p_{k_2 s}\Delta z_{k_2 s} > \frac{p_{k_2 s}}{q_{k_2 s}}(q_{k_1 s}\Delta z_{k_1 s} + q_{k_2 s}\Delta z_{k_2 s}) = 0.$$

Таким образом, чтобы арбитраж был невозможен, равновесные цены должны быть такими, чтобы для любого s векторы $\bar{\mathbf{p}}_s$ и $\bar{\mathbf{q}}_s$ были пропорциональны друг другу, где $\bar{\mathbf{p}}_s$ и $\bar{\mathbf{q}}_s$ — части векторов $\bar{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{q}}$, соответствующие состоянию мира s.

Докажем это свойство в общем виде, не предполагая положительность цен в равновесии Раднера, но при этом используя в доказательстве менее интуитивно очевидный план арбитража, чем только что предложенный.

Теорема 7.6:

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{ (k,s) \mid k \in K, s \in S \}$. Тогда для любого состояния мира $s \in S$ можно найти коэффициент пропорциональности $\lambda_s > 0$, такой что $\bar{\mathbf{p}}_s = \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s$. ⌟

Доказательство: Рассмотрим одно из состояний мира $s \in S$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что $\bar{\mathbf{p}}_s \neq 0$ и $\bar{\mathbf{q}}_s \neq 0$, откуда $|\bar{\mathbf{q}}_s|^2 \neq 0$. Рассмотрим следующий план арбитража:

$$\Delta \mathbf{z}_t = 0, t \neq s \quad \text{и} \quad \Delta \mathbf{z}_s = \bar{\mathbf{p}}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s,$$

где

$$\lambda_s = \frac{\bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{q}}_s}{|\bar{\mathbf{q}}_s|^2}.$$

Для этого плана выполнено $\bar{\mathbf{q}}\Delta\mathbf{z} = \bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$. Поскольку в равновесии Раднера арбитраж невозможен, отсюда следует, что $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$. Действительно, при $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s > 0$ этот план арбитража позволяет потребителям получить прирост дохода в состоянии мира s. Случай $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s < 0$ сводится к случаю $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s > 0$ изменением знака $\Delta \mathbf{z}_s$ на противоположный.

Но если $\bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$ и $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$, то

$$|\bar{\mathbf{p}}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s|^2 = (\bar{\mathbf{p}}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s)\Delta \mathbf{z}_s = \bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0,$$

т. е. $\bar{\mathbf{p}}_s = \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s$.

Докажем, что $\lambda_s > 0$. Если это не так и $\lambda_s \leqslant 0$, то $\bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{q}}_s \leqslant 0$ и план арбитража

$$\Delta \mathbf{z}_t = 0 \text{ при } t \neq s \quad \text{и} \quad \Delta \mathbf{z}_s = \bar{\mathbf{p}}_s$$

удовлетворяет условиям $\bar{\mathbf{q}}\Delta\mathbf{z} = \bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s \leqslant 0$ и $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s = |\bar{\mathbf{p}}_s|^2 > 0$. Это противоречит безарбитражности равновесных цен. ■

Заметим, что ключевое предположение модели Раднера — потребители при расчете цен активов предвидят цены всех благ во всех состояниях мира — не является при этом существенным, так как *структура наблюдаемых ими в первом периоде цен активов совпадает со структурой цен благ второго периода.* (Данное предположение становится существенным в ситуациях, когда какие-то активы Эрроу отсутствуют.) Заметим также, что в этой ситуации, когда доступны все активы Эрроу, даже в том случае, когда равновесие Эрроу—Дебре единственно, существует бесконечно много равновесий Раднера с нетривиальными обменами во втором периоде в дополнение к рассмотренному выше равновесию, когда обмены во втором периоде отсутствуют.

Используя только что доказанное свойство равновесия Раднера с полным набором активов Эрроу, продемонстрируем, что на основе такого равновесия можно сконструировать равновесие Эрроу—Дебре.

Теорема 7.7:

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{\,(k,s) \mid k \in K, s \in S\,\}$. Тогда $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре. ┘

Доказательство: Из предыдущей теоремы следует, что $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — тоже равновесие Раднера в рассматриваемой экономике. Складывая все бюджетные ограничения задачи i-го потребителя, убеждаемся, что при этом получится бюджетное ограничение задачи i-го потребителя в модели Эрроу—Дебре. Следовательно, эти две задачи эквивалентны[13]. То есть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя в модели Эрроу—Дебре при ценах $\bar{\mathbf{q}}$. Несложно проверить, что остальные условия равновесия Эрроу—Дебре также выполнены. ■

Основное условие, гарантирующее эквивалентность моделей Эрроу—Дебре и Раднера, — наличие возможности переносить покупательную способность из одного состояния мира в другое. При этом вовсе не обязательно требовать, чтобы имелись *все* активы Эрроу. Для того чтобы эта возможность существовала, достаточно, в частности, чтобы имелись все активы Эрроу, выраженные в первом благе, и только они (благо 1 — счетная единица, *numeraire*):

$$C = \left\{\,(1,s) \;\middle|\; s \in S\,\right\}.$$

Проанализируем равновесие Раднера с таким набором активов. При анализе удобно использовать следующие обозначения: $q_{1s} = q_s$, $z_{i1s} = z_{is}$.

Заметим, что арбитраж в этой экономике возможен тогда и только тогда, когда q_s и p_{1s} имеют разные знаки или же $q_s = 0$ хотя бы для одного состояния мира s. Мы будем далее предполагать, что первое благо нужно всем потребителям во всех состояниях мира, т. е. функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира. Тогда в равновесии Раднера $p_{1s} > 0$

[13] Мы опустили здесь часть рассуждений (строгое доказательство эквивалентности), но их легко восстановить, пользуясь как образцом доказательствами теорем, приведенных далее в этом параграфе.

для всех $s \in S$. При этом арбитраж возможен тогда и только тогда, когда $q_s \leqslant 0$ хотя бы для одного состояния мира s. Соответствующий план арбитража построить достаточно просто — он должен сводиться к покупке актива Эрроу, соответствующего состоянию s. *Невозможность арбитража эквивалентна условию* $\mathbf{q} > \mathbf{0}$.

Торговля в первом периоде в подобной экономике фактически означает, что продаются или покупаются начальные запасы первого блага таким образом, чтобы во втором периоде, торгуя скорректированными запасами, получить доход, достаточный для покрытия расходов, связанных с приобретением равновесного потребительского набора $\check{\mathbf{x}}$, соответствующего равновесию Эрроу—Дебре. То есть торговля в первом периоде представляет собой «перераспределение покупательной способности» потребителя между состояниями мира с избыточной и недостаточной покупательной способностью.

Доказательства следующих двух теорем, проводящих параллели между равновесием Раднера и равновесием Эрроу—Дебре, демонстрируют правильность такой интерпретации равновесия Раднера при $C = \{\, (1, s) \mid s \in S \,\}$.

Теорема 7.8:

Пусть в экономике с риском функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира, и пусть $(\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре в этой экономике. Тогда существует портфель $\bar{\mathbf{z}}$ активов Эрроу, выраженных в первом благе, а также цены активов $\bar{\mathbf{q}}$ такие, что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \check{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера с $C = \{\, (1, s) \mid s \in S \,\}$. ⌟

Доказательство: Возрастание функции полезности по первому благу гарантирует положительность цен этого блага в равновесии Эрроу—Дебре в каждом состоянии мира ($\check{p}_{1s} > 0$ для всех $s \in S$).

Дефицит, связанный с потреблением в состоянии мира s потребительского набора $\check{\mathbf{x}}_{is}$, в ценах $\check{\mathbf{p}}$ равен

$$d_{is} = \check{\mathbf{p}}_s(\check{\mathbf{x}}_{is} - \omega_{is}).$$

Потребитель i может покрыть дефицит d_{is}, выбирая величину $\bar{z}_{is}$ равной $d_{is}/\check{p}_{1s}$. Такой выбор $\bar{z}_{is}$ гарантирует, что выполнены бюджетные ограничения второго периода задачи потребителя i в модели Раднера:

$$\check{\mathbf{p}}_s\check{\mathbf{x}}_{is} = \check{\mathbf{p}}_s\omega_{is} + \check{p}_{1s}\bar{z}_{is}.$$

Заметим, что выполняется соотношение $\sum_{s\in S} d_{is} = 0$ (так как фактически это бюджетное ограничение потребителя i в модели Эрроу—

Дебре в равновесных ценах). Выберем в качестве цены актива $(1, s)$ цену спот первого блага в состоянии мира s, т. е. $\bar{q}_s = \check{p}_{1s}$. Тогда соотношение $\sum_{s \in S} d_{is} = 0$ гарантирует выполнение бюджетного ограничения первого периода задачи потребителя i в модели Раднера.

Таким образом, $(\check{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{z}}_i)$ — допустимое решение в задаче ($\mathcal{C}_R$) при ценах $\check{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{q}}$. Покажем, что оно также является оптимальным решением. Предположим, что есть другое допустимое решение задачи ($\mathcal{C}_R$), $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{z}'_i)$, которое дает i-му потребителю более высокую полезность. Так как $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{z}'_i)$ допустимо, то

$$\sum_{s \in S} \check{p}_{1s} z'_{is} \leqslant 0,$$

$$\check{\mathbf{p}}_s \mathbf{x}'_{is} \leqslant \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is} + \check{p}_{1s} \check{z}_{is}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\sum_{s \in S} \check{\mathbf{p}}_s \mathbf{x}'_{is} \leqslant \sum_{s \in S} \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is}.$$

Это означает, что $\mathbf{x}'_i$ — допустимое решение задачи ($\mathcal{C}_{AD}$), которое более предпочтительно для потребителя, чем $\check{\mathbf{x}}_i$. Противоречие.

Проверим, что для всех $s \in S$ выполнены балансы активов:

$$\sum_{i \in I} \bar{z}_{is} = \sum_{i \in I} \frac{d_{is}}{\check{p}_{1s}} = \sum_{i \in I} \frac{\check{\mathbf{p}}_s(\check{\mathbf{x}}_{is} - \omega_{is})}{\check{p}_{1s}} = \frac{\check{\mathbf{p}}_s}{\check{p}_{1s}} \sum_{i \in I} (\check{\mathbf{x}}_{is} - \omega_{is}) = 0.$$

Последнее равенство следует из балансов для физических благ. ■

Для обратного утверждения нельзя в общем случае взять $\bar{\mathbf{p}} = \check{\mathbf{p}}$, поскольку в равновесии Раднера цены $\bar{\mathbf{p}}_s$ в каждом состоянии мира s можно умножить на произвольный положительный множитель и при этом рассматриваемое состояние останется равновесием. Таким образом, требуется взять $\check{\mathbf{p}}_s = \lambda_s \bar{\mathbf{p}}_s$, где λ_s — некоторый положительный множитель.

Теорема 7.9:

Пусть в экономике с риском функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира, и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{ (1, s) \mid s \in S \}$. Тогда существует вектор цен $\check{\mathbf{p}}$, такой что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре. ┘

Доказательство: Возрастание функции полезности по первому благу гарантирует положительность цен этого блага в равновесии Раднера в каждом состоянии мира. Кроме того, для каждого потребителя i выполнены как равенства бюджетные ограничения первого и второго периодов:

$$\sum_{s\in S} \bar{q}_s \bar{z}_{is} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{x}}_{is} = \bar{\mathbf{p}}_s \omega_{is} + p_{1s}\bar{z}_{is}.$$

Выберем $\bar{\mathbf{p}}_s$ следующим образом:

$$\check{\mathbf{p}}_s = \frac{\bar{q}_s}{\bar{p}_{1s}}\bar{\mathbf{p}}_s.$$

Тогда

$$\check{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{x}}_{is} = \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is} + q_s \bar{z}_{is}.$$

Складывая эти соотношения для всех состояний мира с бюджетным ограничением первого периода, убеждаемся, что при ценах $\check{\mathbf{p}}$ выполняется бюджетное ограничение в модели Эрроу—Дебре:

$$\sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{x}}_{is} = \sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is}.$$

Таким образом, $\bar{\mathbf{x}}_i$ — допустимое решение задачи потребителя ($\mathcal{C}_{AD}$). Покажем, что оно является оптимальным.

Пусть это не так и $\mathbf{x}'_i$ — другое допустимое решение задачи ($\mathcal{C}_{AD}$) при ценах $\check{\mathbf{p}}$, с более высоким значением полезности. Так как $\mathbf{x}'_i$ допустимо, то

$$\sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s \mathbf{x}'_i \leqslant \sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is}.$$

Тогда можно подобрать портфель активов $\mathbf{z}'_i$, такой что $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{z}'_i)$ — допустимое решение задачи потребителя ($\mathcal{C}_R$) в модели Раднера при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{q}}$. Для этого, как и в доказательстве предыдущей теоремы, можно выбрать z'_{is} так, чтобы покрыть бюджетный дефицит в соответствующем состоянии мира, $d_{is} = \bar{\mathbf{p}}_s(\mathbf{x}'_{is} - \omega_{is})$, т. е. $z'_{is} = d_{is}/\bar{p}_{1s}$. При этом

$$\sum_{s\in S} \bar{q}_s z'_{is} = \sum_{s\in S} \frac{\bar{q}_s}{\bar{p}_{1s}} \bar{\mathbf{p}}_s(\mathbf{x}'_{is} - \omega_{is}) = \sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s(\mathbf{x}'_{is} - \omega_{is}),$$

т. е. выполнено бюджетное ограничение первого периода:

$$\sum_{s\in S} \bar{q}_s z'_{is} \leqslant 0.$$

Бюджетные ограничения второго периода выполнены в силу определения z'_{is}. Получили противоречие. ■

Таблица 7.3. *Активы Эрроу в Примере 7.4*

	$s = R$	$s = S$
$k = A$	$\otimes$	$\otimes$
$k = B$		

Таблица 7.4. *Начальные запасы в Примере 7.4*

	$\boldsymbol{\omega}_1$		$\boldsymbol{\omega}_2$		$\boldsymbol{\omega}_\Sigma$	
	A	B	A	B	A	B
$s = R$	2,	0	0,	2	2,	2
$s = S$	2,	2	0,	0	2,	2

Пример 7.4

Рассмотрим модель Раднера с двумя состояниями мира, $s = R, S$, двумя благами, $k = A, B$, двумя потребителями и двумя активами Эрроу, отмеченными в Таблице 7.3. Они выражены в благе A. Ожидания потребителей по поводу вероятностей состояний мира совпадают и равны $\mu_R = \mu_S = 0{,}5$. Предпочтения потребителей также одинаковы; элементарные функции полезности равны

$$u_i(x_A, x_B) = \ln(x_A) + \ln(x_B),\ i = 1, 2.$$

Начальные запасы указаны в Таблице 7.4. С точки зрения начальных запасов в этом примере нет системного риска, поскольку совокупные начальные запасы в обоих состояниях мира равны $(2, 2)$, т. е. одинаковы.

Задача потребителя $i = 1, 2$ равновесия Раднера этой экономики имеет следующий вид:

$$U_i = 0{,}5\left[\ln(x_{iAR}) + \ln(x_{iBR})\right] + 0{,}5\left[\ln(x_{iAS}) + \ln(x_{iBS})\right] \to \max_{\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i}$$

$$q_R z_{iR} + q_S z_{iS} \leqslant 0,$$

$$p_{AR} x_{iAR} + p_{BR} x_{iBR} \leqslant p_{AR} \omega_{iAR} + p_{BR} \omega_{iBR} + p_{AR} z_{iR},$$

$$p_{AS} x_{iAS} + p_{BS} x_{iBS} \leqslant p_{AS} \omega_{iAS} + p_{BS} \omega_{iBS} + p_{AS} z_{iS}.$$

Найдем равновесие Раднера в этом примере, пользуясь его взаимосвязью с равновесием Эрроу—Дебре. Так как нет системного риска, то в равновесии потребление обоих потребителей не зависит от состояния мира:

$$x_{iAR} = x_{iAS}, \quad x_{iBR} = x_{iBS}.$$

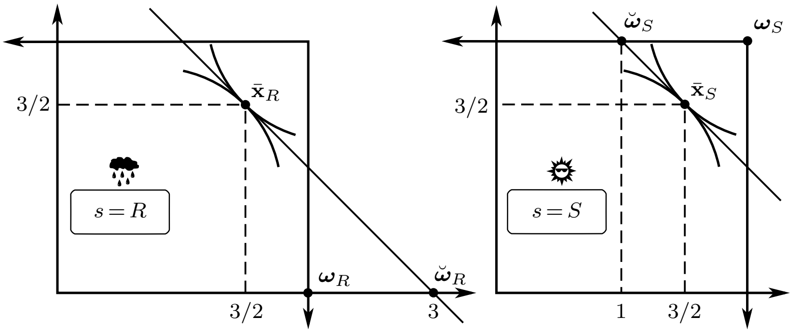


Рис. 7.5. *Иллюстрация к Примеру 7.4*

Отношение цен одного и того же блага в двух состояниях должно быть равно отношению вероятностей:

$$\frac{p_{AR}}{p_{AS}} = \frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 = \frac{p_{BR}}{p_{BS}}.$$

Можно проверить, что в равновесии Эрроу—Дебре

$$x_{1AR} = x_{1AS} = x_{1BR} = x_{1BS} = 3/2,$$
$$x_{2AR} = x_{2AS} = x_{2BR} = x_{2BS} = 1/2,$$
$$p_{AR} = p_{AS} = p_{BR} = p_{BS} \text{ (выберем } = 1).$$

Положим $q_R = p_{AR} = 1$, $q_S = p_{AS} = 1$. Чтобы получить равновесие Раднера, нужно еще вычислить z_{is}:

$$d_{1R} = \mathbf{p}_R(\mathbf{x}_{iR} - \omega_{iR}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1,$$
$$z_{1R} = \frac{d_{1R}}{p_{AR}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Аналогично $d_{1S} = -1$,

$$z_{1S} = \frac{d_{1S}}{p_{AS}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Для второго потребителя характеристика его портфеля активов определяется из баланса активов:

$$z_{2R} = -1, \quad z_{2S} = 1.$$

Найденное равновесие иллюстрируется на Рис. 7.5. Каждый из двух ящиков Эджворта соответствует спот-рынку одного из состояний мира. Торговля активами приводит к тому, что точка начальных запасов сдвигается. △

Рассмотрим теперь модель Раднера, в которой активы не обязательно являются активами Эрроу. Для упрощения анализа будем предполагать, что все активы выражены только в первом благе. Поскольку доходности по остальным благам при этом равны нулю, соответствующие коэффициенты можно не рассматривать. При этом будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{a}_s = (a_{sc})_c$ — вектор, составленный из доходностей всех активов в состоянии мира s, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_s)_s$ — матрица, составленная из доходностей всех активов во всех состояниях мира.

Хотя в такой экономике могут быть довольно сложные активы, но они фактически сводятся к набору элементарных активов (активов Эрроу). Соответственно цену любого (сколь угодно сложного) актива можно вычислить через цены активов Эрроу, даже если таких активов в экономике нет. Для доказательства этого факта мы опять воспользуемся тем, что в равновесии Раднера арбитраж невозможен.

Рассмотрим, что означает в такой экономике невозможность арбитража. Переформулируя определение, арбитраж невозможен, если не существует такого плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$, что $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$, и для любого состояния мира $s \in S$ выполнено $p_{1s}\mathbf{a}_s\Delta\mathbf{z} \geqslant 0$, причем хотя бы для одного состояния мира неравенство строгое. Если $p_{1s} > 0$ в любом состоянии мира, то последнее неравенство эквивалентно $\mathbf{a}_s\Delta\mathbf{z} \geqslant 0$. Такая переформулировка означает невозможность составить допустимый план арбитража (не требующий увеличения чистых расходов на покупку активов), такой что он приводит к приросту доступного потребителю количества первого блага по крайней мере в одном состоянии мира и не уменьшает эту величину в других состояниях мира. Формально *возможность арбитража* при ценах активов $\mathbf{q}$ записывается следующим образом:

$$\text{существует } \Delta\mathbf{z}, \text{ такой что } \mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0 \text{ и } \mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}.$$

Цены активов $\mathbf{q}$, при которых такого плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$ не существует, называют безарбитражными.

Для доказательства того факта, что цены активов можно разложить по ценам активов Эрроу, требуется также дополнительное предположение о том, что матрица доходностей активов обладает следующим свойством:

$$\text{существует } \Delta\mathbf{z}, \text{ такой что } \mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}. \qquad (\text{☼})$$

Это свойство означает, что арбитраж в принципе возможен, если не учитывать бюджетное ограничение первого периода, т. е. можно подобрать такой план арбитража, что в любом состоянии мира $\mathbf{a}_s \Delta \mathbf{z} \geqslant 0$ и хотя бы для одного состояния неравенство строгое. Из определения безарбитражности следует, что если цены активов безарбитражные (например, это равновесные цены активов), то подобный план арбитража должен потребовать увеличения чистых расходов на приобретение активов: $\mathbf{q}\Delta \mathbf{z} > 0$.

Предположение (☼) нужно для того, чтобы первый период можно было рассматривать по аналогии с состояниями мира s второго периода. Дело в том, что в рассматриваемой нами модели в первом периоде потребление отсутствует и излишек денег в этом периоде без предположения (☼) не означает, что потребитель выбрал неоптимальный портфель. Если цены активов безарбитражные и выполнено условие (☼), то потребитель может передать покупательную способность из первого периода во второй, поэтому излишек денег в первом периоде несовместим с безарбитражностью.

Условие (☼) верно при многих достаточно естественных предположениях о матрице $\mathbf{A}$. В частности, достаточно, чтобы матрица $\mathbf{A}$ имела ранг, равный количеству состояний мира, другими словами, чтобы векторы $\mathbf{a}_s$ были линейно независимы. Другой случай, когда можно передать покупательную способность из первого периода во второй, — когда хотя бы один из активов не приносит отрицательного дохода ни в одном состоянии мира, а по крайней мере в одном приносит положительный доход (например, актив Эрроу). Тогда передача покупательной способности может заключаться в том, чтобы приобрести единицу такого актива.

Приняв предположение (☼), мы можем расширить множество состояний, включив в него первый период с индексом 0, т. е. рассматривать $S^* = \{0, 1, \ldots, \hat{s}\}$, и модифицировать соответствующим образом определение безарбитражности цен активов. Введем обозначение

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\mathbf{q} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

В столбцах матрицы $\mathbf{A}^*$ содержится информация о том, что приносит актив в каждом из состояний: единица актива c дает $-q_c$ в состоянии 0 и a_{sc} в остальных состояниях.

В этих обозначениях цены активов $\mathbf{q}$ являются безарбитражными, если не существует плана арбитража $\Delta \mathbf{z}$, такого что $\mathbf{A}^* \Delta \mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$, т. е. такого что он дает дополнительный доход в одном из состояний $0, 1, \ldots, \hat{s}$, не уменьшая доход в других состояниях.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, связывающей цены активов $\mathbf{q}$ и соответствующие им «цены активов Эрроу», которые мы обозначим через $\boldsymbol{\pi}$.

Теорема 7.10:

{i} Пусть $\mathbf{A}$ — матрица доходностей активов, удовлетворяющая предположению (☼), а $\mathbf{q}$ — безарбитражные цены активов. Тогда существует вектор $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$, такой что $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

{ii} Пусть цены активов можно представить в виде $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$, где $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$. Тогда цены активов $\mathbf{q}$ являются безарбитражными. ┘

Доказательство: {i} Как было показано выше, при выполнении (☼) безарбитражность $\mathbf{q}$ эквивалентна отсутствию плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$, такого что $\mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Рассмотрим следующее множество:

$$W = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\hat{s}+1} \mid \mathbf{w} = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z}, \Delta\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\hat{c}} \right\}.$$

Элемент $\mathbf{w} = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z}$ этого множества интерпретируется как вектор, составленный из чистых приростов дохода w_s, полученных в каждом из состояний $0, 1, \ldots, \hat{s}$ за счет использования плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$. Безарбитражность $\mathbf{q}$ означает отсутствие в W векторов $\mathbf{w}$, таких что $\mathbf{w} \geqslant\neq \mathbf{0}$, поэтому предположение о безарбитражности можно записать в виде

$$W \cup (\mathbb{R}_+^{\hat{s}+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) = \varnothing.$$

Вместо $\mathbb{R}_+^{\hat{s}+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (положительного ортанта с «выколотым» нулем) достаточно рассмотреть симплекс

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^{\hat{s}+1} \;\middle|\; \sum_{s \in S^*} w_s = 1 \right\}.$$

Предположение о безарбитражности принимает вид

$$W \cup \Sigma = \varnothing.$$

Множества W и Σ выпуклы, непусты, Σ компактно, а W замкнуто. По теореме отделимости для замкнутых множеств[14] существуют вектор коэффициентов $\tilde{\boldsymbol{\pi}} \in \mathbb{R}^{\hat{s}+1}$ и число b, такие что $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w} < b$ при $\mathbf{w} \in W$ и $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w} \geqslant b$ при $\mathbf{w} \in \Sigma$.

Покажем, что $\tilde{\boldsymbol{\pi}} > \mathbf{0}$. Пусть это не так и $\tilde{\pi}_s \leqslant 0$ для некоторого состояния $s \in S^*$. Пусть $\mathbf{e}^s$ — орт, соответствующий состоянию s. Так

[14] См. Теорему B.42 на с. 1125 в Приложении B.

как $\mathbf{e}^s \in \Sigma$, то $\tilde{\pi}_s = \tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{e}^s \geqslant b$, откуда $b \leqslant 0$. Следовательно, для всех $\mathbf{w} \in W$ должно выполняться $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w} < 0$. Но для вектора $\mathbf{0} \in W$ это неравенство не выполнено. Пришли к противоречию.

Покажем теперь, что $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$. Если бы это было не так, то мы могли для любого наперед заданного числа подобрать $\mathbf{w} \in W$ (поскольку все $\mathbf{w} \in W$ имеют вид $\mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z}$, то это делается за счет подбора $\Delta\mathbf{z}$) так, чтобы $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w}$ было больше этого числа. Но тогда мы бы могли превысить b, что невозможно.

На основе вектора $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ построим искомый вектор $\boldsymbol{\pi}$: $\pi_s = \tilde{\pi}_s/\tilde{\pi}_0$, $s \in S$. Очевидно, что $\boldsymbol{\pi}$ обладает требуемыми свойствами: $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$ и $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

{ii} Пусть $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$, где $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$, и пусть $\Delta\mathbf{z}$ — план арбитража, такой что $\mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}\Delta\mathbf{z} > 0$. Таким образом, одновременное выполнение условий $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$ и $\mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$ невозможно.■

Так как при равновесных ценах $\mathbf{q}$ арбитраж невозможен, то из доказанной теоремы следует, что можно представить цены активов в равновесии Раднера в виде $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$. Отдельный элемент вектора $\boldsymbol{\pi}$, π_s, можно интерпретировать как цену актива Эрроу $(1, s)$.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира $\hat{s}$, то такой вектор $\boldsymbol{\pi}$ определяется однозначно. Можно выбрать $\hat{s}$ активов с линейно независимыми векторами доходностей и сформировать из них матрицу $\hat{\mathbf{A}}$, при этом $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{q}\hat{\mathbf{A}}^{-1}$. В противном случае удовлетворяющих этому соотношению векторов $\boldsymbol{\pi}$ может быть бесконечно много. Например, если в экономике имеются только активы Эрроу, выраженные в первом благе, но не для всех состояний мира, то цены активов Эрроу для отсутствующих активов $(1, s)$ можно выбрать произвольно.

Для каждой матрицы доходностей активов $\mathbf{A}$ можно задать подпространство активов как подпространство, натянутое на векторы, соответствующие доходностям активов в разных состояниях мира:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \{\, \mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\hat{c}} \,\}.$$

Вектор $\mathbf{z}$ здесь можно интерпретировать как портфель активов (так как речь идет об объективной характеристике системы активов, то индекс потребителя не пишется), а отдельный элемент вектора $\mathbf{w}$, w_s, — как доход от этого портфеля в состоянии мира s (выраженный в количестве первого блага). Таким образом, $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ — это множество тех доходов, которые можно получить при некотором выборе портфеля $\mathbf{z}$.

Для равновесий Раднера существенным является именно это подпространство активов, а не матрица $\mathbf{A}$, по которой оно строится. Покажем это, доказав, что если $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}')$, то из равновесия Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}$ можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}'$. В доказательстве мы воспользуемся полученным выше представлением вектора цен активов в виде $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

Теорема 7.11:

Пусть в экономике Эрроу функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира и пусть $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ — равновесие Раднера в этой экономике, где все активы выражены в первом благе и $\mathbf{A}$ — матрица их доходностей, удовлетворяющая предположению (☼). Тогда если $\mathbf{A}'$ — другая матрица доходностей, такая что $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}')$, то существуют портфель активов $\mathbf{z}'$ и цены активов $\mathbf{q}'$ такие, что $(\mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{x}, \mathbf{z}')$ — равновесие Раднера с матрицей доходностей $\mathbf{A}'$. ┘

Доказательство: Поскольку цены $\mathbf{q}$ соответствуют равновесию Раднера и предпочтения локально ненасыщаемы, то при этих ценах арбитраж невозможен. Предположение (☼) гарантирует при этом, что существует вектор $\boldsymbol{\pi} = (\pi_s)_s$, такой что $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

В качестве цен активов $\mathbf{q}'$ в конструируемом равновесии возьмем $\boldsymbol{\pi}\mathbf{A}'$.

Построим теперь $\mathbf{z}'$. Так как $\mathbf{A}\mathbf{z}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{A})$ и $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}')$, то $\mathbf{A}\mathbf{z}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{A}')$. Другими словами, для любого $\mathbf{z}_i$ существует вектор $\mathbf{z}'_i$, такой что $\mathbf{A}'\mathbf{z}'_i = \mathbf{A}\mathbf{z}_i$. Для каждого набора $\mathbf{z}_i$, $i = 1, \ldots, m-1$ возьмем такой $\mathbf{z}'_i$. Кроме того, выберем $\mathbf{z}'_m$ так, чтобы выполнялся баланс активов:

$$\mathbf{z}'_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{z}'_i.$$

Так как $\sum_{i\in I} \mathbf{z}_i = 0$, то $\mathbf{A}'\mathbf{z}'_m = \mathbf{A}\mathbf{z}_m$.

Покажем теперь, что $(\mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{x}, \mathbf{z}')$ — равновесие Раднера с матрицей доходностей $\mathbf{A}'$. Набор $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}'_i)$ допусти́м в задаче i-го потребителя при ценах $\mathbf{p}, \mathbf{q}'$ и матрице доходностей $\mathbf{A}'$, поскольку

$$\mathbf{q}'\mathbf{z}'_i = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}'\mathbf{z}'_i = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}\mathbf{z}_i = \mathbf{q}\mathbf{z}_i \leqslant 0$$

и

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i \leqslant \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i - p_{1s}\mathbf{a}_s\mathbf{z}_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i - p_{1s}\mathbf{a}'_s\mathbf{z}'_i.$$

Покажем, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}'_i)$ является оптимальным решением. Пусть это не так и $(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{z}}'_i)$ — другое допустимое решение задачи i-го потребителя при ценах $\mathbf{p}, \mathbf{q}'$ и матрице доходностей $\mathbf{A}'$, с более высоким значением полезности. Тогда, следуя рассмотренной выше схеме, можно подобрать портфель активов $\check{\mathbf{z}}_i$, такой что $(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{z}}_i)$ — допустимое решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и матрице доходностей $\mathbf{A}$. Поскольку $\check{\mathbf{x}}_i$ дает потребителю более высокую полезность, чем $\mathbf{x}_i$, то это противоречит оптимальности $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ при ценах $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и матрице доходностей $\mathbf{A}$. ■

Замечание: Таким образом, каждому равновесию Раднера в экономике с множеством активов с матрицей доходностей $\mathbf{A}$ соответствует равновесие Раднера в экономике с множеством активов с матрицей доходностей $\mathbf{A}'$ с теми же планами потребления и ценами благ. Верно и обратное, если матрица $\mathbf{A}'$ удовлетворяет предположению (☼).

Если матрица доходностей $\mathbf{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира $\hat{s}$ (т. е. если структура доступных активов является достаточно «богатой»), то

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{I}),$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $\hat{s} \times \hat{s}$. Матрица доходностей $\mathbf{I}$ соответствует случаю, когда $C = \left\{ (1, s) \;\middle|\; s \in S \right\}$, т. е. когда все активы в экономике являются активами Эрроу, выраженными в первом благе. Поэтому при выполнении этого условия — полного ранга матрицы $\mathbf{A}$ — верны аналоги доказанных ранее для случая $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ теорем об эквивалентности равновесий Эрроу—Дебре и Раднера.

Теорема 7.12:

Предположим, что в экономике с риском функции полезности строго возрастают по потреблению блага 1 в каждом состоянии мира. Кроме того, пусть все доступные потребителям в равновесиях Раднера активы выражены в благе 1 и матрица их доходностей $\mathbf{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира.

{i} Если $(\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре в этой экономике, то существует портфель активов $\bar{\mathbf{z}}$ и цены активов $\bar{\mathbf{q}}$ такие, что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \check{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера.

{ii} Наоборот, если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике, то существует вектор цен $\check{\mathbf{p}}$, такой что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре. ┘

Доказательство: Данное утверждение является следствием Теорем 7.8, 7.9 и 7.11.

На основе равновесия Эрроу—Дебре можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{I}$, а на основе последнего — равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}$. Наоборот, на основе равновесия Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}$ можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{I}$, а на основе последнего — равновесие Эрроу—Дебре. ■

Пользуясь свойствами равновесия Эрроу—Дебре, получим важное следствие из данной теоремы: если матрица активов в модели Раднера имеет полный ранг, то каждое равновесие в такой модели Парето-оптимально.

Теорема 7.13:

Пусть выполнены условия Теоремы 7.12. Тогда если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера, то $\bar{\mathbf{x}}$ — Парето-оптимальное состояние. ┘

С другой стороны, если матрица активов неполного ранга, то возникает проблема неполноты рынков и в общем случае равновесие Раднера не оптимально. Приведем пример такой экономики.

Пример 7.5

Пусть существуют два физических блага (A и B), два состояния мира (R и S) и два потребителя-рискофоба (1 и 2). Начальные запасы в состоянии мира R целиком принадлежат потребителю 1, а начальные запасы в состоянии мира S целиком принадлежат потребителю 2, причем системный риск отсутствует ($\boldsymbol{\omega}_{1R} = \boldsymbol{\omega}_{2S} > \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\omega}_{1S} = \boldsymbol{\omega}_{2R} = \mathbf{0}$). Предположим, что в экономике активы отсутствуют (частный случай неполноты ранга матрицы активов).

Потребление в равновесии Раднера в каждом состоянии мира будет совпадать с начальными запасами, поскольку потребителям нечем обмениваться. В то же время, как мы знаем, в Парето-оптимуме (и в равновесии Эрроу—Дебре) у каждого потребителя потребление во всех состояниях мира должно быть одинаковым (не должно быть индивидуального риска). Таким образом, равновесие Раднера не будет в этой экономике оптимальным.

Если в данной экономике есть только один актив Эрроу, то выводы не изменятся, поскольку с его помощью нельзя обменивать риски. △

Равновесие Раднера может оказаться не оптимальным, даже когда отсутствует индивидуальный риск в исходном состоянии (у каждого потребителя начальные запасы не зависят от состояния мира).

Такой случай может иметь место, если в (одинаковых) элементарных экономиках, соответствующих разным состояниям мира, существует более, чем одно равновесие Вальраса. Тогда будут существовать равновесия Раднера[15], такие что в одних состояниях мира потребление соответствует одному из равновесий Вальраса элементарной экономики, а в других — другому равновесию Вальраса. Но такие равновесия не будут Парето-оптимальными по указанной выше причине.

Задачи

7.8 В экономике обмена с единственным физическим благом и двумя состояниями мира Q и R, имеющими вероятности $3/4$ и $1/4$, есть два потребителя с элементарными функциями полезности $u_1(x_1) = -1/x_1$ и $u_2(x_2) = \ln(x_2 + 1)$ и начальными запасами $(6, 2)$ и $(3, 7)$ соответственно.

(A) Найдите равновесие Эрроу—Дебре.

(B) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется только два актива Эрроу.

(C) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется два актива: один имеет доходность 1 в состоянии мира Q и 2 в состоянии мира R, а другой — доходность 1 в состоянии мира Q и 3 в состоянии мира R.

7.9 В экономике обмена с единственным физическим благом и двумя состояниями мира M и N, имеющими равные вероятности, есть два потребителя с элементарными функциями полезности $u_1(x_1) = x_1$ и $u_2(x_2) = \sqrt[3]{x_2}$ и начальными запасами $(4, 1)$ и $(1, 3)$ соответственно.

(A) Найдите равновесие Эрроу—Дебре.

(B) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется только два актива Эрроу.

(C) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется два актива: один имеет доходность 2 в состоянии мира M и 3 в состоянии мира N, а другой — (-1) в состоянии мира M и 3 в состоянии мира N.

7.10 Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i = 1, 2$), двумя состояниями мира (Rain, Sun) и двумя физическими благами (apples, bananas) запасы которых в состоянии мира R у первого потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{1R} = (0, 0)$, у второго потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{2R} = (3, 6)$, а в состоя-

[15] Такие равновесия получили название равновесий солнечных пятен (англ. *sunspot equilibrium*). См. D. Cass and K. Shell. Do Sunspots Matter?, *Journal of Political Economy* **91** (1983): 193–227.

нии мира S у первого потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{1S} = (5, 1)$, у второго потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{2S} = (1, 2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_1 = -1/x_{1a} - 1/x_{1b}, \quad u_2 = x_{2a} + 4x_{2b}.$$

Предположим, что вероятность состояния мира R равна 1/3, а вероятность состояния мира S — 2/3.

(A) Покажите формально, что состояние $\mathbf{x}_{1R} = (2, 1)$, $\mathbf{x}_{1S} = (2, 1)$, $\mathbf{x}_{2R} = (1, 5)$, $\mathbf{x}_{2S} = (4, 2)$, $\mathbf{p}_a = (1, 2)$, $\mathbf{p}_b = (4, 8)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(B) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера, для случая, когда в экономике имеется два актива Эрроу, выраженных в первом благе?

7.11 Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i = 1, 2$), двумя состояниями мира (Good, Bad) и двумя физическими благами (apples, cucumbers), запасы которых в состоянии мира G у первого потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{1G} = (4, 4)$, у второго потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{2G} = (2, 2)$, а в состоянии мира B — $\boldsymbol{\omega}_{1B} = (1, 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_{2B} = (5, 5)$ соответственно. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности вида

$$u_i = \ln x_{ia} + \ln x_{ic}.$$

Предположим, что вероятность состояния мира G равна 2/3, а вероятность состояния B — 1/3.

(A) Покажите формально, что состояние $\mathbf{x}_1 = (3, 3, 3, 3)$, $\mathbf{x}_2 = (3, 3, 3, 3)$, $\mathbf{p}_G = (2, 2)$, $\mathbf{p}_B = (1, 1)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(B) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера, для случая, когда в экономике имеется два актива, выраженных в первом благе, один имеет доходности 1 и 2, а другой — −2 и 1?

7.12 Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i = 1, 2$), двумя состояниями мира (Rain, Sun) и двумя физическими благами (apples, bananas) запасы которых у каждого из потребителей в каждом из состояний мира $s = R, S$ равны $\boldsymbol{\omega}_{is} = (3, 3/2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_i = \ln x_{ia} + \ln x_{ib}.$$

Предположим, что субъективная вероятность состояния мира R для первого потребителя равна $1/3$, а вероятность состояния мира S — $2/3$. Субъективная вероятность состояния мира R для второго потребителя равна $2/3$, а вероятность состояния мира S — $1/3$.

(А) Покажите формально, что состояние $\mathbf{x}_{1R} = (2, 1)$, $\mathbf{x}_{1S} = (4, 2)$, $\mathbf{x}_{2R} = (4, 2)$, $\mathbf{x}_{2S} = (2, 1)$, $\mathbf{p}_a = (1, 1)$, $\mathbf{p}_b = (2, 2)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(В) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера, для случая, когда в экономике имеется два актива, выраженных в первом благе, один имеет доходности 3 и -2, а другой — 1 и 2?

7.13 Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), двумя благами (a и b) и системой активов, состоящей из всех возможных активов Эрроу. Пусть цены активов равны $(q_{aR}, q_{aS}, q_{bR}, q_{bS}) = (1, 2, 3, 4)$, а цены благ равны $(2, 6)$ в состоянии R и $(1, 3)$ в состоянии S. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

7.14 Рассмотрите модель Раднера двумя состояниями мира (R и S), с двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов Эрроу, выраженных в благе A. Пусть цены активов равны $(q_{aR}, q_{aS}) = (1, 4)$. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

7.15 Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе A. Один актив дает 1 в состоянии R и 1 в состоянии S, а другой — 0 в состоянии R и 1 в состоянии S. Выгоден ли план арбитража $\Delta z = (1, -1)$? Предложите цены активов, при которых этот план арбитража не приводит к увеличению чистых расходов на покупку активов.

7.16 Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе A. Один актив дает 1 в состоянии R и 1 в состоянии S, а другой — 0 в состоянии R и 1 в состоянии S. Пусть цены этих активов равны 4 и 1 соответственно. Найдите соответствующие «цены активов Эрроу» π_R и π_S. Что можно сказать по этим ценам о возможности арбитража?

7.17 Покажите, что равновесию Раднера могут соответствовать планы потребления, которые являются недопустимыми в задачах потребителя в модели Эрроу—Дебре при любых равновесных ценах.

Задачи к главе

7.18 Известно, что потребитель в экономике с риском с полной системой рынков имеет строго вогнутую элементарную функцию полезности, зависящую от одного (физического) блага и заданную на неотрицательных количествах потребления. Что можно сказать об объемах потребления в разных состояниях мира, если цены блага в разных состояниях мира пропорциональны вероятностям? Рассмотрите либо общий случай, либо (для упрощения) дифференцируемую функцию полезности и два состояния мира.

7.19 Рассмотрите модель Эрроу—Дебре (с условно-случайными благами) в которой есть единственное физическое благо. Пусть количество состояний природы равно количеству потребителей, причем каждому потребителю соответствует одно состояние природы, в котором он владеет всем начальным запасом. Пусть, кроме того, совокупные начальные запасы не зависят от состояний природы и оценки вероятностей состояний природы у потребителей совпадают. Предположите, что элементарные функции полезности потребителей $u_i(\cdot)$ строго вогнутые и возрастающие.

(A) Покажите, что в Парето-оптимальных состояниях потребление не зависит от состояния природы.

(B) Покажите, что равновесия Эрроу—Дебре и Раднера единственны. Охарактеризуйте эти равновесия.

7.20 Рассмотрите следующую ситуацию (близкую по духу концепции справедливости Джона Роулза). Два индивидуума в первом периоде должны выбрать, как они будут жить во втором периоде. Во втором периоде каждый из них может быть либо бедным, либо богатым в зависимости от состояния мира. В состоянии мира 1 богатым будет первый индивидуум, а в состоянии мира 2 — второй. В первом периоде они не знают, кто кем будет («покров неведения»), и могут заключать между собой соглашения относительно перераспределения богатства во втором периоде. Дайте интерпретацию этой ситуации с точки зрения модели Эрроу—Дебре (или Раднера). При каких предположениях можно ожидать исхода, характеризующегося социальным равенством?

7.21 Вчера Анатолий вложил в банк «Чара» \$100 из своих сбережений в \$1000, ожидая получить через день +30% с вероятностью 0,8 или потерять вложение с вероятностью 0,2. Аналогично Борис вложил в компанию МММ \$100 из своих сбережений в \$1000, ожидая получить через день +30% с вероятностью 0,8 или потерять вложение с вероятностью 0,2. Предпочтения обоих представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна.

(A) Сделайте, если можно (или укажите, что нельзя), по этим данным выводы

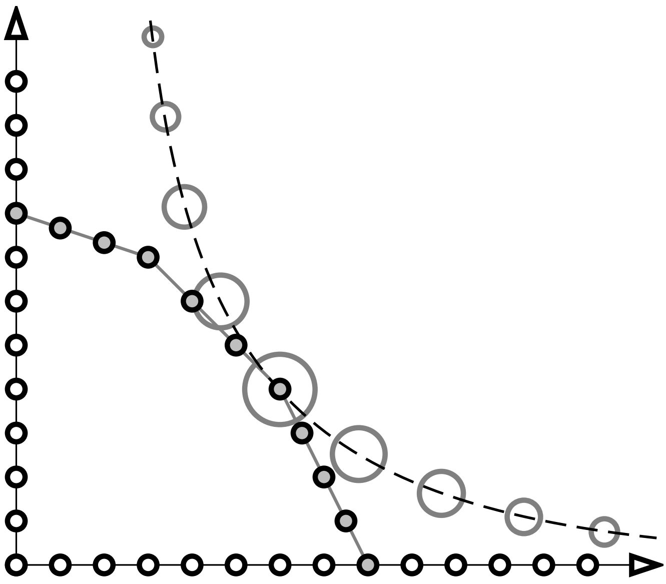
- о склонности Анатолия и Бориса к риску;
- о совпадении их субъективных оценок вероятностей (оба актива доступны обоим);
- о статистической зависимости (независимости) выигрыша банка «Чара» и МММ.

(B) Предположим, что на следующий день А и Б обменялись информацией и имеют уже одинаковые субъективные вероятности выигрыша банка «Чара» = 0,5 и МММ = 0,5, считая их жестко отрицательно коррелированными, и могут заключать друг с другом любые условные контракты. Можно ли утверждать, что ненулевой обмен акций банка «Чара» на акции МММ произойдет, или нужны дополнительные предположения относительно функций $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать, что 50 акций банка «Чара» обменяют на 50 акций МММ, или для этого нужны дополнительные условия на функции $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать Парето-эффективность результата обмена?

(C) Как изменятся ответы на указанные вопросы, если считать акции жестко положительно коррелированными?

(D) Та же ситуация, что в пункте (B), но возможные контракты ограничены двумя типами: или за \$1 сегодня и одну акцию МММ две акции банка «Чара», или за \$1 сегодня и m акций Чары две акции МММ. Записать задачу Анатолия в форме модели Раднера. Гарантирован ли Парето-эффективный результат обмена?

Часть II



Глава 8
Налоги

Как будет показано далее в главе об экстерналиях, один из возможных способов коррекции работы рыночного механизма в ситуации с экстерналиями — различного рода налоги. Налоги используются также для финансирования общественных благ в том случае, когда такие блага предоставляются государством. Однако за исключением довольно редких ситуаций различные способы налогообложения сами приводят к неэффективному распределению ресурсов.

В этой главе мы проиллюстрируем тот факт, что практически при любой системе налогов, зависящих от величин, поддающихся наблюдению, рыночное равновесие не является Парето-эффективным, так как ведет к искажению структуры рыночных цен. Одна из целей этой главы (помимо того, что здесь вводятся понятия, используемые в последующих главах) — выявить характер подобных неэффективностей для различных типов налогов. Кроме того, в этой главе вводится понятие оптимальных налогов в смысле оптимума второго ранга.

В гл. 4 мы фактически уже рассмотрели равновесие с паушальными налогами[1], которые называли *трансфертами* (точнее, паушальные трансферты — это паушальные налоги со знаком минус). Поскольку в нашем случае это налог на потребителя, его можно назвать подушным налогом[2]. Используя термин «паушальный» мы хотим подчеркнуть, что экономический субъект не может повлиять на величину налога (трансферта), считает ее фиксированной. Анализ равновесия с паушальными трансфертами позволил сделать вывод о его эффективности: при локальной ненасыщаемости *равновесие с паушальными налогами является Парето-оптимальным.*

Таким образом, паушальные налоги являются в некотором смысле идеальными. Почему же они не используются? Одна из причин состоит в том, что характеристики экономических субъектов, значе-

[1] От нем. *pauschal* — целый. Соответствующий английский термин — *lump-sum tax.*

[2] Англ. *poll tax.*

ния которых обуславливают размер налоговых платежей, являются ненаблюдаемыми величинами, приватной информацией самих субъектов, не заинтересованных, вообще говоря, в выявлении этой информации. Еще одна причина — существующие представления экономических субъектов о свойствах «хорошей», «справедливой» налоговой системы — считается, что богатые и платежеспособные должны платить больше. Но величина платежеспособности (в дополнение к тому, что она ненаблюдаема) зависит от усилий экономических субъектов, и поэтому требование *социальной справедливости* и *равенства* несовместимо со свойством паушальных налогов — отсутствием влияния на усилия экономических субъектов.

Например, паушальными в модели обмена являются налоги на начальные запасы, которые можно интерпретировать как налоги на ресурсы, выплачиваемые из ренты, порождаемой этими ресурсами. Однако не все виды начальных запасов достаточно хорошо измеримы с точки зрения их возможности приносить доход[3], что ограничивает реализацию данной идеи. Кроме того, некоторые начальные запасы, скажем, капитала или земли, являются запасами только в краткосрочном периоде (в статике), в долгосрочном же периоде нужно рассматривать влияние налогов на мотивацию их приобретения. Таким образом, обычно мы оказываемся в ситуациях, когда размер налога зависит от некоторой наблюдаемой деятельности экономических субъектов.

8.1 Общее равновесие с налогами на потребление

Пусть t_{ik} — ставка налога на потребление блага k потребителем i. Мы рассмотрим здесь общий случай, когда ставки налога могут быть различными для разных потребителей. При этом, вообще говоря, не исключается, что t_{ik} могут быть отрицательными (случай дотации).

Задача i-го потребителя с учетом налогов на потребление модифицируется следующим образом:

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i} \\ \sum_{k \in K} (p_k + t_{ik}) x_{ik} \leqslant \beta_i. \end{gathered} \tag{†}$$

[3]Это относится, в частности, к способности человека осуществлять ту или иною деятельность.

Поскольку в этой главе нас прежде всего интересует влияние налогов на экономическую деятельность, а не то, каким образом налоги используются, будем предполагать, что собранная сумма налогов перераспределяется между потребителями посредством трансфертов[4].

Таким образом, мы будем предполагать следующую структуру дохода потребителя:

$$\beta_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \mathbf{p} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i,$$

а для экономики в целом будем требовать сбалансированности соответствующих платежей (налогов и трансфертов):

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} t_{ik} x_{ik} = \sum_{i \in I} S_i.$$

Заметим, что мы ввели в задачу потребителя налоги с единицы товара[5], ставка которых назначается в денежных единицах. Можно рассматривать и налог со стоимости товара (адвалорный)[6], ставка которого устанавливается в процентах от цены. В случае, когда все налоги на потребление адвалорные, задача потребителя имеет вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i}$$
$$\sum_{k \in K} p_k (1 + \tau_{ik}) x_{ik} \leqslant \beta_i.$$

Очевидно, что эти два вида налогов, если их ставки связаны соотношением $t_{ik} = p_k \tau_{ik}$, фактически эквивалентны в том смысле, что для любой системы адвалорных налогов можно подобрать налоги с единицы товара, приводящие к тем же результатам, и наоборот. Далее речь будет идти о налоге с единицы товара, но все сказанное с соответствующими оговорками относится и к налогам со стоимости (адвалорным)[7].

Обозначим всю систему ставок налогов на потребление, существующих в экономике, через $\mathbf{t} = \{t_{ik}\}$ и рассмотрим общее равновесие с этими налогами.

[4]Классические модели общего равновесия не включают государство, но мы могли бы остаться в рамках этих моделей, представив государственный орган, выражающий общественную потребность в общественном благе и отвечающий за его приобретение, как одного из потребителей.

[5]Англ. *unit tax.*

[6]Лат. *ad valorem.*

[7]Ясно, что указанное соотношение не может выполняться при $t_{ik} \neq 0$ и $p_k = 0$, поэтому эквивалентность здесь неполная.

Определение 8.1:

Назовем $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ равновесием с налогами на потребление $\mathbf{t}$ и трансфертами $\mathbf{S}$, если

* $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя (†) при ценах $\mathbf{p}$, доходах

$$\beta_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \mathbf{p} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i$$

и налогах на потребление, соответствующих системе налогов $\mathbf{t}$;
* $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя при ценах $\mathbf{p}$;
* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики, т. е. для всех $k \in K$

$$\sum_{i \in I} (\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j \in J} \bar{y}_{jk};$$

* сумма налогов равняется сумме трансфертов

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} t_{ik} \bar{x}_{ik} = \sum_{i \in I} S_i.$$

◀

Рассмотрим, как влияют налоги на равновесное состояние экономики. Следующий пример показывает, что равновесие с налогами может быть неоптимальным.

Пример 8.1

Рассмотрим экономику обмена, в которой два потребителя и два блага. Функции полезности потребителей имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \ln(x_{i1}) + \ln(x_{i2}), \ i = 1, 2.$$

Пусть потребление облагается адвалорными налогами по ставкам τ_{ik}. Равновесие с такими налогами характеризуется следующими условиями:

$$\frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{11}} = \frac{p_1(1+\tau_{11})}{p_2(1+\tau_{12})}, \quad \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} = \frac{p_1(1+\tau_{21})}{p_2(1+\tau_{22})}.$$

С другой стороны, Парето-оптимальные состояния в рассматриваемой экономике характеризуются уравнениями

$$\frac{\hat{x}_{12}}{\hat{x}_{11}} = \frac{\hat{x}_{22}}{\hat{x}_{21}} = \frac{\omega_{12}+\omega_{22}}{\omega_{11}+\omega_{21}}.$$

Из сравнения этих двух соотношений видно, что для Парето-оптимальности равновесия необходимо, чтобы ставки налогов удовлетворяли условию

$$\frac{1+\tau_{11}}{1+\tau_{12}} = \frac{1+\tau_{21}}{1+\tau_{22}}.$$

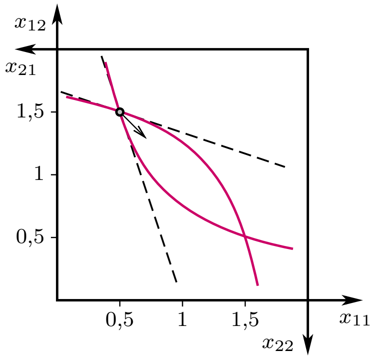


Рис. 8.1. *Неоптимальность неуниформных налогов на потребление*

Поскольку функции полезности вогнуты, эти условия будут также и достаточными для оптимальности.

Пусть приведенное условие не выполнено, и пусть, например, потребление первым потребителем первого товара облагается по ставке 800%[8], а остальные налоги равны нулю, т. е. $\tau_{11} = 8$, $\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{22} = 0$. При этом возможно следующее равновесие:

$$p_1 = 1/3, \quad p_2 = 1, \quad \bar{x}_{11} = 0{,}5, \quad \bar{x}_{12} = 1{,}5, \quad \bar{x}_{21} = 1{,}5, \quad \bar{x}_{22} = 0{,}5$$

(читатель может самостоятельно подобрать начальные запасы и трансферты, которые согласуются с этим равновесием). Очевидно, что такое равновесие не Парето-оптимально.

На Рис. 8.1 стрелкой показано направление возможного Парето-улучшения из точки равновесия. Из рисунка видно, что бюджетные линии двух потребителей не совпадают, в отличие от экономики без налогов (показаны штриховыми линиями). Наклоны бюджетных линий определяются отношением цен с учетом налогов, а эти отношения у потребителей разные. Поскольку различаются отношения цен с учетом налогов, то различаются и предельные нормы замещения. В Парето-оптимуме же предельные нормы замещения должны совпадать. △

Найдем условия, при которых равновесие оказывается оптимальным.

[8]Такая абсурдно большая ставка взята, чтобы сделать более наглядной графическую иллюстрацию.

Условия первого порядка для внутреннего решения $\bar{\mathbf{x}}_i$ задачи (†) имеют вид

$$\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i(p_k + t_{ik}) \; \forall k,$$

где ν_i — множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению. Получаем следующую дифференциальную характеристику (внутреннего) равновесия с налогами (для любых благ k и k_0, $p_{k_0} + t_{ik_0} \neq 0$):

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{p_k + t_{ik}}{p_{k_0} + t_{ik_0}}.$$

Она означает, что отношение предельных полезностей равно отношению цен с учетом налогов.

Как показывает сравнение дифференциальных характеристик равновесия и Парето-оптимума, равновесие с налогами на потребление обладает следующим свойством: оно Парето-оптимально тогда и только тогда, когда для всех экономических субъектов отношения цен с учетом налогов, т. е. индивидуальных цен $p_{ik}^t = p_k + t_{ik}$, одинаковы. Назовем такие налоги неискажающими. Другими словами, налоги будут неискажающими, когда все векторы индивидуальных цен $\mathbf{p}_i^t$ пропорциональны, т. е. для любой пары потребителей i_1 и i_2 существует положительный множитель α, такой что

$$\mathbf{p}_{i_1}^t = \alpha \mathbf{p}_{i_2}^t.$$

В частности, неискажающую систему налогов можно получить, взяв ставки t_{ik} для всех благ k пропорциональными ценам p_k (для каждого потребителя i). В терминах адвалорных налогов это условие означает, что ставки τ_{ik} для всех благ k одинаковы, т. е. $\tau_{ik} = \tau_{is} \; \forall k, s \in K$. Будем называть такую систему налогов на потребление униформной.

Так, если рассмотреть экономику с производством, где предприятия не облагаются налогами, то для предприятий дифференциальная характеристика остается такой же, как в классической модели:

$$\frac{\partial g_j / \partial y_{jk}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}}.$$

Поэтому неискажающая система налогов должна быть такой, чтобы индивидуальные цены потребителей $\mathbf{p}_i^t$ были пропорциональны рыночным ценам $\mathbf{p}$. Очевидно, что такая система налогов окажется униформной[9].

[9]Если предприятия также облагаются налогами, то униформное налогообложение фактически эквивалентно налогу на прибыль. Неуниформное налогооб-

Сформулируем теперь указанное условие оптимальности в виде теоремы. Подобную теорему несложно сформулировать и для случая экономики с производством и налогами на производителей, но мы ограничимся рассмотрением экономики обмена.

Теорема 8.1:

Пусть $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ — Парето-оптимальное равновесие с налогами на потребление $\mathbf{t}$ и трансфертами $\mathbf{S}$ и пусть

* функции полезности $u_i(\cdot)$ дифференцируемы;
* равновесие внутреннее в том смысле, что для каждого потребителя $\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$;
* в равновесии градиенты функций полезности всех потребителей $i \in I$ не равны нулю:

$$\nabla u_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0}.$$

Тогда налоги $\mathbf{t}$ являются неискажающими. ┘

Доказательство: Как и в случае классической модели, в задаче потребителя во внутреннем равновесии градиент его функции полезности пропорционален вектору его индивидуальных цен $\mathbf{p}_i^t$. С другой стороны, в Парето-оптимуме все градиенты функций полезности пропорциональны. Тем самым все $\mathbf{p}_i^t$ пропорциональны, т. е. система налогов неискажающая. ■

В экономике, рассмотренной в Примере 8.1 налоги не обязательно должны быть униформными по товарам, чтобы равновесие было оптимальным. Это связано с тем, что в такой экономике, в сущности, ни один из потребителей не сталкивается с рыночными ценами $\mathbf{p}$. Поэтому неправильно было бы выражать требование неискажающих налогов через рыночные цены товаров.

Чтобы избежать этой неоднозначности, можно, например, нормировать ставки налогов таким образом, чтобы налоги на второго потребителя были равны нулю. Тогда условие оптимальности запишется в виде

$$\frac{1+\tau_{11}}{1+\tau_{12}} = \frac{1}{1}$$

или $\tau_{11} = \tau_{12}$ (униформность налогов на первого потребителя).

Заметим, что дифференцируемость функций полезности — существенное условие теоремы, так же как и условие внутренности равновесия. В иных случаях совпадение норм предельной замены любой

ложение тоже может быть неискажающим, но его пришлось бы реализовывать с помощью не только налогов, но и дотаций к ценам.

пары благ в Парето-оптимуме не гарантировано, а оно лежит в основе этой теоремы.

Докажем теперь, что для Парето-оптимальности равновесия достаточно, чтобы ставки налогов на потребление были неискажающими. Идея доказательства состоит в том, что при униформных ставках налогов на потребление эти налоги, по сути, эквивалентны паушальным налогам и тем самым — паушальным трансфертам. А для экономики с трансфертами мы уже имеем доказательство оптимальности равновесия.

Теорема 8.2:

Пусть $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие с налогами на потребление, в котором налоги $\mathbf{t}$ являются неискажающими, и пусть предпочтения потребителей локально ненасыщаемы. Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ — Парето-оптимальное состояние экономики. ⌟

Доказательство: Поскольку налоги являются неискажающими, то существует вектор $\tilde{\mathbf{p}}$, такой что он пропорционален всем индивидуальным ценам: $\mathbf{p}_i^t = \alpha_i \tilde{\mathbf{p}}$ $(\alpha_i > 0)$. (Например, в качестве $\tilde{\mathbf{p}}$ можно выбрать вектор индивидуальных цен первого потребителя.) С учетом этого бюджетное ограничение i-го потребителя можно записать в виде

$$\alpha_i \sum_{k \in K} \tilde{p}_k x_{ik} = \alpha_i \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{x}_i \leqslant \beta_i$$

или

$$\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{x}_i \leqslant \beta_i / \alpha_i = (\mathbf{p} \boldsymbol{\omega}_i + S_i)/\alpha_i.$$

Рассматриваемому равновесию с налогами на потребление соответствует общее равновесие в классической модели с ценами $\tilde{\mathbf{p}}$ и трансфертами $\tilde{S}_i$, такими что

$$(\mathbf{p} \boldsymbol{\omega}_i + S_i)/\alpha_i = \tilde{\mathbf{p}} \boldsymbol{\omega}_i + \tilde{S}_i.$$

Ясно, что при этом новое бюджетное ограничение i-го потребителя допускает приобретение тех же потребительских наборов, что и бюджетное ограничение в исходном равновесии с налогами. Для доказательства того, что $(\tilde{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$ является равновесием в классической модели, остается показать, что сумма трансфертов $\tilde{S}_i$ равна нулю. Действительно, мы определили $\tilde{S}_i$ так, что

$$\tilde{S}_i = (\mathbf{p} \boldsymbol{\omega}_i + S_i)/\alpha_i - \tilde{\mathbf{p}} \boldsymbol{\omega}_i.$$

В равновесии с налогами, как и в классическом равновесии без налогов, бюджетное ограничение выполнено как равенство, поэтому

$$S_i = \mathbf{p}_i^t \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i = \alpha_i \tilde{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i.$$

Отсюда

$$\tilde{S}_i = (\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \alpha_i \tilde{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i)/\alpha_i - \tilde{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i = \tilde{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i).$$

Сумма $\sum_{i \in I}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\omega}_i)$ равна нулю по условиям равновесия, поэтому

$$\sum_{i \in I} \tilde{S}_i = 0.$$

Согласно первой теореме благосостояния для классической модели $\bar{\mathbf{x}}$ является Парето-оптимумом. ■

Задачи

8.1 Приведите пример оптимального равновесия с искажающими налогами на потребление. (*Указание:* рассмотрите потребителя с недифференцируемой функцией полезности.)

8.2 Для экономики из Примера 8.1 покажите, что произвольную систему налогов можно преобразовать в эквивалентную ей систему налогов, такую что один из потребителей сталкивается с рыночными ценами.

8.2 Общее равновесие с налогами на покупку (продажу)

Вывод о преимуществах неискажающих налогов на потребление трудно применить на практике. Во-первых, здесь имеются те же сложности с платежеспособностью потребителей, что и в случае паушальных налогов, но в меньшей степени, поскольку бюджетные ограничения сжимаются пропорционально. Во-вторых, невозможно наблюдать потребление некоторых благ, а следовательно, и облагать налогом все блага и все сферы деятельности. Налоговые службы умеют облагать налогами покупаемые товары, но не блага, изготовленные самими потребителями[10], работу, но не досуг. Эти «перекосы» налогообложения приводят к неоптимальности.

[10]Если потребители могут сами производить какие-то блага, то модель потребителя следует дополнить производственной функцией.

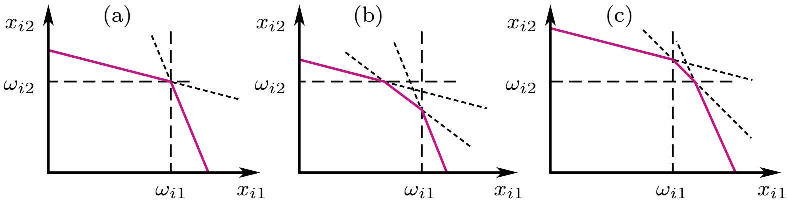


Рис. 8.2. *Бюджетная линия потребителя, облагаемого налогами на покупки, при разной величине трансфертов:* (a) $S_i = 0$, (b) $S_i < 0$, (c) $S_i > 0$

Предположим, что в экономике производство отсутствует (т. е. будем рассматривать экономику обмена с трансфертами) и что имеются только налоги *на покупку* благ и трансферты. (Ситуация, когда существуют только налоги на продажу благ, анализируется аналогично.)

Если $x_{ik} > \omega_{ik}$, то потребитель i *покупает* благо k, а если $x_{ik} < \omega_{ik}$, то *продает* его.

Бюджетное ограничение потребителя в такой экономике можно записать следующим образом:

$$\sum_{k \in K} \big(p_k + t_{ik} I(x_{ik} > \omega_{ik})\big) (x_{ik} - \omega_{ik}) \leqslant S_i,$$

где индикаторная функция $I(\cdot)$ принимает значение 1, если условие в скобках истинно, и 0 в противном случае. При наличии производства доходы потребителя возросли бы на величину прибыли. Эту величину в приведенном ограничении следует прибавить к трансфертам.

На Рис. 8.2 бюджетное ограничение иллюстрируется для случая двух благ. Из рисунка видно, что в рассматриваемой ситуации бюджетная линия имеет изломы. Если нет трансфертов рассматриваемому потребителю, то излом один и совпадает с точкой начальных запасов (Рис. 8.2a). Слева от точки излома наклон бюджетной линии определяется отношением $p_1/(p_2 + t_{i2})$, а справа — отношением $(p_1 + t_{i1})/p_2$. Решение задачи потребителя (при локальной ненасыщаемости предпочтений) попадает либо на левую часть бюджетной линии (потребитель продает первое благо и покупает второе), либо на правую часть бюджетной линии (потребитель продает второе благо и покупает первое), либо на точку излома (нет торговли — потребитель остается с начальными запасами).

Если трансферты потребителю не равны нулю, то бюджетная линия будет иметь две точки излома. В одной из точек излома $x_{i1} = \omega_{i1}$, в другой — $x_{i2} = \omega_{i2}$. Наклоны левой и правой частей бюджетной линии определяются отношениями $p_1/(p_2 + t_{i2})$ и $(p_1 + t_{i1})/p_2$ соответственно. Наклон средней части бюджетной линии определяется отношением p_1/p_2 при $S_i < 0$ (Рис. 8.2b) и отношением $(p_1+t_{i1})/(p_2+t_{i2})$ при $S_i > 0$ (Рис. 8.2c).

Будем рассматривать экономику без производства (экономику обмена с трансфертами) и предполагать, что функции полезности дифференцируемы, в равновесии с налогами все цены и ставки налогов положительны и равновесие внутреннее. Кроме того, будем предполагать, что в этом равновесии найдется некоторый потребитель i_1, который покупает некоторое благо s и продает некоторое благо k.

Если один потребитель покупает некоторое благо, то найдется другой потребитель, который его продает (и наоборот). Поэтому найдется потребитель i_2, который продает благо s.

Как несложно понять, для потребителя i_1 выполняется

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 s}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k}} = \frac{p_s + t_{i_1 s}}{p_k}.$$

С другой стороны, для потребителя i_2, вообще говоря (без доказательства),

$$\frac{p_s}{p_k + t_{i_2 s}} \leqslant \frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}} \leqslant \frac{p_s}{p_k},$$

причем

$$\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}} = \frac{p_s}{p_k},$$

если он продает благо k, и

$$\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}} = \frac{p_s}{p_k + t_{i_2 k}},$$

если он покупает благо k.

Сопоставляя дифференциальные характеристики для двух потребителей, видим, что

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 s}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k}} > \frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 s}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}}.$$

Значит, это равновесие не оптимально по Парето.

Экономику с производством рассмотрим подробнее на следующем частном примере.

Пример 8.2
Пусть в экономике имеются два блага, один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$ и одна фирма с явной производственной функцией $y_1 = f(r)$, причем функции $u(\cdot)$ и $f(\cdot)$ дифференцируемы, и $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_k > 0$ и $f'(r) > 0$. Второе благо — это время потребителя, которым он обладает в количестве $\boldsymbol{\omega}$ и делит его между досугом x_2 и трудом $r = -y_2 = \omega - x_2$. Запасы первого блага равны нулю, и оно только производится из второго. Предположим, что собранные налоги возвращаются потребителю, который, кроме того, получает прибыль от принадлежащего ему предприятия и заработную плату. Допустимые потребительские наборы задаются ограничениями $x_1 \geqslant 0$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant \omega$.

Рассмотрим равновесие с налогами на покупку. Так как покупается только первое благо, то только оно облагается налогом. Ставку этого налога обозначим t.

В данной модели возможны равновесия разного типа в зависимости от того, является ли равновесие внутренним или граничным с точки зрения объема потребления благ. Мы рассмотри два наиболее интересных случая: внутреннее равновесие ($0 < x_2 < \omega$, $x_1 > 0$) и граничное равновесие, когда потребитель не работает ($x_2 = \omega$, $x_1 = 0$).

Предположим сначала, что равновесие внутреннее. Тогда оно характеризуется следующими условиями:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{p_1 + t}{p_2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{f'} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Если $t > 0$ (и цены положительны), то

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} > \frac{1}{f'},$$

и равновесие не оптимально по Парето. Это различие предельных норм замещения связано с тем, что отношения цен, с которыми сталкиваются потребитель и фирма, различаются.

Неоптимальность внутреннего равновесия иллюстрируется на Рис. 8.3. В точке равновесия $\bar{\mathbf{x}}$ кривая безразличия I касается бюджетной линии B с наклоном $(p_1 + t)/p_2$. Заметим, что бюджетная линия не проходит через точку $(0, \omega)$, поскольку предполагается, что у потребителя есть дополнительные «нетрудовые» доходы — трансферты. Бюджетная линия B обрывается при $x_2 = \omega$, и бюджетное множество имеет форму трапеции. С другой стороны, в точке равновесия кривая производственных возможностей P имеет наклон p_1/p_2

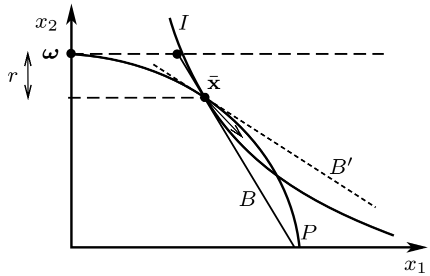


Рис. 8.3. *Неоптимальность внутреннего равновесия, иллюстрация к Примеру 8.2*

(касательная показана штриховой линией B'). Стрелка показывает направление Парето-улучшения.

Предположим теперь, что в равновесии потребитель не работает (и не потребляет первое благо)[11]. Тогда это равновесие характеризуется следующими условиями:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \leqslant \frac{p_1 + t}{p_2}$$

и

$$\frac{1}{f'} \geqslant \frac{p_1}{p_2}.$$

В граничном оптимуме

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \leqslant \frac{1}{f'}.$$

Таким образом, граничное равновесие может быть как оптимальным, так и неоптимальным (см. Рис. 8.4).

Заметим, что использование налога на заработную плату (на продажу второго блага) качественно не меняет выводы из анализа, поскольку ситуация с налогами на заработную плату и на покупку остальных благ (в нашем примере — на первое благо) сводится к ситуации с налогами на покупку и с субсидированием экзогенных для

[11]Эта ситуация нереалистична при наличии всего одного потребителя, но позволяет продемонстрировать на простой модели эффекты, которые вполне возможны при наличии нескольких потребителей — часть потребителей может получать нетрудовые доходы. Во-первых, это могут быть государственные трансферты за счет налогов на других потребителей, во-вторых, это может быть прибыль принадлежащих им предприятий.

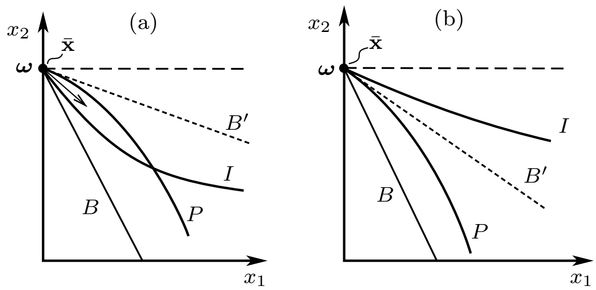


Рис. 8.4. *Граничные равновесия: (a) неоптимальное, (b) оптимальное* (ср. с предыд.??иллюстрация к Примеру 8.2)

потребителя «нетрудовых» доходов (трансфертов S и прибыли π). Действительно, пусть ставка налога на покупку первого блага, как и выше, равна t, а ставка налога на заработную плату — s. Тогда бюджетное ограничение имеет вид

$$(p_1 + t)x_1 + (p_2 - s)(x_2 - \omega) \leqslant S + \pi.$$

Умножив это неравенство на $p_2/(p_2 - s)$ (в предположении, что $s < p_2$), получим

$$\frac{p_2}{p_2 - s}(p_1 + t)x_1 + p_2(x_2 - \omega) \leqslant \frac{p_2}{p_2 - s}(S + \pi)$$

или

$$(p_1 + t')x_1 + p_2(x_2 - \omega) \leqslant \beta',$$

где

$$t' = \frac{p_2}{p_2 - s}(p_1 + t) - p_1 = \frac{p_2 t + p_1 s}{p_2 - s},$$

$$\beta' = \frac{p_2}{p_2 - s}(S + \pi).$$

Как налог на покупку t, так и налог на заработную плату s искажают соотношение?? цен, причем в одном и том же направлении. Таким образом, и при использовании налога на заработную плату внутреннее равновесие неоптимально. △

Задачи

8.3 Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами, в которой два блага и m потребителей ($m > 2$) с дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Может ли в следующих ситуациях равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните свой ответ.

(A) В этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт, покупает первое благо и продает второе, а другой потребитель получает положительный трансферт, покупает второе благо и продает первое.

(B) Один из потребителей получает положительный трансферт, покупает первое благо и продает второе, а другой потребитель получает отрицательный трансферт и продает оба блага.

(C) Один из потребителей получает положительный трансферт и покупает оба блага, а другой потребитель получает отрицательный трансферт и продает оба блага.

(D) Один из потребителей получает положительный трансферт и покупает оба блага, а другой потребитель получает отрицательный трансферт, продает первое благо и покупает второе.

8.4 В экономике с двумя благами, цены которых равны 4 и 2 потребитель имеет начальные запасы $(20, 10)$. Потребитель также получает доход в виде прибыли величиной $\pi = 12$, и платит налог на покупку второго блага в размере 50% от цены.

(A) Каким будет бюджетное множество потребителя? (Изобразите соответствующую фигуру на графике с указанием координат вершин.)

(B) Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Каким будет выбор потребителя?

8.5 В экономике с двумя благами, цены которых равны 4 и 2 потребитель имеет начальные запасы $(20, 10)$. Потребитель может получить доход только от продажи начальных запасов. Он платит подушный налог величиной 12 и 100%-й налог на покупку второго блага.

(A) Каким будет бюджетное множество потребителя? (Изобразите соответствующую фигуру на графике с указанием координат вершин.)

(B) Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Каким будет выбор потребителя?

8.6 В экономике имеется два блага — труд (досуг с обратным знаком) и продукты питания. Рассмотрите потребителя, весь доход которого состоит из заработной платы.

(A) Пусть продукты питания облагаются адвалорным налогом по ставке τ. Каким образом изменится бюджетное множество? Изобразите ситуацию графически для $\tau = 0{,}5$.

(B) Пусть теперь продукты питания не облагаются налогом, а заработная плата облагается 10%-м налогом. Каким образом изменится бюджетное множество? Изобразите ситуацию графически.

(C) Продемонстрируйте, что при некоторой ставке τ ситуация (A) оказывается эквивалентной ситуации (B).

(D) Предположим, что государство решило собрать с потребителя некоторую фиксированную сумму налогов. Объясните, почему налоги на продукты питания и/или заработную плату всегда приводят к искажениям стимулов потребителя.

(E) Какого рода налоги следует ввести, чтобы избежать искажений из-за налогообложения?

8.7 Пусть в ситуации Примера 8.2 функция полезности имеет вид $u(\mathbf{x}) = x_1(14 - x_1) + x_2$, производственная функция имеет вид $f(r) = \sqrt{r}$, начальные запасы времени потребителя равны $\omega = 24$.

(A) Предположите, что покупки блага 1 облагаются адвалорным налогом по ставке τ. Найдите в экономике равновесие с налогами в зависимости от τ. При каких τ равновесие является оптимальным по Парето?

(B) При $\tau = 1/3$ предложите состояние экономики, которое бы доминировало равновесие с налогами по Парето.

(C) Предположите, что вместо налога на покупки вводится налог на заработную плату (на продажу блага 2) со ставкой σ. Найдите равновесие в зависимости от σ. Сравните с результатами пункта (A).

8.3 Оптимальное налогообложение — оптимум второго ранга

8.3.1 Оптимальное налогообложение в модели общего равновесия

Предположим, что государству требуется собрать некоторую сумму налогов достаточную для достижения определенных целей, например для приобретения заданного набора благ. (В модели общего равновесия цены определены только с точностью до положительного множителя, поэтому не имеет смысла рассматривать чисто номинальное задание по сбору налогов, необходимо каким-то образом связать сумму налогов с реальными величинами.) Коль скоро Парето-оптимум в равновесии с налогами недостижим, то естественно поставить задачу уменьшить в каком-то смысле «бремя», связанное с такими налогами.

Обычные Парето-оптимальные состояния определяются на множестве всех (физически) допустимых состояний экономики. Поскольку ограничению на сумму собранных налогов и на способ налогообложения удовлетворяют не все допустимые состояния, естественно изменить соответствующим образом понятие оптимальности, рассматривая (и сравнивая между собой) только те состояния, которые данным ограничениям удовлетворяют. Обычный Парето-оптимум принято при этом называть оптимумом первого ранга, а Парето-оптимум, который определяется (на более узком) подмножестве состояний экономики,— оптимумом второго ранга.

Определение 8.2:

Оптимум второго ранга — это такое состояние экономики из заданного множества состояний, для которого не существует другого состояния экономики из того же множества состояний, которое доминировало бы его по Парето. ◀

Таким образом, можно сформулировать следующую задачу оптимального налогообложения: подобрать такие налоги (из заданного класса налогов), чтобы равновесие с этими налогами являлось оптимумом второго ранга при некотором заданном ограничении на сумму налогов.

В этом параграфе мы охарактеризуем оптимальные налоги на основе равновесия с налогами на покупку благ потребителями при условии, что требуется собрать сумму налогов, достаточную для покупки заданного набора благ $\mathbf{x}_0$[12].

Пусть $\mathcal{S}(\cdot)$ — отображение, ставящее в соответствие ставкам налогов $\mathbf{t}$ (из заданного класса) множество $\mathcal{S}(\mathbf{t})$ состояний экономики, которые соответствуют возможным равновесиям с такими налогами. Заметим, что балансы в этих состояниях с учетом государственных закупок $\mathbf{x}_0$ имеют следующий вид:

$$\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_0 = \sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J}\mathbf{y}_j.$$

Переформулируем стандартную характеристику Парето-оптимальных состояний (оптимумов первого ранга): если $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — оптимум

[12]Естественно рассматривать такую постановку как первый этап в двухэтапной задаче оптимального финансирования общественных благ с помощью налогов. Этот первый этап состоит в вычислении оптимальных ставок налогов при заданном объеме общественного блага. Второй этап состоит в выборе оптимального объема общественного блага.

второго ранга, то существуют ставки налогов $\hat{\mathbf{t}}$, такие что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{t}})$ является решением следующих m задач $(i_0 = 1, \ldots, m)$:

$$u_{i_0} \to \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}}$$
$$u_i(\mathbf{x}) \geqslant u_i(\hat{\mathbf{x}}),\ i \neq i_0,$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}(\mathbf{t}).$$

Соответствующие ставки $\hat{\mathbf{t}}$ будут составлять *оптимальные ставки при заданной системе налогообложения*. Если отображение $\mathcal{S}(\cdot)$ является однозначным, то можно рассматривать равновесные состояния как функцию налогов: $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$, $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{t})$. В этих обозначениях можем переписать задачи, характеризующие оптимальные налоги, следующим образом:

$$u_{i_0} \to \max_{\mathbf{t}}$$
$$u_i(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})) \geqslant u_i(\bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{t}})),\ i \neq i_0.$$

Соответствующий анализ проведем только в классическом случае квазилинейной сепарабельной экономики[13]. (В задачах 8.8 и 8.9 предлагается провести подобный анализ для простых неквазилинейных экономиках.)

8.3.2 Налоги Рамсея

Будем рассматривать только случай с налогами на покупку благ потребителями, когда ставки налогов (с единицы блага) одинаковы для всех потребителей. При этом в предположении совершенной конкуренции без ограничения общности можно упростить задачу, рассматривая одного репрезентативного потребителя с функцией полезности

$$u(\mathbf{x}, z) = v(\mathbf{x}) + z = \sum_{k \in K} v_k(x_k) + z$$

и одного репрезентативного производителя с функцией издержек

$$c(\mathbf{y}) = \sum_{k \in K} c_k(y_k).$$

[13] См. F. P. Ramsey · A Contribution to the Theory of Taxation, *Economic Journal* **37** (1927): 47–61. Хотя в статье Ф. Рамсея это не оговаривается в явном виде, но речь там фактически идет о квазилинейной экономике. В этом параграфе анализ проводится на той же модели, но при упрощающем предположении о сепарабельности функции полезности и функции издержек (т. е. в терминологии Рамсея — в предположении, что «товары независимы»).

Будем предполагать, что $v(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — дважды дифференцируемые функции с положительными первыми производными, такие что предельная полезность является убывающей ($v'' < 0$), а производство характеризуется убывающей отдачей от масштаба ($c'' \geqslant 0$).

Напомним, что в квазилинейной экономике запасы всех благ, кроме последнего, $(l+1)$-го, по которому функция линейна, равны нулю, поэтому материальные балансы для них имеют вид

$$x_k = y_k.$$

Так как каждый из потребителей располагает только запасами $(l+1)$-го блага, то все остальные блага они должны покупать, а эти покупки облагаются налогами. Будем исходить из того, что $(l+1)$-е благо все потребители только продают, но не покупают[14].

В этой ситуации налоги на покупку имеют такой же вид, как налоги на потребление *всех благ, кроме* $(l+1)$*-го*. Мы несколько изменим обозначения, введя для каждого рынка две цены — цену производителя (p_k^L) и цену потребителя (p_k^H), которые связаны между собой соотношением

$$p_k^H = p_k^L + t_k.$$

Такие обозначения помогают понять, что те же рассуждения годятся и для другой ситуации, когда t_k — ставки налогов на продажу благ фирмами. В рассматриваемом случае p_k^L — просто рыночная цена ($p_k^L = p_k$), а p_k^H — это цена с учетом налога, которую платит потребитель. Если же рассматривать налоги на продажу благ фирмами, то рыночной ценой будет p_k^H ($p_k^H = p_k$), а p_k^L — это цена с учетом налога, по которой продает свою продукцию фирма.

Из задачи потребителя получаем, что в равновесии (внутреннем в том смысле, что $x_k > 0$) выполнено условие первого порядка

$$p_k^H = v_k'(x_k).$$

Аналогично для репрезентативного производителя выполнено

$$p_k^L = c_k'(y_k).$$

Таким образом, дифференциальная характеристика внутреннего равновесия с налогами в рассматриваемой квазилинейной сепарабельной экономике имеет вид

$$v_k'(x_k) = c_k'(x_k) + t_k.$$

[14] Это благо в теории оптимального налогообложения обычно интерпретируется как время потребителя, которое он может делить между досугом и трудом.

Далее будем рассматривать только внутренние равновесия. При сделанных предположениях относительно функций $v(\cdot)$ и $c(\cdot)$ эти соотношения являются необходимыми и достаточными условиями внутреннего равновесия.

Пусть R — количество $(l+1)$-го блага, которое требуется приобрести за счет налогов. Поскольку это благо в квазилинейной экономике является естественной единицей счета («деньгами»), то R можно рассматривать как непосредственно задание на сбор налогов (как обычно, цену этого блага мы принимаем равной единице).

В данном случае, поскольку речь идет о квазилинейной экономике, задача оптимального налогообложения состоит в том, чтобы определить ставки налогов, которые при данном R обеспечили бы максимум благосостояния, измеряемого функцией (индикатором благосостояния)

$$W = v(\mathbf{x}) - c(\mathbf{y}).$$

Эквивалентным образом оптимальное налогообложение минимизирует чистые потери от налогов

$$DL = \hat{W} - W,$$

где $\hat{W}$ — максимально возможный уровень благосостояния, достигаемый в Парето-оптимуме.

Внутреннее равновесие с налогами не может быть оптимумом первого ранга, поскольку в оптимуме предельная полезность каждого блага должна совпадать с предельными издержками его производства:

$$v'_k(\hat{x}_k) = c'_k(\hat{x}_k).$$

Другими словами, чистые потери благосостояния в равновесии с налогами положительны (если только налоги не равны нулю).

Из сепарабельности экономики следует, что совокупные чистые потери есть сумма чистых потерь по отдельным рынкам, измеряемых разностью

$$DL_k = v_k(\hat{x}_k) - c_k(\hat{x}_k) - \big(v_k(x_k) - c_k(x_k)\big)\,.$$

При дифференцируемости эти потери можно представить в виде интеграла:

$$DL_k = \int_{x_k}^{\hat{x_k}} \big(v'_k(s) - c'_k(s)\big)\, ds.$$

Поскольку, как обычно в квазилинейной экономике, $v'_k(\cdot)$ представляет собой обратную функцию спроса, а $c'_k(\cdot)$ — обратную функцию

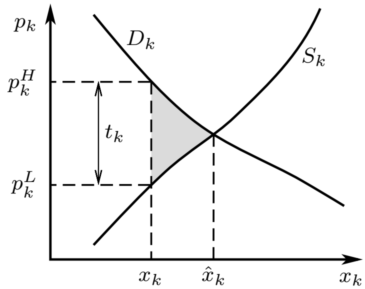


Рис. 8.5. *Чистые потери благосостояния на рынке k-го блага*

предложения, то чистые потери на отдельном рынке геометрически равны площади «треугольника» между кривой спроса, кривой предложения и прямой, представляющей объем продаж в равновесии с налогами (закрашенная фигура на Рис. 8.5)[15]. Задача оптимального налогообложения сводится к минимизации суммы площадей таких «треугольников» по всем рынкам.

Ставится задача нахождения оптимума второго ранга путем выбора налоговых ставок t_k, максимизирующих благосостояние при следующих ограничениях:

- состояние экономики должно быть равновесием с налогами;
- сбор налогов не должен быть меньше заданной величины R.

(Можно, наоборот, рассматривать максимизацию сбора налогов при ограничении на величину потерь благосостояния.)

В результате приходим к следующей задаче:

$$W = \sum_{k\in K} v_k(x_k) - \sum_{k\in K} c_k(x_k) \to \max_{x_k, t_k}$$

$$v_k'(x_k) = c_k'(x_k) + t_k \ \forall k \in K,$$

$$\sum_{k\in K} t_k x_k \geqslant R.$$

[15]Идея такого вычисления чистых потерь принадлежит Дюпюи (см. сноску 11 в гл. 5 на с. 358). См. также статью Хэрольда Хотеллинга: H. Hotelling • The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates, *Econometrica* **6** (1938): 242–269; рус. пер. Г. Хотеллинг • Общее благосостояние в связи с проблемами налогообложения и установления железнодорожных тарифов и тарифов на коммунальные услуги, в кн. *Теория потребительского поведения и спроса*, В. М. Гальперин (ред.), СПб.: Экономическая школа, 1993: 142–175.)

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathbb{L} = \sum_{k\in K} v_k(x_k) - \sum_{k\in K} c_k(x_k) + \\ + \lambda\left(\sum_{k\in K} t_k x_k - R\right) + \sum_{k\in K} \sigma_k[v'_k(x_k) - c'_k(x_k) - t_k].$$

Приравняем производные к нулю:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_k} = v'_k(x_k) - c'_k(x_k) + \lambda t_k + \sigma_k(v''_k(x_k) - c''_k(x_k)) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial t_k} = \lambda x_k - \sigma_k = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $v'_k(x_k) - c'_k(x_k) = t_k$, и исключая множители Лагранжа σ_k, получаем, что искомое состояние должно описываться соотношением

$$t_k + \lambda t_k + \lambda x_k(v''_k(x_k) - c''_k(x_k)) = 0$$

или

$$t_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} x_k(-v''_k(x_k) + c''_k(x_k)).$$

Учтем, что $v'_k(\cdot)$ — обратная функция спроса, а $c'_k(\cdot)$ — обратная функция предложения. Это позволяет записать полученное соотношение через эластичности спроса и предложения:

$$\varepsilon_k^D(x_k) = \frac{1}{v''_k(x_k)} \frac{v'_k(x_k)}{x_k} (< 0),$$

$$\varepsilon_k^S(x_k) = \frac{1}{c''_k(x_k)} \frac{c'_k(x_k)}{x_k}.$$

Кроме того, так как мы рассматриваем состояние равновесия с налогами, то можно заменить $v'_k(x_k)$ на p_k^H и $c'_k(x_k)$ на p_k^L, откуда

$$v''_k = -\frac{p_k^H}{x_k|\varepsilon_k^D|}, \quad c''_k = \frac{p_k^L}{x_k \varepsilon_k^S}.$$

Окончательно получаем соотношение, называемое формулой Рамсея:

$$t_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \left(\frac{p_k^H}{|\varepsilon_k^D|} + \frac{p_k^L}{\varepsilon_k^S}\right).$$

Подставив в эту формулу $p_k^H = p_k^L + t_k$, выразим из нее t_k и разделим на p_k^L:

$$\frac{t_k}{p_k^L} = \lambda \frac{1/|\varepsilon_k^D| + 1/\varepsilon_k^S}{1 + \lambda + \lambda/\varepsilon_k^S}.$$

При малой величине R (величине собираемых налогов), множитель Лагранжа λ мал. Действительно, можно доказать, что при $R = 0$ множитель Лагранжа λ равен нулю. Пусть это не так и $\lambda > 0$. Воспользуемся тем, что

$$t_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} x_k(-v_k'' + c_k'').$$

При $\lambda > 0$ в силу условий Куна—Таккера ограничение на сбор налогов должно выполняться как равенство, т. е. $\sum_{k \in K} t_k x_k = R = 0$. Подставим в это ограничение t_k:

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{k \in K} x_k^2(-v_k'' + c_k'') = 0.$$

При $v'' < 0$ и $c'' \geqslant 0$ величина слева должна быть положительной. Мы пришли к противоречию. Значит, при $R = 0$ множитель Лагранжа λ должен быть равен нулю. При этом все ставки налогов должны быть нулевыми. (Этим мы попутно доказали, что субсидирование одних рынков за счет других с помощью налогов неэффективно.)

В первом приближении при R, близком к нулю, можно записать

$$t_k \approx \lambda x_k(-v_k''(x_k) + c_k''(x_k)).$$

Кроме того, дифференцируя условия равновесия, получаем

$$dt_k = dx_k(-v_k''(x_k) + c_k''(x_k)),$$

При малых налогах ($dt_k \approx t_k$) из этого следует, что

$$\frac{dx_k}{x_k} \approx \lambda.$$

Таким образом, в первом приближении оптимальные налоги снижают объемы потребления (и производства) всех благ в равной пропорции.

Кроме того, малые оптимальные налоги (налоги при R, близком к нулю) можно выразить через эластичности спроса и предложения в равновесии без налогов:

$$\frac{t_k}{p_k^L} \approx \lambda \left(\frac{1}{|\varepsilon_k^D|} + \frac{1}{\varepsilon_k^S} \right).$$

Таким образом, правило оптимального налогообложения Рамсея заключается в том, что относительные ставки налогов должны быть (в первом приближении) пропорциональны сумме обратных эластичностей спроса и предложения на соответствующих рынках:

$$\frac{t_k}{p_k^L} \sim \frac{1}{|\varepsilon_k^D|} + \frac{1}{\varepsilon_k^S}.$$

Существенным ограничением данного правила является то, что предполагается независимость рынков (формально — сепарабельность). Если отказаться от этого предположения, то в соотношении, характеризующем налоги Рамсея, появятся перекрестные эластичности.

Другое существенное предположение изложенной модели — квазилинейность предпочтений. Различные правила налогообложения Рамсея получаются в рамках модели общего равновесия и при других упрощающих предположениях. В следующем параграфе мы рассмотрим одну из таких моделей.

Задачи

8.8 Рассмотрите экономику обмена с двумя видами благ (x и y) и двумя потребителями (1 и 2), где каждый потребитель имеет функцию полезности $u_i = \ln(x_i)+\ln(y_i)$ и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy})$. Государство собирает адвалорный налог на покупку благ. Цель государства состоит в том, чтобы на собранные средства приобрести по рыночным ценам благо x в количестве x_0 и благо y в количестве y_0. Предполагаеся, что с собственных закупок государство налог не взимает.

(A) Всегда ли государство может добиться своей цели?

(B) Может ли случиться так, что равновесие с налогами будет Парето-оптимальным (Парето-оптимальным с учетом того, что государство должно получить x_0 и y_0 благ x и y)?

8.9 Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами (A и B). Функции полезности потребителей: $u_1 = 2\ln a_1 + b_1$, $u_2 = \ln a_2 + b_2$, где a_i — потребление блага A, а b_i — потребление блага B i-м потребителем. Начальные запасы благ: $\boldsymbol{\omega}_1 = (2, 3)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (3, 2)$. Вводится натуральный налог на потребление блага A, так что i-й потребитель после уплаты налога потребляет $a_i(1-\tau_i)$ блага A, где τ_i — ставка налога. Соответственно государство собирает в форме налога $a_1\tau_1 + a_2\tau_2$ блага A.

(A) Найти равновесие, которое возникнет после введения налога (a_i, b_i и отношение цен p_A/p_B).

(B) Найти Парето-оптимум, учитывая, что заданное количество (a_0) блага А должно уйти государству. При каком распределении налога равновесие будет Парето-оптимальным?

8.10 В квазилинейной экономике два потребителя с функциями полезности

$$u_1 = \sqrt{x_1} + z_1, \quad u_2 = \sqrt{x_2} + z_2$$

и одно предприятие с функцией издержек $c(y) = 2y$.

(A) Вводится адвалорный налог на потребление первого блага со ставкой τ. Найдите конкурентное равновесие в экономике (p, x_1, x_2, y) как функцию величины τ.

(B) Пользуясь результатами пункта (A)??, найдите чистые потери благосостояния от налога при ставке $\tau = 1$ (т. е. 100%).

8.11 В экономике производится один предмет потребления (y), спрос на который образуется в результате максимизации следующей функции полезности репрезентативного потребителя: $u(y, x) = 2\sqrt{y+1} + x$, где x — потребление свободного времени. Потребитель владеет единичным запасом времени, который он распределяет между рабочим временем L и свободным временем x. Рабочее время предлагается единственной фирме, которая производит y по технологии $y = \ln(2L) + 3$. Вычислите чистые потери от введения 50%-го налога на продажу предмета потребления (продажная цена производителя равна половине цены, которую платит покупатель). Заработную плату примите за единицу.

8.12 Рассмотрите модель оптимального налогообложения Рамсея в ситуации двух независимых рынков. На первом рынке спрос равен $D = 10 - p$, а предложение равно $S = 1 + p$. На втором рынке спрос равен $D = 10 - p/2$, а предложение равно $S = 1 + p/2$.

(A) Запишите условия первого порядка для оптимальных налогов (не исключая множитель Лагранжа)

(B) Во сколько раз отличается налог на одном рынке от налога на другом?

8.13 В ситуации частного конкурентного равновесия государству требуется собрать налоги общей величины R с n независимых рынков. Оно использует налог с единицы товара со ставкой t_i ($i = 1, \ldots, n$). Функции спроса и предложения линейны: $S_i = a_i + b_i p$ и $D_i = c_i - d_i p$. Задача состоит в том, чтобы распределить налоги по рынкам так, чтобы общие потери благосостояния были минимальными. Как ставка налога на данном рынке зависит от наклона кривых спроса и предложения? (*Указание:* не следует исключать из соответствующих условий первого порядка множитель Лагранжа.)

8.14 Задача Рамсея выбора ставок налогов состоит в том, чтобы при сохранении величины налоговых сборов

(A) минимизировать чистые потери,

(B) минимизировать потери потребителя,

(C) максимизировать объем продаж,

(D) максимизировать прибыль.

Ее решение предписывает установить более высокие ставки налогов в тех отраслях (допишите) ......

8.15 Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Спрос имеет вид $D = 8 - p$, предложение имеет вид $S = 3 + p$. На этом рынке вводится налог на потребление в размере 50% от цены. Найдите чистые потери благосостояния от введения налога.

8.16 Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Спрос имеет вид $D = 8 - p$, предложение бесконечно эластично. На этом рынке вводится налог в размере 2 ед. на единицу товара. Найдите потери потребителей от введения налога, если до введения налога объем торговли на рынке был равен 4 ед.

8.17 В экономике с тремя благами предпочтения потребителя заданы функцией полезности $u(x_1, x_2, z) = 10x_1 - x_1^2/2 + 10x_2 - 2x_2^2 + z$. Цены благ на рынке равны $p_1 = 6$, $p_2 = 4$ и $p_z = 1$. Государство хочет собрать с этого потребителя 4 денежные единицы в виде налогов на потребление. При этом налогами можно облагать только блага 1 и 2, но не «квазилинейное» благо.

(A) Запишите задачу определения оптимальных ставок налогов.

(B) Чему будет равно отношение ставок оптимальных налогов для благ 1 и 2. (*Указание:* Множитель Лагранжа лучше не исключать.)

(C) Вычислите оптимальные ставки налогов.

8.18 В квазилинейной экономике репрезентативный потребитель имеет несепарабельную функцию полезности $u(x_1, x_2, z) = v(x_1 + x_2) + z$, а репрезентативный производитель — сепарабельную функцию издержек $c_1(y_1) + c_2(y_2)$. Первое и второе блага облагаются налогами с единицы по ставкам t_1 и t_2 соответственно.

(A) Запишите уравнение, связывающее t_k и x_k во внутреннем равновесии с налогами.

(B) Запишите соответствующую задачу Рамсея определения оптимальных ставок налогов.

(C) Запишите три уравнения, связывающие величины λ, t_k, x_k и R, которые характеризуют налоги Рамсея.

8.4 Оптимальное налогообложение «малых» потребителей

Пусть в экономике имеется большое число потребителей, предпочтения которых задаются строго вогнутыми, достаточно гладкими функциями полезности $u_i(\mathbf{x}_i)$. Предположим, что последнее (l-е) благо — это время потребителя, так что x_{il} — это досуг потребителя, а $\omega_i - x_{il}$ — предложение труда, где ω_i — запас времени потребителя. Допустимые потребительские наборы задаются ограничениями $x_{ik} \geqslant 0$ для $k = 1, \ldots, l-1$ и $x_{il} \leqslant \omega_i$.

Потребители могут получать доход от продажи труда, а также из прибылей принадлежащих им фирм и в виде трансфертов от государства. Не специфицируя остальную часть экономики (производство, поведение государства), охарактеризуем внутреннее равновесие с индивидуальными налогами $\mathbf{t}_i$ на покупку благ потребителями, являющееся оптимумом второго ранга. Предположим существование функции $\mathbf{p}(\cdot)$, сопоставляющей налогам $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_i)$ равновесный вектор цен $\mathbf{p}(\mathbf{t})$.

Будем предполагать, что каждый потребитель мал в том смысле, что влиянием величины его индивидуальных налогов $\mathbf{t}_i$ на равновесные цены $\mathbf{p}(\mathbf{t})$ можно пренебречь. Это предположение позволяет вывести условия оптимальности налогов $\mathbf{t}$ на основе анализа поведения отдельного потребителя при фиксированных рыночных ценах $\mathbf{p}$ и фиксированной величине суммы налогов, выплачиваемой этим потребителем[16].

Напомним, что в модели с налогами на покупку благ бюджетное ограничение потребителя i имеет вид (если есть доходы от прибыли фирм, то они добавляются к S_i)

$$\sum_{k \in K} \big((p_k + t_{ik} I(x_{ik} > \omega_{ik})\big)(x_{ik} - \omega_{ik}) \leqslant S_i,$$

[16]Эта модель впервые была проанализирована Полом Самуэльсоном в 1951 г. в его докладе Министерству финансов США (перепечатан в P. A. Samuelson· Theory of Optimal Taxation, *Journal of Public Economics* **30** (1986): 137–143). В литературе по оптимальному налогообложению полученные Самуэльсоном результаты принято называть «правилом Рамсея». При изложении модели обычно делается предположение, что все потребители одинаковы, хотя, как очевидно из нашего анализа, важна только неизменность цен. Анализ Самуэльсона был распространен на случай экономики с производством и меняющимися ценами в статье P. A. Diamond and J. A. Mirrlees·Optimal Taxation and Public Production. I: Production Efficiency, II: Tax Rules, *American Economic Review* **61** (1971): 8–27, 261–278.

Предположим, что потребитель продает труд (l-е благо). Все блага, кроме l-го, покупаются на рынке, поэтому эти блага облагаются налогами. Соответственно труд не облагается налогом. Бюджетное ограничение

$$\sum_{k=1}^{l-1}(p_k + t_{ik})x_{ik} + p_l x_{il} = \sum_{k=1}^{l}(p_k + t_{ik})x_{ik} \leqslant p_l\omega_i + S_i$$

имеет такой же вид, как и в случае налогов на потребление, за тем исключением, что ставка налога на досуг равна нулю ($t_{il} = 0$). В дальнейшем мы абстрагируемся от того, что рассматривается налог на покупки, и будем действовать так, как если бы это был налог на потребление.

Прежде чем анализировать этот случай, рассмотрим гипотетическую ситуацию, в которой можно устанавливать *налоги на потребление всех благ, включая досуг.*

Рассмотрим задачу максимизации полезности потребителя при дополнительных ограничениях, что потребительский набор представляет собой спрос потребителя при данных ставках налогов ($\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}_i)$) и что требуется собрать фиксированную сумму налогов R_i (она равна фактически собираемой в равновесии сумме налогов). Если налоги оптимальны, то они являются решением указанной задачи. В противном случае на основе решения данной задачи можно построить Парето-улучшение для экономики в целом (в смысле оптимума второго ранга).

Запишем эту задачу формально, опуская для упрощения записи индекс потребителя:

$$\begin{gathered} u(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})) \to \max_{\mathbf{t}} \\ \mathbf{t}\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \geqslant R, \end{gathered} \tag{✤}$$

где $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ — решение следующей задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и налогах $\mathbf{t}$:

$$\begin{gathered} u(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}} \\ (\mathbf{p} + \mathbf{t})\mathbf{x} \leqslant \beta = p_l\omega + S. \end{gathered}$$

Функция $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ связана с обычной функцией потребительского спроса соотношением $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{p} + \mathbf{t}, \beta)$.

Условия первого порядка для внутреннего решения задачи потребителя имеют вид

$$\frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t}))}{\partial x_k} = \nu(p_k + t_k)$$

или, в векторных обозначениях,

$$\nabla u(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})) = \nu(\mathbf{p} + \mathbf{t}),$$

где ν — множитель Лагранжа бюджетного ограничения.

В равновесии бюджетное ограничение выполняется как равенство, т. е. $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ удовлетворяет тождеству

$$(\mathbf{p} + \mathbf{t})\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{s=1}^{l}(p_s + t_s)\bar{x}_s(\mathbf{t}) = \beta.$$

Дифференцируя это тождество по t_k (здесь мы предполагаем, что функция $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ дифференцируема), получим

$$\sum_{s=1}^{l}(p_s + t_s)\frac{\partial \bar{x}_s(\mathbf{t})}{\partial t_k} = -x_k(\mathbf{t}).$$

Подставляя условия первого порядка, получим соотношение, которое характеризует изменение полезности потребителя при малом изменении ставки налога на k-е благо:

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} = -\nu\bar{x}_k.$$

Используя полученные соотношения, охарактеризуем решение задачи (✤), и тем самым — оптимальные ставки налогов. Функция Лагранжа для задачи (✤) имеет вид

$$\mathbb{L} = u(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})) + \lambda(\mathbf{t}\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) - R).$$

Условия первого порядка для решения:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial t_k} = \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} + \lambda\left(\sum_{s=1}^{l} t_s\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} + \bar{x}_k\right) = 0.$$

Подставляя полученные выше характеристики решения задачи потребителя, преобразуем эти условия к виду:

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} = \lambda\sum_{s=1}^{l} p_s\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k}.$$

Запишем эти соотношения в матричном виде:

$$\nabla\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\nabla u = \lambda\nabla\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\mathbf{p},$$

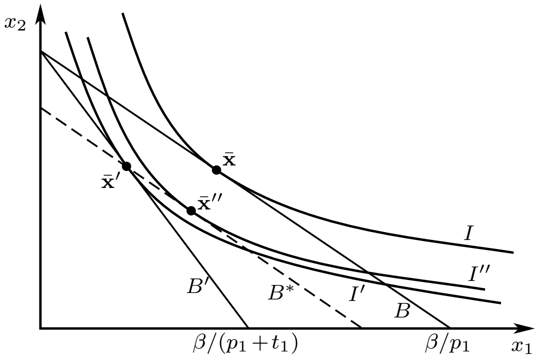


Рис. 8.6. *Неоптимальность неуниформного налога*

где $\nabla\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ — матрица частных производных $(\partial\bar{x}_s/\partial t_k)$. Если это невырожденная матрица, то можно записать условие оптимальности налогов как

$$\nabla u = \lambda\mathbf{p}.$$

Так как

$$\nabla u = \nu(\mathbf{p}+\mathbf{t}),$$

то

$$\lambda\mathbf{p} = \nu(\mathbf{p}+\mathbf{t})$$

или

$$\mathbf{t} = \frac{\lambda-\nu}{\nu}\mathbf{p}.$$

Таким образом, *оптимальные налоги на потребление должны быть униформными*. Этот вывод совпадает с полученным выше в параграфе, посвященном таким налогам.

Пусть теперь $t_l = 0$. Ясно, что при этом ограничении (при «гладкой» функции полезности) налоги не могут быть оптимальными, поскольку не являются униформными. Этот факт иллюстрируется с помощью Рис. 8.6.

Введение налога на благо 1 вызывает поворот бюджетной линии $(B \to B')$ и переход потребителя к новому равновесию $(\bar{x} \to \bar{x}')$. Рассмотрим «бюджетную линию» B^*, параллельную первоначальной (B) и проходящую через точку равновесия, как если бы был введен эквивалентный паушальный налог (или униформные налоги на потребление). Эта вспомогательная бюджетная линия пересекает кривую безразличия I', и поэтому соответствующее решение задачи потребителя $\bar{x}''$ лежит на более высокой кривой безразличия I'' и обеспечивает ему более высокую полезность, чем $\bar{x}'$, без снижения величины налога.

При $t_l = 0$ в задаче (✤) появляется дополнительное ограничение. Условия первого порядка

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} + \lambda\left(\sum_{s=1}^{l} t_s \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} + \bar{x}_k\right) = 0$$

в этом случае должны выполняться для всех благ, кроме l-го. Если подставим в них полученные выше характеристики решения задачи потребителя, то получим соотношение

$$-\nu \bar{x}_k + \lambda\left(\sum_{s=1}^{l} t_s \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} + \bar{x}_k\right) = 0 \ \forall k \neq l$$

или

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} t_s = -\frac{\lambda - \nu}{\lambda} \bar{x}_k \ \forall k \neq l.$$

Здесь мы воспользовались тем, что ограничение по сбору налогов существенно, т. е. $\lambda > 0$, и что $\bar{x}_k > 0$ (равновесие внутреннее). Последнее слагаемое здесь равно нулю, поэтому

$$\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t_k} t_s = -\frac{\lambda - \nu}{\lambda} \bar{x}_k.$$

Производные функции $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ равны соответствующим производным обычной функции спроса по ценам. Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial x_s}{\partial p_k} t_s = -\frac{\lambda - \nu}{\lambda} \bar{x}_k.$$

Если предпочтения потребителя *гомотетичны*, то

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k}{\partial p_s} \ \forall k, s,$$

и можно записать это соотношение как

$$\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial x_s}{\partial p_k} \frac{t_s}{x_k} = \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial x_k}{\partial p_s} \frac{p_s}{x_k} \frac{t_s}{p_k} = -\frac{\lambda - \nu}{\lambda}$$

или, с использованием эластичностей спроса по ценам, ε_{ks},

$$\sum_{s=1}^{l-1} \varepsilon_{ks} \frac{t_s}{p_k} = -\frac{\lambda - \nu}{\lambda}.$$

Если же функция полезности потребителя *квазилинейна* по труду и *сепарабельна*, на спрос потребителя на отдельное благо влияет только налог на это благо. При этом все перекрестные производные равны нулю и условие оптимальности имеет очень простой вид:

$$\frac{t_k}{p_k} = \frac{\lambda - \nu}{\lambda} \frac{1}{|\varepsilon_k|},$$

т. е. относительные (адвалорные) налоги должны быть обратно пропорциональны эластичностям.

В общем случае симметричность производных не выполнена, однако можно перейти к хиксианскому спросу, для которого эта симметричность имеет место.

Напомним, что уравнение Слуцкого имеет вид

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_k} = \frac{\partial h_s}{\partial p_k} - x_k \frac{\partial x_s}{\partial \beta} \ \forall k, s,$$

где $h_k(\cdot)$ — функция хиксианского спроса на благо k. Подставляя $\partial x_s / \partial p_k$ в характеристику оптимальных налогов, получаем

$$\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_s}{\partial p_k} t_s = \left(\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial x_s}{\partial \beta} t_s - \frac{\lambda - \nu}{\lambda} \right) x_k = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} x_k,$$

где

$$\alpha = \lambda \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial x_s}{\partial \beta} t_s + \nu$$

не зависит от k. Таким образом,

$$\sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_s}{\partial p_k} t_s = \sum_{s=1}^{l-1} S_{sk} t_s = \sum_{s=1}^{l-1} S_{ks} t_s = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \bar{x}_k$$

или

$$\sum_{s=1}^{l-1} \varepsilon_{ks}^h \frac{t_s}{p_s} = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda},$$

где $S_{ks} = \partial h_s / \partial p_k$ — коэффициент замены ($S_{sk} = S_{ks}$), а

$$\varepsilon_{ks}^h = -\frac{\partial h_k}{\partial p_s} \frac{p_s}{x_k} \text{ —}$$

эластичность хиксианского спроса на k-е благо по цене s-го блага.

Взяв полный дифференциал от хиксианского спроса $h_k(\mathbf{p}+\mathbf{t}, \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{0}))$, получим, что изменение спроса за счет эффекта замены равно

$$dh_k = \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_k}{\partial p_s} dt_s.$$

В случае, когда налоги малы ($dt_k \approx t_k$), можно воспользоваться полученным условием оптимальности:

$$dh_k = \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial h_k}{\partial p_s} dt_s \approx -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} x_k,$$

откуда

$$\frac{dh_k}{x_k} \approx -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}.$$

Значит, следствием введения малых оптимальных налогов является сокращение спроса за счет эффекта замены на все облагаемые налогами блага в одинаковой пропорции. В квазилинейной экономике эффект дохода равен нулю для всех благ, кроме последнего, поэтому $dh_k = dx_k$ и

$$\frac{dx_k}{x_k} \approx -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}.$$

В случае гомотетичных предпочтений эта характеристика тоже имеет место, поскольку изменение спроса на отдельное благо за счет эффекта дохода пропорционально величине спроса на это благо.

Рассмотрим теперь экономику, в которой имеется три блага ($l = 3$), причем третье благо (досуг) не облагается налогом. Тогда

$$\varepsilon_{11}^h \tau_1 + \varepsilon_{12}^h \tau_2 = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda},$$

$$\varepsilon_{21}^h \tau_1 + \varepsilon_{22}^h \tau_2 = -\frac{\lambda - \alpha}{\lambda},$$

где $\tau_k = t_k / p_k$ — относительные ставки налогов. Отсюда

$$\varepsilon_{11}^h \frac{\tau_1}{\tau_2} + \varepsilon_{12}^h = \varepsilon_{21}^h \frac{\tau_1}{\tau_2} + \varepsilon_{22}^h$$

или

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\varepsilon_{12}^h - \varepsilon_{22}^h}{\varepsilon_{21}^h - \varepsilon_{11}^h}.$$

Из однородности хиксианской функции спроса следует, что

$$S_{11} p_1 + S_{12} p_2 + S_{13} p_3 = 0,$$

$$S_{21}p_1 + S_{22}p_2 + S_{23}p_3 = 0, —$$

или что $-\varepsilon^h_{11} = \varepsilon^h_{12} + \varepsilon^h_{13}$ и $-\varepsilon^h_{22} = \varepsilon^h_{21} + \varepsilon^h_{23}$.

Окончательно получаем

$$\frac{t_1/p_1}{t_2/p_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\varepsilon^h_{23} + \varepsilon^h_{21} + \varepsilon^h_{12}}{\varepsilon^h_{13} + \varepsilon^h_{21} + \varepsilon^h_{12}}.$$

Эту формулу можно проинтерпретировать в том смысле, что отношение налоговых ставок для двух облагаемых налогом благ зависит от перекрестных эластичностей этих благ по цене третьего блага. В отсутствие возможности облагать третье благо в оптимуме второго ранга приходится облагать комплементарные ему: если второе благо в большей степени является комплементарным для третьего, чем первое, в том смысле, что $\varepsilon^h_{23} < \varepsilon^h_{13}$, то относительная ставка налога на него должна быть выше: $t_1/p_1 > t_2/p_2$.

Задачи

8.19 Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрите ситуацию обложения его оптимальными налогами на потребление (на единицу товара), предполагая, что потребитель «мал», так что цены остаются неизменными.

(A) Пусть рыночные цены равны $p_1 = 2$, $p_2 = 1$? а ставка налога на первый товар равна $t_1 = 1$. Каким должен быть налог на второй товар?

(B) Пусть ставки налога равны $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Чему равно отношение рыночных цен p_1/p_2?

(C) Пусть рыночные цены равны $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Из-за введения налогов потребление обоих благ сократилось вдвое. Какие налоги были установлены?

8.20 Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрите ситуацию обложения его налогами на потребление (на единицу товара), предполагая, что потребитель «мал», так что цены остаются неизменными: $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Результат введения налогов оказался таким же, как если бы потребителя обложили подушным налогом размером T. Чему было равно отношение ставок налогов t_1/t_2?

8.21 Покажите, что если в модели оптимального налогообложения «малого» потребителя функция полезности недифференцируема, оптимальность может достигаться и при неуниформных налогах.

8.22 Приведите пример оптимального налогообложения «малого» потребителя, когда малые налоги приводят к сокращению спроса на блага в *разных* пропорциях.

8.23 Рассмотрите налогообложение «малого» потребителя с функцией полезности $u = \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3$, где x_k — потребление блага k.

(A) Пусть потребление первых двух благ облагается налогами, а потребление третьего — нет. Найдите оптимальные налоговые ставки в зависимости от рыночных цен, дохода потребителя и задания по сбору налогов.

(B) Продемонстрируйте, что если третье благо тоже можно облагать налогом, то полезность потребителя увеличится при том же сборе налогов.

8.5 Налоги при асимметричной информации

Сложившийся в неоклассической экономике подход разграничивает вопросы эффективности и справедливости и основан на существовании паушальных налогов (трансфертов). Однако для расчета таких налогов требуется знание таких переменных, которые, вообще говоря, ненаблюдаемы (продуктивность индивидуумов или их потенциальный доход). С другой стороны, как уже обсуждалось выше, при налогообложении наблюдаемых результатов хозяйственной деятельности следует учитывать возможные искажения стимулов, вызываемые таким налогообложением.

Мы рассмотрим упрощенную модель с целью проиллюстрировать существующие проблемы[17].

Пусть «базовая» полезность потребителей зависит от потребления двух благ: досуга x и «остальных потребительских благ» z следующим образом:

$$u(x, z) = v(x) + z.$$

То есть будем предполагать, что функция полезности квазилинейная. Функция $v(\cdot)$ выражает денежную оценку досуга индивидуума и, по предположению, имеет положительную убывающую производную (предельная полезность досуга убывает с его ростом). Потребители получают доход только от продажи своего времени. Общий запас времени равен $\omega = 1$. Таким образом, $1 - x$ — это количество часов труда. Предполагается, что рынок труда является конкурентным. Мы оставим его за рамками модели, считая, что есть некоторая конкурентная ставка заработной платы θ. Цену «квазилинейного блага» как обычно примем равной единице. Таким образом, в отсутствие налогов бюджетное ограничение потребителя имеет вид

$$\theta x + z \leqslant \theta\omega = \theta.$$

[17] Впервые такая постановка проблемы налогообложения предложена Уильямом Викри (W. Vickrey. Measuring Marginal Utility by Reactions to Risk, *Econometrica* **13** (1945): 319–333). Модель для континуума типов первым формально проанализировал Джеймс Миррлис (J. A. Mirrlees. An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation, *Review of Economic Studies* **38** (1971): 175–208). Модель с двумя типами, которую мы излагаем, ближе всего к статье J. E. Stiglitz. Self-Selection and Pareto Efficient Taxation, *Journal of Public Economics* **17** (1982): 213–240. Квазилинейные функции полезности введены в P. A. Diamond. Optimal Income Taxation: An Example with a U-shaped Pattern of Optimal Marginal Tax Rates, *American Economic Review* **88** (1998): 83–95.

Потребитель полностью израсходует свой доход, поэтому $z = \theta(1-x)$, откуда

$$u = v(x) + \theta(1 - x).$$

Если же потребитель облагается паушальным налогом t (это может быть и субсидия, $t < 0$), то бюджетное ограничение принимает вид

$$\theta x + z \leqslant \theta - t,$$

откуда

$$u = v(x) + \theta(1 - x) - t.$$

Для того чтобы ввести информационную асимметрию, предположим, что потребители обладают разными способностями (производительностями) и что государство не может наблюдать эти способности. Пусть в экономике имеются потребители двух типов: низкопродуктивные (L) и высокопродуктивные (H). Из-за различных способностей их труд ценится по-разному, так что ставки заработной платы равны соответственно θ_L и θ_H, где $\theta_L < \theta_H$. Население нормируем к единице. Доля низкопродуктивных потребителей равна μ, а высокопродуктивных — $1 - \mu$. Функция $v(\cdot)$ не зависит от типа, т. е. потребители различаются только способностями, но не предпочтениями.

Будем предполагать, что оценка государством возможных схем налогообложения основывается следующей функции благосостояния:

$$W = \mu G(v(x_L) + \theta_L(1 - x_L) - t_L) + (1 - \mu)G(v(x_H) + \theta_H(1 - x_H) - t_H),$$

где функция $G(\cdot)$ имеет положительную убывающую производную. Такая функция представляет предпочтения государства, одной из целей которого является достиженit большего равенства членов сообщества (отсюда — указанное предположение о функции $G(\cdot)$).

Замечание: Формирование таких предпочтений государства (данного сообщества) можно объяснить следующим образом. Предположим, что данное сообщество «под покровом неведения» (каждый член сообщества еще не знает свой статус: окажется он высокопроизводительным или низкопроизводительным работником) выбирает систему налогообложения. Оценка возможных схем налогообложения основывается на том, какую ожидаемую полезность обеспечивают порождаемые ими лотереи. Ожидаемая полезность рассчитывается по элементарной функции полезности $G(\cdot)$, т. е. совпадает с указанной функцией благосостояния. При этом члены данного сообщества являются рискофобами, поэтому функция $G(\cdot)$ имеет положительную убывающую производную[18].

Государство планирует расходы в размере R, так что ограничение на величину собранных налогов имеет вид

$$\mu t_L + (1-\mu)t_H \geqslant R.$$

Обратимся сначала к ситуации, когда *способности наблюдаемы*. Тогда задача оптимального налогообложения имеет вид

$$W = \mu G(v(x_L) + \theta_L(1-x_L) - t_L) + \\ + (1-\mu)G(v(x_H) + \theta_H(1-x_H) - t_H) \to \max_{x_L, t_L, x_H, t_H}$$

$$\mu t_L + (1-\mu)t_H \geqslant R,$$
$$x_L \in [0,1], \quad x_H \in [0,1].$$

Рассмотрим свойства внутреннего по досугу решения этой задачи ($x_L \in (0,1)$, $x_H \in (0,1)$). Если не учитывать ограничение на досуг потребителя, то Лагранжиан задачи имеет вид

$$\mathbb{L} = W + \lambda(\mu t_L + (1-\mu)t_H - R).$$

Дифференцируя его, получим следующие соотношения для оптимальных пар потребление — налог (x_L^*, t_L^*), (x_H^*, t_H^*):

$$G'(v(x_L^*) + \theta_L(1-x_L^*) - t_L^*) = G'(v(x_H^*) + \theta_H(1-x_H^*) - t_H^*),$$
$$v'(x_L^*) = \theta_L, \quad v'(x_H^*) = \theta_H.$$

Из этих условий первого порядка видим, что $x_H^* < x_L^*$, поскольку $\theta_H > \theta_L$. Доход до уплаты налога выше у потребителя типа H:

$$y_H^* = \theta_H(1-x_H^*) > y_L^* = \theta_L(1-x_L^*).$$

Кроме того, базовые полезности потребителей двух типов одинаковы ($u_L^* = u_H^*$), поскольку $G'(\cdot)$ убывает.

Охарактеризуем теперь оптимальное налогообложение в ситуации, когда производительность (способности) является ненаблюдаемой характеристикой и поэтому невозможно принять ее во внимание при установлении налогов. Количество часов отдыха или работы и ставка заработной платы тоже ненаблюдаемы, но наблюдаема

[18]При указанной интерпретации в качестве меры неприятия неравенства государством (меры неприятия риска членами сообщества) естественно использовать меру Эрроу—Пратта для функции $G(\cdot)$.

общая величина доходов, получаемых потребителем, $y = \theta(1-x)$, поэтому только она может быть основой для установления налогов.

Структура налогов должна быть совместна со стимулами индивидуумов. Требуется подобрать пары доход — налог (y_L, t_L), (y_H, t_H) таким образом, чтобы потребитель каждого типа добровольно выбрал предназначенную для него пару (и тем самым выявил свой тип). Таким образом, к задаче выбора оптимальных налогов следует добавить ограничения самовыявления. Для потребителей типа L такое ограничение имеет вид

$$v(1 - y_L/\theta_L) + y_L - t_L \geqslant v(1 - y_H/\theta_L) + y_H - t_H.$$

Здесь учитывается то, что для получения дохода y потребитель типа L должен работать $x = 1 - y/\theta_L$ часов. Аналогично для типа H

$$v(1 - y_H/\theta_H) + y_H - t_H \geqslant v(1 - y_L/\theta_H) + y_L - t_L.$$

Получаем следующую задачу оптимального налогообложения:

$$\begin{gathered}
\mu G(v(1 - y_L/\theta_L) + y_L - t_L) + \\
+ (1-\mu) G(v(1 - y_H/\theta_H) + y_H - t_H) \to \max_{y_L, t_L, y_H, t_H} \\
v(1 - y_L/\theta_L) + y_L - t_L \geqslant v(1 - y_H/\theta_L) + y_H - t_H, \\
v(1 - y_H/\theta_H) + y_H - t_H \geqslant v(1 - y_L/\theta_H) + y_L - t_L, \\
\mu t_L + (1-\mu) t_H \geqslant R, \\
1 - y_L/\theta_L \in [0,1], \quad 1 - y_H/\theta_H \in [0,1].
\end{gathered}$$

Введя обозначения

$$u_L = v(1 - y_L/\theta_L) + y_L - t_L, \quad u_H = v(1 - y_H/\theta_H) + y_H - t_H$$

и

$$\varphi(y) = v(1 - y/\theta_H) - v(1 - y/\theta_L),$$

запишем данную задачу в следующем виде:

$$\mu G(u_L) + (1-\mu) G(u_H) \to \max_{y_L, u_L, y_H, u_H}$$

$$u_L \geqslant u_H - \varphi(y_H), \tag{8.1}$$

$$u_H \geqslant u_L + \varphi(y_L), \tag{8.2}$$

$$\begin{gathered}
\mu(v(1 - y_L/\theta_L) + y_L - u_L) + \\
+ (1-\mu)(v(1 - y_H/\theta_H) + y_H - u_H) \geqslant R,
\end{gathered} \tag{8.3}$$

$$y_L \in [0, \theta_L], \quad y_H \in [0, \theta_H].$$

Поскольку $\theta_L < \theta_H$ и $v'(\cdot)$ убывает, то

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{\theta_H}v'(1 - y/\theta_H) + \frac{1}{\theta_L}v'(1 - y/\theta_L) =$$
$$= \frac{1}{\theta_L}(v'(1 - y/\theta_L) - v'(1 - y/\theta_H)) + \left(\frac{1}{\theta_L} - \frac{1}{\theta_H}\right)v'(1 - y/\theta_H) > 0.$$

Таким образом, функция $\varphi(\cdot)$ является возрастающей. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(y) \geqslant 0$.

Проанализируем указанную задачу.

Во-первых, из условия самовыявления (8.2) следует, что базовая полезность потребителя типа H не ниже полезности потребителя типа L и превышает ее, если доход потребителя типа L положителен.

Во-вторых, следствием условий самовыявления является монотонность доходов потребителей. Сложив два условия самовыявления, получим, что

$$\varphi(y_H) \geqslant \varphi(y_L).$$

Следовательно (с учетом возрастания $\varphi(\cdot)$), более способные потребители получают более высокий доход: $y_H \geqslant y_L$.

В-третьих, очевидно, что бюджетное ограничение (8.3) является существенным. В противном случае, уменьшая налоги для потребителей обоих типов на одну и ту же величину, мы можем увеличить ожидаемую полезность, не нарушая при этом условий самовыявления.

В-четвертых, условие самовыявления для высокопродуктивного потребителя (8.2) также является существенным. Действительно, пусть это не так. Тогда, увеличивая налог на высокопродуктивного индивидуума и сокращая налог на низкопродуктивного так, чтобы величина средней полезности осталась неизменной ($\mu u_L + (1 - \mu)u_H = \text{const}$), мы можем за счет сокращения разницы в полезностях увеличить ожидаемое благосостояние, не нарушая ограничений задачи[19].

И наконец, в-пятых, условие самовыявления для низкопродуктивного потребителя (8.1) является следствием выполнения условия самовыявления для высокопродуктивного потребителя (как строго равенства) и монотонности доходов. Действительно, если $u_H = u_L + \varphi(y_L)$, то $u_L \geqslant u_H - \varphi(y_H)$ следует из того, что $y_H \geqslant y_L$ и что функция $\varphi(\cdot)$ является возрастающей.

[19]В терминах данной выше интерпретации благосостояния W как ожидаемой полезности подобное изменение представляет собой уменьшение риска. См. обсуждение сравнения лотерей по рискованности в параграфе 6.7, и, в частности, Теорему 6.13.

Эти рассуждения, с учетом подстановки $u_H = u_L + \varphi(y_L)$, приводят к следующей задаче:

$$\mu G(u_L) + (1-\mu)G(u_L + \varphi(y_L)) \to \max_{y_L, u_L, y_H}$$

$$\begin{aligned} &\mu(v(1 - y_L/\theta_L) + y_L) + \\ &\qquad + (1-\mu)(v(1 - y_H/\theta_H) + y_H - \varphi(y_L)) - u_L = R, \end{aligned} \tag{8.4}$$

$$y_L \leqslant y_H. \tag{8.5}$$

Рассмотрим свойства внутреннего решения данной задачи. Предположим, что ограничение монотонности доходов $y_L \leqslant y_H$ является несущественным. Тогда согласно теореме Куна—Таккера существует неотрицательный множитель Лагранжа λ, такой что в оптимальном решении последней задачи производные функции Лагранжа равны нулю:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial u_L} = \mu G'(u_L) + (1-\mu)G'(u_H) - \lambda = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_L} &= (1-\mu)G'(u_H)\varphi'(y_L) + \\ &+ \lambda\mu\left(-1/\theta_L v'(x_L) + 1\right) - \lambda(1-\mu)\varphi'(y_L) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_H} = \lambda(1-\mu)\left(-1/\theta_H v'(x_H) + 1\right) = 0.$$

Из первого условия следует, что множитель Лагранжа λ положителен. Из третьего условия следует, что предельная полезность досуга для потребителя типа H равна соответствующей ставке заработной платы:

$$v'(\bar{x}_H) = \theta_H.$$

Таким образом, досуг, а следовательно, и доход до уплаты налога у потребителя типа H такие же, как и в ситуации с наблюдаемостью типов: $\bar{x}_H = x_H^*$, $\bar{y}_H = y_H^* = (1 - x_H^*)\theta_H$.

Из второго условия получим

$$\theta_L - v'(x_L) = \frac{\theta_L(1-\mu)}{\lambda\mu} \cdot \varphi'(y_L)(\lambda - G'(u_H))$$

или, с учетом первого условия,

$$\theta_L - v'(x_L) = \theta_L(1-\mu)\varphi'(y_L) \cdot \frac{G'(u_L) - G'(u_H)}{\mu G'(u_L) + (1-\mu)G'(u_H)}. \tag{8.6}$$

Отсюда видим, что

$$v'(x_L) < \theta_L,$$

т. е. предельная полезность досуга для потребителя типа L меньше соответствующей ставки заработной платы. Значит, $\bar{x}_L > x_L^* > x_H^* = \bar{x}_H$ и, следовательно, доход до уплаты налога для потребителя типа L ниже, чем для потребителя типа H ($\bar{y}_L < \bar{y}_H$). Полученное решение удовлетворяет ограничению монотонности доходов, поэтому оно является и решением исходной задачи.

Заметим, что из двух характеристик оптимального налогообложения в условиях наблюдаемости типов — равенства и эффективной занятости — первая несовместима с условием самовыявления. Поэтому неравенство является следствием ненаблюдаемости типов.

Другая характеристика оптимального налогообложения в условиях наблюдаемости типов — эффективная занятость ($v'(x_L^*) = \theta_L$) совместима с условиями самовыявления, но достигается слишком дорогой ценой — высоким неравенством полезностей ($u_H - u_L = \varphi(y_L^*)$). Единственный способ сокращения этого неравенства, совместимый с условием самовыявления для потребителей типа H,— это сокращение рабочего времени потребителя типа L. Формула (8.6) показывает, что при такой функции благосостояния общество прибегает к определенному снижению неравенства за счет снижения эффективности. Таким образом, эта формула отражает общественно приемлемый компромисс между эффективностью и равенством.

Анализируя оптимальное налогообложение, мы рассматривали оптимальные пары доход — налог $(\bar{y}_L, \bar{t}_L)$, $(\bar{y}_H, \bar{t}_H)$ как решение задачи государства. Но эту задачу более естественно рассматривать как результат редуцирования следующей двухэтапной игры между государством и налогоплательщиками. На первом этапе государство предлагает каждому налогоплательщику на выбор одну из двух пар доход — налог (фактически выбор налога обуславливается выбранным потребителем доходом). На втором этапе потребители осуществляют такой выбор. Поскольку государство может предсказать поведение каждого потребителя, нетрудно видеть, что его стратегия как раз и описывается решением указанной задачи.

Однако такое описание взаимоотношений государства и налогоплательщика является неполным, поскольку не специфицируется, что будет, если фактический доход налогоплательщика окажется отличным от двух предложенных значений. Поэтому следует дополнить такое описание, задав значение налогов и при других уровнях доходов, т. е. рассматривать стратегию государства как функцию, сопоставляющую каждому возможному уровню дохода y соответствующий налог $t = t(y)$. Таким образом, в общем случае следует рассматривать стратегии государства как различные схемы нелинейного подоходного налога $t(\cdot)$. Тогда, столкнувшись с таким нелинейным налогом, потребитель типа θ выбирает свой потребительский план, решая следующую задачу:

$$v(1 - y/\theta) + y - t(y) \to \max_{y \in [0,\theta]}.$$

Назовем оптимальным нелинейным подоходным налогом такую функцию $t(\cdot)$, что для каждого из типов $\theta = L, H$ доход $\bar{y}_\theta$ является решением соответствующей задачи потребителя и выполнено

$$\bar{t}_L = t(\bar{y}_L), \quad \bar{t}_H = t(\bar{y}_H).$$

В задаче 8.28 предлагается доказать, что если существуют оптимальные пары $(\bar{y}_L, \bar{t}_L)$, $(\bar{y}_H, \bar{t}_H)$, то оптимальный нелинейный налог существует, причем определяется такими оптимальными парами не единственным образом.

Рис. 8.7 иллюстрирует рассмотренную модель налогообложения при асимметричной информации. График построен в координатах величин, которые могут наблюдаться государством — дохода до налогообложения y и потребления обычных благ z ($z = y - t$). Если бы налог отсутствовал, то бюджетной линией потребителя (она одна и та же для обоих типов потребителей) служила бы биссектриса положительного ортанта (показана штриховой линией). Если государство вводит подоходный налог $t(\cdot)$, то граница нового бюджетного множества задается уравнением $z = y - t(y)$. На рисунке жирным пунктиром показана бюджетная линия, соответствующая одной из возможных оптимальных схем. Кривая безразличия потребителя типа L касается бюджетной линии при $y = \bar{y}_L$. В точке касания наклон кривой безразличия меньше единицы, что отражает искажения стимулов потребителей типа L, связанные с налогом. Кривая безразличия потребителя типа H касается бюджетной линии в двух точках: при $y = \bar{y}_L$ и при $y = \bar{y}_H$, что соответствует тому, что условие самовыявления для потребителя типа H выполняется как равенство. При $y = \bar{y}_H$ наклон кривой безразличия равен единице.

Задачи

8.24 Покажите, что решение задачи выбора оптимальных паушальных налогов при наблюдаемости способностей (x_L^*, t_L^*), (x_H^*, t_H^*) не удовлетворяет условиям самовыявления для типа H.

8.25 Покажите, что в предположении $v'(0) > \theta_H$ и $v'(1) < \theta_L$ не существует граничных решений задачи оптимального налогообложения в условиях наблюдаемости типов потребителей.

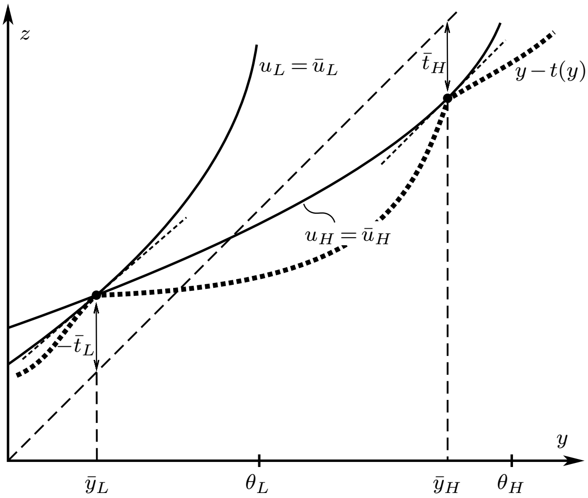


Рис. 8.7. *Оптимальный подоходный налог*

8.26 Покажите, что если $R = 0$ (чисто перераспределительная государственная программа), то для существования внутреннего решения задачи оптимального налогообложения при ненаблюдаемости типов потребителей условия $v'(0) > \theta_H$ и $v'(1) < \theta_L$ являются необходимыми и достаточными.

8.27 Покажите, что если $\varphi'(\cdot)$ убывает и разница в полезностях (u_L и u_H) достаточно мала, то разница в полезностях при оптимальном налогообложении тем меньше, чем выше мера Эрроу—Пратта неприятия риска, рассчитанная по функции $G(\cdot)$ (мера неприятия неравенства государством).

8.28 Покажите, что если существуют оптимальные пары $(\bar{y}_L, \bar{t}_L)$, $(\bar{y}_H, \bar{t}_H)$, являющиеся решением задачи оптимального налогообложения при ненаблюдаемости типов, то оптимальный нелинейный налог существует, причем определяется такими оптимальными парами не единственным образом (поскольку налоги для доходов, которые не выбирает ни один тип потребителей, могут быть выбраны достаточно произвольным способом).

8.29 (A) Покажите, что не существует оптимальной стратегии государства — нелинейной схемы подоходного налога, которая является дифференцируемой функцией.

(B) Покажите, что оптимальную нелинейную схему подоходного налога можно выбрать таким образом, что она окажется недифференцируемой только в одной точке.

8.30 Покажите, что если оптимальная нелинейная схема подоходного налога дифференцируема справа, то $t'(\bar{y}_H) = 0$, $t'(\bar{y}_L) > 0$, т. е. предельный налог на потребителя типа H равен нулю, а предельный налог на потребителя типа L положительный.

8.31 Сформулируйте понятие Парето-оптимальных (второго ранга) состояний экономики с подоходными налогами при асимметричной информации (ненаблюдаемости способностей), опираясь на Определение 8.2.

(A) Покажите, что полученное в данном параграфе решение задачи выбора оптимальных подоходных налогов при ненаблюдаемости способностей является Парето-оптимумом второго ранга.

(B) Охарактеризуйте все Парето-оптимумы второго ранга для экономики, рассмотренной в данном параграфе.

8.32 Предположим, что наблюдаемым является количество рабочего времени каждого потребителя (величина досуга), но не доход. Покажите, что оптимальное налогообложение в этом случае приводит к большему неравенству (разнице в полезностях потребителей после налогообложения).

Глава

Экстерналии

9

Рассмотренные ранее теоремы благосостояния устанавливают связь равновесия на «классических» (совершенных) рынках с Парето-оптимальными состояниями экономики. Если ослабить условия этих теорем (отказаться от тех или иных предположений, характеризующих совершенные рынки), то рыночные равновесия при отсутствии координации или регулирования могут оказаться неэффективными. В этом случае говорят о фиаско рыночной координации. Принято считать, что фиаско рыночной координации — следствия различных причин (экстерналии, общественные блага, рыночная власть экономических субъектов, их асимметричная информированность об условиях сделок, которые они заключают). В этой главе анализируются возможные влияния на рыночные равновесия экстерналий — не опосредованных рынком воздействий экономических субъектов друг на друга. Приводятся как характеристики соответствующих фиаско рынка — искажений в структуре цен и принимаемых экономическими субъектами решений, так и характеристики возможных мер преодоления таких фиаско рынка.

Мы рассмотрим модели ситуаций, в которых возникают влияния экономических субъектов друг на друга, которые по тем или иным причинам не опосредуются рынком (так называемые внешние влияния или экстерналии). Анализ опирается на два подхода к моделированию экстерналий. При первом подходе предполагается, что экстерналии связаны с объемами производства и потребления обычных благ непосредственно. При втором, альтернативном подходе (представленном в параграфе 9.7) экстерналии — это дополнительные переменные, напрямую не связанные с объемами производства и потребления.

9.1 Модель экономики с экстерналиями

Описание экономики с экстерналиями совпадает с соответствующим описанием совершенного рынка. Единственное отличие заключается в том, что аргументами функций полезности и производственных функций являются, вообще говоря, объемы потребления и производства благ всеми экономическими субъектами.

Формально внешние влияния (экстерналии) мы вводим в модели, предполагая, что функции полезности u_i и/или множества допустимых потребительских наборов X_i потребителей зависят от решений всех других экономических субъектов:

$$u_i = u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) \quad \text{и} \quad X_i = X_i(\mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}).$$

(В дальнейшем мы не будем рассматривать экстерналии, воздействующие на X_i.) Здесь, как и ранее, $\mathbf{x}$ — вектор объемов потребления, а $\mathbf{y}$ — вектор объемов производства. Точно так же мы предполагаем, что производственные множества Y_j фирм зависят от решений других экономических субъектов: $Y_j = Y_j(\mathbf{y}_{-j}, \mathbf{x})$; неявные производственные функции с учетом этой зависимости принимают вид

$$g_j = g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{-j}, \mathbf{x}).$$

Определение 9.1:

Если для некоторого потребителя $i \neq i^*$ его функция полезности $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ зависит от x_{i^*k} нетривиальным образом (т. е. не является константой по x_{i^*k}), то говорят, что потребление блага k потребителем i^* оказывает внешнее влияние на i-го потребителя. Соответствующая переменная x_{i^*k} называется экстерналией. Точно так же потребление блага k потребителем i^* оказывает внешнее влияние на j-го производителя, если $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ нетривиальным образом зависит от x_{i^*k}; производство блага k производителем j^* оказывает внешнее влияние на i-го потребителя, если $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ зависит от y_{j^*k}; производство блага k производителем j^* оказывает внешнее влияние на производителя $j \neq j^*$, если $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ зависит от y_{j^*k}. ◀

Для каждого потребителя i через E_i обозначим множество благ, таких что их потребление этим потребителем оказывает внешнее влияние хотя бы на одного потребителя или производителя. Соответственно для каждого производителя j через E_j обозначим множество благ, таких что их производство этим производителем оказывает внешнее влияние хотя бы на одного потребителя или производителя. Ясно,что если все множества E_i и E_j пусты, то модель экономики с экстерналиями совпадает с классической моделью.

В зависимости от характера оказываемого ими влияния различают положительные и отрицательные экстерналии (хотя такая классификация не является полной).

Отрицательными внешними влияниями являются, например, громкая музыка, курение, загрязнение окружающей среды. Мы будем считать экстерналии отрицательными, если функция полезности (неявная производственная функция) по ним убывает. Для дифференцируемых функций отрицательными можно называть экстерналии, для которых соответствующие производные отрицательны.

Есть и примеры положительных внешних влияний. Классический пример двусторонних положительных экстерналий — расположенные рядом сад и пасека: пчелы опыляют фруктовые деревья, что приводит к тому, что садовод собирает больший урожай, пчеловод же получает больше меда. В определенном смысле общественные блага, которым посвящена гл. 10,— это частный случай экстерналий. Положительные экстерналии формально определяются по аналогии с отрицательными (возрастание функции, положительность производных).

9.2 Проблема экстерналий

Если участники ситуации с экстерналиями способны без издержек измерять их уровень, устанавливать, охранять и контролировать права собственности на них (например, право оказывать влияния либо право не подвергаться влиянию), способны к переговорам, то обычно они достигают Парето-оптимального соглашения по координированию экстерналий (см. ниже «теорему Коуза»). В противном случае часто возникает «фиаско рынка», т. е. неоптимальность по Парето соответствующего некоординируемого равновесия. В простых ситуациях (например, частного равновесия) это «фиаско» проявляется в *избыточности* деятельности, порождающей экстерналии, в случае отрицательных экстерналий; при положительных же влияниях такая деятельность обычно *недостаточна* по сравнению с оптимальной.

Чтобы пояснить этот эффект, рассмотрим сначала пример *частного* равновесия[1] без координации, в котором проявляется проблема экстерналий.

Пример 9.1 («трагедия общин»[2])
Пусть каждый из m фермеров ($i = 1, \dots, m$) выбирает размер своего стада коров $y_i \geqslant 0$. Для его выпаса используется общественное пастбище со свободным доступом на него коров, принадлежащих данным

[1] Это означает в данном случае, что экономические субъекты не влияют на цены: они «малы» относительно экономики в целом.

[2] См. G. Hardin. The Tragedy of the Commons, *Science* **162** (1968): 1243–1248.

фермерам. Все коровы одинаковы, и одна корова дает φ молока, причем это количество зависит от размера всего стада $Y = \sum_{i=1}^{m} y_i$, т. е. $\varphi = \varphi(Y)$. Если фермер имеет y_i коров, то он получает от них $y_i \varphi(Y)$ молока.

В дальнейшем нам удобнее пользоваться функцией $f(Y) = Y\varphi(Y)$, выражающей зависимость общего надоя молока со всего стада как функцию от общего числа коров. Предполагается, что $f(0) = 0$, $f'(\cdot)$ положительна и убывает. Убывание $f'(\cdot)$ отражает падающую эффективность (истощение луга). Пусть цена молока равна p, стоимость одной коровы равна c, тогда индивидуальная прибыль i-го фермера при данных стратегиях $\mathbf{y}_{-i}$ прочих фермеров равна

$$\begin{aligned}\pi_i(y_i, \mathbf{y}_{-i}) = p y_i \varphi(y_i + \sum_{j \neq i} y_j) - c y_i = \\ = p \frac{y_i}{y_i + \sum_{j \neq i} y_j} f(y_i + \sum_{j \neq i} y_j) - c y_i.\end{aligned}$$

Равновесие при свободном использовании луга — это равновесие по Нэшу соответствующей игры, т. е. набор стратегий $\bar{y}_i$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\bar{y}_i \in \operatorname*{argmax}_{y_i} \pi_i(y_i, \bar{\mathbf{y}}_{-i}).$$

Если же вести выпас как единое предприятие, то оптимальным будет общий размер стада $\hat{Y}$, максимизирующий совокупную прибыль

$$\hat{Y} \in \operatorname*{argmax}_{Y} \{p f(Y) - cY\}.$$

Предположим, что $m > 1$ и что $(\bar{y}_i)$ и $\hat{Y}$ существуют[3]. Тогда

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i > \hat{Y},$$

т. е. свободный доступ к общинному пастбищу приводит к избыточному размеру стада[4].

[3]Установить условия существования и провести доказательство существования предоставляется читателю. Анализ аналогичных моделей приведен, например, в гл. 12 и 13, посвященных монопольным и олигопольным рынкам.

[4]Английский термин для этого явления, *congestion*, означает перегруженность, чрезмерно интенсивное использование.

Действительно, условия первого порядка для внутреннего (в смысле $\bar{y}_i > 0$ для всех i) равновесия по Нэшу имеют вид

$$p \cdot \left(\frac{\bar{Y} - \bar{y}_i}{\bar{Y}^2} f(\bar{Y}) + \frac{\bar{y}_i}{\bar{Y}} f'(\bar{Y}) \right) = c,$$

суммируя которые, получаем

$$p \cdot \left(\frac{m-1}{\bar{Y}} f(\bar{Y}) + f'(\bar{Y}) \right) = mc.$$

В то же время, условия первого порядка для оптимального размера общественного стада $\hat{Y}$ (при $\hat{Y} > 0$) имеют вид

$$pf'(\hat{Y}) = c.$$

Преобразуя эти два соотношения, получаем[5]

$$m(f'(\hat{Y}) - f'(\bar{Y})) = (m-1)\left(\frac{f(\bar{Y})}{\bar{Y}} - f'(\bar{Y}) \right) > 0.$$

Функция $f'(\cdot)$ убывает, поэтому $\bar{Y} > \hat{Y}$.

Если, например, $f(Y) = \sqrt{Y}$ и $c = 1$, то, как легко проверить,

$$\bar{Y} = p^2 \left(1 - \frac{1}{2m} \right)^2,$$

в то время как

$$\hat{Y} = \frac{p^2}{4}.$$

Так как $\left(1 - \frac{1}{2m}\right)^2 > \frac{1}{4}$ при $m > 1$, то $\bar{Y} > \hat{Y}$.

Неоптимальность равновесия объясняется тем, что когда фермер максимизирует свою прибыль, он не учитывает своего влияния на прибыль других. Воспользовавшись тем, что при $y_i > 0$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial y_j} = p \, \frac{y_i}{Y} \left(f'(Y) - \frac{f(Y)}{Y} \right) < 0 \text{ при } i \neq j,$$

и принимая во внимание характеристику равновесия

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = 0,$$

[5] Неравенство здесь следует из известного факта, что средняя производительность больше предельной, если производственная функция вогнута и значение производственной функции равно нулю при нулевых затратах.

получим, что в точке равновесия выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \pi_j}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{j=1}^{m} \pi_j < 0.$$

Это означает, что фермер мог бы увеличить общую прибыль, сократив свое стадо и используя пастбище менее интенсивно.

Любое такое изменение ухудшит положение того фермера, который осуществит подобную корректировку размера своего стада, хотя и улучшит положение всех остальных. Если же хотя бы двое фермеров немного уменьшат размеры своих стад, то возрастет прибыль *каждого* фермера. Другими словами, такое изменение будет представлять собой строгое Парето-улучшение. Рассмотрим дифференциально малое изменение размеров стада каждого фермера:

$$(dy_1, \ldots, dy_m).$$

При этом

$$d\pi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \pi_i}{\partial y_j} dy_j.$$

Если $i \neq j$, то $\partial \pi_i / \partial y_j < 0$. С другой стороны, в точке равновесия $\partial \pi_i / \partial y_i = 0$. Таким образом, если $dy_i \leqslant 0$ для всех фермеров i и по крайней мере для двух фермеров неравенство строгое, то $d\pi_i > 0$ для всех i. △

Продемонстрированная проблема избыточности вредных влияний носит весьма общий характер и встречается в ситуациях загрязнения окружающей среды, совместного использования ограниченных общих ресурсов (например, автомобильных дорог, мест отдыха) и т. п.

Это же явление с обратным знаком — тенденция к недостаточности деятельности, дающей положительные внешние эффекты. Например, если стремящийся к чисто личной выгоде колхозник или член бригады просто получает долю общей прибыли и не контролируем, то его усилия, при естественных предположениях, окажутся ниже оптимальных.

Как можно видеть из рассмотренного примера, основная причина неоптимальности в ситуациях с экстерналиями — игнорирование при нескоординированных индивидуальных решениях выгоды или вреда, создаваемых для других. Ниже мы рассмотрим различные способы коррекции неоптимальных равновесий. В частности, фиаско рынка с «общим благом» исчезнет, если некоторым образом распределить права собственности. Например, фермеры могут договориться об изначальных квотах выпаса (например, поровну от оптимального объема), а затем, при необходимости, продавать и покупать квоты друг у друга.

Задачи

9.1 Два охотника ($i = 1, 2$) охотятся в одном лесу. Количество дичи, добываемой i-м охотником (y_i), зависит от его усилий (x_i) и общего количества дичи в лесу (z) как $y_i = x_i z$. Последнее зависит от их усилий по следующему закону: $z = 6 - x_1 - x_2$. Охотники стремятся добыть как можно больше дичи. Сравните результаты некоординируемого поведения и оптимум Парето.

9.2 Месторождение нефти расположено под участками, принадлежащими двум различным нефтяным компаниям. Объем добычи компании (y_i) зависит от интенсивности добычи, которую она выбирает (x_i), составляя $x_i/(1+x_1+x_2)$ долю от общих запасов нефти в месторождении (1000 баррелей). Рыночная цена нефти — 15 песо за баррель, издержки на добычу одного барреля равны $(3+x_i)$ песо. Каков будет результат «эгоистичной погони за прибылью»? Покажите, что месторождение будет эксплуатироваться слишком интенсивно.

9.3 («Теорема о плохом колхозе») Пусть доход x_Σ артели («колхоза») есть простая сумма результатов $x_i \geqslant 0$, создаваемых усилиями отдельных участников $i = 1, \ldots, n$. Доход распределяется поровну. Функция полезности $u_i(w_i, x_i)$ каждого участника возрастает по его доходу $w_i = x_\Sigma/n$ и убывает по его усилиям x_i. Показать, что если хотя бы один участник в равновесии Нэша осуществляет усилия ($\exists i\colon x_i > 0$), то оно не Парето-оптимально. Предложите Парето-улучшение.

9.4 ⟦MWG⟧ В группе из m студентов каждый i-й студент учится по h_i часов в неделю. Эти усилия уменьшают его уровень полезности на величину $h_i^2/2$. В то же время это дает студенту добавку к стипендии, так что его полезность увеличивается на $\phi(h_i/\bar{h})$, где $\bar{h}$ — среднее количество часов, которое посвящают учебе студенты данной группы, а $\phi(\cdot)$ — дифференцируемая функция с положительной убывающей производной. Найдите характеристику внутреннего равновесия (по Нэшу). Сравните с оптимальным по Парето исходом. Дайте интерпретацию.

9.5 Каждый год n рыбаков ловят в озере рыбу. Ситуация начинается в году $t = 1$ и продолжается бесконечно. Количество рыбы на начало t-го года составляет y_t. За год i-й рыбак вылавливает

$x_{it}/(\sum_{i=1}^{n} x_{it}+1)$ долю от общего количества рыбы y_t, где x_{it} — его издержки на лов рыбы в году t. Цена на рыбу постоянна и равна p. Каждый рыбак максимизирует дисконтированную прибыль

$$\pi_i = \sum_{t=1}^{\infty} \pi_{it}\delta^{t-1}, \quad 0 < \delta < 1.$$

В начале года количество рыбы в два раза больше оставшегося к концу предыдущего года.

(A) Пусть каждый рыбак выбирает постоянную стратегию $x_i = x_{it}$. Покажите, что вылов рыбы будет больше оптимального.

(B) Как зависят выбор x_i и динамика рыбных запасов от цены на рыбу и дисконтирующего множителя δ?

(C) Предположим, что рыбаки остаются на озере только по одному году, и что каждый год приезжают n новых рыбаков. Как это повлияет на ситуацию?

9.3 Свойства экономики с экстерналиями. Теорема о неэффективности

Как и в случае совершенных рынков, при анализе рынков с экстерналиями сопоставление равновесных и эффективных состояний уместно провести на основе их характеристик. В этом параграфе мы получим характеристики Парето-эффективных и равновесных состояний экономики с экстерналиями и на их основе покажем, что, как правило, равновесные состояния неэффективны. Другими словами, в экономике с экстерналиями, как правило, имеет место фиаско рыночной координации и обе теоремы благосостояния не выполняются.

Не представляет труда переформулировать понятие Парето-эффективности для экономики с экстерналиями. По аналогии с классической моделью доказывается утверждение, характеризующее Парето-оптимальные состояния экономики с экстерналиями: допустимое состояние $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является Парето-оптимумом тогда и только тогда, когда оно является решением следующей задачи

$$u_{i_0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \max_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$$
$$u_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant \hat{u}_i = u_i(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})\ \forall i \in I, i \neq i_0,$$
$$\mathbf{x}_i \in X_i\ \forall i \in I,$$
$$g_j(\mathbf{y},\mathbf{x}) \geqslant 0\ \forall j \in J,$$
$$\sum_{i\in I}(x_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j\in J} y_{jk}\ \forall k \in K.$$

для каждого из m потребителей ($i_0 = 1,\ldots,m$).

На основе этого свойства Парето-оптимального состояния можно получить его дифференциальную характеристику. Лагранжиан этой задачи для некоторого i_0 имеет вид

$$\mathbb{L} = \sum_{i\in I}\lambda_i u_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \sum_{j\in J}\mu_j g_j(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \sum_{k\in K}\sigma_k\Big(\sum_{j\in J} y_{jk} - \sum_{i\in I}(x_{ik} - \omega_{ik})\Big)$$

Условия первого порядка для внутренних решений имеют вид

$$\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x_{ik}} = \sum_{s\in I}\lambda_s\frac{\partial u_s(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})}{\partial x_{ik}} + \sum_{j\in J}\mu_j\frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_{ik}} - \sigma_k = 0\ \forall i,k, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial y_{jk}} = \sum_{i\in I}\lambda_i\frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})}{\partial y_{jk}} + \sum_{s\in J}\mu_s\frac{\partial g_s(\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{x}})}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0\ \forall j,k. \tag{9.2}$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что существует благо k_0, обладающее следующими свойствами:

благо k_0 не порождает внешних влияний, т. е.

$$k_0 \notin E_i\ \forall i \in I \quad \text{и} \quad k_0 \notin E_j\ \forall j \in J;$$

в рассматриваемом состоянии экономики ($\mathbb{O}$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{ik_0}} > 0\ \forall i \in I \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk_0}} < 0\ \forall j \in J.$$

Такое благо может играть роль естественной единицы счета для экономики[6].

Если в рассматриваемом оптимуме Парето существует подобное благо, то, как нетрудно проверить, выполнены условия регулярности теоремы Куна—Таккера и можно считать, что $\lambda_{i_0} = 1$ (для всех

[6] Естественно интерпретировать это благо как время потребителей, которое они могут использовать как рабочее время и как досуг.

$i_0 = 1, \ldots, m$). Это позволяет исключить из полученных соотношений множители Лагранжа и представить дифференциальную характеристику в терминах предельных норм замещения.

Из условий первого порядка для блага k_0 получим

$$\lambda_i = \frac{\sigma_{k_0}}{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})/\partial x_{ik_0}} \ \forall i \in I,$$

$$\mu_j = -\frac{\sigma_{k_0}}{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})/\partial y_{jk_0}} \ \forall j \in J.$$

Кроме того, для потребителя i_0 соотношение $\partial \mathbb{L}/\partial x_{i_0 k_0} = 0$ можно записать в виде

$$\frac{\partial u_{i_0}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial x_{i_0 k_0}} = \sigma_{k_0}.$$

Следовательно, $\sigma_{k_0} > 0$. (Таким образом, множители Лагранжа λ_i и μ_j все положительны.) Произведя подстановку, получим следующую дифференциальную характеристику Парето-границы в экономике с экстерналиями:

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} + \sum_{s \neq i} \frac{\partial u_s/\partial x_{ik}}{\partial u_s/\partial x_{sk_0}} - \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j/\partial x_{ik}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}, \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} - \sum_{i \in I} \frac{\partial u_i/\partial y_{jk}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial g_s/\partial y_{jk}}{\partial g_s/\partial y_{sk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}. \tag{9.4}$$

Из (9.3), в частности, следует, что для каждой пары потребителей, i_1 и i_2, и для любого блага k выполнено соотношение

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i/\partial x_{i_1 k}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} - \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j/\partial x_{i_1 k}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \sum_{i \in I} \frac{\partial u_i/\partial x_{i_2 k}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} - \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j/\partial x_{i_2 k}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}. \tag{9.5}$$

Аналогичное соотношение справедливо для любой пары экономических субъектов, потребителей или производителей.

Сравним полученную дифференциальную характеристику Парето-оптимальных состояний для экономики с экстерналиями с дифференциальной характеристикой рыночного равновесия $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ в этой экономике (в предположении, что такое равновесие существует). Как и выше, будем предполагать, что существует благо k_0, такое что выполнены условия ($\mathbb{O}$).

Здесь мы делаем обычное для анализа моделей (ситуаций) с экстерналиями в рамках неоклассического подхода и восходящее к Пигу предположение, что экономические субъекты считают воздействующие на них экстерналии фиксированными (экзогенными, величина которых не зависит от их решений). Таким образом предполагается, что экономические субъекты имеют полное и ничем не ограниченное право на использование приобретаемых именно ими благ и услуг и (по каким-то причинам) не могут вступать в переговоры (сделки) относительно права контроля за использованием благ и услуг, приобретенных другими экономически субъектами. И, как следствие, отсутствуют рынки таких прав. Таким образом, экономический субъект максимизирует свою целевую функцию только по «своим» переменным.

Так, i-й потребитель максимизирует полезность по своему потребительскому набору $\mathbf{x}_i$. Задача потребителя имеет вид

$$u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) \to \max_{\mathbf{x}_i}$$
$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i \leqslant \beta_i,$$
$$\mathbf{x}_i \in X_i.$$

В свою очередь, j-й производитель максимизирует прибыль, выбирая объем производства $\mathbf{y}_j$, т. е. решает следующую задачу:

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j}$$
$$g_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{-j}, \mathbf{x}) \geqslant 0.$$

Как несложно показать, цена блага k_0 во внутреннем равновесии положительна. Дифференциальная характеристика рыночного равновесия имеет привычный вид:

$$\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})/\partial x_{ik}}{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})/\partial x_{ik_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}} \quad \text{для всех } i \in I,$$

$$\frac{\partial g_j(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})/\partial y_{jk}}{\partial g_j(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})/\partial y_{jk_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}} \quad \text{для всех } j \in J,$$

где k — произвольное благо.

Отсюда следует, что для любой пары потребителей i_1 и i_2 выполнено равенство

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k_0}} = \frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k_0}}. \tag{9.6}$$

Сравнивая дифференциальные характеристики равновесия и Парето-оптимума, мы видим, что левая часть соотношения (9.6) является одним из слагаемых левой части соотношения (9.5). То же самое можно сказать о правых частях. Исходя из общих соображений трудно ожидать, что одно из этих соотношений влечет за собой другое.

Вполне может оказаться, что эти две дифференциальные характеристики несовместны. Несовместность дифференциальных характеристик означала бы, что справедливо утверждение, противоположное по смыслу теоремам благосостояния, т. е. аналоги теорем благосостояния для такой экономики были бы неверны.

С другой стороны, сложно выявить достаточно общие условия, которые гарантировали бы, что дифференциальные характеристики рыночного равновесия и Парето-оптимума несовместны в экономике с экстерналиями. Это связано с тем, что деятельность любого экономического субъекта в общем случае может влиять на любого другого экономического субъекта, и структура взаимосвязей в экономике с экстерналиями может быть слишком сложной, чтобы позволить делать однозначные выводы. По-видимому, нельзя обойтись без того, чтобы предположить некоторого рода «регулярное» поведение производных по экстерналиям. Следующая теорема использует один из возможных наборов таких предположений (несомненно, эти предположения можно было бы ослабить).

Теорема 9.1:

Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — допустимое состояние экономики с экстерналиями такое, что $\mathbf{x}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in I$, функции полезности и производственные функции дифференцируемы. Пусть, кроме того,

- существует благо k_0, для которого выполнены условия ($\mathbb{O}$);
- все экстерналии, связанные с объемом производства производителем j^* блага k^* ($y_{j^*k^*}$), неотрицательные в том смысле, что

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_{j^*k^*}} \geqslant 0 \text{ для любого } i \in I,$$

$$\frac{\partial g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_{j^*k^*}} \geqslant 0 \text{ для любого } j \in J, \text{ такого что } j \neq j^*,$$

  причем хотя бы одно неравенство строгое;
- потребление хотя бы одним потребителем i_0 блага k^* ($x_{i_0k^*}$) не порождает внешних влияний, т. е. $k^* \notin E_{i_0}$.

Тогда следующие два утверждения не могут быть верными одновременно.

- Существуют цены $\mathbf{p}$ и распределение собственности, такие что $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ — рыночное равновесие этой экономики.
- Состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — Парето-оптимум этой экономики. ⌟

Доказательство: Пусть состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является Парето-оптимальным. Тогда для $k = k^*$ и $j = j^*$ выполняется соотношение (9.4). Как мы предположили, экстерналии, связанные с $y_{j^*k^*}$, положительные, и, кроме того, производные, связанные с благом k_0, $\partial u_i / \partial x_{ik_0}$ и $\partial g_j / \partial y_{jk_0}$ положительны и отрицательны соответственно, поэтому сумма «экстернальных слагаемых» в левой части уравнения (9.4) больше нуля. Это означает, что

$$\frac{\partial g_{j^*} / \partial y_{j^*k^*}}{\partial g_{j^*} / \partial y_{j^*k_0}} < \frac{\sigma_{k^*}}{\sigma_{k_0}}.$$

Кроме того, для $k = k^*$ и $i = i_0$ в уравнении (9.3), по предположению, нет слагаемых, связанных с экстерналиями, т. е. его можно записать в виде

$$\frac{\partial u_{i_0} / \partial x_{i_0k^*}}{\partial u_{i_0} / \partial x_{i_0k_0}} = \frac{\sigma_{k^*}}{\sigma_{k_0}}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial g_{j^*} / \partial y_{j^*k^*}}{\partial g_{j^*} / \partial y_{j^*k_0}} < \frac{\partial u_{i_0} / \partial x_{i_0k^*}}{\partial u_{i_0} / \partial x_{i_0k_0}}.$$

С другой стороны, если бы состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ было равновесным, то в нем то же самое соотношение должно было бы выполняться как равенство:

$$\frac{\partial g_{j^*} / \partial y_{j^*k^*}}{\partial g_{j^*}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) / \partial y_{j^*k_0}} = \frac{\partial u_{i_0} / \partial x_{i_0k^*}}{\partial u_{i_0} / \partial x_{i_0k_0}}.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ не может быть одновременно равновесием и Парето-оптимумом. ■

Замечание: В данной теореме мы предположили, что экстерналии *положительны*, связаны с *производством* и что существует *потребитель*, потребление которым того же блага не создает экстерналий. Все эти три предположения можно изменить, т. е. рассмотреть *отрицательные* экстерналии и/или экстерналии, связанные с *потреблением*, и/или предположить существование *производителя*, производство которым того же блага не создает экстерналий. Теорема при этом остается верной. Доказательство проводится аналогично.

Замечание: Хотя теорема одна, но она противоположна *обеим* теоремам благосостояния. Возможны две ее переформулировки.

1. Равновесие в экономике с экстерналиями не может быть Парето-оптимальным.

2. Парето-оптимум в экономике с экстерналиями нельзя реализовать как рыночное равновесие (ни при каких ценах и распределении доходов).

Неоптимальность равновесия $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ в условиях Теоремы 9.1 можно подтвердить также, подобрав Парето-улучшение, т. е. другое допустимое состояние экономики $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, которое доминирует по Парето состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$. При этом Парето-улучшение $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ можно подобрать так, чтобы в нем производство положительных экстерналий $y_{j^*k^*}$ было строго больше, чем в рассматриваемом равновесии.

Если же все экстерналии, связанные с некоторой переменной $y_{j^*k^*}$, отрицательные, то аналогичным образом можно подобрать Парето-улучшение так, чтобы в нем производство экстерналий было строго меньше, чем в рассматриваемом равновесии. Верны и аналогичные утверждения для благ, вызывающих экстерналии в потреблении. Доказательство этих утверждений мы опускаем, иллюстрируя их на конкретных примерах экономик с экстерналиями.

Проиллюстрируем проведенный анализ для частного случая экономики с экстерналиями.

Пример 9.2 (общее равновесие; экстерналии в производстве ⟦Маленво⟧)

Рассмотрим экономику с тремя товарами, одним (репрезентативным) потребителем и двумя производителями. Производитель $j = 1, 2$ производит только j-й продукт, используя единственный производственный фактор — труд. Будем обозначать объемы производства y_1 и y_2, а затраты труда — r_1 и r_2 соответственно[7]. Будем предполагать также, что технологии представимы явными производственными функциями следующего вида:

$$y_1 \leqslant f_1(r_1, y_2), \quad y_2 \leqslant f_2(r_2, y_1),$$

т. е. выпуск каждого блага при тех же затратах труда зависит от выпуска другого блага. Это означает, что имеют место экстерналии.

Предпочтения потребителя заданы функцией полезности $u(x_1, x_2, x_3)$, зависящей от объемов потребления двух производимых в данной экономике благ $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$ и от досуга $x_3 \geqslant 0$. Потребитель обладает только запасом ω третьего блага (времени).

Функция полезности и производственные функции дифференцируемы. Кроме того, производные этих функций везде имеют «есте-

[7]Заметим, что мы здесь отошли от стандартного представления производства в терминах чистых выпусков и несколько упростили обозначения, т. е. перешли к новым переменным: $y_j = y_{jj}$ $(j = 1, 2)$, $r_j = -y_{j3}$.

ственные» знаки, а именно:

$$\frac{\partial f_2}{\partial r_2} > 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial r_1} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} > 0.$$

Балансовые ограничения в рассматриваемой экономике имеют вид

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad r_1 + r_2 + x_3 = \omega.$$

Парето-оптимальные состояния данной экономики[8]

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{r}_1, \hat{r}_2),$$

должны быть решениями следующей задачи[9]:

$$\begin{gathered} u(y_1, y_2, \omega - r_1 - r_2) \to \max_{y_1, y_2, r_1, r_2} \\ y_1 \leqslant f_1(r_1, y_2), \quad y_2 \leqslant f_2(r_2, y_1), \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \\ r_1 + r_2 \leqslant \omega. \end{gathered}$$

Задача, характеризующая Парето-оптимум, здесь одна, так как потребитель один. Лагранжиан этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathbb{L}(y_1, y_2, r_1, r_2, \mu_1, \mu_2) = \\ &\quad = u(y_1, y_2, \omega - r_1 - r_2) + \mu_1(f_1(r_1, y_2) - y_1) + \mu_2(f_2(r_2, y_1) - y_2). \end{aligned}$$

Будем предполагать, что решения этой задачи внутренние. Тогда Парето-оптимальное состояние можно охарактеризовать следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \mu_1 + \mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} + \mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} - \mu_2 = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_3} + \mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial r_1} = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial x_3} + \mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial r_2} = 0. \end{gathered}$$

Поскольку предельный продукт труда положителен, можно записать множители Лагранжа как

$$\mu_1 = \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_1 / \partial r_1}, \quad \mu_2 = \frac{\partial u / \partial x_3}{\partial f_2 / \partial r_2}$$

[8] Скорее всего, для конкретных функций в рассматриваемой экономике будет только одно Парето-оптимальное состояние. Но это нам в данном случае неважно.

[9] Данная задача получена на основе конкретизации для рассматриваемой экономики характеристики Парето-оптимума и замены переменных.

и получить следующую характеристику Парето-оптимума:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u/\partial x_3}{\partial f_1/\partial r_1} + \frac{\partial u/\partial x_3}{\partial f_2/\partial r_2}\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u/\partial x_3}{\partial f_1/\partial r_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_2} - \frac{\partial u/\partial x_3}{\partial f_2/\partial r_2} = 0$$

или, если разделить на положительную предельную полезность досуга $\partial u/\partial x_3$,

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} - \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2},$$
$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} - \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1}.$$

Теперь охарактеризуем рыночные равновесия в данной экономике, при которых все блага потребляются в положительных количествах (внутренние равновесия). Пусть

$$(p_1, p_2, p_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{r}_1, \bar{r}_2) —$$

такое равновесие. Выпуск $\bar{y}_j$ и затраты труда $\bar{r}_j$ являются решением следующей задачи (задачи максимизации прибыли j-го производителя):

$$\pi_j = p_j f_j(r_j, \bar{y}_{-j}) - p_3 r_j \to \max_{r_j}.$$

Поэтому в равновесии

$$\frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} = \frac{p_1}{p_3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} = \frac{p_2}{p_3},$$

т. е. предельные нормы трансформации равны отношениям цен.

С другой стороны, функция Лагранжа для задачи потребителя имеет вид

$$\mathbb{L} = u(x_1, x_2, x_3) + \lambda(\beta - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)).$$

Дифференцируя ее по x_1, x_2 и x_3 и упрощая полученные условия первого порядка, получим обычную характеристику потребительского набора $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ — равенство отношения предельных полезностей отношению цен:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_1}{p_3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_2}{p_3}.$$

Следовательно, в равновесии выполнено

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial r_1}, \quad \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2}.$$

Если хотя бы одна из производных $\partial f_1/\partial y_2$ и $\partial f_2/\partial y_1$, характеризующих предельный эффект внешнего влияния, в состоянии равновесия не равна нулю, то, сравнивая дифференциальные характеристики, мы можем сделать вывод, что внутреннее равновесие не может быть Парето-оптимальным, и наоборот, внутренний Парето-оптимум невозможно реализовать как равновесие.

Величины $\frac{\partial f_j/\partial y_{-j}}{\partial f_j/\partial r_j}$, на которые отличаются характеристики равновесия и Парето-оптимума, показывают (в случае положительных экстерналий), сколько труда можно «сэкономить» при производстве данного блага, увеличив на «малую единицу» производство другого блага. Рассчитывая оптимальный объем затрат труда, производитель не учитывает этот эффект.

При выполнении условия $\partial f_j/\partial y_{-j} = 0$ в состоянии рыночного равновесия характеристика равновесия будет иметь такой же вид, как и характеристика Парето-оптимального состояния. Но поскольку обе эти характеристики представляют необходимые условия, из этого факта нельзя заключить без дополнительных предположений, что равновесие Парето-оптимально. Стандартный подход к доказательству оптимальности рыночного равновесия опирается на предположение о вогнутости производственных функций и функций полезности. Однако предположение о вогнутости производственных функций по «чужим» переменным (экстерналиям) представляется произвольным и ему нельзя дать столь же естественной интерпретации, как вогнутости по «своим» переменным.

Проиллюстрируем утверждение о неоптимальности производства благ в данном примере, указав в явном виде Парето-улучшение для равновесного состояния. Построим это улучшение в дифференциалах, т. е. найдем малый допустимый сдвиг

$$(dx_1, dx_2, dx_3, dy_1, dy_2, dr_1, dr_2)$$

из точки равновесия, который бы повышал полезность потребителя.

Чтобы искомый сдвиг был допустимым, он не должен нарушать балансовые и производственные ограничения. Относительно производства предполагаем, что технологии остаются на эффективной границе, так что неявные производственные функции остаются равными нулю. Соответствующие условия получаем дифференцированием этих ограничений:

$$dy_1 = dx_1, \quad dy_2 = dx_2, \quad dr_1 + dr_2 + dx_3 = 0,$$
$$dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} dy_2, \quad dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1.$$

Отсюда

$$dx_3 = -dr_1 - dr_2 =$$
$$= -\frac{1}{\partial f_1/\partial r_1}\left(dy_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y_2} dy_2\right) - \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2}\left(dy_2 - \frac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1\right).$$

Полезность потребителя изменится на величину

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3.$$

Подставим dx_k, выраженные через dy_j:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dy_2 -$$
$$- \frac{\partial u}{\partial x_3}\left[\frac{1}{\partial f_1/\partial r_1}\left(dy_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y_2} dy_2\right) + \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2}\left(dy_2 - \frac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1\right)\right] =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x_3}\left[\left(\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} - \frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} + \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2}\right) dy_1 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} - \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} + \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1}\right) dy_2\right].$$

Учитывая дифференциальную характеристику равновесия, получим, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2} dy_1 + \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1} dy_2\right).$$

Если хотя бы одна из производных $\partial f_1/\partial y_2$ и $\partial f_2/\partial y_1$ не равна нулю, то можно подобрать изменения объемов производства dy_1 и dy_2 так, что полезность потребителя увеличится ($du > 0$). Это означает, что соответствующее изменение объемов производства определяет Парето-улучшение. Так, если, например, $\partial f_1/\partial y_2 = 0$ (случай одностороннего внешнего влияния) и $\partial f_2/\partial y_1 > 0$ (случай положительных внешних влияний), то следует взять $dy_1 > 0$, т. е. локальное Парето-улучшение связано с увеличением производства блага, вызывающего положительные экстерналии в производстве другого блага. Это можно интерпретировать как локально недостаточное производство положительных экстерналий. Остается открытым вопрос о том, является ли производство в равновесии недостаточным по сравнению также и с Парето-оптимальным состоянием экономики, т. е. верно ли, что $\bar{y}_1 < \hat{y}_1$. Ответить на этот вопрос можно только при дополнительных предположениях относительно рассматриваемой экономики.

Покажем, что предположение, что равновесие внутреннее, существенно для справедливости Теоремы 9.1.

Пусть в равновесии $\bar{x}_3 = 0$. Тогда оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{\partial f_2/\partial r_2}{\partial f_1/\partial r_1}.$$

В то же время, в оптимальном состоянии должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{\frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} - \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2}}{\frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} - \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1}}.$$

Эти две характеристики совпадут, если

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial r_1}\right)^2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial r_2}\right)^2 \frac{\partial f_1}{\partial y_2}.$$

Нетрудно придумать конкретные функции, для которых данная характеристика будет достаточным условием Парето-оптимальности, так что равновесие окажется Парето-оптимальным. $\triangle$

Подчеркнем, что условия дифференцируемости функций полезности и производственных функций также существенны для справедливости Теоремы 9.1.

Существуют и опровергающие примеры с взаимокомпенсацией экстерналий, когда часть экстерналий, связанных с некоторой переменной, положительные, а часть — отрицательные.

Возможная неэффективность рыночного равновесия в экономике с экстерналиями часто служит обоснованием государственного регулирования экономики. Существует два основных способа такого регулирования: прямое — количественные ограничения на деятельность, вызывающую экстерналии, и косвенное — налогообложение такой деятельности. В следующих параграфах мы рассмотрим эти способы подробнее.

Задачи

9.6 При доказательстве неоптимальности нерегулируемого равновесия в экономике с экстерналиями условие внутренности равновесия используется для того, чтобы ...... (заполните пропуск).

9.7 В экономике обмена два потребителя и два блага. Функция полезности второго потребителя зависит от уровня собственного потребления, а также от уровня полезности первого потребителя. Найдите и сопоставьте дифференциальные характеристики внутреннего равновесия и внутреннего Парето-оптимума.

9.8 Для следующих трех экономик

- запишите дифференциальную характеристику Парето-оптимума,
- запишите дифференциальную характеристику равновесия,
- предложите Парето-улучшение в дифференциалах.

(A) ⟦Маленво⟧ В экономике с двумя благами, двумя потребителями и одной фирмой потребление первого блага является престижным и вызывает зависть у другого потребителя (т. е. имеют место отрицательные экстерналии, связанные с потреблением этого блага). Таким образом, функции полезности имеют вид $u(x_{11}, x_{12}, x_{12})$ и $u(x_{21}, x_{22}, x_{11})$. Технология фирмы позволяет производить из единицы второго блага единицу первого блага.

(B) В экономике с двумя благами предпочтения потребителей $i = 1, \dots, m$ заданы функциями полезности

$$u_i\Bigl(x_i, z_i, \sum_{s=1}^{m} z_s\Bigr).$$

Имеется технология, по которой из единицы блага x можно произвести единицу блага z, и наоборот.

(C) В экономике с двумя благами, одним потребителем и n фирмами технологии фирм описываются неявными производственными функциями: $g_j(y_{j1}, y_{j2}) \geqslant 0$. Полезность потребителя зависит от суммарного объема производства первого блага:

$$u\Bigl(x_1, x_2, \sum_{j=1}^{n} y_{j1}\Bigr).$$

9.4 Равновесие с квотами на экстерналии

Идея квот состоит в том, чтобы непосредственно регулировать количество экстерналий, фиксируя его на нужном уровне[10].

Определение 9.2:

Назовем квотой ограничение на потребление блага каким-либо потребителем или на производство блага каким-либо производителем вида $x_{ik} = \tilde{x}_{ik}$ ($y_{jk} = \tilde{y}_{jk}$). ◀

В дальнейшем будем обозначать через Q_i множество благ k, таких что на величину x_{ik} их потребления i-м потребителем установлена квота, а через Q_j — множество благ k, таких что на величину y_{jk} их производства j-м производителем установлена квота.

При наличии квот задача потребителя i модифицируется следующим образом:

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) \to \max_{\mathbf{x}_i} \\ \mathbf{p}\mathbf{x}_i \leqslant \beta_i, \\ x_{ik} = \tilde{x}_{ik} \ \text{ для всех } k \in Q_i, \\ \mathbf{x}_i \in X_i. \end{gathered} \tag{9.7}$$

Соответственно при наличии квот задача производителя j имеет вид

$$\begin{gathered} \mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j} \\ y_{jk} = \tilde{y}_{jk} \ \text{ для всех } k \in Q_j, \\ g(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{-j}, \mathbf{x}) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{9.8}$$

Введем также обозначения $\tilde{\mathbf{x}} = \{\, \tilde{x}_{ik} \mid k \in Q_i \,\}$ и $\tilde{\mathbf{y}} = \left\{\, \tilde{y}_{jk} \;\middle|\; k \in Q_j \,\right\}$.

Определение 9.3:

Назовем $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ равновесием с квотами $\langle \tilde{\mathbf{x}}, (Q_i)_i, \tilde{\mathbf{y}}, (Q_j)_j \rangle$ и трансфертами $\mathbf{S}$ ($\sum_{i \in I} S_i = 0$), если

* $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя (9.7) при $\mathbf{x}_{-i} = \bar{\mathbf{x}}_{-i}$, $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$, ценах $\bar{\mathbf{p}}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i$$

и квотах, определяемых $\tilde{\mathbf{x}}$ и Q_i;

---

[10] Обычно на практике количество отрицательных экстерналий просто ограничивают сверху, а положительных — снизу.

* $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя (9.8) при $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{y}_{-j} = \bar{\mathbf{y}}_{-j}$, ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и квотах, определяемых $\tilde{\mathbf{y}}$ и Q_j;
* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние, т. е.

$$\sum_{i \in I} (\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j \in J} \bar{y}_{jk} \ \forall k \in K.$$

◀

Для этого равновесия верен аналог второй теоремы благосостояния, т. е. утверждение, что Парето-оптимум экономики с экстерналиями можно реализовать как равновесие.

Теорема 9.2:

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики с экстерналиями с $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Предположим также, что

* $\hat{x}_{ik} > 0$ для всех $i \in I$ и $k \notin E_i$;
* функции полезности $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ дифференцируемы по переменным $x_{ik}, k \notin E_i$; производственные функции $g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ дифференцируемы по переменным $y_{jk}, k \notin E_j$;
* существует благо k_0, для которого выполнены условия ($\mathbb{O}$);
* функции $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вогнуты по переменным $x_{ik}, k \notin E_i$; функции $g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ вогнуты по переменным $y_{jk}, k \notin E_j$.

Тогда существуют цены $\mathbf{p}$, множества квотируемых благ Q_i и Q_j, квоты $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ и трансферты $\mathbf{S}$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является равновесием с квотами. При этом множества квотируемых благ можно выбрать так, что $Q_i = E_i$ и $Q_j = E_j$. ┘

Доказательство: Ограничимся схемой доказательства. В предположениях теоремы выполнены условия регулярности, и можно воспользоваться теоремой Куна—Таккера для того, чтобы охарактеризовать Парето-оптимум $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$. В качестве цен благ возьмем множители Лагранжа для балансовых ограничений σ_k. В качестве множеств Q_i и Q_j квотируемых благ выберем любые множества благ, содержащие все блага из E_i и E_j соответственно. Квоты установим в соответствии с рассматриваемым оптимальным состоянием, т. е. $\tilde{x}_{ik} = \hat{x}_{ik}$ $\forall k \in Q_i$ и $\tilde{y}_{jk} = \hat{y}_{jk}$ $\forall k \in Q_j$.

Далее доказывается, что $\hat{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи (9.7) при данных ценах, квотах и доходах $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Действительно, точка $\hat{\mathbf{x}}_i$ является допустимой в этой задаче и в ней выполнены условия первого порядка, что следует из выполнения условий первого порядка для оптимума Парето:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial x_{ik}} = \sigma_k \ \forall k \notin E_i.$$

Условия первого порядка в данном случае являются достаточными условиями оптимальности. Аналогичным образом доказывается, что $\hat{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи (9.8).

Для доказательства теоремы осталось указать величи́ны трансфертов $\mathbf{S}$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{S})$ является равновесием с квотами. Трансферты следует подобрать так, чтобы с их учетом доходы потребителей были равны расходам, т. е. $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Требуемыми трансфертами являются величины

$$S_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}_j.$$

Несложно проверить, что сумма этих величин равна нулю. ■

Замечание: Включив в множество Q_i (Q_j) все блага, по которым функция полезности $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (соответственно производственная функция $g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x})$) не является вогнутой, мы получим вариант доказанной теоремы для случая невыпуклой экономики. Этот прием можно использовать и для реализации Парето-оптимума как равновесия в невыпуклой экономике без экстерналий.

Замечание: Теорема верна и без условий дифференцируемости. При этом вторую часть условия ($\mathbb{O}$) можно, например, заменить на аналогичные условия монотонности по благу k_0.

9.5 Равновесие с налогами на экстерналии

Идея налогов на экстерналии состоит в том, чтобы изменить стимулы экономических субъектов в нужном направлении. По смыслу такие налоги должны отражать уровень влияния данного экономического субъекта на остальных, восполняя тем самым недостающие рыночные механизмы стимулирования (отсутствующие рынки). Это менее жесткий способ регулирования экстерналий, чем квоты, и его применение на практике требует менее точной информации.

В дальнейшем будем иметь дело лишь с налогами с единицы экстерналии, выраженными в деньгах. Обозначим через P_i множество благ k, потребление которых i-м потребителем облагается налогами.

Аналогично через P_j обозначим множество благ k, производство которых j-м производителем облагается налогами.

Рассмотрим, как будут вести себя экономические субъекты, облагаемые налогами (см. также гл. 8). Пусть t_{ik} — ставка налога на потребление блага k потребителем i. Тогда задача i-го потребителя модифицируется следующим образом:

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) \to \max_{\mathbf{x}_i} \\ \sum_{k \notin P_i} p_k x_{ik} + \sum_{k \in P_i} (p_k + t_{ik}) x_{ik} \leqslant \beta_i, \\ \mathbf{x}_i \in X_i. \end{gathered} \tag{9.9}$$

Условия первого порядка для внутреннего решения $\bar{\mathbf{x}}_i$ данной задачи имеют вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k \tag{9.10}$$

для всех не облагаемых налогами благ ($k \notin P_i$) и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \nu_i (p_k + t_{ik}) \tag{9.11}$$

для всех облагаемых налогами благ ($k \in P_i$), где ν_i — множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению.

Соответственно если t_{jk} — ставка налога на производство блага k производителем j, то задача производителя j имеет вид

$$\begin{gathered} \sum_{k \notin P_j} p_k y_{jk} + \sum_{k \in P_j} (p_k - t_{jk}) y_{jk} \to \max_{\mathbf{y}_j} \\ g(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{-j}, \mathbf{x}) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{9.12}$$

Условия первого порядка для решения $\bar{\mathbf{y}}_j$ данной задачи имеют вид

$$\kappa_j \frac{\partial g}{\partial y_{jk}} + p_k = 0 \tag{9.13}$$

для всех не облагаемых налогами благ и

$$\kappa_j \frac{\partial g}{\partial y_{jk}} + p_k - t_{jk} = 0 \tag{9.14}$$

для всех облагаемых налогами благ, где κ_j — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

Для ставок всех налогов, существующих в экономике, введем обозначения $\mathbf{t}_I = \{ t_{ik} \mid k \in P_i \}$ и $\mathbf{t}_J = \{ t_{jk} \mid k \in P_j \}$ и рассмотрим общее равновесие с такими налогами.

Определение 9.4:

Назовем $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ равновесием с налогами $\langle \mathbf{t}_I, (P_i)_i, \mathbf{t}_J, (P_j)_j \rangle$ и трансфертами $\mathbf{S}$ экономики с экстерналиями, если

* $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя (9.9) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, доходах
$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i,$$
налогах, определяемых $\mathbf{t}_I, P_i$, и объемах потребления $\bar{\mathbf{x}}_{-i}$ и производства $\bar{\mathbf{y}}$ других экономических субъектов;
* $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя (9.12) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, налогах, определяемых $\mathbf{t}_j, P_j$ и объемах производства $\bar{\mathbf{y}}_{-j}$ и потребления $\bar{\mathbf{x}}$ других экономических субъектов;
* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние, т. е. для всех k выполнено
$$\sum_{i \in I} (\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j \in J} \bar{y}_{jk};$$
* сумма налогов равняется сумме трансфертов
$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in P_i} t_{ik} \bar{x}_{ik} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in P_j} t_{jk} \bar{y}_{jk} = \sum_{i \in I} S_i.$$
◀

Приведенное ниже утверждение представляет собой аналог второй теоремы благосостояния для равновесия с налогами на экстерналии. Оно утверждает, что (при некоторых естественных условиях) для Парето-оптимального состояния этой экономики можно найти цены благ и налоги такие, что данное Парето-оптимальное состояние окажется равновесием с налогами.

Теорема 9.3:

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики с экстерналиями с $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Предположим также, что

* $\hat{x}_{ik} > 0$ для всех $i \in I$ и $k \notin E_i$;
* функции полезности $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и производственные функции $g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ дифференцируемы;
* существует благо k_0, для которого выполнены условия ($\mathbb{O}$);
* функции $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вогнуты по $\mathbf{x}_i$; функции $g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ вогнуты по переменным $\mathbf{y}_j$.

Тогда существуют цены $\mathbf{p}$, множества налогооблагаемых благ P_i и P_j, налоги $\mathbf{t}_I, \mathbf{t}_J$ и трансферты $\mathbf{S}$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является равновесием с налогами. При этом множества налогооблагаемых благ можно выбрать так, что $P_i = E_i$ и $P_j = E_j$. ⌟

Доказательство: Ограничимся также схемой доказательства. В качестве цены k-го блага p_k можно взять множитель Лагранжа σ_k для балансового ограничения. В качестве множеств P_i и P_j облагаемых налогами благ выберем любые множества благ, содержащие все блага из E_i и E_j соответственно. В качестве ставки налога t_{ik}, $k \in P_i$ выберем

$$t_{ik} = -\sum_{s \neq i} \lambda_s \frac{\partial u_s(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial x_{ik}} - \sum_{j \in J} \mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})}{\partial x_{ik}},$$

где λ_s и μ_j — множители Лагранжа для задачи, характеризующей рассматриваемый оптимум Парето. Ставка налога для блага, не принадлежащего P_s, принимается равной нулю.

Далее доказывается, что $\hat{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи (9.9) при

$$\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i + \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik},$$

$\mathbf{x}_{-i} = \hat{\mathbf{x}}_{-i}$, $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}$, данных ценах и введенных налогах. Действительно, точка $\hat{\mathbf{x}}_i$ является допустимой в этой задаче. Задача каждого потребителя выпукла, поэтому для доказательства этого факта достаточно установить, что выполняются условия первого порядка. Условия первого порядка Парето-оптимума можно переписать следующим образом:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial x_{ik}} = p_k + t_{ik} \; \forall k \in P_i,$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial x_{ik}} = p_k \; \forall k \notin P_i.$$

Но это и есть условия первого порядка в задаче потребителя при ν_i, равном $1/\lambda_i$.

Аналогично в качестве ставки налога t_{jk}, $k \in P_j$ выберем

$$t_{jk} = -\sum_{i \in I} \lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial y_{jk}} - \sum_{s \neq j} \mu_s \frac{\partial g_s(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})}{\partial y_{jk}},$$

а ставку налога для блага, не принадлежащего P_s, примем равной нулю. Далее доказывается, что $\hat{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи (9.8) при данных ценах, $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{y}_{-j} = \hat{\mathbf{y}}_{-j}$.

Для доказательства теоремы осталось указать величины трансфертов $\mathbf{S}$. Легко видеть, что требуемыми трансфертами являются величи́ны

$$S_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i + \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik} - (\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij}(\mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}_j - \sum_{k \in P_j} t_{jk}\hat{y}_{jk})).$$

Их сумма равна, как и требуется, величине

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in P_j} t_{jk}\hat{y}_{jk},$$

и с учетом этих трансфертов доходы потребителей составляют

$$\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i + \sum_{k \in P_i} t_{ik}\hat{x}_{ik},$$

т. е. ровно столько, сколько необходимо для покупки набора $\hat{\mathbf{x}}_i$. ■

Замечание: Ставка налога может оказаться величиной отрицательной. Это, в частности, будет иметь место, когда потребление (производство) данного блага вызывает только положительные экстерналии. Содержательно это означает, что потребителю (производителю) выплачиваются дотации по соответствующей ставке.

Замечание: Теорема верна и без условия дифференцируемости. При этом вторая часть условия ($\mathbb{O}$) заменяется на аналогичные предположения о монотонности по благу k_0.

В следующем утверждении описаны условия, при которых равновесия с налогами Парето-оптимальны. Таким образом, это утверждение представляет собой вариант первой теоремы благосостояния для рассматриваемой экономики. Условия оптимальности равновесия с налогами $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ имеют вид следующего правила Пигу:

$$\frac{t_{ik}}{p_{k_0}} = -\sum_{s \neq i} \frac{\partial u_s / \partial x_{ik}}{\partial u_s / \partial x_{sk_0}} + \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j / \partial x_{ik}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} \; \forall i, \; \forall k \in P_i, \qquad (\mathcal{T}_1)$$

$$\frac{t_{jk}}{p_{k_0}} = -\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i / \partial y_{jk}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial g_s / \partial y_{jk}}{\partial g_s / \partial y_{sk_0}} \; \forall j, \; \forall k \in P_j, \qquad (\mathcal{T}_2)$$

где все производные берутся в равновесии.

Если равновесие с налогами на экстерналии Парето-оптимально и удовлетворяет правилу Пигу, то соответствующие налоги называют налогами Пигу[11].

[11] A. C. Pigou. *The Economics of Welfare*, London: Macmillan, 1932 (рус. пер. А. С. Пигу. *Экономическая теория благосостояния*, М.: Прогресс, 1985).

Теорема 9.4:

Предположим, что $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с налогами $\langle \mathbf{t}_I, (P_i)_i, \mathbf{t}_J, (P_j)_j \rangle$ и трансфертами $\mathbf{S}$ экономики с экстерналиями и, кроме того,

* $\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ (равновесие внутреннее);
* все блага, порождающие экстерналии, облагаются налогами, т. е. $E_i \subset P_i$ и $E_j \subset P_j$;
* функции полезности и производственные функции дифференцируемы;
* существует благо k_0, для которого выполнены условия ($\mathbb{O}$).

Тогда выполнено следующее.

{i} Если функции полезности и производственные функции вогнуты, то чтобы это равновесие с налогами было Парето-оптимальным, достаточно, чтобы налоги удовлетворяли правилу Пигу ($\mathcal{T}_1$)-($\mathcal{T}_2$).

{ii} Если равновесие с налогами Парето-оптимально, и для каждого блага k существует хотя бы один потребитель i (или производитель j), для которого потребление (или производство) данного блага не облагается налогом, т. е. $k \notin P_i$ ($k \notin P_j$), то налоги должны удовлетворять правилу Пигу ($\mathcal{T}_1$) и ($\mathcal{T}_2$). ┘

Доказательство: {i} Нам нужно показать, что найдутся числа $(\lambda_i)_i$, $(\mu_j)_j$, $(\sigma_k)_k$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\mu_j \geqslant 0$, такие что для них выполнены соотношения (9.1) и (9.2) (дифференциальная характеристика Парето-оптимума экономики с экстерналиями). По обратной теореме Куна—Таккера при вогнутости функций полезности и производственных функций выполнение этих соотношений — достаточное условие максимума для каждой из задач, характеризующих Парето-оптимальные состояния экономики с экстерналиями.

Воспользуемся дифференциальной характеристикой равновесия с налогами (9.10), (9.11), (9.13) и (9.14). Множители Лагранжа выберем следующим образом:

$$\lambda_i = 1/\nu_i, \quad \mu_j = \kappa_j, \quad \sigma_k = \bar{p}_k.$$

Поскольку, по предположению, все блага, не облагаемые налогами (т. е. $k \notin P_i$ и $k \notin P_j$), не порождают экстерналий, то дифференциальные характеристики Парето-оптимума для них имеют вид

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \sigma_k \ \forall i, \quad \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \forall j.$$

Легко проверить, что они выполнены, если выполнены соотношения (9.10) и (9.13).

Кроме того, из (9.10) и (9.13) при $k = k_0$ имеем

$$\lambda_i = \frac{1}{\nu_i} = \frac{\bar{p}_{k_0}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} > 0,$$
$$\mu_j = \kappa_j = -\frac{\bar{p}_{k_0}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} > 0,$$

откуда получаем следующие выражения для налогов, указанных в условии теоремы:

$$t_{ik} = -\sum_{s \neq i} \lambda_s \frac{\partial u_s}{\partial x_{ik}} - \sum_{j \in J} \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial x_{ik}},$$
$$t_{jk} = -\sum_{i \in I} \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial y_{jk}} - \sum_{s \neq j} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial y_{jk}}.$$

Подставляя их в дифференциальные характеристики равновесия с налогами (9.11) и (9.14), убеждаемся в том, что дифференциальные характеристики Парето-оптимума (9.1) и (9.2) выполнены.

{ii} Для любого $k \neq k_0$ существует экономический субъект, потребление (производство) которым этого блага не облагается налогом. Предположим, например, что это потребитель i. (Для случая, когда таким экономическим субъектом является производитель, рассуждения аналогичны, что читателю предлагается проверить самостоятельно.) Из условий первого порядка задачи потребителя i следует, что

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}}.$$

С другой стороны, потребление этим потребителем благ k и k_0 не порождает экстерналий и поэтому из дифференциальной характеристики Парето-оптимума следует, что

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}.$$

Это означает, что $\bar{p}_k / \bar{p}_{k_0} = \sigma_k / \sigma_{k_0}$, т. е. множители Лагранжа пропорциональны ценам.

Для произвольного потребителя i и блага k, потребление которого данным потребителем облагается налогом ($k \in P_i$), из условия первого порядка задачи потребителя имеем

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\bar{p}_k + t_{ik}}{\bar{p}_{k_0}}.$$

С другой стороны, из дифференциальной характеристики Парето-оптимума следует, что

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} + \sum_{s\neq i}\frac{\partial u_s/\partial x_{ik}}{\partial u_s/\partial x_{sk_0}} - \sum_{j\in J}\frac{\partial g_j/\partial x_{ik}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}.$$

Производя соответствующие замены, получим требуемый результат ($\mathcal{T}_1$).

Аналогично для произвольного производителя j и блага k, производство которого данным производителем облагается налогом ($k \in P_j$), имеем

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{\bar{p}_k - t_{jk}}{\bar{p}_{k_0}}.$$

и

$$-\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} + \sum_{i\in I}\frac{\partial u_i/\partial y_{jk}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} - \sum_{s\neq j}\frac{\partial g_s/\partial y_{jk}}{\partial g_s/\partial y_{sk_0}} = -\frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}},$$

откуда следует ($\mathcal{T}_2$). ■

Замечание: Хотя по условиям доказанной теоремы множество благ, потребление (производство) которых облагается налогами, не обязательно должно совпадать с множеством благ, порождающих экстерналии, ставки налога на блага, не порождающие экстерналий (блага из множеств $P_i \setminus E_i$ и $P_j \setminus E_j$), оказываются равными нулю. Из этого фактически следует, что множества налогооблагаемых благ должны включать блага, порождающие экстерналии, и только их.

Замечание: Предположение, что для каждого блага k существует хотя бы один потребитель i (или производитель j), для которого потребление (или производство) данного блага не облагается налогом, т. е. $k \notin P_i$ ($k \notin P_j$), фактически оказывается необходимым для справедливости второй части теоремы. В ситуациях, когда это предположение не выполняется, поведение потребителя i, а следовательно, и равновесие, не зависят от того, какую часть цены $p_k + t_{ik}$, с которой он сталкивается, данный потребитель выплачивает в качестве налога, а какую — в качестве рыночной цены.

Пример 9.3 (продолжение Примера 9.2)

Введем в экономику Примера 9.2 t_1 и t_2 — налоги на выпуски первого и второго предприятия соответственно. Охарактеризуем внутренние равновесия с налогами. Пусть

$$(p_1, p_2, p_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{r}_1, \bar{r}_2) —$$

такое равновесие. Задача максимизации прибыли j-го производителя имеет следующий вид:

$$\pi_j = (p_j - t_j) f_j(r_j, \bar{y}_{-j}) - p_3 r_j \to \max_{r_j}.$$

Дифференцируя по r_j, получаем условия первого порядка для решения этой задачи:

$$\frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} = \frac{p_1 - t_1}{p_3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} = \frac{p_2 - t_2}{p_3},$$

т. е. предельные нормы трансформации равны отношениям цен, с которыми сталкивается производитель, т. е. цен с учетом налогов.

Вид условий первого порядка задачи потребителя не изменится, так как потребитель не облагается налогом:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_1}{p_3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_2}{p_3}.$$

Из полученной дифференциальной характеристики равновесия имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} + \frac{t_1}{p_3},$$

$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} + \frac{t_2}{p_3}.$$

Для того чтобы равновесие было Парето-оптимальным, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} - \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2},$$

$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} - \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1},$$

т. е.

$$\frac{t_1}{p_3} = -\frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2}, \quad \frac{t_2}{p_3} = -\frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1}.$$

Заметим, что если функции полезности вогнуты, то такие ставки налогов гарантируют Парето-оптимальность равновесия с налогами. △

Задачи

9.9 В квазилинейной экономике с экстерналиями функции полезности двух потребителей имеют вид

$$u_1(x_1, z_1) = 2\sqrt{x_1} + z_1 \quad \text{и} \quad u_2(x_2, z_2, x_1) = 2\sqrt{x_2} - x_1 + z_2,$$

а функция издержек единственного предприятия имеет вид $c(y) = y$. Начальные запасы первого блага (блага x) равны нулю.

(A) Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния данной экономики. Найдите равновесие и налоги Пигу.

(B) Решите ту же задачу с функциями

$$u_1(x_1, z_1) = 2\sqrt{x_1} + z_1, \quad u_2(x_2, z_2) = 2\sqrt{x_2} + z_2$$

и $c(y, x_1, x_2) = y + 2x_1 + x_2$.

(C) Решите ту же задачу с функциями

$$u_1(x_1, z_1, y) = 2\sqrt{x_1} - y + z_1, \quad u_2(x_2, z_2) = 2\sqrt{x_2} + z_2$$

и $c(y) = 2y$.

(D) Решите ту же задачу с функциями

$$u_1 = -1/x_1 + z_1 - x_2, \quad u_2 = -1/x_2 - 2x_1 + z_2$$

и $c(y) = y$.

9.10 В экономике с одним потребителем и одним предприятием технологическое множество задается условиями $y_x^2 + 2y_z \leqslant 0$ и $y_z \leqslant 0$, а функция полезности имеет вид $u = \ln x + z - y_x^2$, где y_x — объем экстерналий. Начальные запасы равны $(\omega_x, \omega_z) = (0, 1000)$.

(A) Дайте определение общего равновесия применительно к данной модели. Найдите его. (Используйте нормировку $p_z = 1$.)

(B) Найдите Парето-оптимум. Будет ли равновесный объем производства y_x выше или ниже Парето-оптимального?

(C) Вычислите налоги Пигу.

9.11 В экономике три потребителя и два типа благ, x и z. Благо x — это уровень ухоженности приусадебного участка, а благо z — все остальные блага. Двое из потребителей — соседи, так что красивый внешний вид участка одного соседа создает положительный внешний эффект для другого. Третий живет вдалеке. Функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln x_1 + \ln x_2 + z_1, \quad u_2 = \ln x_1 + \ln x_2 + z_2,$$
$$u_3 = \ln x_3 + z_3.$$

Каждый потребитель имеет запас по 5 единиц каждого из двух благ.

(A) Найдите вальрасовское равновесие в данной экономике.

(B) Найдите все Парето-эффективные распределения благ в этой экономике.

(C) Предложите налог (или субсидию) Пигу, корректирующий экстерналию. Точно опишите, как, кем и за что он (она) платится.

9.12 Для экономик из задачи 9.8 найдите соотношения для налогов Пигу.

9.6 Рынки экстерналий

В этом параграфе мы покажем формально, что неэффективность равновесия экономики с экстерналиями — следствие отсутствия рынков экстерналий. Другими словами, если в дополнение к рынкам обычных благ возникла бы полная система рынков экстерналий, для такой экономики была бы справедливой первая теорема благосостояния, т. е. равновесие в такой экономике оказалось бы Парето-оптимальным. Этот взгляд на проблему экстерналий связан с именем К. Эрроу[12].

Предположим, что, в дополнение к обычным рынкам существует полная система конкурентных рынков экстерналий, т. е. существует рынок для каждой экстерналии из множеств E_i, E_j.

Введем следующие обозначения[13]:

- q_{isk} — цена экстерналии, состоящей во влиянии потребления k-го блага i-м потребителем на благосостояние s-го потребителя, $x_{ik} \to u_s$;
- q_{ijk} — цена экстерналии, состоящей во влиянии потребления k-го блага i-м потребителем на производственные возможности j-го производителя, $x_{ik} \to g_j$;
- q_{jik} — цена экстерналии, состоящей во влиянии производства k-го блага j-м производителем на благосостояние i-го потребителя, $y_{jk} \to u_i$;
- q_{jsk} — цена экстерналии, состоящей во влиянии производства k-го блага j-м производителем на производственные возможности s-го производителя, $y_{jk} \to g_s$;
- $\mathbf{q}$ — полный набор цен экстерналий.

Будем исходить из того, что платит тот, кто создает экстерналию. Может оказаться (например, в случае положительных экстерналий), что цена экстерналии отрицательна. Это следует понимать в том смысле, что «потребитель» экстерналии платит за нее тому, кто создает экстерналию.

[12] K. J. Arrow. The Organization of Economic Activity: Issues Pertinent to the Choice of Market versus Non-market Allocation, in *Public Expenditure and Policy Analysis*, R. Haveman and J. Margolis (ed.), University of Chicago Press, 1970.

[13] Конечно, такие обозначения цен несколько неоднозначны, но каждый раз можно понять из контекста, к какой из экстерналий относится цена. Мы сознательно пошли здесь на такую неоднозначность, чтобы не усложнять запись.

В этой ситуации задача потребителя i модифицируется следующим образом:

$$u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i}$$

$$\begin{aligned} \sum_k p_k x_{ik} &+ \\ &+ \sum_{s,k\colon x_{ik} \to u_s} q_{isk} x_{ik} + \sum_{j,k\colon x_{ik} \to g_j} q_{ijk} x_{ik} - \\ &- \sum_{s \neq i} \sum_{k\colon x_{sk} \to u_i} q_{sik} x_{sk} - \sum_j \sum_{k\colon y_{jk} \to u_i} q_{jik} y_{jk} \leqslant \beta_i. \end{aligned} \qquad (9.15)$$

Потребитель здесь выбирает объемы потребления благ $\mathbf{x}_i$ и уровни влияющих на него экстерналий.

Хотя запись бюджетного ограничения выглядит довольно громоздкой, смысл ее достаточно прост: первая сумма — расходы на оплату обычных благ из рассматриваемого потребительского набора, следующие две суммы (вторая строчка бюджетного ограничения) — оплата внешних влияний, оказываемых данным потребителем на всех других экономических субъектов. И наконец, последние две суммы — оплата другими экономическими субъектами внешнего влияния на данного потребителя.

Условия первого порядка для решения этой задачи выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \nu_i \Bigg(p_k + \sum_{s\colon x_{ik} \to u_s} q_{isk} + \sum_{j\colon x_{ik} \to g_j} q_{ijk} \Bigg) \ \forall k, \qquad (9.16)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{sk}} = -\nu_i q_{sik} \ \forall s, k\colon x_{sk} \to u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y_{jk}} = -\nu_i q_{jik} \ \forall j, k\colon y_{jk} \to u_i. \qquad (9.17)$$

Прибыль j-го производителя задается функцией

$$\begin{aligned} \pi_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \sum_{k \in K} p_k y_{jk} &- \\ &- \sum_{i \in I, ki \in K\colon y_{jk} \to u_i} q_{jik} y_{jk} - \sum_{s,k\colon y_{jk} \to g_s} q_{jsk} y_{jk} + \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{k\colon x_{ik} \to g_j} q_{ijk} x_{ik} + \sum_{s \neq j} \sum_{k \in K\colon y_{sk} \to g_j} q_{sjk} y_{sk}. \end{aligned}$$

Задача j-го производителя модифицируется аналогичным образом:

$$\begin{gathered}\pi_j(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{y}_j,\mathbf{y}_{-j},\mathbf{x}) \to \max \\ g(\mathbf{y}_j,\mathbf{y}_{-j},\mathbf{x}) \geqslant 0.\end{gathered} \tag{9.18}$$

Производитель выбирает объемы производства благ $\mathbf{y}_j$ и уровни всех влияющих на него экстерналий.

Определение 9.5:

Назовем $(\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}})$ равновесием с торговлей экстерналиями и трансфертами $\mathbf{S}$ $(\sum_{i\in I} S_i = 0)$, если

(i) $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}})$ — решение задачи (9.15) при ценах обычных благ $\bar{\mathbf{p}}$, ценах экстерналий $\bar{\mathbf{q}}$ и доходах

$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\omega_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\pi_j(\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}) + S_i;$$

(ii) $(\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}})$ — решение задачи (9.18) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{q}}$;

(iii) $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние, т. е. для всех благ $k \in K$ выполнено

$$\sum_{i\in I}(\bar{x}_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}.$$

◀

Заметим, что выполнение условий (i) и (ii) гарантирует совпадение при данных ценах $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ спроса и предложения на рынках экстерналий. Поэтому соответствующее требование не включено в определение равновесия.

Следующая теорема является аналогом второй теоремы благосостояния для равновесия с торговлей экстерналиями.

Теорема 9.5:

Пусть $(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики с экстерналиями. Предположим также, что

* $\mathbf{x}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in I$ (равновесие внутреннее);
* функции полезности $u_i(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и производственные функции $g_j(\mathbf{y},\mathbf{x})$ дифференцируемы;
* существует благо k_0, для которого выполнены условия ($\mathbb{O}$);
* функции полезности $u_i(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и производственные функции $g_j(\mathbf{y},\mathbf{x})$ вогнуты.

Тогда существуют цены $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и трансферты $\mathbf{S}$, такие что $(\mathbf{p},\mathbf{q},\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$ является равновесием с торговлей экстерналиями. ┘

Доказательство: Как и в предыдущих теоремах, ограничимся схемой доказательства. Парето-оптимум $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ согласно теореме Куна—Таккера удовлетворяет уравнениям (9.1) и (9.2).

Цены выбираются следующим образом:

$$p_k = \sigma_k,$$
$$q_{isk} = -\lambda_s \frac{\partial u_s}{\partial x_{ik}}, \quad q_{ijk} = -\mu_j \frac{\partial g_j}{\partial x_{ik}},$$
$$q_{jik} = -\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial y_{jk}}, \quad q_{jsk} = -\mu_s \frac{\partial g_s}{\partial y_{jk}},$$

где все производные берутся в точке Парето-оптимума $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$.

Далее доказывается, что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи (9.15) при данных ценах и таких доходах, которые в точности покрывают расходы на приобретение набора $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ обычных благ и экстерналий, т. е.

$$\begin{aligned}\beta_i = \sum_k p_k \hat{x}_{ik} + \\ + \sum_{s,k:\, x_{ik}\to u_s} q_{isk}\hat{x}_{ik} + \sum_{j,k:\, x_{ik}\to g_j} q_{ijk}\hat{x}_{ik} - \\ - \sum_{s\neq i}\sum_{k:\, x_{sk}\to u_i} q_{sik}\hat{x}_{sk} - \sum_j \sum_{k:\, y_{jk}\to u_i} q_{jik}\hat{y}_{jk}.\end{aligned}$$

Действительно, точка $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является допустимой. Поскольку задача каждого потребителя выпукла, для доказательства этого факта достаточно установить, что при этом выполняются условия первого порядка.

Условия первого порядка Парето-оптимума можно переписать следующим образом:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = p_k + \sum_{s:\, x_{ik}\to u_s} q_{isk} + \sum_{j:\, x_{ik}\to g_j} q_{ijk}.$$

Это есть условия первого порядка (9.16) в задаче потребителя при ν_i, равном $1/\lambda_i$. При том же ν_i условия первого порядка (9.17) следуют из определения цен экстерналий q_{sik}, q_{jik}.

Аналогичным образом доказывается, что $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})$ является решением задачи (9.18) при данных ценах.

Для доказательства теоремы осталось указать величи́ны трансфертов $\mathbf{S}$. Нетрудно видеть, что это

$$S_i = \beta_i - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\pi_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}}),$$

где β_i определены выше. Читатель может проверить, что их сумма равна нулю. ■

Замечание: Теорему можно сформулировать и без условия дифференцируемости.

Поскольку в модели с торговлей экстерналиями система рынков оказывается полной, справедлива первая теорема благосостояния.

Теорема 9.6:

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{S})$ — равновесие с торговлей экстерналиями и предпочтения потребителей локально ненасыщаемы. Тогда состояние этой экономики $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ Парето-оптимально. ┘

Доказательство: Доказательство этой теоремы фактически повторяет доказательство первой теоремы экономики благосостояния для экономики без экстерналий. ■

Связь между ценами экстерналий и налогами на экстерналии устанавливают следующие два утверждения, показывающие, что на основе любого равновесия с торговлей можно построить равновесие с налогами при тех же ценах обычных благ и с налогами, равными сумме цен соответствующих экстерналий. Указанная связь налогов и цен экстерналий задается следующим правилом:

$$\begin{aligned} t_{ik} &= \sum_{s:\, x_{ik}\to u_s} q_{isk} + \sum_{j:\, x_{ik}\to g_j} q_{ijk} \ \forall k \in E_i, \\ t_{jk} &= \sum_{i:\, y_{jk}\to u_i} q_{jik} + \sum_{s:\, y_{jk}\to g_s} q_{jsk} \ \forall k \in E_j. \end{aligned} \tag{✠}$$

Теорема 9.7:

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с торговлей экстерналиями.

Тогда существуют трансферты, такие что $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с налогами $\langle \mathbf{t}_I, (E_i)_i, \mathbf{t}_J, (E_j)_j \rangle$, где ставки налогов задаются правилом (✠) при $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$. ┘

Доказательство: Для доказательства теоремы достаточно проверить, что

(i) $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи (9.9) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, налогах, определяемых $\mathbf{t}_I, E_i$, доходах

$$\beta_i = \sum_{k \notin E_i} \bar{p}_k \bar{x}_{ik} + \sum_{k \in E_i} (\bar{p}_k + t_{ik}) \bar{x}_{ik}$$

и объемах потребления $\bar{\mathbf{x}}_{-i}$ и производства $\bar{\mathbf{y}}$ других экономических субъектов;

(ii) $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи (9.12) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, налогах, определяемых $\mathbf{t}_j, E_j$, и объемах производства $\bar{\mathbf{y}}_{-j}$ и потребления $\bar{\mathbf{x}}$ других экономических субъектов;

(iii) сумма трансфертов равняется сумме собранных налогов

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in E_i} t_{ik} \bar{x}_{ik} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in E_j} t_{jk} \bar{y}_{jk},$$

где трансферты равны «бюджетным дефицитам» потребителей.

Доказательство пунктов (i) и (ii) основывается на том факте, что если $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2)$ является решением следующей задачи оптимизации:

$$f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \to \max_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in X}$$

то $\bar{\mathbf{x}}_1$ — решение редуцированной задачи

$$f_0(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{x}}_2) \to \max_{\mathbf{x}_1}$$
$$(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{x}}_2) \in X.$$

Справедливость пункта (iii) — следствие определения трансфертов и налогов t_{ik}, t_{jk} и того факта, что в равновесии с торговлей экстерналиями бюджетные ограничения выходят на равенство. ■

Для справедливости обратного утверждения существенным является предположение, что равновесие с налогами Парето-оптимально.

Теорема 9.8:

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с налогами $\langle \mathbf{t}_I, (P_i)_i, \mathbf{t}_J, (P_j)_j \rangle$ и трансфертами $\mathbf{S}$, причем состояние экономики $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ Парето-оптимально. Предположим также, что

- ⁎ выполнены условия Теоремы 9.4 {ii};
- ⁎ функции полезности $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и производственные функции $g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ вогнуты.

Тогда существуют цены $\mathbf{q}$ экстерналий и трансферты $\mathbf{S}'$ такие, что $(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с торговлей экстерналиями. При этом $\mathbf{q}$ удовлетворяют правилу (✠). ┘

Доказательство: Так как $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики, то по Теореме 9.5 существуют цены благ $\mathbf{p}$, цены экстерналий $\mathbf{q}$ и трансферты $\mathbf{S}$ такие, что $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с торговлей экстерналиями.

Возьмем произвольное благо $k \neq k_0$. По предположению теоремы (см. Теорему 9.4 {ii} на с. 578) существует экономический субъект, потребление (производство) которым этого блага не облагается налогом. Предположим, например, что это потребитель i. (Для случая, если таким экономическим субъектом является производитель, рассуждения аналогичны, что читателю предлагается проверить самостоятельно.) Сопоставляя условия первого порядка задачи потребителя i в равновесии с налогами и в равновесии с торговлей экстерналиями, заключаем, что для всех $k \in K$

$$\frac{p_k}{p_{k_0}} = \frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}}.$$

Без потери общности можно считать, что $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, поскольку цены в равновесии определяются с точностью до множителя.

В соответствии с Теоремой 9.4 {ii} верно правило Пигу ($\mathcal{T}_1$) и ($\mathcal{T}_2$).

Воспользовавшись условиями первого порядка задач потребителя и производителя в равновесии с торговлей экстерналиями

$$\frac{\partial u_s/\partial x_{ik}}{\partial u_s/\partial x_{sk_0}} = -\frac{q_{isk}}{p_{k_0}}, \quad \frac{\partial g_j/\partial x_{ik}}{\partial g_j/\partial x_{ik_0}} = \frac{q_{ijk}}{p_{k_0}} \ \forall k \in E_i,$$

$$\frac{\partial u_i/\partial y_{jk}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = -\frac{q_{jik}}{p_{k_0}}, \quad \frac{\partial g_s/\partial y_{jk}}{\partial g_s/\partial y_{sk_0}} = \frac{q_{jsk}}{p_{k_0}} \ \forall k \in E_j,$$

мы можем переписать соотношения Пигу, учитывая, что часть слагаемых в них равна нулю, в виде (✠). ■

Пример 9.4 (продолжение Примеров 9.2 и 9.3)

Пусть в экономике Примера 9.2 происходит торговля экстерналиями между предприятиями. Обозначим через q_1 и q_2 цены на экстерналии, связанные с выпуском продукции первым и вторым предприятием соответственно. Охарактеризуем внутренние равновесия с торговлей экстерналиями. Задача максимизации прибыли j-го производителя имеет следующий вид:

$$\pi_j = (p_j - q_j) f_j(r_j, y_{-j}) - p_3 r_j + q_{-j} y_{-j} \to \max_{r_j, y_{-j}}.$$

Дифференцируя по r_j и y_{-j}, получаем условия первого порядка для решения этой задачи:

$$\frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} = \frac{p_1 - q_1}{p_3}, \quad \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1} = -\frac{q_2}{p_3},$$

$$\frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} = \frac{p_2 - q_2}{p_3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2} = -\frac{q_1}{p_3}.$$

Вид условий первого порядка задачи потребителя не изменится:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_1}{p_3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_2}{p_3}.$$

Исключая из дифференциальной характеристики равновесия цены, получим соотношения, совпадающие с дифференциальной характеристикой Парето-оптимума:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} - \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2},$$

$$\frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} - \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1}. \qquad \triangle$$

Заметим, что если налоги вычисляются на основе равновесия с торговлей экстерналиями, то они совпадают с ценами экстерналий. Более того, если предпочтения потребителя строго выпуклы, то налоги Пигу и цены экстерналий совпадают всегда, так как Парето-оптимальное состояние в такой экономике единственно.

Задачи

9.13 Для экономик из задачи 9.8 на с. 570 охарактеризуйте равновесие с торговлей экстерналиями. Будет ли оно Парето-оптимальным?

9.7 Альтернативная модель экономики с экстерналиями

В рассмотренной выше модели экономики с экстерналиями внешние влияния связаны непосредственно с объемами потребления и производства благ. Зачастую, однако, такие воздействия определяются не только объемами, но и способами производства и потребления таких благ. Так, объем загрязнения окружающей среды выхлопными газами определяется не только количеством автомобилей в данной местности, но и тем, как часто они используются владельцами, типом двигателя, средней скоростью передвижения и т. д. Такие характеристики поведения экономических субъектов не всегда возможно учесть в предложенном выше подходе к моделированию экстерналий.

Альтернативный подход к моделированию внешний влияний состоит в следующем.

Введем для каждого экономического субъекта вектор дополнительных переменных, описывающих характеристики процесса потребления и производства благ, вызывающие экстерналии (или, для краткости, вектор экстерналий) $\mathbf{a}_i \in A_i$ и $\mathbf{a}_j \in A_j$.

Полный набор дополнительных переменных будем обозначать через $\mathbf{a}$. Как и ранее, обозначим через $\mathbf{a}_{-i}$ ($\mathbf{a}_{-j}$) вектор экстерналий, вызываемых всеми остальными экономическими субъектами. Функции полезности и производственные функции в этом случае зависят также от дополнительных переменных:

$$u_i = u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{-i}),$$
$$g_j = g_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{-j}).$$

Поскольку анализ проблемы экстерналий в рамках этого альтернативного подхода проводится по той же схеме и принципиально не отличается от уже проведенного, мы не будем останавливаться подробно на многих деталях этого анализа. Читателю предлагается самостоятельно переформулировать все предыдущие понятия и результаты для данного случая (как и общего случая, когда внешние влияния вызываются как величинами потребления и производства обычных благ, так и характеристиками их потребления и производства).

Проиллюстрируем данный подход к моделированию экстерналий, введенные понятия и разные типы равновесий несколькими примерами.

Пример 9.5 (курильщик и некурящий)
Два студента, живущие в одной комнате в общежитии, имеют функции полезности

$$u_1(x_1, a) \quad \text{и} \quad u_2(x_2, a),$$

которые зависят от имеющихся в их распоряжении денег (x_1 — для первого, x_2 — для второго) и от количества выкуриваемых первым из них сигарет (a). Второй студент — некурящий, и $\partial u_2(x_2, a)/\partial a < 0$, а у первого, напротив, $\partial u_1(x_1, a)/\partial a > 0$, если количество сигарет меньше $\check{a}$ и $\partial u_1(x_1, a)/\partial a < 0$, если $a > \check{a}$. Ежедневный доход каждого равен ω_i.

Рассмотрим два варианта правил поведения: либо (A) курить в комнате запрещается без разрешения соседа по комнате, либо (B) признается право курить без ограничения (эту экономику можно проиллюстрировать на ящике Эджворта, см. Рис. 9.1). При любом

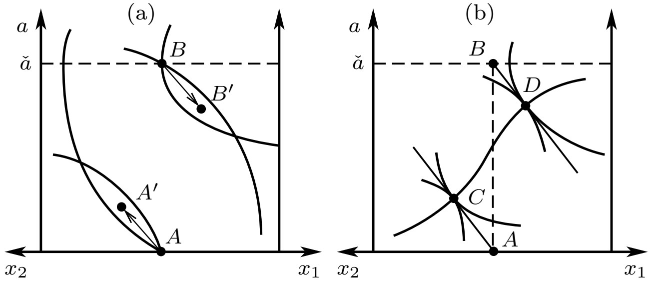


Рис. 9.1. *Иллюстрация к Примеру 9.5*

из этих правил возможны соглашения, приводящие к состояниям (например, A' в случае первого правила и B' в случае второго, см. Рис. 9.1(a)), улучшающим положение обоих студентов. Поэтому есть основания ожидать, что в отсутствие явных или неявных запретов (и издержек сделок) два студента достигнут соглашения, в результате которого эта простая экономика окажется в Парето-оптимальном состоянии. Так, в случае A курящий может «купить» у некурящего право выкурить несколько сигарет в день. В случае B, наоборот, курящий может, за соответствующую сумму денег, выкуривать на несколько сигарет меньше. Рис. 9.1(b) иллюстрирует эти две возможности в предположении, что студенты ведут себя как ценополучатели.

Пример иллюстрирует два момента. Во-первых, торговля экстерналиями способна решить проблему экстерналий и привести к Парето-оптимальным состояниям экономики. В этом случае экстерналии, в сущности, превращаются в обычные товары, т. е. возникает рынок экстерналий.

Во-вторых, с теоретической точки зрения, в отличие от обыденного понимания загрязнения, экстерналии симметричны. Если в варианте B ущерб от наличия экстерналий наносится некурящему, то в варианте A — курильщику.

Заметим, что правила поведения порождают своего рода права собственности. Так, ситуация A подразумевает право некурящего не соглашаться на любой вариант выбора объема экстерналий курильщиком, а ситуация B — право курильщика на выбор любого объема. Эти права собственности можно моделировать в данной и подобной ей ситуациях как право определять объем производства экстерналий одним из экономических субъектов. Так, в ситуации A это право принадлежит некурящему, в ситуации B — курильщику.

Можно рассматривать и более общий случай, когда признается право первого на курение определенного числа сигарет в день. Курить сверх этого «лимита» он может только с согласия некурящего, который заинтересован дать такое разрешение лишь при компенсации нанесенного ему при этом ущерба. При любом подобном распределении прав «начальное состояние» рассматриваемой экономики представляется точкой отрезка AB. Это начальное состояние (и предполагаемое им распределение прав собственности) оказывает влияние на состояние экономики, которое будет достигнуто в результате соглашений между участниками сделки, и, в частности, на состояние рыночного равновесия — результата обмена по равновесным рыночным ценам.

Конечно, Рис. 9.1(b), изображающий совершенный рынок, представляет не очень реалистичную ситуацию. Студенты, как это часто бывает при наличии экстерналий, находятся в ситуации двусторонней монополии и вряд ли будут вести себя как ценополучатели. Скорее всего, соглашение будет достигнуто не посредством рыночного механизма, а посредством того, что обобщенно можно назвать *торгом*. Кроме того, следует учесть, что соседи по комнате могут воздействовать друг на друга не только курением и передачей денег, но и многими другими способами, не отраженными в представленной в примере модели. При этом достижению эффективного соглашения могут помешать различные проблемы: разного рода издержки сделок, асимметричность информации. $\triangle$

Рассмотренный пример представляет случай двусторонней монополии, порожденной экстерналиями. Но часто одни и те же эстерналии затрагивают нескольких (как правило, многочисленных, как в случае загрязнения окружающей среды) экономических субъектов. Ниже мы рассматриваем пример такой ситуации. Заметим, что решение проблемы эстерналий в таких ситуациях — это производство своего рода коллективного блага, и оно возможно в рамках коллективных действий — координации поведения заинтересованных лиц. Проблемы, возникающие при организации таких действий, обсуждаются в следующей главе, посвященной экономике с общественными благами.

Пример 9.6 (экономика с однородными экстерналиями) Рассмотрим экономику с одним типом экстерналий, которые «производят» только производители и «потребляют» только потребители.

В такой экономике на уровень благосостояния потребителя не влияет источник экстерналии, а только совокупное производство этих экстерналий. Функции полезности и неявные производственные функции имеют следующий вид:

$$u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}) = u_i\left(\mathbf{x}_i, \sum_{j \in J} a_j\right)$$

и

$$g_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{a}) = g_j(\mathbf{y}_j, a_j),$$

где $a_j \in A_j \subset \mathbb{R}$. Охарактеризуем Парето-оптимальные состояния этой экономики, разные типы равновесий, а также налоги Пигу (t_j) и цены экстерналий (q_{ji}) (в равновесии с торговлей экстерналиями).

Рассмотрим сначала Парето-оптимальное состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{a}})$, такое что $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$, $\hat{a}_j \in \operatorname{int} A_j$. Предположим, что существует благо k_0, удовлетворяющее условиям, аналогичным условиям ($\mathbb{O}$). Дифференцируя функции Лагранжа задач, характеризующих это состояние,

$$\mathbb{L} = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i\left(\mathbf{x}_i, \sum_{j \in J} a_j\right) + \\ + \sum_{j \in J} \mu_j g_j(\mathbf{y}_j, a_j) + \sum_{k \in K} \sigma_k\left(\sum_{j \in J} y_{jk} - \sum_{i \in I}(x_{ik} - \omega_{ik})\right),$$

получаем следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{ik}} = \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} - \sigma_k = 0 \ \forall i, k,$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_{jk}} = \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \forall j, k.$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial a_j} = \sum_{i \in I} \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial a} + \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial a_j} = 0 \ \forall j.$$

Поскольку для соответствующих задач выполнены условия регулярности, множители Лагранжа λ_i и μ_j положительны. Из дифференциальной характеристики Парето-оптимума следует, что[14]

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\partial g_j / \partial y_{jk}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}} \ \forall i, \ \forall j, \ \forall k,$$

[14]Второе соотношение в теории общественных благ называют уравнением Самуэльсона (см. следующую главу).

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i / \partial a}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{\partial g_j / \partial a_j}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} \ \forall j.$$

Охарактеризуем теперь обычные рыночные равновесия в этой экономике. Пусть $\mathbf{p}$ — цены благ. Тогда задача потребителя, располагающего доходом β_i, имеет вид

$$u_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}) \to \max_{\mathbf{x}_i}$$
$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i \leqslant \beta_i,$$
$$\mathbf{x}_i \in X_i.$$

Дифференциальная характеристика внутреннего решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{ik}}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}} \ \forall k.$$

При тех же ценах задача производителя имеет вид

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j, a_j}$$
$$g_j(\mathbf{y}_j, a_j) \geqslant 0,$$
$$a_j \in A_j.$$

Дифференциальная характеристика внутреннего (по a_j) решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial g_j / \partial y_{jk}}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}} \ \forall k \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_j}{\partial a_j} = 0.$$

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ — равновесие. Тогда если экстерналии одного типа для всех потребителей (только положительные или только отрицательные), то состояние экономики $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ не оптимально по Парето. Например, если $\partial u_i / \partial a \leqslant 0$ для всех потребителей $i \in I$ и неравенство строгое по крайней мере для одного потребителя, то

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i / \partial a}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} \neq 0 = \frac{\partial g_j / \partial a_j}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}},$$

что не совпадает с дифференциальной характеристикой Парето-оптимальных состояний.

В равновесии с налогами должно быть выполнено

$$\frac{t_j}{p_{k_0}} = -\frac{\partial g_j / \partial a_j}{\partial g_j / \partial y_{jk_0}} \ \forall j.$$

Правило Пигу для оптимальных налогов имеет вид

$$\frac{t_j}{p_{k_0}} = -\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i / \partial a}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} \; \forall j.$$

Отсюда видно, что налоги Пигу одинаковы для всех производителей. С другой стороны, если в равновесии налоги определены этими соотношениями, то равновесие удовлетворяет дифференциальной характеристике Парето-оптимума, что при вогнутости функций полезности и производственных функций гарантирует Парето-оптимальность.

Цены экстерналий в равновесии с торговлей экстерналиями удовлетворяют соотношениям

$$\frac{q_{ij}}{p_{k_0}} = -\frac{\partial u_i / \partial a}{\partial u_i / \partial x_{ik_0}} \; \forall i, \; \forall j,$$

т. е. не зависят от производителя, который создает экстерналии. Другими словами, мы фактически имеем m рынков экстерналий по числу потребителей.

Если равновесие в экономике с налогами и равновесие в экономике с торговлей экстерналиями соответствуют одному и тому же состоянию экономики, то налоги и цены экстерналий связаны соотношениями

$$\frac{t_j}{p_{k_0}} = \sum_{i \in I} \frac{q_{ij}}{p_{k_0}} \; \forall j.$$

△

Задачи

9.14 Переформулируйте и докажите аналоги теорем, рассмотренных в предыдущих параграфах этой главы, для случая альтернативной модели экономики с экстерналиями.

9.15 («Курение») Из двух соседей по комнате первый — некурящий, второй — курильщик. Функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln(x_1) - z^2, \quad u_2 = \ln(x_2) - 0{,}5z^2 + 10z.$$

Здесь x_i — количество денег на другие блага, z — количество выкуренных вторым соседом сигарет. У каждого имеются начальные запасы денег ω_i.

(А) Предположим, что сигареты бесплатные, т. е. «производятся из денег» с нулевыми издержками. Найти равновесие. Построить Парето-улучшение из равновесия (в дифференциалах). Найти Парето-границу.

(В) Пусть теперь сигареты стоят p (т. е. производятся по технологии с постоянной отдачей от масштаба). Найти равновесие и Парето-границу в зависимости от p. При каких значениях p равновесие оптимально?

9.8 Экстерналии в квазилинейной экономике

В этом параграфе мы проанализируем квазилинейную экономику[15] с экстерналиями. В этой экономике имеется $l + 1$ благ. Предпочтения потребителей описываются функциями полезности следующего вида:

$$u_i(\mathbf{x}_i, z_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{-i}) = v_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{-i}) + z_i,$$

где $\mathbf{x}_i \in X_i \subset \mathbb{R}^l$, $\mathbf{a}_i \in A_i$, а объемы потребления $(l + 1)$-го («квазилинейного») блага z_i могут быть произвольными. Технологии фирм описываются неявными производственными функциями следующего вида:

$$g_j(\mathbf{y}_j, r_j, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{-j}) = r_j - c_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{-j}),$$

где, как и ранее, $c_j(\cdot)$ — функция издержек, которая показывает минимально необходимые затраты $(l+1)$-го блага на производство обычных благ в количестве $\mathbf{y}_j \in Y_j^o \subset \mathbb{R}^l$ и экстерналий в количестве $\mathbf{a}_j \in A_j$, r_j — фактические затраты $(l + 1)$-го блага.

По аналогии с результатом, полученным в гл. 5, можно утверждать, что Парето-оптимальные состояния рассматриваемой квазилинейной экономики характеризуются следующей задачей максимизации благосостояния («общественного излишка»):

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}) = \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}) - \sum_{j \in J} c_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{a}) \to \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}}$$

$$\sum_{i \in I} \mathbf{x}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j, \qquad (\mathcal{W}_E)$$

$$\mathbf{x}_i \geqslant 0, \quad \mathbf{a}_i \in A_i, \quad \mathbf{y}_j \geqslant 0, \quad \mathbf{a}_j \in A_j.$$

Если $((\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}), (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{r}}), \hat{\mathbf{a}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики, то $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{a}})$ — решение данной задачи. Обратно, если $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{a}})$ — решение

[15] См. гл. 5, посвященную «классической» квазилинейной экономике.

данной задачи, то найдутся числа $\hat{z}_i$ и $\hat{r}_j$, такие что $((\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}), (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{r}}), \hat{\mathbf{a}})$ — Парето-оптимум.

Воспользуемся приведенной характеристикой Парето-оптимальных состояний. Пусть $((\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}), (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{r}}), \hat{\mathbf{a}})$ — внутренний Парето-оптимум ($\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$, $\hat{\mathbf{a}}_i \in \operatorname{int} A_i$, $\hat{\mathbf{y}}_j \in \operatorname{int} Y_j^o$ и $\hat{\mathbf{a}}_j \in \operatorname{int} A_j$), а функции полезности и издержек дифференцируемы. Дифференцируя функцию Лагранжа данной задачи

$$\mathbb{L} = \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}) - \sum_{j \in J} c_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{a}) + \sum_{k \in K} \sigma_k \left(\sum_{j \in J} y_{jk} - \sum_{i \in I} x_{ik} \right),$$

получаем следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_{ik}} = \sigma_k \ \forall i, k, \quad \frac{\partial c_j}{\partial y_{jk}} = \sigma_k \ \forall j, k,$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial a_{ie}} + \sum_{s \neq i} \frac{\partial v_s}{\partial a_{ie}} = \sum_{j \in J} \frac{\partial c_j}{\partial a_{ie}} \ \forall e \in E_i.$$
$$\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{je}} = \frac{\partial c_j}{\partial a_{je}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial c_s}{\partial a_{je}} \ \forall e \in E_j.$$

Охарактеризуем теперь обычные *рыночные равновесия* в этой экономике. Пусть $\mathbf{p}$ — цены первых l благ. Цену $(l+1)$-го блага будем считать равной единице. При этих ценах потребление первых l благ $\bar{\mathbf{x}}_i$ и создание экстерналий $\bar{\mathbf{a}}_i$ потребителем i определяются на основе решения следующей задачи максимизации потребительского излишка[16]:

$$v_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i, \ \mathbf{a}_i \in A_i}$$

Дифференциальная характеристика внутреннего по x_i и a_i решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_{ik}} = p_k \ \forall k, \quad \frac{\partial v_i}{\partial a_{ie}} = 0 \ \forall e \in E_i.$$

С учетом формы производственной функции задача производителя запишется следующим образом:

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{a}) \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j^o, \mathbf{a}_j \in A_j}.$$

[16]Она получается из обычной задачи потребителя подстановкой бюджетного ограничения с учетом вида функции полезности.

Дифференциальная характеристика внутреннего по y_j и a_j решения этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial c_j}{\partial y_{jk}} = p_k \; \forall k, \quad \frac{\partial c_j}{\partial a_{je}} = 0 \; \forall e \in E_j.$$

Пусть $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ — внутреннее равновесие. Тогда если некоторая экстерналия одного типа для всех потребителей (только положительная или только отрицательная), то состояние экономики $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ не оптимально по Парето. Этот факт можно установить, как и ранее, сравнивая дифференциальные характеристики Парето-оптимальных и равновесных состояний.

Пусть, например, $e^* \in E_{j^*}$ таково, что в этом равновесии

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_{j^* e^*}} \leqslant 0 \; \forall i \quad \text{и} \quad \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^* e^*}} \geqslant 0 \; \forall j \neq j^*,$$

причем по крайней мере одно из этих неравенств строгое. Тогда

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^* e^*}} < \sum_{j \neq j^*} \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^* e^*}}.$$

Поскольку рассматривается состояние равновесия, то

$$\frac{\partial c_{j^*}}{\partial a_{j^* e^*}} = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^* e^*}} < \sum_{j \in J} \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^* e^*}}.$$

Это означает, что $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ не Парето-оптимально.

Вообще говоря, для того чтобы сделать этот вывод, достаточно более слабого предположения, что «предельный эффект» экстерналии, т. е. величина

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^* e^*}} - \sum_{j \neq j^*} \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^* e^*}},$$

не равна нулю. Обозначим эту величину через ε.

Укажем возможные *Парето-улучшения*??emph для состояния равновесия. Пусть $(d\mathbf{x}, d\mathbf{z}, d\mathbf{y}, d\mathbf{r}, d\mathbf{a})$ — дифференциально малое изменение для состояния равновесия, причем

$$d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{a}_i = \mathbf{0} \; \forall i,$$
$$d\mathbf{a}_j = \mathbf{0} \; \forall j \neq j^*, \quad da_{j^* e} = 0 \; \forall e \neq e^*.$$

Тогда эффект изменения производства экстерналии $a_{j^*e^*}$ на величину $da_{j^*e^*}$ окажется равным $\varepsilon da_{j^*e^*}$. Пусть, например, предельный эффект экстерналии $a_{j^*e^*}$ положителен ($\varepsilon > 0$). Тогда если $da_{j^*e^*} > 0$, то величина $\varepsilon da_{j^*e^*}$ положительна. Она представляет собой экономию $(l+1)$-го блага в результате указанного увеличения производства экстерналии e^* производителем j^*.

Изменение должно быть таким, чтобы новое состояние было допустимым. Это требование определяет соотношения, которым должны удовлетворять изменения. Так, дифференцируя баланс по $(l+1)$-му благу, получим

$$\sum_{i \in I} dz_i + \sum_{j \in J} dr_j = 0.$$

Изменения производства экстерналии вызывают изменения затрат $(l+1)$-го блага на предприятиях (при условии, что производство остается эффективным):

$$dr_j = \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^*e^*}} da_{j^*e^*},$$

причем $dr_{j^*} = 0$, поскольку в равновесии $\partial c_{j^*}(\bar{\mathbf{y}}_{j^*}, \bar{\mathbf{a}})/\partial a_{j^*e^*} = 0$.

Полезности потребителей при этом изменяются на величины

$$du_i = dv_i + dz_i = \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^*e^*}} da_{j^*e^*} + dz_i.$$

Сумма изменений полезностей с учетом соотношений между изменениями равна $\varepsilon da_{j^*e^*}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} du_i &= \sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^*e^*}} da_{j^*e^*} + \sum_{i \in I} dz_i = \\ &= \left(\sum_{j \in J} \frac{\partial c_j}{\partial a_{j^*e^*}} + \varepsilon\right) da_{j^*e^*} - \sum_{j \in J} dr_j = \\ &= \sum_{j \in J} dr_j + \varepsilon da_{j^*e^*} - \sum_{j \in J} dr_j = \varepsilon da_{j^*e^*}.\end{aligned}$$

Существуют такие dz_i, что все du_i положительны. Если, например, для всех потребителей $i \in I$

$$dz_i = \varepsilon da_{j^*e^*}/m - \frac{\partial v_i}{\partial a_{j^*e^*}} da_{j^*e^*},$$

то каждый из них увеличит свою полезность:

$$du_i = \varepsilon da_{j^*e^*}/m > 0.$$

Понятно, что если *равновесие с налогами* Парето-оптимально, то величина, например, ставки налога, взимаемого с производителя j за выпуск единицы экстерналий, должна быть равна совокупному предельному ущербу от экстерналий, т. е.

$$t_{je} = -\sum_{i \in I} \frac{\partial v_i}{\partial a_{je}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial c_s}{\partial a_{je}}.$$

Аналогично для экстерналии, производимой потребителем,

$$t_{ie} = -\sum_{s \neq i} \frac{\partial v_s}{\partial a_{ie}} + \sum_{j \in J} \frac{\partial c_j}{\partial a_{ie}}.$$

Это вариант правила Пигу для квазилинейной экономики.

Обратно, если ставки налогов на производство экстерналий удовлетворяют правилу Пигу, то равновесие с налогами Парето-оптимально при дополнительных предположениях, что функции полезности вогнуты, а функции издержек выпуклы.

Цены экстерналий в *равновесии с торговлей экстерналиями* удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
q_{ise} &= -\frac{\partial v_s}{\partial a_{ie}} \; \forall i, \; \forall s \neq i, \; \forall e \in E_i, \\
q_{ije} &= \frac{\partial c_j}{\partial a_{ie}} \; \forall i, \; \forall j, \; \forall e \in E_i, \\
q_{jie} &= -\frac{\partial v_i}{\partial a_{je}} \; \forall j, \; \forall i, \; \forall e \in E_j, \\
q_{jse} &= \frac{\partial c_s}{\partial a_{je}} \; \forall j, \; \forall s \neq j, \; \forall e \in E_j,
\end{aligned}$$

т. е. совпадают с соответствующими величинами «предельного ущерба» от экстерналий.

Если равновесие в экономике с налогами и равновесие в экономике с торговлей экстерналиями соответствуют одному и тому же состоянию экономики, то налоги и цены экстерналий связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
t_{ie} &= \sum_{s \neq i} q_{ise} + \sum_{j \in J} q_{ije}, \\
t_{je} &= \sum_{i \in I} q_{jie} + \sum_{s \neq j} q_{jse}.
\end{aligned}$$

Заметим, что если функции полезности вогнуты, а функции издержек выпуклы, причем хотя бы одна из них строго выпукла, то велич́ины налогов Пигу и цен экстерналий не зависят от состояния равновесия и рассчитываются по указанным выше формулам на решении?? задачи ($\mathcal{W}_E$).

Интерес представляет также частный случай, когда воздействие экстерналий на благосостояние потребителей и производственные возможности производителей не зависит от уровня потребления и производства обычных благ, т. е. когда функции полезности и функции издержек имеют следующий вид (сепарабельны):

$$u_i(\mathbf{x}_i, z_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{-i}) = v_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{-i}) + z_i = v_{ix}(\mathbf{x}_i) + v_{ia}(\mathbf{a}) + z_i,$$

$$c_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{-j}) = c_{jy}(\mathbf{y}_j) + c_{ja}(\mathbf{a}).$$

В этом случае объем производства и потребления всех обычных благ (кроме «квазилинейного» блага) не зависит от типа равновесия (один и тот же как в «обычном» рыночном равновесии, так и в равновесии с налогами и в равновесии с торговлей экстерналиями), хотя производство и потребление экстерналий в этих состояниях могут различаться. Более того, рынки сепарабельных экстерналий можно анализировать независимо от рынков обычных благ.

Пример 9.7 (курильщик и некурящий)
Модифицируем Пример 9.5 для квазилинейной экономики с сепарабельными экстерналиями. Пусть функции полезности студентов имеют вид

$$u_i = v_{ix}(\mathbf{x}_i) + v_{ia}(a) + z_i,\ i = 1, 2,$$

где $\mathbf{x}_i$ — объемы потребления «обычных» благ, z_i — количество денег на остальные блага, $a \geqslant 0$ — количество выкуриваемых первым студентом сигарет. Как и ранее, второй студент — некурящий, и $v'_{2a}(a) < 0$, а у первого, напротив, $v'_{1a}(a) > 0$, если количество сигарет меньше $\check{a}$ ($\check{a} > 0$) и $v'_{1a}(a) < 0$, если $a > \check{a}$.

Как уже говорилось, можно «забыть» о существовании благ $\mathbf{x}_i$ и сосредоточиться на экстерналии a и квазилинейном благе z_i. Поскольку ситуация фактически «двумерная», ее иллюстрацией также может служить Рис. 9.1 (только по горизонтальным осям откладываются z_i).

В точке A, соответствующей абсолютному праву некурящего на чистый воздух ($a = 0$) имеют место неравенства $v'_{2a}(0) < 0 < v'_{1a}(0)$.

Если выполнено $-v'_{2a}(0) < v'_{1a}(0)$ (т. е. предельный ущерб от экстерналий не слишком велик — не превышает предельной оценки курения для курильщика), то состояние A не оптимально. Действительно, оптимум должен характеризоваться максимумом индикатора благосостояния

$$W(a) = v_{1a}(a) + v_{2a}(a).$$

В граничном Парето-оптимуме ($a = 0$) должно быть выполнено $W'(0) \leqslant 0$, т. е. $-v'_{2a}(0) \geqslant v'_{1a}(0)$.

Из этого состояния можно произвести строгое Парето-улучшение вида $da > 0$, $dz_2 > 0$, $dz_1 = -dz_2 < 0$. При этом

$$dv_1 = v'_{1a}(0)da - dz_2, \quad dv_2 = v'_{2a}(0)da + dz_2.$$

Для того чтобы одновременно выполнялось $dv_1 > 0$ и $dv_2 > 0$, нужно выбрать dz_2 так, чтобы

$$-v'_{2a}(0)da < dz_2 < v'_{1a}(0)da.$$

В точке B, соответствующей праву свободно курить ($a = \check{a}$), выполнено $v'_{1a}(\check{a}) = 0$, $v'_{2a}(\check{a}) < 0$. Ясно, что при этом условие оптимальности $W'(\check{a}) = 0$ не выполнено. Парето-улучшение должно иметь вид $da < 0$, $dz_1 > 0$, $dz_2 = -dz_1 < 0$. При этом

$$dv_1 = dz_1, \quad dv_2 = v'_{2a}(\check{a})da - dz_1.$$

Некурящий улучшит свое благосостояние ($dv_2 > 0$) при $dz_1 < v'_{2a}(\check{a})da$.

Внутреннее равновесие с торговлей экстерналиями характеризуется соотношениями $v'_{2a}(\bar{a}) = -q$ и $v'_{1a}(\bar{a}) = q$, где $\bar{a}$ — количество дыма в этом равновесии. При этом $W'(\bar{a}) = 0$. △

Пример 9.8 (экстерналии в производстве, частное равновесие)

Рассмотрим квазилинейную экономику с тремя благами ($l = 2$) и двумя фирмами, которые производят первое и второе блага соответственно, затрачивая третье благо. Их функции издержек зависят от некоторых действий первой фирмы, например по уменьшению загрязнений, негативно влияющих на условия деятельности второго производителя.

Будем предполагать, что объем загрязнений, произведенных первой фирмой, однозначно определяется объемом выпускаемой ею продукции $y_1 \geqslant 0$ и поэтому может быть измерен этим объемом. Тем самым мы возвращаемся к подходу, рассмотренному в первом параграфе данной главы. Будем также считать, что внешнее влияние первой фирмы на вторую увеличивает издержки второй фирмы на одну и ту же величину, независимо от выпуска этой фирмы:

$$c_1 = c_1(y_1) \quad \text{и} \quad c_2 = c_{22}(y_2) + c_{21}(y_1),$$

причем $c'_{21}(y_1) > 0$.

В дальнейшем будем также предполагать выполненными стандартные предположения о том, что предельные издержки обоих производителей положительны

$$c'_1(y_1) > 0, \quad c'_{22}(y_2) > 0$$

и не убывают по объемам производства. Потребительский спрос порождается репрезентативным потребителем с сепарабельной функцией полезности

$$u = v_1(x_1) + v_2(x_2) + z,$$

такой что предельные полезности $v'_k(x)$ положительны и убывают.

Проиллюстрируем на этом простом примере все рассмотренные нами инструменты корректировки фиаско рынка.

Парето-оптимум. Индикатор благосостояния для данной экономики имеет вид

$$W = v_1(y_1) + v_2(y_2) - c_1(y_1) - c_{22}(y_2) - c_{21}(y_1).$$

Дифференцируя его, получаем следующую дифференциальную характеристику Парето-оптимальных состояний:

$$v'_1(\hat{y}_1) = c'_1(\hat{y}_1) + c'_{21}(\hat{y}_1),$$
$$v'_2(\hat{y}_2) = c'_{22}(\hat{y}_2).$$

Если общие издержки $c'_1(y_1) + c'_{21}(y_1)$ не убывают, то при сделанных выше предположениях, эта дифференциальная характеристика однозначно определяет объемы производства первых двух благ в Парето-оптимальных состояниях. Поэтому мы можем говорить о Парето-оптимальных объемах производства $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$.

Рыночное равновесие. Обратные функции спроса и обратные функции предложения имеют вид

$$p_1^D(y_1) = v'_1(y_1), \quad p_2^D(y_1) = v'_2(y_2),$$
$$p_1^S(y_1) = c'_1(y_1), \quad p_2^S(y_1) = c'_{22}(y_2),$$

поэтому рыночное равновесие определяет следующая дифференциальная характеристика (равенство цен спроса и предложения на обоих рынках):

$$v'_1(\bar{y}_1) = c'_1(\bar{y}_1) \quad \text{и} \quad v'_2(\bar{y}_2) = c'_{22}(\bar{y}_2).$$

Сепарабельность функции полезности приводит к независимости объемов спроса и предложения первого и второго благ от других благ

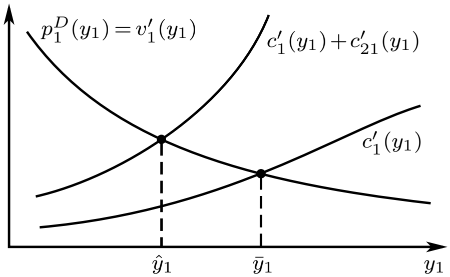


Рис. 9.2. *Иллюстрация к Примеру 9.8: сравнение Парето-оптимума и равновесия*

и поэтому позволяет анализировать их рынки независимо друг от друга. В дальнейшем мы будем характеризовать только рынок первого блага, так как характеристики рынка второго не зависят от выбранных способов регулирования первого. Заметим также, что отсутствие внешнего влияния первого производителя на второго приводит к тому, что производство второго блага в рыночном равновесии равно его количеству в каждом Парето-оптимальном состоянии $\bar{y}_2 = \hat{y}_2$ (Парето-оптимальному количеству). С другой стороны, сравнивая характеристики равновесного и Парето-оптимального количества первого блага, можно заключить, что при сделанных предположениях относительно внешних влияний (отрицательные экстерналии) выполнено $\hat{y}_1 < \bar{y}_1$. Это следует из того, что функция $v_1'(y_1) - c_1'(y_1)$ убывает, равна $c_{21}'(\hat{y}_1) > 0$ при $y_1 = \hat{y}_1$ и равна нулю при $y_1 = \bar{y}_1$.

На Рис. 9.2 показаны оптимальный $\hat{y}_1$ и равновесный $\bar{y}_1$ выпуски первого производителя. Рисунок иллюстрирует причину фиаско рынка: первый производитель в своих расчетах издержек и дохода принимает во внимание только часть действительных предельных издержек, связанных с производством первого блага. Здесь $c_1'(y_1)$ — частные предельные издержки первого предприятия, а $c_1'(y_1)+c_{21}'(y_1)$ — общественные предельные издержки. Разница $c_{21}'(y_1)$ соответствует предельному ущербу от экстерналии.

Квотирование. При количественном ограничении (квоте) на объем выпуска первого производителя в размере $\tilde{y}_1 = \hat{y}_1$ равновесие с квотами на рынке первого блага установится при цене $p_1 = p_1(\hat{y}_1)$ и объеме производства $\hat{y}_1$.

Налог Пигу. Ставка налога Пигу на загрязнение равна величине предельного ущерба от экстерналий

$$t = c'_{21}(\hat{y}_1).$$

При такой ставке равновесие с налогами Парето-оптимально, поскольку решением задачи первого производителя

$$\Pi_1(y_1) = p_1 y_1 - c_1(y_1) - t y_1 \to \max,$$

при цене первого блага $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ является величина $\hat{y}_1$.

Дотации за сокращение загрязнений. Другое возможное решение проблемы экстерналий — дотации за уменьшение объема их производства ниже некоторой установленной квоты $\tilde{y}_1$. Пусть s — ставка такого дотационного возмещения. При выпуске y_1 единиц продукции в условиях дотаций прибыль равна

$$\Pi_1(y_1) = p_1 y_1 - c_1(y_1) + s(\tilde{y}_1 - y_1).$$

Она достигает максимального размера при объеме выпуска, который определяется из уравнения

$$p_1 = c'_1(y_1) + s.$$

Как и выше, ставка дотационных выплат в размере предельного ущерба, т. е. $s = c'_{21}(\hat{y}_1)$, при цене первого блага $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ обеспечивает производство оптимального объема продукции $\hat{y}_1$ (и оптимального объема экстерналий). Это означает, что $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ — цена равновесия на рынке первого блага при таком выборе ставки дотаций.

Заметим, что величина квоты не влияет на равновесие на рынке первого блага. При $\tilde{y}_1 = 0$ дотация оказывается налогом, так как в равновесии $y_1 > \tilde{y}_1 = 0$.

Торговля экстерналиями. Предположим, что существует рынок экстерналий и что цена единицы экстерналии составляет q. Объем производства экстерналий обозначим a. Тогда задача первого производителя имеет вид

$$\Pi_1 = p_1 y_1 - qa - c_1(y_1) \to \max_{y_1, a}, y_1 = a,$$

а задача второго производителя — вид

$$\Pi_2 = p_2 y_2 + qa - c_{22}(y_2) - c_{21}(a) \to \max_{y_2, a}.$$

Покажем, что цены $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$, $p_2 = p_2^D(\hat{y}_2)$ и $q = c_{21}'(\hat{y}_1)$ являются ценами равновесия на рынках первых двух благ и экстерналий, а равновесные объемы производства будут равны $y_1 = a = \hat{y}_1$ и $y_2 = \hat{y}_2$, т. е. что появление рынка экстерналий приводит к Парето-оптимальности.

Предложение экстерналий (их производство первым производителем) составляет тогда величину a, определяемую соотношением

$$p_1 - q = c_1'(a),$$

а спрос — соотношением

$$q = c_{21}'(a).$$

Равновесие (равенство спроса и предложения) на рынке экстерналий определяет объем их производства, удовлетворяющий соотношению

$$p_1 = c_1'(a) + c_{21}'(a).$$

При $p_1 = p_1^D(\hat{y}_1)$ решением этого уравнения является $\hat{y}_1$.

При указанных ценах и объемах производства первых двух благ цены спроса и предложения на первые два блага равны

$$p_1^D(y_1) = c_1'(y_1) + c_{21}'(y_1) = p_1^S(y_1)$$

и

$$p_2^D(y_2) = c_{22}'(y_2) = p_2^S(y_1).$$

Это означает, что соответствующие цены являются равновесными. △

Задачи

9.16 Прибыль птицефабрики (фирма 1) находится в зависимости от того, насколько сильно два алюминиевых завода (фирмы 2 и 3) загрязняют атмосферу. Цена на кур равна 6, цена на алюминий равна 2. Функции издержек равны

$$c_1 = 2y_1^2 + y_1(y_2 + y_3) \quad \text{и} \quad c_i = 0{,}5y_i^2, \; i = 2, 3,$$

где y_1 — объем производства куриного мяса, y_2, y_3 — объемы производства алюминия. Найдите

(A) равновесные объемы производства;
(B) Парето-оптимальные объемы производства (в предположении, что фирмы могут делиться прибылью);
(C) налоги/дотации Пигу;
(D) равновесную цену экстерналии и объемы производства при торговле экстерналиями.

9.17 Пивзавод (фирма 1) сбрасывает в реку отходы, что уменьшает доходы двух одинаковых рыболовецких предприятий (фирмы 2 и 3). Цена на пиво равна 12, цена на рыбу равна 8. Функции издержек равны

$$c_1 = 2y_1^2 \quad \text{и} \quad c_i = 1{,}5y_i^2 + 2y_1y_i,\ i = 2, 3,$$

где y_1 — выпуск пива, y_2, y_3 — уловы рыбы. Найдите

(A) равновесные объемы производства;

(B) Парето-оптимальные объемы производства (в предположении, что фирмы могут делиться прибылью);

(C) налоги/дотации Пигу;

(D) равновесную цену экстерналии и объемы производства при торговле экстерналиями.

9.18 Две фирмы оказывают друг на друга внешние влияния. Цена на продукцию 1-й фирмы равна 13, цена на продукцию 2-й фирмы равна 11. Функции издержек равны соответственно

$$c_1 = 2y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2,$$

$$c_2 = 3/2y_2^2 + 2y_1y_2 + 3/2y_1^2,$$

где $y_j \geqslant 0$ — объемы выпуска. Найдите

(A) равновесные объемы производства;

(B) Парето-оптимальные объемы производства;

(C) квоты, обеспечивающие Парето-оптимум;

(D) налоги/дотации Пигу.

(E) Сравните прибыли в каждой из ситуаций.

9.19 («Садовод и пчеловод») Один из двух соседей — садовод — принимает ежегодно решение об объеме производства?? яблок (apples) $y_a \geqslant 0$, а второй — пчеловод — об объеме производства меда (honey) $y_h \geqslant 0$. Цены этих продуктов экзогенны (т. е. ищем частное равновесие) и равны p_a, p_h соответственно. Издержки обоих зависят от действий соседа, т. е. они имеют вид $c_a(y_a, y_h)$, $c_h(y_a, y_h)$, причем функции дифференцируемы и известно, что $\partial c_a(y_a, y_h)/\partial y_h < 0$ и $\partial c_h(y_a, y_h)/\partial y_a < 0$, т. е. издержки сбора яблок убывают в зависимости от количества пчел y_h, а издержки сбора меда — убывают по переменной y_a. Цель обоих — максимизация своей прибыли.

(A) Покажите, что внутреннее нерегулируемое равновесие здесь всегда не оптимально (где оптимум определяется по максимуму совокупной прибыли).

(B) Какой вид может иметь локальное Парето-улучшение? Объясните.

(C) Объясните, какой вид должны иметь налоги Пигу.

9.20 ⟦MWG⟧ На ферме Джонса производится только мед. Существует два способа производства меда: без пчел и с пчелами. По первому способу ведро искусственного меда (неотличимого от натурального) производится из одного галлона кленового сиропа с использованием единицы труда. То же самое количество меда можно произвести традиционным способом (с пчелами). Для этого потребуется k единиц труда и b пчел. В обоих случаях ферма Джонса приспособлена к производству не более чем H ведер меда.

На соседней ферме, принадлежащей Смиту, выращиваются яблоки. Если имеется пасека, то требуется меньше труда, так как тогда опыление производится пчелами, а не работниками, при этом c пчел заменяют одного работника. Ферма Смита позволяет вырастить a бушелей яблок.

Предположим, что рыночная ставка заработной платы равна w, цена пчелы — p_b, а цена галлона кленового сиропа — p_m. Каждый фермер производит максимально возможное количество продукции, минимизируя издержки (предполагается, что рыночные цены таковы, что выгодно выбрать максимально возможное производство).

(A) Является ли возникающее в этой ситуации равновесие эффективным? Как оно зависит от параметров k, b, c, w, p_b, p_m? Дайте интуитивное объяснение результата.

(B) Сколько Смит будет готов предложить Джонсу за то, чтобы тот производил только натуральный мед (с помощью пчел)?

(C) Была бы достигнута эффективность, если бы обе фермы принадлежали одному человеку?

(D) Какие налоги должно ввести правительство для достижения эффективности?

9.9 Слияние и торг

Как тмечалось выше, экстерналии, даже когда они затрагивают многих экономических субъектов, обычно имеют индивидуальный характер, влияя на них по разному, и приводят к ситуациям двусторонней монополии. В таких ситуациях конкурентный рынок как механизм перераспределения прав собственности (контроля над производством экстерналий) не может возникнуть при любом определении прав собственности. Поэтому уместно рассмотреть и другие варианты механизмов координации. Здесь мы обсудим такие механизмы для случая двух участников (двусторонней монополии). В дальнейшем мы рассмотрим и способы координации производства экстерналий, затрагивающих многих экономических субъектов.

Слияние

В Примерах 9.2 и 9.8 мы рассмотрели экстерналии в производстве, которыми затронуты две фирмы. Поскольку экстерналиями затронуты только эти две фирмы, естественно было бы рассмотреть возможность их объединения в одну фирму.

Пример 9.9 (продолжение Примера 9.2, с. 564)

В результате слияния предприятий образуется фирма, максимизирующая суммарную прибыль

$$\pi_\Sigma = p_1 y_1 + p_2 y_2 - p_3(r_1 + r_2)$$

по объемам производства y_j и по затратам труда r_j при технологических ограничениях

$$y_1 \leqslant f_1(r_1, y_2) \quad \text{и} \quad y_2 \leqslant f_2(r_2, y_1).$$

Лагранжиан этой задачи имеет вид

$$\mathbb{L} = p_1 y_1 + p_2 y_2 - p_3(r_1 + r_2) + \lambda_1(f_1(r_1, y_2) - y_1) + \lambda_2(f_2(r_2, y_1) - y_2).$$

Дифференцируя лагранжиан и приравнивая производные к нулю, получим следующую дифференциальную характеристику решения задачи максимизации суммарной прибыли:

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{1}{\partial f_1/\partial r_1} - \frac{\partial f_2/\partial y_1}{\partial f_2/\partial r_2} \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{\partial f_2/\partial r_2} - \frac{\partial f_1/\partial y_2}{\partial f_1/\partial r_1}.$$

Учитывая дифференциальную характеристику решения задачи потребителя

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_1}{p_3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u/\partial x_2}{\partial u/\partial x_3} = \frac{p_2}{p_3},$$

убеждаемся, что характеристика равновесия при слиянии фирм совпадает с характеристикой Парето-оптимальных состояний. △

Есть основания ожидать, что существенное внешнее влияние производителей друг на друга — исключительное явление, поскольку рыночные силы создают стимулы для интернизации экстерналий (т. е. превращения внешних влияний во внутрифирменные влияния) через слияние предприятий. Действительно, распределение прав собственности, при котором производство экстерналий неэффективно, приводит к рыночному равновесию, при котором совокупная прибыль двух предприятий ниже, чем прибыль единого предприятия, образовавшегося в результате их слияния.

Если в экономике существуют только экстерналии рассмотренного типа, то слияние предприятий полностью решает проблему экстерналий — экономика становится полностью «классической» и для нее верны (при выполнении соответствующих предположений) обе теоремы благосостояния.

Аналогично может решаться проблема внешнего влияния отдельного потребителя на фирму (или наоборот, фирмы — на потребителя) — он может стать собственником фирмы, полностью ее контролировать и получать весь остаточный доход (с точки зрения сравнения с классической моделью важно то, что эта прибыль для такого собственника не экзогенна). Для моделирования подобной ситуации приходится несколько выйти за рамки классической модели общего равновесия, дополнив задачу потребителя производственным блоком. Однако такая модификация не создает серьезных трудностей с доказательством теорем благосостояния, и соответственно выводы по сравнению с обычной моделью не меняются.

Торг

Вообще говоря, для интернизации экстерналий вовсе не обязательно должно происходить слияние в один экономический субъект с единой целевой функцией. Два отдельных экономических субъекта могут вступить в соглашение по поводу объема производства экстерналии и суммы компенсирующих платежей. Соглашение в условиях двусторонней монополии может быть достигнуто при помощи какой-либо процедуры торга (переговоров).

Рассмотрим опять ситуацию, когда одна фирма (например, первая) оказывает внешнее влияние на другую фирму (вторую). Пусть $a \in A$ — уровень этих внешних влияний. Технологические множества зависят от этого уровня: $Y_j = Y_j(a)$. Если соглашение между фирмами непосредственно затрагивает только экстерналии и денежные платежи, но не технологии, выбираемые фирмами, то можно рассмотреть задачу выбора технологии, обеспечивающей j-й фирме максимальный уровень прибыли при данном уровне экстерналий и при данном векторе рыночных цен $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j(a)}.$$

Обозначим через $\Pi_j^0(a, \mathbf{p})$ максимальную прибыль j-й фирмы при данных $\mathbf{p}$ и a.

Предположим, что торг между фирмами не влияет на их поведение на остальных рынках и что фирмы являются ценополучателями, т. е. действуют, считая цены $\mathbf{p}$ фиксированными. Это позволяет рассматривать вектор цен $\mathbf{p}$ в процедуре торга как фиксированный параметр.

Пусть T — плата второй фирмы первой. (Если, наоборот, первая фирма платит второй, то T будет отрицательной.) В процедуре торга выбираются две переменные — a и T.

Результат торга будет зависеть от его организации или, другими словами, от соотношения переговорных сил сторон. Рассмотрим в качестве примера возможной организации торга крайний случай простого одноэтапного торга («не хочешь — не бери»): одна из фирм предлагает соглашение (a, T), а другая может либо согласиться, либо отказаться. В случае отказа фирмы оказываются в исходном состоянии (статус-кво).

Результат торга будет зависеть также и от статус-кво, т. е. от прав собственности (прав контролировать деятельность, вызывающую экстерналии). Типичный случай, который мы рассматривали выше при анализе рыночного равновесия, заключается в том, что уровень экстерналий выбирается той фирмой, которая их производит (в нашем случае это первая фирма). Можно рассмотреть также противоположный случай, когда уровень экстерналий выбирается той фирмой, на которую они воздействуют (в нашем случае это вторая фирма). В обоих случаях фирма, выбирающая экстерналии, решает задачу максимизации прибыли по уровню экстерналий:

$$\Pi_j^0(a) \to \max_{a \in A}.$$

Если $A = \mathbb{R}_+$ и экстерналии отрицательные, то можно ожидать, что вторая фирма выберет нулевой уровень экстерналий, а первая — такой, что $\partial \Pi_1^0(a)/\partial a = 0$.

Возможны и другие варианты. Законодательство может накладывать количественные ограничения на экстерналии (квоты). Например, может быть установлено, что $a = \tilde{a}$, и этот уровень может быть изменен только с согласия обеих сторон. При каждом распределении прав собственности будет выбран определенный уровень экстерналий, например $a = \bar{a}$, и прибыли фирм в статус-кво составят $\bar{\Pi}_1 = \Pi_1^0(\bar{a})$ и $\bar{\Pi}_2 = \Pi_2^0(\bar{a})$.

В результате торга прибыли предприятий окажутся равными

$$\Pi_1 = \Pi_1^0(a) + T \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \Pi_2^0(a) - T.$$

Коль скоро прибыль трансферабельна, оптимальное значение a с точки зрения предприятий — это значение a, максимизирующее суммарную прибыль:

$$\Pi_1^0(a) + \Pi_2^0(a) \to \max_{a \in A}.$$

Пусть $\hat{\Pi}_\Sigma$ — соответствующий максимум. Наличие экстерналий в типичных случаях ведет к тому, что $\hat{\Pi}_\Sigma > \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2$, и, следовательно, возможны взаимовыгодные соглашения между предприятиями. В частности, если первое предприятие выбирает объем экстерналий на таком уровне, что $\partial\Pi_1^0(a)/\partial a = 0$, то такие возможности всегда существуют. Действительно, если экстерналии отрицательные и первое предприятие уменьшает их производство, изменяя его на бесконечно малую величину $da < 0$, то его прибыль изменяется на величину

$$\frac{\partial \Pi_1^0(a)}{\partial a} \cdot da = 0$$

(т. е. в первом приближении остается постоянной), тогда как прибыль второго предприятия возрастает на величину

$$\frac{\partial \Pi_2^0(a)}{\partial a} \cdot da > 0,$$

более чем достаточную, чтобы компенсировать потери первого (по крайней мере, при небольших изменениях выпуска).

Учитывая это, предположим, что имеется положительный нереализованный излишек $\hat{\Pi}_\Sigma - \bar{\Pi}_1 - \bar{\Pi}_2$, и предприятия могут в результате торга поделить его между собой.

Предположим сначала, что соглашение (a, T) предлагает первое предприятие. Оно не будет отвергнуто вторым предприятием только в том случае, если его прибыль окажется в результате сделки не ниже, чем в статус-кво. В этих условиях естественно ожидать, что первое предприятие предложит сделку, которая является решением следующей задачи:

$$\Pi_1 = \Pi_1^0(a) + T \to \max_{a \in A, T},$$

$$\Pi_2 = \Pi_2^0(a) - T \geqslant \bar{\Pi}_2.$$

Ясно, что для первой фирмы выгодно сделать платеж T как можно бо́льшим, поэтому в оптимуме ограничение выходит на равенство, и прибыль второй фирмы будет такой же, как в статус-кво. Подставляя $T = \Pi_2^0(a) - \bar{\Pi}_2$ в прибыль первой фирмы, получим эквивалентную задачу:

$$\Pi_1 = \Pi_1^0(a) + \Pi_2^0(a) - \bar{\Pi}_2 \to \max_{a \in A}.$$

Здесь $\bar{\Pi}_2$ является константой, поэтому решением задачи будет уровень экстерналий, максимизирующий суммарную прибыль.

Таким образом, в результате торга будет достигнут фактически такой же результат, как и при слиянии предприятий. Чтобы включить рассмотренную модель торга в модель общего равновесия, мы должны вспомнить, что результат торга зависит от вектора цен $\mathbf{p}$. В равновесии объем экстерналий $\bar{a}$ должен быть результатом торга при равновесных ценах $\bar{\mathbf{p}}$, а равновесная технология каждого из двух предприятий $\bar{y}_j$ должна быть решением вышеприведенной задачи максимизации прибыли по y_j при данном уровне экстерналий $\bar{a}$ и ценах $\bar{\mathbf{p}}$. Если все экстерналии в экономике интернизируются с помощью торга, то соответствующие равновесия должны быть оптимальными по Парето.

Если соглашение будет предлагать второе предприятие, то оно соответственно будет решать задачу

$$\Pi_2 = \Pi_2^0(a) - T \to \max_{a \in A, T}$$
$$\Pi_1 = \Pi_1^0(a) + T \geqslant \bar{\Pi}_1,$$

которая сводится к задаче

$$\Pi_2 = \Pi_1^0(a) + \Pi_2^0(a) - \bar{\Pi}_1 \to \max_{a \in A}.$$

Ясно, что и в этом случае решением задачи будет уровень экстерналий, максимизирующий суммарную прибыль.

Этот анализ иллюстрируется на Рис. 9.3. Точка S_1 изображает статус-кво в случае, когда право контроля над производством экстерналий принадлежит первому производителю, а точка S_2 — статус-кво в случае, когда право контроля над производством экстерналий принадлежит первому производителю. Треугольник $S_1 A_1 B_1$ изображает множество ситуаций, которые могут быть получены как результат Парето-улучшений статус-кво S_1, а треугольник $S_2 A_2 B_2$ — как результат Парето-улучшений статус-кво S_2.

Проведенный анализ можно проинтерпретировать в более абстрактных терминах теории торга. В более общем случае рассматривается множество $\mathcal{R}$ возможных распределений прибыли (Π_1, Π_2), которые

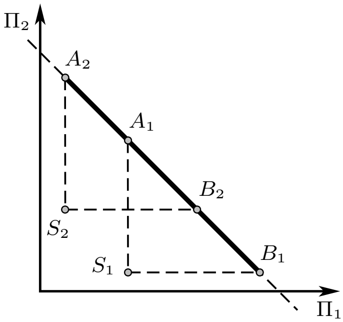


Рис. 9.3. *Возможные результаты торга*

в нашей ситуации описываются соотношением

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_1^0(a) + \Pi_2^0(a), a \in A.$$

Эффективная граница этого множества $\mathcal{P}$ характеризуется следующим образом: распределение прибыли (Π_1, Π_2) принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда не существует распределений прибыли $(\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2)$, принадлежащих $\mathcal{R}$, таких что

$$\Pi_1 \leqslant \tilde{\Pi}_1, \quad \Pi_2 \leqslant \tilde{\Pi}_2,$$

и по крайней мере одно из этих неравенств строгое. Так как прибыль трансферабельна, то это требование эквивалентно отсутствию в множестве $\mathcal{R}$ точек $(\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2)$, таких что

$$\Pi_1 + \Pi_2 < \tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2.$$

Другими словами, в нашей ситуации (Π_1, Π_2) принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $\Pi_1 + \Pi_2 = \hat{\Pi}_\Sigma$.

Предполагается, что если участники торга не придут к соглашению, то они окажутся в ситуации статус-кво, когда их прибыли равны $(\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2)$. Эта ситуация называется точкой угрозы. Точки (Π_1, Π_2) множества $\mathcal{P}$, для которых выполняются неравенства $\Pi_1 \geqslant \bar{\Pi}_1$ и $\Pi_2 \geqslant \bar{\Pi}_2$, составляют так называемое переговорное множество. В предложенной выше модели переговоров в качестве точки угрозы выбиралась ситуация, которую следует ожидать в отсутствие соглашения. На Рис. 9.3 отрезок A_1B_1 представляет переговорное множество для торга с точкой угрозы S_1, а отрезок A_2B_2 — переговорное множество для торга с точкой угрозы S_2.

Говоря неформально, соглашение — любая точка множества $\mathcal{R}$. Торг — механизм достижения соглашения. Торг эффективен, если соответствующее соглашение принадлежит переговорному множеству. Таким образом, любой эффективный торг ставит в соответствие точке угрозы некоторую точку переговорного множества.

Рассматривая одноэтапный торг типа «не хочешь, не бери», мы получили два крайних случая распределения переговорной силы. В случае многоэтапного торга распределение переговорной силы может быть иным и результат торга может оказаться внутри переговорного множества[17]. Более того, оказывается, что для любой точки переговорного множества можно придумать механизм торга, который бы ее реализовал.

Заметим, что, не зная механизма торга, мы не можем предсказать его точный исход (конкретную точку переговорного множества), поскольку, как уже говорилось, перераспределение прибыли (Π_1, Π_2) будет зависеть от организации переговоров, переговорной силы участников и т. д. Однако *можно ожидать, что ничто не будет мешать рациональным экономическим субъектам достигнуть оптимального состояния; при этом объем производства экстерналий (но не величина компенсации) не будет зависеть ни от первоначального распределения прав собственности, ни от характера организации переговоров; он будет определяться максимумом суммарной прибыли предприятий.*

Этот результат известен как «теорема Коуза». По словам самого Рональда Коуза, «конечный результат (который максимизирует ценность производства) не зависит от правовой позиции, если предполагается, что ценовая система работает без издержек»[18].

Проиллюстрируем проведенный анализ на конкретном примере. В отличие от рассмотренной теоретической модели экстерналии в нем совпадают с выпуском первого предприятия. Однако такое изменение не меняет общих выводов.

[17] Подробнее о многоэтапном торге см. в приложении, посвященном теории игр (см. п. А.7.2 на с. 1106).

[18] R. H. Coase. The Problem of Social Cost, *Journal of Law and Economics* **3** (1960): 1–44 (рус. пер. Р. Коуз. Проблема социальных издержек, в кн. *Фирма, рынок и право*, М.: Дело, 1993). См. также R. H. Coase. Notes on the Problem of Social Cost, in *The Firm, the Market and the Law*, University of Chicago Press, 1988: 157–186 (рус. пер. Р. Коуз. Заметки к „Проблеме социальных издержек“, в кн. *Фирма, рынок и право*, М.: Дело, 1993).

Пример 9.10 (продолжение Примера 9.8, с. 603)
При данных ценах p_1, p_2 прибыли двух предприятий равны

$$\Pi_1^0 = p_1 y_1 - c_1(y_1) \quad \text{и} \quad \Pi_2^0 = p_2 y_2 - c_{22}(y_2) - c_{21}(y_1).$$

Поскольку изменение прибыли второго предприятия при изменении y_1 не зависит от величины y_2, в целях упрощения анализа будем считать прибыль второго предприятия равной величине убытка от экстерналии со знаком минус за вычетом платежа T:

$$\Pi_2^0 = -c_{21}(y_1) - T.$$

Объем экстерналии y_1, максимизирующий суммарную прибыль, определяется из уравнения

$$p_1 = c_1'(y_1) + c_{21}'(y_1).$$

Пусть, более конкретно,

$$c_1(y_1) = y_1^2, \quad c_{21}(y_1) = y_1^2.$$

Тогда $\Pi_1^0 = p_1 y_1 - y_1^2$, $\Pi_2^0 = -y_1^2$. Суммарная прибыль

$$\Pi_1^0 + \Pi_2^0 = p_1 y_1 - 2y_1^2$$

достигает максимума при выпуске $y_1 = p_1/4$ и равна $p_1^2/8$. Точка угрозы S_1 определяется на основе решения задачи

$$\Pi_1^0 = p_1 y_1 - y_1^2 \to \max_{y_1}.$$

При этом $\bar{y}_1 = p_1/2$, $\bar{\Pi}_1 = p_1^2/4$, $\bar{\Pi}_2 = -p_1^2/4$. Точка угрозы S_2 определяется на основе решения задачи

$$\Pi_2^0 = -y_1^2 \to \max_{y_1},$$

При этом $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{\Pi}_1 = 0$, $\bar{\Pi}_2 = 0$.

Таким образом, $S_1 = (p_1^2/4, -p_1^2/4)$, $S_2 = (0, 0)$.

Исходы четырех вариантов торга приведены в Таблице 9.1. Во всех случаях результатом торга будет уровень производства экстерналий $y_1 = p_1/4$, соответствующий максимально возможной суммарной прибыли $p_1^2/8$. Величину прибылей при различных распределениях прав собственности и различных процедурах переговоров иллюстрирует Рис. 9.4. На рисунке $[i, j]$ обозначает ситуацию, когда права контроля над производством экстерналий принадлежат i-му предприятию, а право предложить вариант соглашения — j-му предприятию. $\triangle$

Таблица 9.1. *Различные соглашения в Примере 9.10*

Выбирает экстерналии	Переговорная сила	Π_1	Π_2	T
1	1	$3p_1^2/8$	$\bar{\Pi}_2 = -p_1^2/4$	$3p_1^2/16$
1	2	$\bar{\Pi}_1 = p_1^2/4$	$-p_1^2/8$	$p_1^2/16$
2	1	$p_1^2/8$	$\bar{\Pi}_2 = 0$	$-p_1^2/16$
2	2	$\bar{\Pi}_1 = 0$	$p_1^2/8$	$-3p_1^2/16$

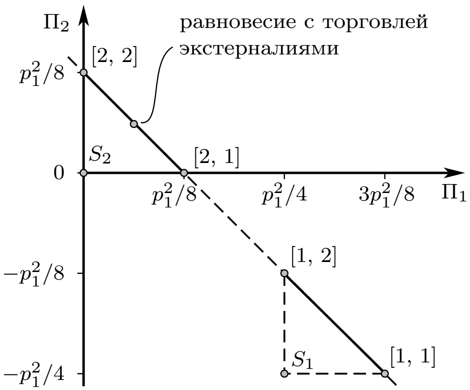


Рис. 9.4. *Различные соглашения в Примере 9.10*

Р. Коуз трактовал проблему экстерналий как проблему нечеткого определения прав собственности. Он полагал, что в ситуации, когда права собственности определены четко и обеспечено их соблюдение, издержки сделок, в том числе и издержки переговоров по передаче прав собственности (прав контроля за деятельностью, вызывающей экстерналии) отсутствуют (пренебрежимо малы), эффективное производство будет обеспечено при любом распределении прав собственности (прав контроля над производством экстерналий).

Если трансакционные издержки достижения соглашения не равны нулю, то торг может не приводить к Парето-оптимуму (оптимуму первого ранга). Но деятельность других возможных институтов, в рамках которых может осуществляться контроль над экстерналиями, тоже связана с трансакционными издержками. По мнению Коуза, это обязательно следует учитывать при сравнении различных институтов.

При ненулевых трансакционных издержках речь, таким образом, должна идти об оптимуме второго ранга. Если оставаться в рамках рыночного решения проблемы экстерналий — через соглашение между сторонами — желательно, чтобы права собственности были распределены так, чтобы трансакционные издержки достижения соглашения были минимальными.

Другая важная причина невозможности достижения эффективных соглашений (которой Коуз не уделил достаточного внимания) — асимметричная информация. Если участники торга неодинаково информированы (например, не знают точно прибыль противоположной стороны в статус-кво), то соглашение может не быть достигнуто, либо может быть выбран неоптимальный объем экстерналий. Подробнее этот вопрос обсуждается в главе, посвященной рынкам с асимметричной информацией.

Задачи

9.21 Два предприятия производят блага 1 и 2 соответственно. При этом они затрачивают труд. Технологии предприятий заданы неравенствами

$$r_1 - 1/3y_1^2 + 1/4y_2^2 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad r_2 - 1/2y_2^2 \geqslant 0,$$

где y_j — объем выпуска, r_j — затраты труда. Цены производимых благ равны $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$, а заработная плата $w = 1/4$.

(A) Какие экстерналии здесь имеют место — положительные или отрицательные? Объясните.

(B) Найдите прибыли предприятий в некоординируемом рыночном равновесии.

(C) Увеличится ли общая прибыль при слиянии предприятий? Если да, то насколько.

(D) Найдите результат одноэтапного торга (выпуски и плату одного предприятия другому), считая, что переговорная сила принадлежит первому предприятию.

9.22 Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями. Потребитель X имеет функцию полезности

$$u_x = x_1x_2 + 2z - z^2.$$

Потребитель Y имеет функцию полезности

$$u_y = y_1y_2 - z^2.$$

Здесь x_k, y_k — объемы потребления двух обычных благ, z — уровень (отрицательного) внешнего влияния X на Y (X имеет право выбирать его произвольно). Потребитель X владеет единицей первого блага, а потребитель Y — единицей второго блага. Потребители рассматривают пропорции обмена как данные (условия совершенной конкуренции).

(A) Найти равновесие. Будет ли возникшее равновесие оптимальным?

(B) Желая изменить z, потребитель Y предлагает потребителю X второе благо в количестве t единиц в обмен на то, что тот установит z на уровне z^*. Потребитель X может либо согласиться на эту сделку, либо отказаться. На этом торг между ними заканчивается.

Торговля на обоих рынках происходит одновременно, т. е. сделка на рынке экстерналий изменяет начальные запасы благ и влияет на равновесную цену p. Учтите, что при этом оба потребителя считают, что не могут повлиять на цену p!

Найти равновесие. Будет ли возникшее равновесие оптимальным?

(C) Решите ту же задачу в случае, когда $u_x = x_1 x_2 + 2\theta z - z^2$, где случайная величина θ принимает значения 0 и 1 с равной вероятностью и значение θ известно только потребителю X.

9.10 Торговля квотами на однородные экстерналии

Рассмотренные выше некоординируемое рыночное равновесие, равновесие с налогами и равновесие с торговлей экстерналиями неявно предполагали существование некоторой системы прав собственности на экстерналии. Так, рыночное равновесие предполагает право производителя экстерналий на их производство в любом объеме. Равновесие с налогами и равновесие с торговлей экстерналиями предполагают возмещение ущерба от экстерналий теми, кто их производит.

В этой параграфе мы изучим влияние других систем прав собственности на состояние экономики, а также результатов рыночной торговли правами собственности.

Заметим прежде всего, что множество Парето-оптимальных состояний не зависит от распределения прав собственности. А поскольку цены экстерналий в равновесии с торговлей экстерналиями и ставки налогов Пигу определяются характеристиками соответствующего Парето-оптимального состояния, распределение прав собственности при реализации этого состояния как равновесия с налогами или равновесия с торговлей экстерналиями влияет лишь на величи́ны трансфертов.

Рассмотрим квазилинейный вариант экономики с однородными экстерналиями, которые «производят» только предприятия и «потребляют» только потребители, проанализированной в Примере 9.6 на с. 593. Предпочтения описываются функциями полезности вида

$$u_i = v_i\left(\mathbf{x}_i, \sum_{j \in J} a_j\right) + z_i$$

($\mathbf{x}_i \in X_i$), а технологии — функциями издержек $c_j(\mathbf{y}_j, a_j)$ ($\mathbf{y}_j \in Y_j^o$, $a_j \in A_j$).

Предположим, что для каждого производителя установлена квота на производство экстерналий в размере $\tilde{a}_j$. При этом задача производителя имеет следующий вид:

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j, \tilde{a}_j) \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j^o}.$$

Покажем, что если распределение квот произвольно, то равновесие с квотами не Парето-оптимально.

Предположим, что $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — равновесие с квотами при квотах $\tilde{\mathbf{a}}$ ($\bar{a}_j \in \operatorname{int} A_j$), причем существует по крайней мере два производителя, таких что

$$\frac{\partial c_{j_1}}{\partial a_{j_1}} \neq \frac{\partial c_{j_2}}{\partial a_{j_2}}.$$

Тогда состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ не является Парето-оптимальным. Мы покажем это, построив строгое Парето-улучшение в дифференциалах. Пусть da_j — дифференциально малые изменения объемов экстерналий. Тогда при условии, что объемы выпуска первых l благ остаются неизменными, суммарные затраты $(l+1)$-го блага изменяются на величину

$$dr_\Sigma = \sum_{j \in J} \frac{\partial c_j}{\partial a_j} da_j.$$

Несовпадение предельных издержек производства экстерналий означает, что можно уменьшить суммарные затраты $(l+1)$-го блага, не изменяя общего объема экстерналий, т. е. выбрав da_j так, что $\sum_{j \in J} da_j = 0$ и $dr_\Sigma > 0$. Строгое Парето-улучшение можно получить, распределив величину dr_Σ, например, поровну между всеми потребителями.

Таким образом, можно увеличить общественное благосостояние, перераспределяя квоты. Покажем, что такое (увеличивающее благосостояние) перераспределение можно получить на основе рыночной торговли квотами.

Будем предполагать, что производители могут продавать и покупать квоты по рыночной цене p_a. Задача производителя принимает следующий вид:

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j, a_j) + p_a(\tilde{a}_j - a_j) \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j^o, a_j \in A_j}.$$

Пусть $\tilde{a}_\Sigma = \sum_{j \in J} \tilde{a}_j$ — совокупная квота на производство экстерналий. Дадим формальное определение равновесия с торговлей квотами.

Определение 9.6:

Набор $(\mathbf{p}, p_a, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ является равновесием с торговлей квотами в экономике с однородными экстерналиями при квотах $\tilde{\mathbf{a}}$, если

* набор $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и экстерналиях $\bar{\mathbf{a}}$;
* технология $(\bar{\mathbf{y}}_j, \bar{r}_j, \bar{a}_j)$ является решением задачи производителя при ценах $\mathbf{p}$ и p_a;
* выполнены балансы по обычным благам;
* суммарное «производство» экстерналий равно общей квоте:

$$\sum_{j \in J} a_j = \tilde{a}_\Sigma.$$

◀

Докажем сначала, что состояние равновесия с торговлей квотами приводит к состоянию экономики $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{a}})$, для которого не существует Парето-улучшения при условии, что общий объем производства экстерналий остается постоянным, т. е. при условии, что

$$\sum_{j \in J} a_j = \tilde{a}_\Sigma.$$

Такое состояние будет *оптимумом второго ранга*. Заметим, что $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{a}})$ при этом является решением следующей задачи на условный максимум:

$$\begin{gathered} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}) = \sum_{i \in I} v_i\left(\mathbf{x}_i, \sum_{j \in J} a_j\right) - \sum_{j \in J} c_j(\mathbf{y}_j, a_j) \to \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}} \\ \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j, \quad \sum_{j \in J} a_j = \tilde{a}_\Sigma, \\ \mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \quad \mathbf{y}_j \in Y_j^o \ \forall j \in j, \quad a_j \in A_j \ \forall j \in j. \end{gathered} \tag{$\mathcal{W}_C$}$$

Другими словами, верна следующая теорема:

Теорема 9.9:

Пусть $(\mathbf{p}, p_a, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — равновесие с торговлей квотами в квазилинейной экономике с однородными экстерналиями при квотах $\tilde{\mathbf{a}}$. Тогда $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{a}})$ является решением задачи $(\mathcal{W}_C)$. ⌟

Доказательство: Пусть $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{a}')$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{W}_C)$. Так как $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя, то набор $\mathbf{x}'_i$ не может дать потребителю более высокую полезность при тех же ценах, т. е.

$$v_i(\bar{\mathbf{x}}_i, \tilde{a}_\Sigma) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i \geqslant v_i(\mathbf{x}'_i, \tilde{a}_\Sigma) - \mathbf{p}\mathbf{x}'_i. \qquad (\diamond)$$

С другой стороны, $(\bar{\mathbf{y}}_j, \bar{a}_j)$ — решение задачи производителя, поэтому $(\mathbf{y}'_j, a'_j)$ не может дать производителю более высокую прибыль при тех же ценах, т. е.

$$\mathbf{p}\bar{\mathbf{y}}_j - c_j(\bar{\mathbf{y}}_j, \bar{a}_j) + p_a(\tilde{a}_j - \bar{a}_j) \geqslant \mathbf{p}\mathbf{y}'_j - c_j(\mathbf{y}'_j, a'_j) + p_a(\tilde{a}_j - a'_j). \qquad (\diamond\diamond)$$

Суммируя неравенства $(\diamond)$ и $(\diamond\diamond)$, получим, с учетом балансов по обычным благам и ограничения $\sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} \tilde{a}_j$, что

$$\sum_{i\in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i, \tilde{a}_\Sigma) - \sum_{j\in J} c_j(\bar{\mathbf{y}}_j, \bar{a}_j) \geqslant \sum_{i\in I} v_i(\mathbf{x}'_i, \tilde{a}_\Sigma) - \sum_{j\in J} c_j(\mathbf{y}'_j, \hat{a}_j).$$

Это означает, что $W(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}}) \geqslant W(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{a}')$, т. е. $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ является решением задачи $(\mathcal{W}_C)$. ■

Укажем на два следствия этой теоремы.

Теорема 9.10:

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — равновесие с квотами в рассматриваемой квазилинейной экономике с однородными экстерналиями при квотах $\tilde{\mathbf{a}}$, а $(\check{\mathbf{p}}, \check{p}_a, \check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{z}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{a}})$ — равновесие с торговлей квотами в той же экономике при тех же квотах $\tilde{\mathbf{a}}$. Тогда $W(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}}) \leqslant W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{a}})$.

Если, кроме того, функции издержек дифференцируемы по экстерналиям, $\bar{a}_j \in \operatorname{int} A_j$ для всех $j \in J$ и хотя бы для двух производителей выполнено

$$\frac{\partial c_{j_1}(\bar{\mathbf{y}}_{j_1}, \bar{a}_{j_1})}{\partial a_{j_1}} \neq \frac{\partial c_{j_2}(\bar{\mathbf{y}}_{j_2}, \bar{a}_{j_2})}{\partial a_{j_2}}, \qquad (\clubsuit)$$

то $W(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}}) < W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{a}})$. ⌟

Доказательство: Нестрогое неравенство $W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{a}}) \geqslant W(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ является прямым следствием предыдущей теоремы.

Если выполнены дополнительные условия ($\clubsuit$), то, как было показано ранее, для равновесия с квотами существует Парето-улучшение, при котором суммарный объем экстерналий не меняется. Как известно, в квазилинейной экономике Парето-улучшение приводит к росту индекса благосостояния $W(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a})$. Таким образом, равенство $W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{a}}) = W(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ невозможно, поскольку $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{a}})$ — решение задачи ($\mathcal{W}_C$), а указанное Парето-улучшение приводит к допустимому решению задачи ($\mathcal{W}_C$). Значит, неравенство строгое. ■

Мы показали, что даже если торговля квотами не приводит к Парето-оптимальному состоянию, то, во всяком случае, она приводит к росту общественного благосостояния. Следующая «теорема Мида»[19] говорит о том, что при правильном выборе общего размера квот на экстерналии торговля квотами обеспечивает достижение Парето-оптимального состояния.

Теорема 9.11 (Мид):

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{a}})$ — некоторый Парето-оптимум рассматриваемой квазилинейной экономики с однородными экстерналиями, а $(\mathbf{p}, p_a, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — равновесие с торговлей квотами в этой экономике при квотах $\tilde{\mathbf{a}}$, таких что совокупная квота $\tilde{a}_\Sigma$ равна $\sum_{j \in J} \hat{a}_j$. Тогда $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — тоже Парето-оптимальное состояние экономики. ┘

Доказательство: Состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$ является решением задачи ($\mathcal{W}_C$), а $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{a}})$ — допустимое решение этой же задачи. Поэтому

$$W(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{a}}) \leqslant W(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}}).$$

С другой стороны, так как $((\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}), (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{a}}))$ — Парето-оптимум, то

$$W(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{a}}) \geqslant W(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}}).$$

Значит, $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{a}})$, как и $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{a}})$, является решением задачи ($\mathcal{W}$), и, следовательно, $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики. ■

Замечание: Предположим, что $(\mathbf{p}, p_a, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — Парето-оптимальное равновесие с торговлей квотами в рассматриваемой квазилинейной экономике с однородными экстерналиями. Тогда если налоги

[19] J. E. Meade. External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation, *Economic Journal* **62** (1952): 54–67.

на экстерналии t_j для всех производителей выбрать равными p_a, то $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ будет равновесием с налогами.

Верно и обратное утверждение. Предположим, что $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — равновесие с налогами на экстерналии $\{t_j\}$, причем ставки налога t_j одинаковы для всех производителей[20] и равны t_0. Тогда $(\mathbf{p}, t_0, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{a}})$ — равновесие с торговлей квотами при любых квотах $\tilde{\mathbf{a}}$, таких что

$$\tilde{a}_\Sigma = \sum_{j \in J} \bar{a}_j.$$

Аналогичная связь существует между равновесием с торговлей квотами и равновесием с торговлей экстерналиями. Читателю предлагается самостоятельно сформулировать соответствующие утверждения.

Задачи

9.23 Рассмотрим квазилинейную экономику с двумя благами и однородными экстерналиями. Первое благо производится из второго по технологиям, описываемым функциями издержек вида

$$c_j(y_j, a_j) = y_j^2 + \left(a_j - \frac{j+n}{2n}\right)^2, j = 1, \ldots, n,$$

где y_j — объем производства первого блага, a_j — объем производства экстерналий. Функция полезности репрезентативного потребителя имеет вид

$$u\left(x, \sum_{j=1}^n a_j\right) = \ln(x) - \sum_{j=1}^n a_j + z,$$

где x — объем потребления первого блага, z — объем потребления второго блага.

(A) Найдите равновесие без регулирования.

(B) Найдите Парето-оптимум.

(C) Пусть на объемы производства экстерналий установлены одинаковые квоты $\tilde{a}_j = a_0$. При каком выборе a_0 благосостояние будет максимальным?

(D) Найдите равновесие с торговлей квотами в зависимости от квот $\tilde{a}$. При каких квотах будет достигаться Парето-оптимум?

---

[20] В ситуации, когда равновесие с налогами Пигу внутреннее по объемам экстерналий и функции издержек дифференцируемы, налоги Пигу у всех производителей должны совпадать.

Задачи к главе

9.24 Укажите, какие из приведенных ниже понятий не имеют прямого отношения к теории экстерналий:

◆ налоги Рамсея, ◆ налоги Кларка, ◆ налоги Пигу, ◆ теорема Коуза.

9.25 ⟦MWG⟧ Рассмотрим экстерналии, затрагивающие двух потребителей. Функции полезности потребителей имеют вид $u_i = v_i(h) + z_i$ $(i = 1, 2)$, где h — уровень экстерналии, z_i — количество денег, расходуемое на другие блага. Функции $v_i(\cdot)$ дважды дифференцируемы, причем $v_i''(\cdot) < 0$ $(i = 1, 2)$, $v_1'(\cdot) > 0$, $v_2'(\cdot) < 0$. Первый потребитель обладает неограниченным правом производить экстерналии.

(A) Охарактеризуйте результат свободного действия рынка. Покажите, что он будет неоптимальным.

(B) Каким должен быть оптимальный налог Пигу на первого потребителя?

(C) Допустим, второй потребитель может ослабить влияние экстерналий, затратив некоторые усилия e. При этом его функция полезности имеет вид $u_2 = v_2(h, e) + m_2$ и $\partial^2 v_2/\partial h \partial e > 0$ (чем больше уровень усилий, тем меньше предельная «вредность» экстерналий). Нужно ли облагать налогами или субсидировать усилия, чтобы достичь оптимального равновесия?

9.26 ⟦MWG⟧ В квазилинейной экономике производитель имеет дифференцируемую строго выпуклую функцию издержек $c(y, h)$, где y — объем выпуска, h — уровень (отрицательных) экстерналий. Рыночная цена выпускаемого блага равна p. Экстерналии влияют на потребителя, чья функция полезности имеет вид $u(\mathbf{x}, z, h) = v(h) + w(\mathbf{x}) + z$, где $(\mathbf{x}, z)$ — потребление. Фирма мала и не влияет на цены в экономике.

(A) Найдите условия первого порядка для задачи фирмы.

(B) Найдите условия первого порядка для Парето-оптимальных значений y и h. (Пользу от производимого фирмой блага оценивайте по цене p.)

(C) Покажите, что налог на экстерналии может привести к оптимальности, а налог на производство в общем случае — нет.

(D) При какой форме функции издержек налог на производство все же приводит к оптимальности?

9.27 ⟦Laffont⟧ Рассмотрим квазилинейную экономику с двумя благами, m потребителями и одним производителем с функцией издержек $c(y) = y^2$. Производитель оказывает отрицательное внешнее влияние на потребителей:

$$u_i = \ln x_i + z_i - 0{,}5 \ln y.$$

Каждый потребитель располагает начальным запасом в виде четырех единиц «квазилинейного» блага. Предполагается, что каждый потребитель пренебрегает своим влиянием (через предъявляемый им спрос) на величину производства и тем самым — на свою полезность.

(A) Найдите конкурентное равновесие и вычислите величину благосостояния.

(B) Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния этой экономики. Покажите, что равновесие не может принадлежать границе Парето. Вычислите чистые потери благосостояния в равновесии.

(C) Найдите налоги Пигу и соответствующее равновесие (предполагается, что налоги распределяются между потребителями с помощью фиксированных трансфертов). Объясните, почему того же результата можно добиться, облагая налогом потребление. Какая при этом должна быть ставка налога?

(D) Покажите, что «национализация» производства, при которой предприятию разрешено выбирать только планы производства, дающие нулевую прибыль, еще менее предпочтительна, чем свободное функционирование рынка. Объясните, почему.

(E) Пусть в ситуации предыдущего пункта потребление x_i облагается налогом. Определите оптимальный уровень ставки налога (максимизирующий благосостояние). Почему данное состояние будет Парето-оптимальным? Объясните, почему налоговые сборы здесь будут больше, чем от оптимальных налогов в конкурентном равновесии.

(F) Предположим, что национализированное предприятие устанавливает цену по правилу

$$\langle \text{цена} \rangle = \langle \text{предельные издержки} \rangle \cdot (1 + \mu).$$

Как ведет себя благосостояние в зависимости от маржи μ? Может ли при таком ценообразовании достигаться оптимум?

Глава

Общественные блага

10

В этой главе мы рассмотрим модели экономики, где наряду с частными благами производятся и потребляются так называемые общественные блага (которые в ряде важных аспектов существенно отличаются от частных благ). Поскольку общественные блага можно рассматривать как частный случай экстерналий (однородные экстерналии в производстве, положительные внешние влияния производителей на потребителей), мы имеем все основания ожидать неэффективности рыночной координации и других децентрализованых процедур принятия решений в экономиках с общественными благами. Цель данной главы — охарактеризовать фиаско таких процедур координации и описать альтернативные процедуры координации в ситуациях с общественными благами.

Начнем с определений.

Определение 10.1:

Назовем коллективным благом такое благо, потребление которого одним потребителем не делает это благо недоступным для других потребителей; т. е. связь между количеством x_{ik}, доступным для потребления отдельным (i-м) потребителем[1], и наличным количеством блага k в экономике в целом ($x_k = \sum_{j \in J} y_{jk} + \omega_{\Sigma k}$) выражается неравенством $x_{ik} \leqslant x_k$. ◀

Иными словами, потребление такого блага одним из потребителей не уменьшает количества этого блага, доступного другим потребителям. Это свойство называют неконкурентностью совместного потребления. Самым распространенным видом коллективных благ явля-

[1]Для упрощения анализа рассматриваемых ниже моделей с общественными благами мы рассматриваем лишь случай, когда коллективные блага являются таковыми только для потребителей, другими словами, коллективные блага не затрачиваются в производстве. Если бы коллективные блага затрачивались в производстве, то нельзя было бы моделировать технологии как векторы чистых выпусков, нужно было бы различать производство и производственное потребление таких благ. Кроме того, в таком случае агрегирование предприятий не сводится к простому суммированию технологических множеств.

ется информация: изобретения, литературные произведения, аудио- и видеозаписи, компьютерные программы, телевидение и т. п. Так, возможность посмотреть какую-то передачу по телевизору не зависит от того, что кто-то еще включил свой телевизор. Многие блага имеют характер *смешанный*, промежуточный между коллективными и обычными (частными) благами. В качестве примера можно указать транспортную инфраструктуру (дороги, мосты), потребительские свойства которой ухудшаются по мере нарастания интенсивности ее использования.

Важным частным случаем коллективных благ являются так называемые общественные блага. Они обладают дополнительным свойством — неисключаемостью. Это означает, что физические или организационные условия не позволяют никого устранить из процесса потребления этого блага. Поэтому объем потребления общественного блага *одинаков* для всех потребителей и совпадает с объемом его производства[2].

Определение 10.2:

Коллективное благо, обладающее свойством неисключаемости, называют общественным благом. ◀

Формально, если k-е благо является общественным, то объем x_{ik} потребления этого блага i-м потребителем равен[3] $x_{ik} = x_k = \sum_{j \in J} y_{jk}$.

Типичный пример общественного блага — национальная безопасность. Обычно неисключаемость имеет не абсолютный характер; просто исключение любого потребителя из процесса потребления этого блага связано с запретительно высокими издержками или институциональными, например юридическими, ограничениями. В тех случаях, когда исключение не связано с высокими издержками, один и тот же вид коллективных благ (например, телевизионные программы, дороги) может принимать как форму частного блага (кабельное телевидение, платные скоростные шоссе), так и общественного блага, т. е. блага, доступного для всех.

[2] Будем предполагать, что начальные запасы каждого общественного блага у каждого потребителя равны нулю, что вполне согласуется с понятием общественного блага.

[3] Для более тонкого разграничения типов благ можно (но мы не будем этого делать) ввести еще одну переменную — то количество общественного блага, которое реально потребляется данным потребителем. Оно может быть меньше имеющегося в распоряжении количества. Если предполагать возрастание функций полезности по этой переменной, разница между имеющимся и потребляемым не важна.

Неконкурентность совместного потребления затрудняет использование рыночного механизма для финансирования блага. Она делает невозможным распределение этого блага посредством обычного конкурентного рынка, на котором цена единая и потребители и производители считают невозможным для себя повлиять на эту цену.

Неисключаемость создает дополнительную проблему — проблему финансирования общественного блага, которую часто называют проблемой безбилетника. Ей в основном и посвящена эта глава[4].

Пример «трагедии общин» (см. Пример 9.1 на с. 553) является иллюстрацией того, что неисключаемость может обуславливаться существующими в обществе институтами, и указывает одно из направлений, в котором может получить разрешение проблема безбилетника — установление собственности на коллективные блага, чтобы собственник имел право не допускать других субъектов к потреблению принадлежащего ему блага. В этой главе мы рассмотрим другие решения проблемы безбилетника[5].

[4]Важно понимать, что для обычных, частных благ неисключаемость (невозможность не допустить к потреблению) создает еще более серьезную проблему; количество общественного блага по крайней мере не уменьшается от того, что его потребляет кто-то другой. Напротив, отсутствие охраны законом и/или моралью прав собственности на частные блага (например, на урожай огородов в России) быстро приводит к их исчезновению. Таким образом, мы наблюдаем существование только тех частных благ, права собственности на которые удается гарантировать (исключаемые блага).

[5]Укажем на два вида рыночных решений этой проблемы, которые различаются распределением прав собственности. Как мы видели при рассмотрении экстерналий (и увидим в дальнейшем при обсуждении равновесия Линдаля), назначение индивидуализированной цены для каждого потребителя обеспечивает Парето-оптимальность равновесия. Близкий аналог индивидуализированной платы за коллективное благо — *ценовая дискриминация* (англ. *discrimination* — неодинаковое отношение) при продаже монопольных продуктов. Если производитель точно знает предпочтения каждого потребителя (и умеет предотвращать воровство, например несанкционированное копирование информационных благ), то монопольное равновесие с индивидуальными ценами окажется Парето-эффективным. При этом цены должны различаться в зависимости не только от потребителя, но и от купленного потребителем количества (индивидуальная цена на каждую единицу блага). Для коллективных благ характерно наличие больших капитальных затрат и небольших затрат на обеспечение потребления их дополнительным субъектом (например, издержки копирования информации). Обычное для конкурентных рынков установление цены по предельным издержкам здесь невозможно, поскольку не будут окупаться капитальные затраты. Таким образом, рынок благ коллективного потребления имеет тенденцию к монополизации — уменьшается количество фирм и увеличиваются их размеры, так что каждая отдельная фирма получает возможность влиять на цену. Это позволяет проводить ценовую дискриминацию — назначать разные цены для разных потребителей.

10.1 Экономика с общественными благами

Введем теперь модель экономики с общественными благами, которая отличается от классической модели наличием общественных благ. Обозначим через K_1 множество общественных благ, а через K_2 — множество частных благ. Поскольку мы не делаем различия между доступным для потребления и потребляемым количеством общественного блага, то можно считать, что в потребительские функции непосредственно входит общий имеющийся объем общественного блага x_k. Таким образом потребительский набор i-го потребителя принимает вид

$$\mathbf{x}_i = \left\langle (x_k)_{k \in K_1}, (x_{ik})_{k \in K_2} \right\rangle = \left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)} \right).$$

Будем предполагать, что множество допустимых потребительских наборов i-го потребителя X_i имеет следующую структуру:

$$X_i = X^{(1)} \times X_i^{(2)},$$

так что $\mathbf{x}_i = \left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)} \right) \in X_i$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{x}^{(1)} \in X^{(1)} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_i^{(2)} \in X_i^{(2)}.$$

Состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ экономики с общественными благами является допустимым, если выполнены следующие соотношения (напомним, что начальные запасы общественных благ мы считаем равными нулю):

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \\
x_k = \sum_{j \in J} y_{jk} \ \forall k \in K_1, \ \forall i \in I, \\
\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{j \in J} y_{jk} + \sum_{i \in I} \omega_{ik} \ \forall k \in K_2, \\
g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0 \ \forall j \in J.
\end{gathered}$$

Другое решение той же проблемы — *кооператив* (или клуб) потребителей. Кооператив собирает деньги на приобретение блага со своих членов, а затем распределяет благо между ними, не допуская к потреблению не членов.

По сути дела, и коммерческая фирма, и кооператив решают одну и ту же задачу — задачу дискриминации: распределить финансирование общих затрат между потребителями в зависимости от их потребностей. Грубо говоря, платить должен тот, кому благо нужно в большей степени и кто готов больше заплатить. Вопрос состоит в том, какой из этих институтов может лучше справиться с задачей.

Как и в рассматривавшихся ранее моделях, каждое Парето-оптимальное состояние экономики с общественными благами может быть охарактеризовано как решение m задач оптимизации. На их основе можно получить дифференциальную характеристику множества Парето-оптимальных состояний экономики с общественными благами в случае, когда функции полезности и производственные функции дифференцируемы.

Итак, допустимое состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является Парето-оптимальным тогда и только тогда, когда оно является решением следующих оптимизационных задач ($i_0 = 1, \ldots, m$):

$$\begin{gathered}
u_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}) \to \max_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \\
\mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \\
u_i(\mathbf{x}_i) \geqslant u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \ \forall i \neq i_0, \\
g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0 \ \forall j \in J, \\
x_k = \sum_{j \in J} y_{jk} \ \forall k \in K_1, \\
\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{j \in J} y_{jk} + \sum_{i \in I} \omega_{ik} \ \forall k \in K_2.
\end{gathered}$$

Последнее равенство выражает материальные балансы для общественных благ, и только оно отличает эту задачу от соответствующей задачи для классической экономики. Соответствующий этим задачам лагранжиан (в котором опущены константы $u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$) имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{j \in J} \mu_j g_j(\mathbf{y}_j) + \\
+ \sum_{k \in K_1} \sigma_k \left(\sum_{j \in J} y_{jk} - x_k \right) + \sum_{k \in K_2} \sigma_k \left(\sum_{j \in J} y_{jk} + \sum_{i \in I} \omega_{ik} - \sum_{i \in I} x_{ik} \right).
\end{aligned}$$

Если функции полезности $u_i(\cdot)$ и производственные функции $g_j(\cdot)$ дифференцируемы, то, дифференцируя лагранжиан, получим характеристику внутреннего Парето-оптимума (т. е. при обычном предположении, что $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$).

Для любой из указанных выше задач справедливо следующее утверждение (теорема Джона Фрица): существуют (не все равные нулю) множители Лагранжа (λ_i, μ_j, σ_k) такие, что $\lambda_i \geqslant 0 \ \forall i \in I$,

$\mu_j \geqslant 0\ \forall j \in I$, и

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_k} = 0\ \forall i \in I,\ \forall k \in K_1, \quad \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{ik}} = 0\ \forall i \in I,\ \forall k \in K_2,$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_{jk}} = 0\ \forall j \in J,\ \forall k \in K.$$

Условие регулярности (линейная независимость градиентов ограничений соответствующей задачи) гарантирует, что можно найти такой набор множителей Лагранжа, что $\lambda_{i_0} = 1$. В рассматриваемом случае выполнение условия регулярности можно гарантировать, например, в случае, когда в любом допустимом состоянии экономики для каждого потребителя i существует частное благо $k \in K_2$, такое что $\partial u_i(\mathbf{x}_i)/\partial x_{ik} > 0$, а для каждого производителя j существует частное благо $k \in K_2$, такое что $\partial g_j(\mathbf{y}_j)/\partial y_{jk} < 0$.

В этом случае, исключив из необходимых условий экстремума множители Лагранжа[6], получим дифференциальную характеристику оптимума Парето $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$:

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}\ \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall k \in K_1,$$

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}\ \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall k \in K_2,$$

где $k_0 \in K_2$ — частное благо, такое что $\sigma_{k_0} \neq 0$.

Первое из полученных соотношений называют уравнением Самуэльсона[7]. Оно говорит, что *сумма* предельных норм замещения общественного блага на частное в потреблении равна предельной норме замещения общественного блага на частное в производстве:

$$\sum_{i \in I} MRS_i^{k/k_0} = MRT_j^{k/k_0} \text{ при } k \in K_1.$$

(Для частных благ $k \in K_2$ дифференциальная характеристика имеет обычный вид $MRS_i^{k/k_0} = MRT_j^{k/k_0}$.)

Уравнение Самуэльсона иллюстрирует Рис. 10.1 («диаграмма Самуэльсона»)[8]. На трех совмещенных графиках ось ординат соответ-

[6] Проверьте, что для множителей Лагранжа верно $\lambda_i > 0\ \forall i$, $\mu_j > 0\ \forall j$, и существует по крайней мере одно благо $k_0 \in K_2$, такое что $\sigma_{k_0} > 0$.

[7] P. A. Samuelson. The Pure Theory of Public Expenditure, *Review of Economics and Statistics* **36** (1954): 387–389. См. также статью Г. Боуэна, упомянутую в сноске 18.

[8] P. A. Samuelson. Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure, *Review of Economics and Statistics* **37** (1955): 350–356. Существуют и другие ил-

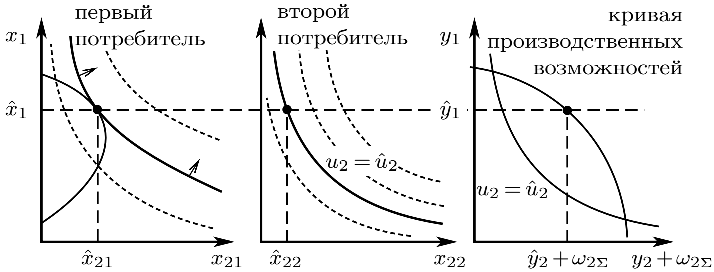


Рис. 10.1. *Иллюстрация условий Парето-оптимальности для экономики с общественным благом*

ствует производству и потреблению общественного блага. Для того чтобы найти Парето-оптимум, следует задаться некоторой кривой безразличия одного из потребителей, например второго. На третьем графике кривая производственных возможностей совмещена с выбранной кривой безразличия. Расстояние по горизонтали между этими кривыми показано на первом графике в виде кривой. Точка касания этой кривой с кривой безразличия первого потребителя соответствует набору первого потребителя в Парето-оптимуме. Задавшись другой кривой безразличия второго потребителя, мы нашли бы другой оптимум.

Задачи

10.1 Уравнение Самуэльсона связывает (выберите правильный вариант)...

(A) сумму норм замены общественного блага на частное в потреблении с нормой их замены в производстве;

(B) норму замены общественного блага на частное в потреблении с суммой норм их замены в производстве;

(C) норму замены общественного блага на частное в потреблении с нормой их замены в производстве;

(D) сумму норм замены общественного блага на частное в потреблении с суммой норм их замены в производстве.

люстрации уравнения Самуэльсона. См., напр., Рис. 10.4 («диаграмму Кольма») и комментарий к нему.

10.2 Квазилинейная экономика с общественными благами

Особенно простым анализ экономики с общественными благами становится при квазилинейности функций полезности. Этот анализ фактически и проводится в начальных курсах микроэкономики в контексте частного равновесия.

Будем предполагать, что в экономике два блага, одно из которых общественное, а другое частное, причем

$$X^{(1)} \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{и} \quad X_i^{(2)} = \mathbb{R}\ \forall i \in I,$$

а предпочтения потребителей описываются квазилинейными функциями полезности:

$$u_i(x, z_i) = v_i(x) + z_i,$$

где x — объем потребления общественного блага (он равен объему производства y), а z_i — объем потребления частного блага (который можно интерпретировать как объем потребления всей совокупности частных благ). Так как предпочтения линейны по z_i, то z_i удобно считать денежной стоимостью частных благ.

Производственные возможности экономики описываются функцией издержек $c(y)$ (обратной к производственной функции), которая показывает минимальное количество частного блага r, необходимое для производства y единиц общественного блага.

В дальнейшем будем различать два случая. Первый — ситуация, когда общественное благо может производиться и потребляться в любом количестве, является безгранично делимым («непрерывный» случай), а функции полезности и издержек дифференцируемы. Второй — ситуация, когда производитель и (или) потребитель может выбирать лишь из конечного числа вариантов, как правило, из двух («производить — не производить», «потреблять — не потреблять»). Этот случай будем называть «дискретным».

Рассмотрим сначала непрерывный случай. Для него уравнение Самуэльсона имеет вид

$$\sum_{i \in I} v_i'(\hat{x}) = c'(\hat{x}).$$

Это соотношение можно установить независимо на основе характеристики Парето-оптимальных состояний квазилинейной экономики. Действительно, как было установлено ранее, Парето-оптимальное состояние квазилинейной экономики полностью характеризуется задачей максимизации индикатора благосостояния. Для рассматриваемой экономики эта задача имеет следующий вид:

$$W(x) = \sum_{i \in I} v_i(x) - c(x) \to \max_{x \geqslant 0}.$$

Таким образом, в этой экономике Парето-оптимальные состояния характеризуются объемом производства общественного блага $\hat{x}$, максимизирующим благосостояние. Этот объем естественно назвать Парето-оптимальным объемом общественного блага. Если предельные полезности $v_i'(\cdot)$ неотрицательны и не возрастают, причем хотя бы у одного потребителя они убывают, а предельные издержки $c'(\cdot)$ положительны и не убывают, то такой объем будет единственным.

Для Парето-оптимального объема общественного блага выполняется соотношение

$$\sum_{i \in I} v_i'(\hat{x}) \leqslant c'(\hat{x}),$$

причем если общественное благо производится, т. е. $\hat{y} > 0$, то

$$\sum_{i \in I} v_i'(\hat{x}) = c'(\hat{x}).$$

Заметим, что если бы первое благо было частным, то условия Парето-оптимальности его производства и потребления имели бы вид (случай, когда $x_i > 0\ \forall i$)

$$v_i'(\hat{x}_i) = c'(\hat{y})\ \forall i \in I, \quad \sum_{i \in I} \hat{x}_i = \hat{y}.$$

Указанное различие можно проиллюстрировать следующим примером. Сравним, как принимаются решения в случае приобретения одного и того же блага (например, телевизора) в личное (частное благо) и коллективное пользование (общественное благо). В первом случае телевизор приобретается только в том случае, если цена не выше оценки телевизора для покупателя. Если же телевизор устанавливается в холле студенческого общежития, то решение о его приобретении должно приниматься уже на основе сравнения его цены и суммы оценок этого блага всеми студентами, живущими в общежитии.

Этот пример уместнее проанализировать в контексте второй ситуации, поскольку рассматриваемое благо (телевизор) либо производится (и приобретается), т. е. $x = 1$ (при соответствующем выборе единиц измерения), либо нет, т. е. $x = 0$.

Будем предполагать без потери общности, что $v_i(0) = 0$, $c(0) = 0$, и обозначим $v_i(1) = v_i$ и $c(1) = c$. Тогда

$$W(0) = 0 \quad \text{и} \quad W(1) = \sum_{i \in I} v_i - c.$$

Поэтому $\hat{x} = 0$, если $\sum_{i \in I} v_i < c$, и $\hat{x} = 1$, если $\sum_{i \in I} v_i > c$. В случае, когда $\sum_{i \in I} v_i = c$, задача имеет два решения, поэтому оптимальным является любой выбор объема производства общественного блага.

Задачи

10.2 В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности следующего вида $(a, b > 0)$:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2.$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$. При $a = a'$, $b = b'$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x'. При $a = ka'$, $b = kb'$ $(k > 0)$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x'', где $x'' > x'$. Предполагаем, что обе рассматриваемые Парето-оптимальные точки внутренние.

Можно ли утверждать, что $k > 1$ или что $k < 1$? Обоснуйте свое утверждение.

10.3 В квазилинейной экономике с общественным благом имеется два потребителя с функциями полезности вида $u_j = v_j(x) + z_j$. Производные $v_j'(x)$ положительны и убывают. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = \alpha y$. При $\alpha = \alpha'$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x'. При $\alpha = \alpha''$ $(\alpha'' > \alpha')$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x''. Предполагаем, что обе рассматриваемые Парето-оптимальные точки внутренние.

Можно ли утверждать, что $x'' > x'$ или что $x'' < x'$? Обоснуйте свое утверждение.

10.3 Равновесие с добровольным финансированием общественного блага (равновесие без координации)

Заметим предварительно, что рассматриваемому случаю однородных экстерналий соответствует рыночное равновесие, в котором, как правило, общественное благо не производится, так как в нем нет механизма возмещения производителям общественных благ их затрат на такое производство[9]. Альтернативная возможность — механизм финансирования общественного блага на основе добровольных вкладов (пожертвований) потребителей этого блага. Примерами служат добровольные взносы в благотворительные фонды, финансирующие какие-либо общественные блага, например научные исследования.

Рассмотрим одну из возможных формализаций такого механизма. Обозначим добровольный взнос i-го потребителя на приобретение k-го общественного блага через $t_{ik} \geqslant 0$. Будем предполагать также, что существуют рынки общественных благ. Поскольку благосостояние потребителя зависит от *общего* количества этих благ, при определении своего взноса t_{ik} потребитель i формирует ожидания $(t^e_{isk},\ s \neq i)$ относительно взносов других потребителей.

Собранная сумма идет на приобретение общественного блага:

$$p_k x_k = p_k y_k = \sum_{i \in I} t_{ik} \ \forall k \in K_1.$$

Таким образом, задача потребителя i имеет вид

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i} \\ \sum_{k \in K_1} p_k x_{ik} + \sum_{k \in K_2} t_{ik} \leqslant \beta_i, \\ p_k x_k = t_{ik} + \sum_{s \neq i} t^e_{isk} \ \forall k \in K_1, \\ \mathbf{x}_i \in X_i, \quad t_{ik} \geqslant 0 \ \forall k \in K_1. \end{gathered} \tag{10.1}$$

Задача производителя имеет обычный вид

$$\begin{gathered} \mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j} \\ g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{10.2}$$

Определение 10.3:

Равновесие без координации или, иначе, равновесие с добровольным

[9] Есть исключения, например ситуации, когда производство общественного блага по технологическим причинам является побочным результатом производства частных благ.

финансированием общественных благ[10] есть набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такой что

* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;
* каждый набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ и взносы $\bar{\mathbf{t}}_i$ являются решением соответствующей задачи потребителя (10.1) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\omega_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j + S_i$$

и ожиданиях $(t^e_{isk})_{s\neq i,\ k\in K_2}$, таких что $t^e_{isk} = \bar{t}_{sk}$ $\forall s \neq i$, $\forall k \in K_1$;
* каждая технология $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (10.2) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
* сумма взносов равна совокупным расходам на каждое общественное благо:

$$\bar{p}_k\bar{x}_k = \sum_{j\in J} \bar{p}_k\bar{y}_{jk} = \sum_{i\in I} t_{ik} \ \forall k \in K_1. \qquad \blacktriangleleft$$

Охарактеризуем решение задачи потребителя в состоянии равновесия в предположении, что $\mathbf{x}_i \in \operatorname{int} X_i$. Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathbb{L}_i = u_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{k\in K_1} \nu_{ik}\left(t_{ik} + \sum_{s\neq i} t^e_{isk} - p_k x_k\right) + \lambda_i\left(\beta_i - \sum_{k\in K_1} t_{ik} - \sum_{k\in K_2} p_k x_{ik}\right).$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial \mathbb{L}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \nu_{ik}p_k = 0 \ \forall k \in K_1,$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}_i}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} - \lambda_i p_k = 0 \ \forall k \in K_2,$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}_i}{\partial t_{ik}} = \nu_{ik} - \lambda_i \leqslant 0, \text{ причем } \nu_{ik} - \lambda_i = 0, \text{ если } t_{ik} > 0,$$

где λ_i — множитель Лагранжа бюджетного ограничения, а ν_{ik} — множитель Лагранжа бюджета для k-го общественного блага.

---

[10] По-видимому, впервые эту концепцию равновесия ввел Эдмон Маленво. См. его учебник E. Malinvaud. *Leçons de théorie microéconomique*, Paris: Dunod, 1969 (рус. пер. Э. Маленво. *Лекции по микроэкономическому анализу*, М.: Наука, 1985). Маленво называл такое равновесие равновесием с подпиской (фр. *souscription* — пожертвования). В русском языке есть также удачное слово «складчина».

Предположим, что для любого потребителя i существует частное благо k, такое что $\partial u_i/\partial x_{ik} > 0$. Тогда $\lambda_i > 0$ для всех $i \in I$, что, в свою очередь, означает, что равновесная цена любого такого блага положительна.

Пусть k_0 — некоторое частное благо, такое что его цена положительна. Тогда $\partial u_i/\partial x_{ik_0} > 0$ для всех $i \in I$. Если потребитель i делает положительный взнос на общественное благо k ($t_{ik} > 0$), то из дифференциальной характеристики решения задачи потребителя следует, что

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}}.$$

Для потребителя, делающего нулевой взнос, такое равенство нормы предельной замены отношению цен может не выполняться. Можно проверить, что если равновесная цена общественного блага k положительна, то, вообще говоря,

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} \leqslant \frac{p_k}{p_{k_0}}.$$

Из дифференциальной характеристики решения задачи j-го производителя ($j \in J$) следует

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}} \ \forall k \in K_1.$$

Предположим, что в равновесии суммарный взнос на общественное благо k^* положительный, и пусть i_1 — потребитель, который делает положительный взнос на приобретение этого общественного блага. Тогда в равновесии должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1k_0}} = \frac{p_{k^*}}{p_{k_0}} = \frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}.$$

В Парето-оптимуме же должно выполняться условие Самуэльсона

$$\sum_{i\in I} \frac{\partial u_i/\partial x_{k^*}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}.$$

Отсюда следует, что равновесие и Парето-оптимум могут совпадать, только если

$$\sum_{i\neq i_1} \frac{\partial u_i/\partial x_{k^*}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = 0.$$

В случае, когда $\partial u_i/\partial x_k \geqslant 0$ для всех $i \in I$, это соотношение имеет место только тогда, когда $\partial u_i/\partial x_k = 0$ для всех потребителей, кроме i_1.

Следующая теорема неэффективности резюмирует эти рассуждения. По смыслу она противоположна обеим теоремам благосостояния.

Теорема 10.1:

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с добровольным финансированием, такое что $\mathbf{x}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in I$, функции полезности и производственные функции дифференцируемы. Пусть, кроме того,

- существует частное благо k_0, такое что $\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik_0} > 0$ для любого потребителя $i \in I$ и $\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk_0} < 0$ для любого производителя $j \in J$;
- в равновесии существует потребитель i_1 с положительным взносом на покупку некоторого общественного блага k^* $(\bar{t}_{i_1k^*} > 0)$;
- все предельные полезности по общественному благу k^* неотрицательные, т. е. для всех потребителей $i \in I$ выполнено
$$\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{k^*}} \geqslant 0,$$
причем хотя бы для одного потребителя $i_2 \neq i_1$ неравенство строгое.

Тогда состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ не оптимально по Парето. ┘

Доказательство: Приведенные выше рассуждения фактически доказывают эту теорему.

Уместно привести альтернативное доказательство, показав, что можно построить Парето-улучшение, увеличив объем производства общественного блага и соответствующим образом перераспределив ресурсы. Существование такого Парето-улучшения можно неформально интерпретировать как локальную недостаточность количества общественного блага в равновесии[11].

Рассмотрим следующий дифференциально малый сдвиг из точки равновесия:
$$dx_{k^*} = dy_{jk^*} > 0 \quad \text{и} \quad dy_{jk_0} = dx_{i_1k_0} + dx_{i_2k_0},$$
где j — произвольное предприятие, $dx_{i_1k_0} < 0$, $dx_{i_2k_0} < 0$.

[11] Это можно интерпретировать как недостаточность положительных экстерналий.

Предлагаемое изменение заключается в увеличении производства и потребления общественного блага k^* на величину dy_{jk^*}, компенсированное уменьшением производства частного блага k_0 на величину dy_{jk_0} и соответственно его потребления потребителями i_1 и i_2 — на вели́чины $dx_{i_2k_0}$ и $dx_{i_1k_0}$ соответственно.

Для того чтобы новое состояние экономики было допустимым, величины dy_{jk^*} и dy_{jk_0} должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_{jk_0}} dy_{jk_0} + \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk^*}} dy_{jk^*} = 0.$$

Указанные изменения объемов потребления благ k^* и k_0 приводят к изменениям в уровне полезности потребителя i_1 на величину

$$\begin{aligned} du_{i_1} &= \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{k^*}} dx_{k^*} + \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} dx_{i_1k_0} = \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{k^*}} dy_{jk^*} + \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} dx_{i_1k_0} = \\ &= \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} \left(\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1k_0}} dy_{jk^*} + dx_{i_1k_0} \right). \end{aligned}$$

Учитывая дифференциальную характеристику равновесия (равенство предельных норм замещения блага k^* на благо k_0 в производстве и для потребителя i_1), эту величину можно выразить как

$$\begin{aligned} du_{i_1} &= \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} \left(\frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} dy_{jk^*} + dx_{i_1k_0} \right) = \\ &= \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} (-dy_{jk_0} + dx_{i_1k_0}) = -\frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_{i_1k_0}} dx_{i_2k_0}. \end{aligned}$$

Так как $\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1k_0} > 0$, то при $dx_{i_2k_0} < 0$ прирост полезности du_{i_1} положителен.

Аналогичные преобразования можно провести и для изменения полезности потребителя i_2:

$$\begin{aligned} du_{i_2} &= \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{k^*}} dx_{k^*} + \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}} dx_{i_2k_0} = \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{k^*}} dy_{jk^*} + \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}} dx_{i_2k_0} = \\ &= \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}} \left(\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}} dy_{jk^*} + dx_{i_2k_0} \right) = \\ &= \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2k_0}} \left(-\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2k_0}} \frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}} dy_{jk_0} + dx_{i_2k_0} \right). \end{aligned}$$

Представим изменения потребления блага k_0 в виде

$$dx_{i_2k_0} = \alpha dy_{jk_0},$$

где $\alpha \in (0,1)$ — доля потребителя i_2 в уменьшении потребления блага k_0. Тогда

$$du_{i_2} = \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2 k_0}} \left(\alpha dy_{jk_0} - \frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k_0}} \frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}} dy_{jk_0} \right) = \\ = \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_{i_2 k_0}} \left(\alpha - \frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k_0}} \frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}} \right) dy_{jk_0}.$$

Так как $dy_{jk_0} < 0$, то $du_{i_2} > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha < \frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k_0}} \frac{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}.$$

Мы можем всегда подобрать долю $\alpha \in (0,1)$, удовлетворяющую этому неравенству[12]. Таким образом, существует строгое Парето-улучшение в дифференциалах. ■

Заметим, что при отказе от любого из условий теоремы ее утверждение, вообще говоря, перестает быть справедливым. Так, равновесие при добровольной подписке может быть Парето-оптимальным в перечисленных ниже ситуациях.

(1) Потребитель всего один ($m = 1$). (При этом, однако, едва ли уместно говорить об общественном благе.)

(2) Общественное благо в рассматриваемой экономике единственно и его «ценит» только один потребитель (сверх уровня, финансируемого этим потребителем), т. е. предельная полезность общественного блага при данной величине его потребления положительна только для одного потребителя (и равна нулю для остальных).

(3) Предельные полезности всех общественных «благ» у одних потребителей положительны, у других отрицательны, и происходит точное уравновешивание.

(4) Частные и общественные блага абсолютно комплементарны в потреблении. Заметим, что при этом не выполнено условие дифференцируемости функций полезности.

(5) Равновесие не является внутренним. Здесь полезно различать два возможных случая.

[12] Заметим, что если $\frac{\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_2}/\partial x_{i_2 k_0}} = \frac{\partial g_j/\partial y_{jk^*}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}}$, то α можно выбрать произвольно, другими словами, Парето-улучшение гарантируется при любых пропорциях уменьшения потребления первого блага. С другой стороны, если $\partial u_{i_2}/\partial x_{k^*} = 0$, то мы не можем подобрать α и построить Парето-улучшение рассматриваемого типа.

(a) Условия допустимости потребительских наборов включают ограничение вида $x_{k^*} \geqslant 0$ по общественному благу k^*, и в равновесии производство этого блага равно нулю. Такое равновесие может быть Парето-оптимальным, если производство его оказывается «слишком дорогим», экономически неоправданным.

(b) В равновесии потребление всех благ, за исключением одного (общественного) блага равно нулю.

(6) Равновесие может быть Парето-оптимальным и в случае, когда общественное благо является дискретным (неделимым).

Пример 10.1 (абсолютная комплементарность частного и общественного благ)
В экономике имеется два потребителя с функциями полезности

$$u_i(x_1, x_{i2}) = \min(x_1, x_{i2}),$$

где $x_1 \geqslant 0$ — потребление общественного блага, $x_{i2} \geqslant 0$ — потребление частного блага i-м потребителем, и один производитель с неявной производственной функцией

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2,$$

где y_1 — производство общественного блага, y_2 — чистое производство частного блага ($-y_2$ — затраты частного блага). Другими словами, имеющаяся технология позволяет произвести единицу общественного блага из единицы частного.

Потребители имеют только запасы частного блага в размере $\omega_i > 0$. Баланс по общественному благу имеет вид $x_1 = y_1$, а по частному благу — вид

$$x_{12} + x_{22} = y_2 + \omega_1 + \omega_2.$$

Покажем, что любое равновесие в этой модели Парето-оптимально и любой Парето-оптимум можно реализовать как равновесие (при подходящем выборе трансфертов).

Опишем сначала Парето-оптимальные состояния данной экономики. Можно отметить следующие свойства таких состояний.

◆ В Парето-оптимуме количество общественного блага не может быть ниже потребления частного блага любым потребителем. Пусть это не так, например, $x_1 < x_{12}$. Тогда можно немного уменьшить x_{12} и произвести за счет этого больше общественного блага x_1. При этом полезности обоих потребителей возрастут.

◆ В Парето-оптимуме количество общественного блага не может быть выше потребления частного блага каждым из потребителей.

Пусть это не так, т. е. $x_1 > x_{12}$ и $x_1 > x_{22}$. Тогда можно уменьшить немного производство общественного блага, произвести за счет этого больше частного блага и увеличить x_{12} или x_{22}. При этом полезность соответствующего потребителя возрастет, а полезность другого потребителя не изменится.

◆ В любом Парето-оптимуме используются все ресурсы, т. е. выполнено

$$x_1 + x_{12} + x_{22} = \omega_1 + \omega_2.$$

Отсюда следует, что Парето-оптимальные состояния в этой экономике могут быть трех типов:

$$\text{(i) } x_{12} < x_1 = x_{22}, \quad \text{(ii) } x_{22} < x_1 = x_{12}, \quad \text{(iii) } x_1 = x_{12} = x_{22}.$$

Можно показать, что если в допустимом состоянии экономики выполнено одно из этих трех условий и используются все ресурсы, то это Парето-оптимум.

Опишем теперь равновесия в этой модели. Заметим, что в любом равновесии цены общественного и частного благ совпадают. Можно выбрать их равными единице: $p_1 = p_2 = 1$. При этом прибыль производителя равна нулю, а доход потребителя равен $\beta_i = \omega_i + S_i$, где S_i — трансферты, получаемые потребителем. С учетом этого в равновесии задача потребителя имеет вид

$$\min(x_1, x_{i2}) \to \max_{\mathbf{x}_i, t_i}$$
$$x_{i2} + t_i \leqslant \beta_i = \omega_i + S_i, \quad x_1 = t_i + t_{-i},$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_{i2} \geqslant 0, \quad t_i \geqslant 0.$$

Потребителю в равновесии выгодно полностью истратить свой доход β_i. Поэтому мы можем подставить $x_{i2} = \beta_i - t_i$ и $x_1 = t_i + t_{-i}$ в целевую функцию:

$$\min(t_i + t_{-i}, \beta_i - t_i) \to \max_{t_i \in [0, \beta_i]}.$$

Решение задачи потребителя будет зависеть от соотношения параметров t_{-i} и β_i (см. Рис. 10.2):

(A) если $t_{-i} > \beta_i$, то $t_i = 0$, $x_1 = t_{-i}$ и $x_{i2} = \beta_i$;

(B) если $t_{-i} \leqslant \beta_i$, то $t_i = (\beta_i - t_{-i})/2$, $x_1 = x_{i2} = (\beta_i + t_{-i})/2$.

Логически возможны четыре варианта равновесия: AA, AB, BA, BB, где первая буква относится к первому потребителю, а вторая — ко второму. Вариант AA невозможен, так как при этом $t_1 = t_2 = 0$, а это, поскольку доходы потребителей неотрицательны, противоре-

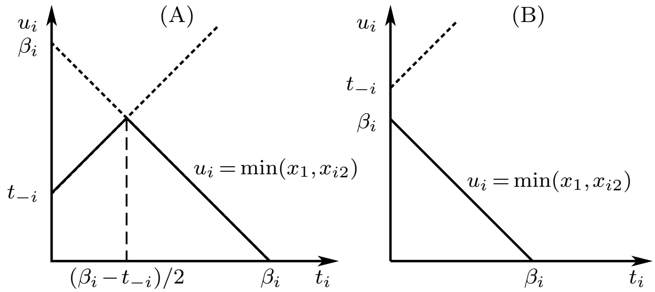


Рис. 10.2. *Комплементарность частного и общественного благ, иллюстрация к Примеру 10.1*

чит условиям $t_1 > \beta_2$ и $t_2 > \beta_1$. Все остальные варианты возможны. Охарактеризуем соответствующие им состояния равновесия.

(AB) Несложно проверить, что в таком равновесии

$$t_1 = 0, \quad t_2 = x_1 = x_{22} = \beta_2/2, \quad x_{12} = \beta_1.$$

Это равновесие возможно при условии, что $\beta_2 > 2\beta_1$.

(BA) Этот вариант получается из предыдущего заменой индексов:

$$t_2 = 0, \quad t_1 = x_1 = x_{i1} = \beta_1/2, \quad x_{22} = \beta_2.$$

Такое равновесие возможно при условии, что $\beta_1 > 2\beta_2$.

(BB) Такое равновесие должно удовлетворять уравнениям

$$t_1 = (\beta_1 - t_2)/2, \quad x_1 = x_{12} = (\beta_1 + t_2)/2,$$

$$t_2 = (\beta_2 - t_1)/2, \quad x_1 = x_{22} = (\beta_2 + t_1)/2,$$

откуда получаем

$$t_1 = (2\beta_1 - \beta_2)/3, \quad t_2 = (2\beta_2 - \beta_1)/3, \quad x_1 = x_{12} = x_{22} = (\beta_1 + \beta_2)/3.$$

Это равновесие возможно при условиях $t_1 \leqslant \beta_2$, $t_2 \leqslant \beta_1$, т. е. $\beta_1 \leqslant 2\beta_2$, $\beta_2 \leqslant 2\beta_1$.

Заметим, что в любом равновесии

$$\beta_1 + \beta_2 = \omega_1 + S_1 + \omega_2 + S_2 = \omega_1 + \omega_2.$$

Несложно проверить, что в каждом из этих типов равновесий выполнено

$$x_1 + x_{12} + x_{22} = \beta_1 + \beta_2.$$

Поскольку $\beta_1 + \beta_2 = \omega_1 + \omega_2$, то в любом равновесии ресурсы используются полностью. В равновесиях типа (AB) выполнены условия (i), в равновесиях типа (BA) — условия (ii), а в равновесиях типа (BB) — условия (iii). Таким образом, любое равновесие Парето-оптимально.

Более того, в этой экономике любое Парето-оптимальное состояние можно реализовать как равновесие с добровольным финансированием. Так, например, Парето-оптимуму, удовлетворяющему условию (i), соответствуют равновесия типа (AB), такие что

$$\beta_1 = x_{12}, \quad \beta_2 = 2x_1 = 2x_{22}, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = x_1 = x_{22}.$$

Парето-оптимуму, удовлетворяющему условию (iii), соответствуют равновесия типа (BB), такие что

$$\beta_1 + \beta_2 = 3x_1 = 3x_{12} = 3x_{22}, \quad t_1 = (2\beta_1 - \beta_2)/3, \quad t_2 = (2\beta_2 - \beta_1)/3.$$

$\triangle$

Мы привели пример экономики, соответствующей ситуации (4). Читателю предлагается привести примеры экономик, соответствующих ситуациям (2), (3), (5) и (6), самостоятельно.

Комментируя теорему, отметим, что при добровольном финансировании возможны ситуации, когда некоторые потребители не делают взносы на финансирование общественного блага. Таких потребителей называют «безбилетниками». В том случае, когда, например, предельные нормы замещения $\frac{\partial u_{i_1}/\partial x_{k^*}}{\partial u_{i_1}/\partial x_{i_1 k_0}}$ общественного блага k^* частным благом k_0 различны, только один потребитель финансирует производство общественного блага. Остальные оказываются безбилетниками. Ниже для случая квазилинейной экономики мы покажем, что такого рода ситуации являются типичными.

В случае квазилинейной экономики равновесие с добровольным финансированием общественного блага — это набор $(\bar{p}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{x}, \bar{y})$, такой что

- при цене $\bar{p}$ взнос $\bar{t}_i$ является решением задачи потребителя

$$v_i\left(\left(t_i + \sum_{s \neq i} \bar{t}_s\right)/\bar{p}\right) - t_i \to \max_{t_i \geqslant 0};$$

- суммарная величина взносов совпадает с суммой, требуемой для финансирования общественного блага в объеме $\bar{x}$ по цене $\bar{p}$:

$$\sum_{i \in I} \bar{t}_i = \bar{p}\bar{x};$$

- при цене $\bar{p}$ величина $\bar{y}$ является решением задачи производителя

$$py - c(y) \to \max_{y \geqslant 0};$$

- спрос на общественное благо равен предложению: $\bar{x} = \bar{y}$.

В равновесии выполняются соотношения:

$$v_i'(\bar{x}) \leqslant \bar{p}, \text{ причем } v_i'(\bar{x}) = \bar{p}, \text{ если } t_i > 0;$$
$$\bar{p} \leqslant c'(\bar{x}), \text{ причем } \bar{p} = c'(\bar{x}), \text{ если } \bar{x} > 0.$$

Предположим, что $\bar{x} > 0$ (равновесие внутреннее, с положительным количеством общественного блага). Тогда существует потребитель i_1, такой что $t_i > 0$, и следовательно, $v_{i_1}'(\bar{x}) = c'(\bar{x})$.

Если $v_i'(\bar{x}) \geqslant 0$ и существует не совпадающий с i_1 потребитель, для которого это неравенство строгое, то $\sum_{i \in I} v_i'(\bar{x}) > c'(\bar{x})$.

Предположим, что предельные полезности общественного блага $v_i'(x)$ неотрицательны и не возрастают, причем хотя бы у одного потребителя предельная полезность убывает, а предельные издержки $c'(y)$ всюду положительны и не убывают. Тогда $\bar{x} < \hat{x}$, где $\hat{x}$ — Парето-оптимальный объем производства (и потребления) общественного блага. Это следует из того, что $W'(x) = \sum_{i \in I} v_i'(x) - c'(x)$ — убывающая функция, $W'(\bar{x}) > 0$ и $W'(\hat{x}) \leqslant 0$. Таким образом, *производство общественного блага в равновесии с добровольным финансированием будет меньше Парето-оптимального.*

Появление этого эффекта недопроизводства общественных благ легко понять в контексте проводившегося нами анализа экстерналий, когда каждый потребитель, планируя приобретение общественного блага, не учитывает влияния своих действий (поскольку не заинтересован при таком механизме его финансирования учитывать это влияние) на рост благосостояния других потребителей, а поэтому планирует приобрести его слишком мало. Эта незаинтересованность учитывать влияние своих действий на благосостояние других составляет суть проблемы безбилетника: каждый потребитель заинтересован в увеличении вклада в финансирование общественного блага другими, но не заинтересованв достаточной степени сам в увеличении своего вклада.

Определить, кто именно из потребителей будет безбилетником, в квазилинейной экономике можно в ситуации, когда потребители ранжированы по их предельным оценкам общественного блага безотносительно к объему его потребления, т. е. в случае, если для всех

$x > 0$ выполняется соотношение

$$v_1'(x) < v_2'(x) < \cdots < v_m'(x).$$

Проанализируем свойства равновесий с добровольным финансированием в этой ситуации. Пусть $(\bar{p}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{x}, \bar{y})$ — такое равновесие. Тогда

$$v_m'(\bar{x}) \leqslant \bar{p}.$$

Поскольку $v_i'(\bar{x}) < v_m'(\bar{x})$ для всех потребителей, кроме m-го, то для этих потребителей $v_i'(\bar{x}) < \bar{p}$. Это влечет за собой то, что $\bar{t}_i = 0$ для всех $i \neq m$, т. е. все потребители, кроме m-го, не участвуют в финансировании общественного блага.

(Аналогичный результат имеет место и в дискретном случае, когда

$$v_1 < v_2 < \cdots < v_m.$$

А именно: в равновесии общественное благо будет финансировать только m-й потребитель.)

Таким образом, $\bar{x} = \bar{t}_m / \bar{p}$ и возможны равновесия двух типов:

(1) $\bar{t}_m = 0$ и $\bar{y} = 0$;

(2) $\bar{t}_m > 0$ и $\bar{y} > 0$.

В первом случае $v_m'(0) \leqslant \bar{p} \leqslant c'(0)$[13]. Поскольку предельная полезность $v_m'(x)$ не возрастает, а предельные издержки не убывают, то любое такое состояние будет соответствовать равновесию.

Во втором случае $v_m'(\bar{x}) = \bar{p} = c'(\bar{x})$. Как и в первом случае, поскольку предельная полезность $v_m'(x)$ не возрастает, а предельные издержки не убывают, то любое такое состояние будет соответствовать равновесию. Данную ситуацию иллюстрирует Рис. 10.3.

Если $v_m'(0) < c'(0)$, то равновесие может быть только первого типа, а если $v_m'(0) > c'(0)$, то равновесие может быть только второго типа.

Предположим дополнительно, что функция $v_m'(x) - c'(x)$ убывает. Тогда необходимые условия равновесия являются достаточными. А именно: если

$$\bar{x} = \bar{y}, \quad \bar{p} = v_m'(\bar{x}) = c'(\bar{y}), \quad \bar{t}_m = \bar{p}\bar{x}$$

и

$$\bar{t}_i = 0 \ \text{ для всех } i, \text{ кроме } m,$$

[13] Если величи́ны $v_m'(0)$ и $c'(0)$ не определены, то эти величины в неравенстве следует заменить соответствующими пределами.

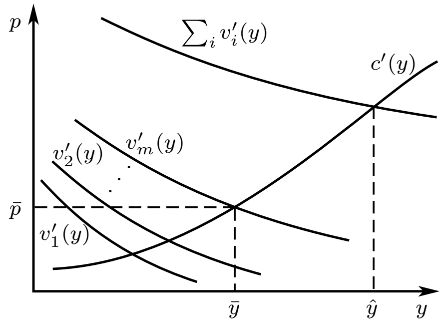


Рис. 10.3. *Равновесие с добровольным финансированием при упорядоченности оценок*

то $(\bar{p}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{x}, \bar{y})$ является равновесием с добровольным финансированием. Действительно, необходимые условия решений задач потребителя и производителя выполнены, поскольку

$$v_i'(\bar{x}) < v_m'(\bar{x}) = \bar{p} = c'(\bar{y}) \quad \text{и} \quad \bar{t}_i = 0 \; \forall i \neq m.$$

Сделанные выше предположения относительно поведения предельных полезностей и предельных издержек гарантируют, что необходимые условия решений задач потребителя и производителя являются достаточными.

Аналогично, если $v_m'(0) \leqslant \bar{p} \leqslant c'(0)$, то $(\bar{p}, \mathbf{0}, 0, 0)$ является равновесием с добровольным финансированием.

Отсюда следует, что (если функция $v_m'(x) - c'(x)$ непрерывна) равновесие существует тогда и только тогда, когда существует объем общественного блага $\tilde{x}$, такой что $c'(\tilde{x}) \geqslant v_m'(\tilde{x})$. Поскольку равновесный объем $\bar{x}$ удовлетворяет этому условию, это условие является необходимым. Остается доказать достаточность. Действительно, если $v_m'(0) \leqslant c'(0)$, то существует равновесие с $\bar{x} = 0$. Если же $v_m'(0) > c'(0)$, то по непрерывности существует $\bar{x} > 0$, такой что $v_m'(\bar{x}) = c'(\bar{x})$, и на его основе можно сконструировать равновесие.

Кроме того, в рассматриваемых условиях равновесие единственно. Читатель может доказать это самостоятельно.

Пример 10.2

Пусть

$$u_i(x, z_i) = 2\alpha_i \ln x + z_i, \quad c(y) = y^2.$$

Оптимальный объем производства общественного блага составляет тогда величину $\hat{y}$, удовлетворяющую уравнению Самуэльсона:

$$\sum_{i\in I} v_i'(\hat{x}) = c'(\hat{x}).$$

В данном примере это соотношение принимает вид

$$\sum_{i\in I}(2\alpha_i/\hat{x}) = 2\hat{x} \quad \text{или} \quad \hat{x}^2 = \sum_{i\in I}\alpha_i.$$

Заметим попутно, что $\hat{r} = \hat{x}^2$ — это как раз *издержки производства общественного блага*. Таким образом, оптимальный объем общественных расходов на производство общественного блага составляет величину

$$\hat{r} = \sum_{i\in I}\alpha_i.$$

В случае же равновесия с добровольным финансированием

$$v_i'(\bar{x}) \leqslant c'(\bar{x})\ \forall i,$$

т. е.

$$2\alpha_i/\bar{x} \leqslant 2\bar{x}\ \forall i \quad \text{или} \quad \bar{x}^2 \geqslant \alpha_i\ \forall i.$$

Так как $\bar{x} > 0$, то существует по крайней мере один потребитель, который делает положительный взнос. Это означает, что $\bar{x}^2 = \max_i \alpha_i$. Объем расходов на общественное благо составляет величину

$$\bar{r} = \max_i \alpha_i.$$

Цена общественного блага равна $\bar{p} = c'(\bar{x}) = 2\bar{x}$, а сумма взносов равна

$$\sum_{i\in I}\bar{t}_i = \bar{p}\bar{x} = 2\bar{x}^2 = 2\bar{r}.$$

Пусть в экономике три потребителя и $\alpha_i = i$. Платить будет потребитель, который ценит общественное благо больше всех, а именно третий. Остальные предпочтут пользоваться благом бесплатно. Отсюда

$$\bar{r} = 3, \quad \bar{x} = \bar{y} = \sqrt{3}, \quad p = 2\sqrt{3}, \quad \bar{t}_3 = 6, \quad \bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0.$$

В Парето-оптимуме $\hat{x} = \sqrt{6}$, т. е. равновесное количество общественного блага меньше оптимального. $\triangle$

Задачи

10.4 В квазилинейной экономике с общественным благом имеется два потребителя с функциями полезности вида

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2,$$

где $a, b \geqslant 0$. Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$. При каких a и b внутреннее (по количеству общественного блага) равновесие с добровольным финансированием будет Парето-оптимальным? Обоснуйте свое утверждение.

10.5 В квазилинейной экономике с общественным благом имеется два потребителя с функциями полезности вида

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2,$$

где $a, b > 0$. Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$.

(А) Какие условия на a и b гарантируют, что во внутреннем равновесии с добровольным финансированием только у первого потребителя взнос будет положительным? Обоснуйте свое утверждение.

(В) Какие условия на функцию $v(x)$ гарантируют, что в равновесии с добровольным финансированием общественное благо будет производиться?

10.6 В экономике с общественным благом ($s > 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln s + z_1$, а другой — $u_2 = 2/3 \ln s + z_2$. Начальные запасы равны $\omega_1 = (0, 0{,}5)$ и $\omega_2 = (0, 0{,}5)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить β единиц общественного ($\beta > 0,5$). При каких значениях параметра β равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

10.7 В экономике с общественным благом ($G \geqslant 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = 0{,}5G + z_1$, а другой — $u_2 = \gamma G + z_2$ ($\gamma > 0$). Начальные запасы равны $\omega_1 = (0, 40)$ и $\omega_2 = (0, 20)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра γ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

10.8 В экономике с общественным благом ($Q > 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln Q + z_1$, а другой — $u_2 = \delta \ln Q + z_2$ ($\delta > 0$). Начальные запасы равны $\omega_1 =$

$(0, 0{,}5)$ и $\omega_2 = (0, 0{,}5)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра δ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

10.9 В экономике с общественным благом ($x \geqslant 0$) и частным благом ($z_i \geqslant 0$) один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = 2x + z_1$, а второй — $u_2 = \alpha x + z_2$ ($\alpha > 0$). Начальные запасы равны $\omega_1 = (0, 10)$ и $\omega_2 = (0, 10)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра α равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

10.10 В экономике с общественным благом ($x \geqslant 0$) и частным благом первый потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln(2 + x) + z_1$, а второй — $u_2 = \delta \ln(2 + x) + z_2$ ($\delta > 0$). Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра δ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

10.11 В экономике двух потребителей с двумя благами — общественным и частным — функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln G + 4 \ln x_1 \quad \text{и} \quad u_2 = \ln G + 3 \ln x_2.$$

Оба потребителя имеют начальные запасы только частного блага — 5 и 8 соответственно. Технология единственного предприятия позволяет из единицы частного блага произвести единицу общественного блага.

(A) Запишите систему уравнений, задающую границу Парето.

(B) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

10.12 Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = Gx_1$ и $u_2 = G^2 x_2$, где G и x_i — потребление общественного и частного благ соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $G^3 = r$, где r — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 0{,}5, \omega_2 = 2{,}5$. Прибыль предприятия целиком идет второму потребителю.

(A) Проверьте, что $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, $G = 1$, $r = 1$, $p_G = 3$, $p_x = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

10.13 Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \sqrt{z} + \sqrt{x_1}$ и $u_2 = 2\sqrt{z} + \sqrt{x_2}$, где z и x_i — потребление общественного и частного благ соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $9z = a$, где a — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 4, \omega_2 = 117$. Прибыль предприятия целиком идет первому потребителю.

(А) Проверьте, что $x_1 = 4$, $x_2 = 81$, $z = 4$, $a = 36$, $p_z = 9$, $p_x = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 36$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(В) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

10.14 Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = -3/a - 1/x_1$ и $u_2 = -1/a - 1/x_2$, где a и x_i — потребление общественного и частного благ соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $a = 3h$, где h — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 2/3$, $\omega_2 = 2/3$. Прибыль предприятия делится пополам между потребителями.

(А) Проверьте, что $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2/3$, $a = 2$, $h = 2/3$, $p_a = 1$, $p_x = 3, t_1 = 2, t_2 = 0$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(В) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

10.15 Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = xz_1^4$ и $u_2 = xz_2$, где x и z_i — потребление общественного и частного благ соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $x^2 = z_0$, где z_0 — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 9/4$, $\omega_2 = 3/4$. Прибыль предприятия целиком идет первому потребителю.

(А) Проверьте, что $z_1 = 2, z_2 = 3/4, x = 1/2, z_0 = 1/4, p_x = 1, p_z = 1$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 0$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(В) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

10.16 В квазилинейной экономике с двумя благами, одно из которых — общественное, предпочтения потребителей $i = 1, \ldots, m$ заданы функциями полезности

$$u_i(G, z_i) = \alpha_i f(G) + z_i,$$

где G — общественное благо, z_i — оставшиеся деньги, $f(\cdot)$ — функция с положительной убывающей производной. При этом выполняются неравенства $\alpha_i < \alpha_j$ при $i < j$. Технология задана функцией издержек единственного предприятия $c(G)$. Охарактеризуйте равновесие с добровольным финансированием. Будут ли в этой ситуации безбилетники, и если будут, то кто? Обоснуйте. Сравните с Парето-оптимумом.

10.17 Пусть в квазилинейной экономике предпочтения потребителей описываются функцией полезности вида

$$u_i(x, z_i) = \alpha_i \ln x + z_i,$$

($x > 0$, $z_i \geqslant 0$), а функция издержек имеет вид

$$c(y) = y^2/2.$$

Начальные запасы частного блага у потребителей достаточно велики. Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага. При каких условиях в этой экономике будет по крайней мере один безбилетник? Какие потребители окажутся безбилетниками?

10.18 Предположим, что в экономике с тремя потребителями производство общественного блага (G) финансируется с помощью добровольных взносов частного блага $t_i \geqslant 0$, причем единица общественного блага производится из единицы частного. Функции полезности равны $u_i(G, x_i) = Gx_i$. Найдите равновесие и Парето-оптимум, если начальные запасы частного блага равны (A) $\omega = (2, 3, 7)$, (B) $\omega = (2, 4, 6)$.

10.19 ⟦Varian⟧ Благосостояние двух потребителей зависит от двух благ — одного частного и одного общественного. Их предпочтения совпадают и задаются функцией полезности Кобба—Дугласа. Потребители располагают запасами только частного блага. Единицу общественного блага можно произвести из единицы частного. Его производство финансируется за счет добровольных взносов. При каких различиях в начальных запасах можно гарантировать, что оба потребителя делают положительные взносы?

10.20 ⟦Varian⟧ Предположим, что в экономике имеется m потребителей с одинаковыми функциями полезности $u_i(G, x_i) = G^\alpha x_i^{1-\alpha}$, где G — общественное благо, x_i — частное благо. Начальные запасы состоят только из частного блага, причем общее количество ω_Σ частного блага делится поровну между первыми k потребителями ($k \leqslant m$). Единица общественного блага производится из единицы частного. Как меняется количество общественного блага в зависимости от k?

10.21 «Субсидирование добродетели» ⟦Bergstrom⟧ Благосостояние Аристотеля и Платона зависит от двух благ — одного частного и одного общественного. Их предпочтения совпадают и задаются вогнутой дважды дифференцируемой функцией полезности $u_i = u(x_1, x_{i2})$. Аристотель и Платон располагают одинаковыми запасами частного блага. Единицу общественного блага можно произвести из единицы частного. Его производство финансируется за счет добровольных взносов, и каждый из философов рассматривает взнос другого как данный. Добровольные взносы Аристотеля субсидируются из расчета σ руб. субсидии за 1 руб. взносов (другими словами, Аристотель фактически выплачивает $(1-\sigma)$ руб. на 1 руб. взносов). Субсидии финансируются за счет паушальных налогов, бремя которых делится поровну между философами. Известно, что в равновесии производство общественного блага положительно.

(A) Кто из философов может делать в равновесии положительные взносы?

(B) Выиграет ли Платон, если субсидию будут выплачивать ему, а не Аристотелю? Как можно объяснить полученный результат?

(C) Предположим, что благовоспитанные философы получают моральное удовлетворение от того, что часть общественного блага куплена за их средства, другими словами, функция полезности зависит дополнительно от количества общественного блага, купленного за счет *чистого* взноса данного философа (т. е. без учета субсидий). Поменяется ли от этого ответ на предыдущий вопрос?

10.4 Равновесие (псевдоравновесие) Линдаля

Ранее в этой главе были выведены дифференциальные характеристики Парето-оптимальных состояний экономики. Можно ли по аналогии с экономиками без общественных благ реализовать эти состояния экономики как рыночные равновесия, установив тем самым вариант второй теоремы благосостояния для таких экономик?

Покажем, что это возможно сделать, модифицировав должным образом понятие равновесия[14]. Сравнение дифференциальных характеристик Парето-оптимальных состояний экономик с обществен-

[14] Аналогичное исследование мы провели в общем случае экстерналий. Здесь мы его конкретизируем для частного случая экстерналий, рассматриваемого в этой главе, — общественных благ.

ными благами и классических экономик указывает направление такой модификации. Так, уравнения Самуэльсона, связывающие предельные нормы замещения общественного блага частным в потреблении и производстве, не влекут за собой равенства предельных норм замещения общественного блага частным для всех потребителей: в общем случае в Парето-оптимальных состояниях эти предельные нормы замещения могут быть разными. Поскольку в рыночном равновесии отношение предельных норм замещения благ равны отношению их цен, то очевидная модификация рыночного равновесия состоит в отказе от единой цены для общественных благ и введении индивидуализированных цен таких благ.

Таким образом, будем считать, что каждый потребитель сталкивается с индивидуализированной ценой общественного блага q_{ik} ($k \in K_1$). Далее, уравнение Самуэльсона подсказывает, что сумма индивидуализированных цен должна равняться цене, с которой сталкиваются производители общественного блага, т. е.

$$\sum_{i \in I} q_{ik} = p_k \ \forall k \in K_1.$$

Такое равновесие с индивидуализированными ценами общественных благ называют равновесием Линдаля.

Приведем точную формулировку модели Линдаля.

Задача потребителя в модели Линдаля имеет вид

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i} \\ \sum_{k \in K_1} q_{ik} x_k + \sum_{k \in K_2} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i. \end{gathered} \tag{10.3}$$

В случае частных благ все потребители сталкиваются с одинаковыми ценами и выбирают разные объемы потребления, в случае общественных благ все наоборот: потребители сталкиваются с *разными ценами* и имеют *одинаковые объемы потребления*. Задача производителя здесь имеет обычный вид (10.2).

Определение 10.4:

Назовем $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ равновесием (псевдоравновесием) Линдаля[15], если

[15] E. Lindahl. *Die Gerechtigkeit der Besteuerung. Eine Analyse der Steuerprinzipien auf Grundlage der Grenznutzentheorie*, Diss., Lunds universitet, 1919 (англ. пер. E. Lindahl. Just Taxation—A Positive Solution, in *Classics in the Theory of Public Finance*, R. A. Musgrave and A. T. Peacock (ed.), London: Macmillan, 1958: 168–176). Эрик Линдаль, развивая идеи Кнута Викселя, предложил концепцию

* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;
* каждый набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением соответствующей задачи потребителя (10.3) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, индивидуализированных ценах общественных благ $(\bar{q}_{ik})_{k\in K_1}$ и доходах

$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\omega_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j + S_i;$$

* технология $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя (10.2) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
* сумма индивидуализированных цен общественного блага $k \in K_1$ равна цене производителя:

$$\sum_{i\in I} \bar{q}_{ik} = \bar{p}_k.$$

◀

В равновесии Линдаля достигается консенсус в том смысле, что каждый потребитель $i \in I$ при равновесных ценах предъявляет спрос именно на существующий (произведенный) объем общественного блага $k \in K_1$:

$$\bar{x}_{ik} = \bar{x}_k = \sum_{j\in J} \bar{y}_{jk}.$$

Для случая дифференцируемых функций мы можем убедиться в совпадении дифференциальных характеристик внутренних Парето-оптимальных состояний и внутренних равновесий Линдаля. Действительно, при сделанных ранее предположениях дифференциальная характеристика решения задачи потребителя (10.3) имеет вид

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{q_{ik}}{p_{k_0}} \ \forall i, \ \forall k \in K_1,$$

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{ik}}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}} \ \forall i, \ \forall k \in K_2.$$

где $k_0 \in K_1$ — частное благо, такое что $p_{k_0} \neq 0$. Аналогично дифференциальная характеристика решения задачи производителя (10.2)

решения проблемы финансирования общественных благ, которую ниже мы называем равновесием при консенсусе. Более поздние исследователи назвали рассматриваемое в этой главе конкурентное псевдоравновесие «равновесием Линдаля», поскольку между двумя равновесными концепциями существует близкая связь (см., напр., D. K. Foley・Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods, *Econometrica* **38** (1970): 66–72.

имеет вид

$$\frac{\partial g_j/\partial y_{jk}}{\partial g_j/\partial y_{jk_0}} = \frac{p_k}{p_{k_0}} \ \forall j, \ \forall k \in K.$$

Учитывая, что для общественных благ $\sum_{i \in I} q_{ik} = p_k$, исключим из этих характеристик цены и получим уравнения, совпадающие с полученной ранее дифференциальной характеристикой оптимума.

Совпадение дифференциальных характеристик равновесия и Парето-оптимума при дополнительных предположениях о вогнутости функций полезности и производственных функций гарантирует справедливость первой и второй теорем благосостояния для данного варианта экономик с общественными благами.

Рис. 10.4 («диаграмма Кольма» иллюстрирует равновесие Линдаля[16]). На рисунке изображена экономика с двумя благами, общественным ($k = 1$) и частным ($k = 2$), и двумя потребителями, в которой технология позволяет производить из единицы частного блага единицу общественного. Точки A, B и C соответствуют суммарным начальным запасам частного блага $\omega_{\Sigma 2} = \omega_{12} + \omega_{22}$, отложенным по осям x_1, x_{12} и x_{22} соответственно. Они задают треугольник ABC допустимых состояний экономики. Две дуги, показанные штриховой линией,— это кривые безразличия потребителей в равновесии Линдаля в соответствующих системах координат. Их касаются бюджетные линии потребителей (показаны пунктиром). Все эти линии из систем координат потребителей 1 и 2 проецируются на плоскость ABC параллельно осям x_{22} и x_{12} соответственно. Проекции двух бюджетных линий совпадают — это прямая, проходящая через точку начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$ и через точку $\bar{\mathbf{x}}$ равновесия Линдаля. В точке $\bar{\mathbf{x}}$ две проекции кривых безразличия касаются друг друга (показаны сплошной линией). Касание проекций кривых безразличия говорит о Парето-оптимальности равновесия Линдаля.

Рассмотрим равновесие Линдаля в частном случае квазилинейной экономики. При индивидуализированной цене общественного блага q_i спрос потребителя $i \in I$ на это благо есть решение следующей задачи:

$$v_i(x_i) - q_i x_i \to \max_{x_i \geqslant 0}.$$

В случае, когда ее решение внутреннее ($x_i > 0$), выполнено следующее условие первого порядка

$$q_i = v_i'(x_i).$$

[16] S. Kolm. *La Valeur Publique*, Paris: Dunod-CNRS, 1970.

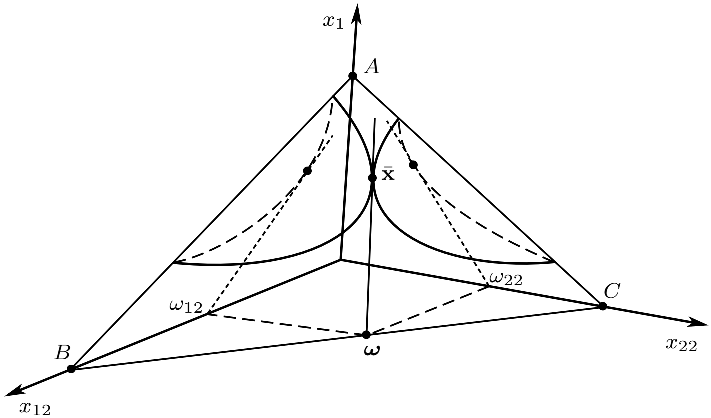


Рис. 10.4. *Иллюстрация равновесия Линдаля*

Задача производителя имеет вид

$$py - c(y) \to \max_{y \geqslant 0}.$$

Если ее решение внутреннее ($y > 0$), то выполнено следующее условие первого порядка:

$$c'(y) = p.$$

В равновесии $\langle \bar{p}, (\bar{q}_i)_i, (\bar{x}, \bar{z}_i)_i, (\bar{y}, \bar{r}) \rangle$ объем потребления общественного блага $\bar{x}$ является решением задачи потребителя при цене $\bar{q}_i$, объем производства $\bar{y}$ — решением задачи производителя при цене $\bar{p}$, причем $\bar{x} = \bar{y}$ и цены связаны соотношением $\bar{p} = \sum_{i \in I} \bar{q}_i$. Равенство спроса и предложения на рынке первого блага автоматически гарантирует, по закону Вальраса, равновесие на рынке второго (частного) блага.

Таким образом, в равновесии имеет место соотношение

$$\sum_{i \in I} v_i'(\bar{x}) = \bar{p} = \sum_{i \in I} \bar{q}_i = c'(\bar{x}),$$

т. е. выполняется дифференциальная характеристика Парето-оптимума.

С другой стороны, любое допустимое состояние экономики $\langle (\hat{x}, \hat{z}_i)_i, (\hat{y}, \hat{r}) \rangle$, для которого выполняется данное соотношение, может быть реализовано как равновесие при дополнительном предположении о выпуклости функции издержек $c(y)$ и вогнутости функций полезности $v_i(x_i)$.

Действительно, при индивидуализированных ценах $\bar{q}_i = v_i'(\hat{x})$ спрос каждого потребителя на общественное благо составляет величину $\hat{x}$, равную предложению этого блага $\hat{y}$ — объему производства, который максимизирует прибыль производителя при ценах $\bar{p} = \sum_{i \in I} \bar{q}_i$.

Дифференцируемость функций полезности и производственных функций не требуется для справедливости теорем благосостояния. Избыточным оказывается и требование вогнутости функций полезности и производственных функций для справедливости первой теоремы благосостояния. Таким образом, можно показать, что имеют место следующие утверждения.

Теорема 10.2 (первая теорема благосостояния):

Если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие Линдаля в экономике с общественными благами и предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимальное состояние. ⌟

Теорема имеет почти ту же формулировку, что и в случае с обычными, частными благами. Появляется лишь новая квалификация равновесия (равновесие Линдаля).

Теорема 10.3 (вторая теорема благосостояния):

Предположим, что предпочтения $\succcurlyeq_i$ всех потребителей $i \in I$ непрерывны, предпочтения, а также множества X_i $\forall i \in I$ и Y_j $\forall j \in J$ выпуклы. Тогда если $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — внутреннее Парето-оптимальное состояние рассматриваемой экономики, то существуют цены $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, и трансферты $\mathbf{S}$, такие что $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — псевдоравновесие Линдаля. ⌟

Установить справедливость этих утверждений можно, построив для рассматриваемой экономики модифицированную модель совершенного рынка *путем сведéния общественных благ к частным* и убедившись в том, что

- допустимым и Парето-оптимальным состояниям исходной экономики соответствуют допустимые и Парето-оптимальные состояния модифицированной экономики;
- равновесию Линдаля исходной экономики соответствует вальрасовское равновесие модифицированной экономики;
- предположения сформулированных выше первой и второй теорем благосостояния для экономики с общественными благами гарантируют выполнение предположений первой и вто-

рой[17] теорем благосостояния для модифицированной (классической) модели.

Смысл этого сведе́ния состоит в следующем. В ситуациях описанного типа мы сталкиваемся с вариантом производственных экстерналий (все произведенное количество блага $k \in K_1$ должно потребляться каждым потребителем). Поэтому, в соответствии с рецептом рассматриваемого в гл. 9 решения для экономики с экстерналиями, для каждого такого типа экстерналий должны быть учреждены рынки ($I \times K_1$ вместо K_1 как в случае, если бы эти блага были частными) с индивидуализированными ценами общественных благ на каждом из таких рынков.

Опишем элементы этой модифицированной экономики: множество благ, множество потребителей, множество производителей, множество допустимых потребительских наборов, предпочтения и начальные запасы для каждого потребителя, технологическое множество для каждого производителя. Каждому частному благу сопоставим одно благо, а каждому общественному благу k сопоставим набор из m благ — по одному на каждого потребителя. Таким образом, в модифицированной экономике $ml_1 + l_2$ благ, где l_1 — число общественных, а l_2 — число частных благ в исходной экономике. Множества потребителей и производителей не меняются.

Модифицированное потребительское множество $\tilde{X}_i$ потребителя i строится на основе X_i по следующему правилу:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \left(\mathbf{x}_{i,1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{i,m}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \in \tilde{X}_i$$

тогда и только тогда, когда

$$\left(\mathbf{x}_{i,i}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \in X_i,$$

$$\mathbf{x}_{i,s}^{(1)} = \mathbf{0} \;\forall s \neq i.$$

Предпочтения i-го потребителя $\widetilde{\succcurlyeq}_i$ связаны с предпочтениями $\succcurlyeq_i$ в исходной экономике по следующему правилу:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i \,\widetilde{\succcurlyeq}_i\, \tilde{\mathbf{z}}_i$$

тогда и только тогда, когда

$$\left(\mathbf{x}_{i,i}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \succcurlyeq_i \left(\mathbf{z}_{i,i}^{(1)}, \mathbf{z}_i^{(2)}\right).$$

[17] Для второй теоремы благосостояния это не совсем так: не для всех благ будет выполнено условие внутренности, поэтому теорема несколько модифицируется.

Начальные запасы состоят только из частных благ в прежних количествах:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_i^{(2)}\right).$$

Технологическое множество $\tilde{Y}_j$ фирмы j имеет следующую структуру: технология

$$\tilde{\mathbf{y}}_j = \left(\mathbf{y}_{j,1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}_{j,m}^{(1)}, \mathbf{y}_j^{(2)}\right)$$

является допустимой в технологическом множестве $\tilde{Y}_j$ ($\tilde{\mathbf{y}}_j \in \tilde{Y}_j$) тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{y}_{j,1}^{(1)} = \cdots = \mathbf{y}_{j,m}^{(1)} = \mathbf{y}_j^{(1)}$$

и

$$\left(\mathbf{y}_j^{(1)}, \mathbf{y}_j^{(2)}\right) \in Y.$$

Заметим, что технологическое множество каждого производителя позволяет производить индивидуализированные блага только в одинаковых количествах (независимо от того, какому потребителю они предназначены).

По построению $\left\langle \left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right)_i, \left(\mathbf{y}_j^{(1)}, \mathbf{y}_j^{(2)}\right)_j \right\rangle$ — допустимое состояние в исходной экономике тогда и только тогда, когда

$$\left\langle \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right)_i, \left(\mathbf{y}_j^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}_j^{(1)}, \mathbf{y}_j^{(2)}\right)_j \right\rangle —$$

допустимое состояние в модифицированной экономике.

Аналогичное утверждение можно сделать и относительно взаимосвязи между Парето-оптимальными состояниями исходной и модифицированной экономики.

Читателю оставляется в качестве упражнения проверка того, что набор

$$\left\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right)_i, \left(\mathbf{y}_j^{(1)}, \mathbf{y}_j^{(2)}\right)_j \right\rangle —$$

равновесие Линдаля в исходной экономике с общественными благами тогда и только тогда, когда $(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ — вальрасовское равновесие в модифицированной экономике, где

$$\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \tilde{\mathbf{x}}_i = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_j = \left(\mathbf{y}_j^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}_j^{(1)}, \mathbf{y}_j^{(2)}\right).$$

Пример 10.3 (продолжение Примера 10.2)
Пусть, как и ранее,

$$u_i(x, z_i) = 2\alpha_i \ln x + z_i, \quad c(y) = y^2.$$

В равновесии Линдаля

$$\bar{p} = c'(\bar{y}) = 2\bar{y}, \quad \bar{q}_i = v_i'(\bar{y}) = 2\alpha_i/\bar{y}.$$

Воспользовавшись условием $\sum_{i\in I} \bar{q}_i = \bar{p}$, получим $\bar{y} = \sqrt{\sum_{i\in I} \alpha_i}$, что совпадает с Парето-оптимальным объемом производства общественного блага $\hat{y}$.

Пусть в экономике три потребителя, и $\alpha_i = i$. Тогда

$$\bar{y} = \sqrt{6}, \quad \bar{p} = 2\sqrt{6}, \quad \bar{q}_1 = 2/\sqrt{6}, \quad \bar{q}_2 = 4/\sqrt{6}, \quad \bar{q}_3 = 6/\sqrt{6}. \qquad \triangle$$

Модификация понятия равновесия позволяет получить характеристику Парето-оптимальных состояний экономики с общественными благами, аналогичную второй теореме благосостояния для экономики с частными благами. Тем самым конструкция, предложенная Линдалем, указывает на возможность использования ценового механизма для координации решений и действий потребителей и производителей, для достижения эффективного распределения ресурсов в такой экономике, подобно тому как ценовой механизм используется в экономике с частными благами. Однако эта конструкция скорее подчеркивает проблемы, которые связаны с использованием механизма цен для координации решений экономических субъектов, чем дает описание этого механизма. Здесь есть три обстоятельства, на которые следует обратить внимание. Они подчеркивают нереалистичность этой конструкции как механизма координации хозяйственной деятельности потребителей и производителей.

1. В теореме большое значение имеет то, что это модель совершенной конкуренции, что на рынках потребители и производители действуют как ценополучатели, т. е. воспринимают цены благ как данные. Такая гипотеза является оправданной, когда производителей и потребителей достаточно много. Хотя мы можем здесь предположить, что производителей общественного блага довольно много, т. е. со стороны производителей нам нет никаких оснований считать, что эта гипотеза совершенной конкуренции нарушена, однако покупатель общественного блага на каждом индивидуализированном рынке всего один, т. е. это чистый случай монопсонии. И, конечно, в этой ситуации нет никаких оснований предполагать, что покупатель будет действовать как ценополучатель. Если попытаться осуществить

эту конструкцию Линдаля в реальной жизни, то потребитель будет использовать свое влияние на цены, для того чтобы установить наиболее выгодный для себя уровень цен.

2. Можно было бы прибегнуть к централизованному механизму установления цен — законодательно закрепить цены на нужном нам уровне, обеспечивающем Парето-оптимальное распределение. Однако ясно, что для того, чтобы действовать правильно, правительственные органы, устанавливающие цены, должны владеть информацией о предельных полезностях общественного блага для каждого потребителя. Эта информация, конечно, недоступна. А каждый потребитель, приватно обладающий этой информацией, понимая, каким образом будет осуществляться ценообразование, заинтересован в том, чтобы манипулировать этой информацией для обеспечения наиболее предпочтительной для себя ситуации с производством общественных благ. В последующем мы обсудим финансирование общественных благ и поймем, что, действительно, такая заинтересованность и возможности манипулировать информацией у потребителей существуют.

3. Мы неявно предполагаем, когда индивидуализируем рынки, что если потребитель не купит благо, то он не сможет им пользоваться, т. е. предполагаем исключаемость потребителя из процесса потребления общественных благ. Но природа общественных благ как раз и состоит в том, что исключаемость невозможна. Предположение о поведении и ожиданиях потребителей, которое лежит в основе модели Линдаля, противоречит рациональности потребителей.

Эта конструкция очень важна, но значение ее исключительно теоретическое. Концепция равновесия по Линдалю, подчеркнем это еще раз, лишь выявляет трудности использования механизма цен для обеспечения эффективного распределения ресурсов (и координации решений хозяйствующих субъектов) в ситуации с общественными благами. Все это заставляет отнести данную проблематику к тому разделу микроэкономики, который занимается анализом фиаско рынка, и изучать альтернативные механизмы распределения ресурсов в ситуации с общественными благами.

В этой связи возникает вопрос об альтернативных механизмах, их достоинствах и недостатках, к чему мы и переходим в следующем параграфе.

Задачи

10.22 В экономике двух потребителей с двумя благами — общественным и частным — функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln G + 2\ln x_1 \quad \text{и} \quad u_2 = \ln G + 3\ln x_2.$$

Оба потребителя имеют начальные запасы только частного блага — 6 и 4 соответственно. Технология единственного предприятия позволяет из двух единиц частного блага произвести единицу общественного блага.

(A) Запишите систему уравнений, задающую границу Парето.

(B) Найдите равновесие Линдаля.

10.23 Назовите условия, которые являются достаточными и/или необходимыми для того, чтобы равновесие Линдаля

(A) существовало,

(B) было Парето-эффективным.

10.24 ⟦Bergstrom⟧ В местечке Брасс Манки провинции Онтарио имеется 1000 жителей, у каждого из которых функция полезности имеет вид $u_i(x_i, y) = y^\alpha(x_i + k_i)$, где $y \geqslant 0$ — размер общественного катка, а $x_i \geqslant 0$ — годовое потребление пончиков. Стоимость строительства и содержания одного квадратного дюйма катка равна одному пончику (пончики являются естественной денежной единицей в Брасс Манки). У каждого жителя есть некоторый запас пончиков ω_i.

Найдите равновесие Линдаля. Каким будет количество общественного блага? Сколько заплатит за общественное благо i-й житель?

10.5 Долевое финансирование: общие соображения

Будем предполагать, что бремя финансирования общественных благ устанавливается априорно на основе определения доли каждого потребителя в покрытии любой возможный величины общественных расходов. Пусть $\delta_{ik}(x_k)$ — доля i-го потребителя, где x_k — объем потребления общественного блага k. Сумма долей равна единице для всех благ k и для всех допустимых объемов потребления x_k:

$$\sum_{i\in I} \delta_{ik}(x_k) = 1.$$

При этом взнос i-го потребителя на финансирование k-го общественного блага равен $\delta_{ik}(x_k)p_k x_k$. Можно интерпретировать эту величину как налог со ставкой $\delta_{ik}(x_k)$. Такой способ финансирования общественных благ будем называть долевым финансированием.

Долевое финансирование решает проблему безбилетника, возникающую при добровольном финансировании. Однако остается открытым вопрос о том, в каком объеме производить общественные блага. При данных рыночных ценах и данных долях желаемые потребителями объемы производства вовсе не обязательно совпадут. Поясним сказанное. При заданных долях $\delta_{ik}(x_{ik})$ и ценах $\mathbf{p}$ потребитель i «предъявит спрос» на такие количества частных и общественных благ $(\bar{\mathbf{x}}_i^{(1)}, \bar{\mathbf{x}}_i^{(2)})$, которые являются решением следующей задачи:

$$u_i\left(\mathbf{x}_i^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \to \max_{\mathbf{x}_i}$$
$$\sum_{k \in K_1} \delta_{ik}(x_{ik}) p_k x_{ik} + \sum_{k \in K_2} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i, \tag{10.4}$$
$$\mathbf{x}_i = \left(\mathbf{x}_i^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \in X_i.$$

Если бы все потребители при некоторых ценах предъявляли спрос на одни и те же объемы общественных благ (консенсус) и на рынках всех благ спрос равнялся бы предложению, то экономика оказалась бы в состоянии равновесия.

Определение 10.5:

Равновесие с долевым финансированием при консенсусе есть набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такой что

* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;
* для каждого потребителя $(\bar{\mathbf{x}}^{(1)}, \bar{\mathbf{x}}_i^{(2)})$ является решением задачи (10.4) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходах
$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i;$$
* каждая технология $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (10.2) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$. ◀

Для равновесия при консенсусе можно доказать обе теоремы благосостояния. При этом если доли $\delta_{ik}(x_k)$ не зависят от объемов:

$$\delta_{ik}(x_k) = \delta_{ik} \ \forall x_k,$$

то доказательство оказывается достаточно простым, поскольку каждому равновесию при консенсусе соответствует равновесие Линдаля и наоборот. Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с долевым финансированием при консенсусе. Тогда $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие Линдаля, где $\bar{q}_{ik} = \delta_{ik}\bar{p}_k$. Если же $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие Линдаля, то $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие с долевым финансированием при консенсусе с долями, рассчитываемыми по формуле $\delta_{ik} = \bar{q}_{ik}/\bar{p}_k$. Доказательство этого факта достаточно очевидно, и читатель может провести его самостоятельно (см. задачу 10.25).

При дифференцируемости функций полезности и производственных функций во внутреннем равновесии при консенсусе должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = (\delta_{ik}(\bar{x}_k) + \delta'_{ik}(\bar{x}_k)\bar{x}_k)\frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}},$$

где k — произвольное общественное благо, а k_0 — частное благо с ненулевой ценой. При постоянных долях

$$\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}} = \delta_{ik}\frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_{k_0}},$$

откуда

$$\delta_{ik} = \frac{\frac{\partial u_i/\partial x_k}{\partial u_i/\partial x_{ik_0}}}{\sum_{s\in I}\frac{\partial u_s/\partial x_k}{\partial u_s/\partial x_{sk_0}}}.$$

Отсюда ясно, что далеко не при любых долях финансирования подобное равновесие может существовать.

В частном случае квазилинейной экономики задачу потребителя можно записать в виде

$$v_i(x_i) - \delta_i p x_i \to \max_{\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{0}}.$$

Во внутреннем равновесии

$$v'_i(\bar{x}) = \delta_i\bar{p}.$$

Условие для долей принимает вид

$$\delta_i = \frac{v'_i(\bar{x})}{\sum_{s\in I} v'_s(\bar{x})}.$$

Рис. 10.5 иллюстрирует равновесие при консенсусе в случае квазилинейной экономики и двух потребителей. Пусть $x_i(\cdot)$ — функция, обратная к $v'_i(\cdot)$. Тогда при данной цене $\bar{p}$ спрос потребителя на общественное благо в зависимости от доли равен $x_i = x_i(\delta_i\bar{p})$. Консенсус

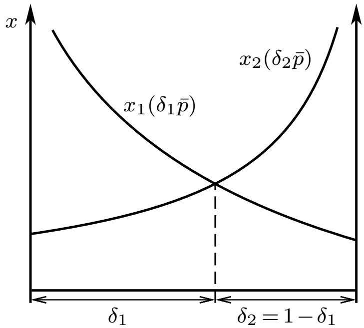


Рис. 10.5. *Иллюстрация равновесия при консенсусе*

определяется уравнением

$$x_1(\delta_1\bar{p}) = x_2(\delta_2\bar{p}) = x_2((1 - \delta_1)\bar{p}).$$

Ясно, что равновесие при консенсусе может существовать лишь при специальном подборе долей финансирования. Поэтому рассмотренная здесь концепция равновесия имеет, как и равновесие Линдаля, только теоретическое значение. Его можно использовать как своего рода исходный пункт при анализе долевого финансирования. В общем случае, при произвольно выбранных долях финансирования общественного блага, нет оснований ожидать, что при каких-либо рыночных ценах желаемые объемы потребления общественных благ у всех потребителей будут совпадать. Поэтому возникает проблема согласования их предпочтений относительно этих количеств.

Другими словами, в концепции равновесия с долевым финансированием способ финансирования общественных благ следует дополнить некоторым механизмом принятия коллективных решений об объемах производства общественных благ, который бы «работал» и при отсутствии консенсуса. Далее мы рассмотрим некоторые из таких механизмов таких механизмов.

Задачи

10.25 (А) Сформулируйте теорему о взаимосвязи между равновесием Линдаля и равновесием при консенсусе и дайте ее доказательство.

(B) Опираясь на доказанное, докажите для равновесия при консенсусе аналоги двух теорем благосостояния.

10.26 В квазилинейной экономике с общественным благом имеется два потребителя с функциями полезности вида

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2,$$

где $a, b > 0$. Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 4y$. Финансирование общественного блага осуществляется на долевой основе с долями δ_1 и δ_2. Известно, что был достигнут консенсус. Что можно сказать об отношении долей δ_1/δ_2? Обоснуйте свое утверждение.

10.27 В квазилинейной экономике с общественным благом имеется два потребителя с функциями полезности вида

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2,$$

где $a, b > 0$. Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 5y$. Финансирование общественного блага осуществляется на долевой основе с долями $2/3$ и $1/3$. При каких условиях на a и b в этой экономике не может быть достигнут консенсус? Обоснуйте свое утверждение.

10.6 Долевое финансирование с равновесием при голосовании простым большинством

Один из самых распространенных механизмов принятия общественных решений (процедур коллективного выбора) — это голосование.

При анализе голосования будем исходить из предпочтений потребителей на наборах общественных благ (при заданных рыночных ценах и структуре общественных расходов). Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} u_i\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \to \max_{\mathbf{x}_i^{(2)}} \\ \sum_{k \in K_1} \delta_{ik}(\tilde{x}_k) p_k \tilde{x}_k + \sum_{k \in K_2} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i, \\ \left(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \in X_i, \end{gathered} \tag{10.5}$$

где полезность максимизируется по $\mathbf{x}_i^{(2)}$ при *заданной* величине $\mathbf{x}^{(1)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$. На основе решений этой задачи предпочтения можно задать с помощью функции полезности $\tilde{u}_i(\cdot)$, сопоставляющей каждому набору общественных благ $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ максимально достижимое значение полезности в данной задаче.

Одна из самых распространенных процедур — голосование по правилу простого большинства.

Определение 10.6:

Пусть $\mathcal{A}$ — множество альтернатив и $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$, где $i = 1, \ldots, m$ — набор предпочтений на $\mathcal{A}$. Альтернатива $\bar{a} \in \mathcal{A}$ называется равновесием при голосовании по правилу простого большинства если не существует такой альтернативы $a \in \mathcal{A}$, что она лучше $\bar{a}$ по большинству предпочтений.

На основе этой процедуры можно предложить концепцию равновесия для экономики с общественными благами.

Определение 10.7:

Равновесие с долевым финансированием и голосованием на основе правила простого большинства есть набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такой что[18]

* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;
* для каждого потребителя $\bar{\mathbf{x}}_i^{(2)}$ является решением задачи (10.5) при ценах $\mathbf{p}$, доходах

$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\omega_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i$$

и объемах потребления общественных благ $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \bar{\mathbf{x}}^{(1)}$;
* $\bar{\mathbf{x}}^{(1)}$ — равновесие при голосовании по правилу простого большинства для альтернатив, заданных множеством наборов общественных благ $X^{(1)}$, и набора предпочтений, заданных функциями $\tilde{u}_i(\cdot)$;
* каждая технология $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (10.2) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$. ◀

Выбор количества общественных благ с помощью голосования простым большинством сталкивается с двумя серьезными проблемами.

1. Такое равновесие существует только при довольно ограничительных предположениях. Известный парадокс Кондорсе[19] показывает, что, вообще говоря, при числе участников не менее трех ($\geqslant 3$)

[18] По-видимому, впервые голосование по поводу выбора объема общественного блага было проанализировано Говардом Боуэном в работе H. R. Bowen. The Interpretation of Voting in the Allocation of Economic Resources, *Quarterly Journal of Economics* **58** (1943): 27–48.

[19] Жан Антуан Кондорсе — французский математик и социолог.

равновесие при голосовании может не существовать даже при конечном числе альтернатив.

2. Даже если равновесие существует, оно обычно не Парето-оптимально.

Существование равновесия при голосовании можно гарантировать в случае, когда предпочтения потребителей однопиковые.

Приведем определение понятия однопиковых предпочтений для частного случая, когда множество альтернатив $\mathcal{A}$ является подмножеством действительных чисел (этот случай соответствует экономике, в которой существует только одно общественное благо). Неоклассические предпочтения $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ потребителя (на множестве альтернатив $\mathcal{A}$) являются однопиковыми, если выполняются следующие условия:

(a) существует оптимальная с точки зрения потребителя i альтернатива $\hat{a}_i$ (т. е. такая альтернатива, что $\hat{a}_i \succcurlyeq_i a$ для всех $a \in \mathcal{A}$);

(b) если $a^1 \leqslant a^2 \leqslant \hat{a}_i$, то $a^2 \succcurlyeq_i a^1$;

(c) если $a^1 \geqslant a^2 \geqslant \hat{a}_i$, то $a^2 \succcurlyeq_i a^1$.

Проиллюстрируем сказанное на примере квазилинейной экономики. Пусть доля δ_i каждого потребителя в финансировании общественного блага постоянна и положительна. Тогда предпочтения потребителя i на множестве возможных вариантов потребления общественного блага задаются функцией

$$\tilde{u}_i(x) = v_i(x) - \delta_i p x.$$

Будем считать, что для любого i функция $\tilde{u}_i(x)$ достигает максимума на множестве неотрицательных чисел при любом положительном p. Обозначим соответствующее оптимальное с точки зрения потребителя i количество общественного блага[20] через $\hat{x}_i$. Тогда предпочтения, задаваемые функцией $\tilde{u}_i(\cdot)$, являются однопиковыми (при $\hat{a}_i = \hat{x}_i$) на множестве альтернатив $\mathcal{A} = [0, \infty)$.

Действительно, по построению величина $\hat{x}_i$ — максимум функции $\tilde{u}_i(x)$ на множестве $\mathcal{A}$. Несложно также проверить, что, поскольку $v_i'(x)$ не возрастает, эти предпочтения удовлетворяют условиям (b)

В примере Кондорсе рассматриваются три индивидуума, выбирающие из трех альтернатив. Парадокс возникает, когда предпочтения заданы следующим образом:

$$a_1 \succ_1 a_2 \succ_1 a_3, \quad a_3 \succ_2 a_1 \succ_2 a_2, \quad a_2 \succ_3 a_3 \succ_3 a_1.$$

[20] Условие $v_i'(x_i) \to 0$ при $x_i \to \infty$ гарантирует существование такого количества.

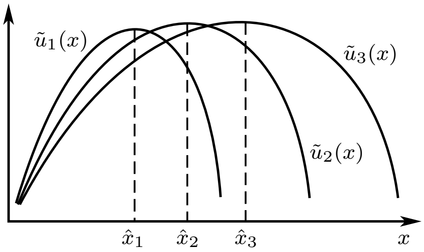


Рис. 10.6. *Предпочтения трех потребителей относительно количества общественного блага при заданных долях финансирования*

и (c). Заметим, что величину $\tilde u_i(\hat x_i) = v_i(\hat x_i) - \delta_i p \hat x_i$ можно интерпретировать как потребительский излишек, соответствующий индивидуализированной цене общественного блага $\delta_i p$. Если предельные издержки $v_i'(\cdot)$ являются непрерывной функцией, то $\hat x_i$ удовлетворяет соотношениям

$$v_i'(\hat x_i) \leqslant \delta_i p,$$

причем если $\hat x_i > 0$, то

$$v_i'(\hat x_i) = \delta_i p.$$

Возможное поведение оценок $\tilde u_i(x_i)$ объемов общественного блага для случая, когда $m = 3$, показано на Рис. 10.6.

Заметим, что в случае, когда m — нечетное число ($m = 2s+1$), равновесие при голосовании имеет особенно простую структуру. В этом случае равновесной является медиана из объемов $\hat x_i$, т. е. $(s+1)$-й по порядку возрастания объем. (Если все величи́ны $\hat x_i$ разные, ровно $s = (m-1)/2$ потребителей предпочитают увеличить потребление общественного блага, а другие s потребителей желали бы его уменьшить.) В приведенном графическом примере это альтернатива $\hat x_2$. Таким образом, равновесие при голосовании определяется предпочтениями медианного потребителя. Обозначим индекс такого потребителя через i^*. Заметим, что i^*, вообще говоря, зависит от цены общественного блага p, поскольку от p зависят функции $\tilde u_i(x)$.

С учетом сказанного (внутреннее) равновесие на рынке общественного блага в состоянии равновесия с долевым финансированием и голосованием на основе правила простого большинства характеризуется следующим образом. Если $\bar y$ — равновесный объем, а p — равновесная цена общественного блага, то

$$p = c'(\bar y) \quad \text{и} \quad \hat x_{i^*} = \bar y,$$

где i^* — медианный потребитель при цене p. Таким образом, в общем случае для того, чтобы определить, какой потребитель в равновесии является медианным, требуется знать равновесную цену, которая, в свою очередь, зависит от медианного потребителя (желаемого им объема потребления общественного блага). Но если предельные издержки производства общественного блага постоянны, то (во внутреннем равновесии) равновесная цена известна заранее — она равна предельным издержкам, и i^* — медианный потребитель при этой цене.

Если предельные издержки не убывают (а предельные полезности потребителей убывают), то найти медианного потребителя при «правильной» цене можно на основе простого приема. Заметим сначала, что, поскольку $p = c'(\hat{x}_{i^*})$, то величина $\hat{x}_{i^*}$ является решением одного из следующих m уравнений

$$v_i'(x_i) = \delta_i c'(x_i).$$

Пусть $\bar{x}_i$ — решения таких уравнений и $\bar{x}_{i^*}$ — медиана из этих величин. Тогда $\bar{x}_{i^*}$ является предпочитаемым медианным потребителем объемом потребления общественного блага (т. е. $\hat{x}_{i^*} = \bar{x}_{i^*}$), а величина $\bar{p} = c'(\bar{x}_{i^*})$ — равновесной ценой общественного блага.

Для доказательства этого факта достаточно показать, что при цене $\bar{p} = c'(\bar{x}_{i^*})$ потребитель i^* является медианным потребителем. Покажем это. Для каждого потребителя i, такого что $\bar{x}_i \leqslant \bar{x}_{i^*}$, величина $c'(\bar{x}_i)$ не превышает величину равновесной цены $\bar{p} = c'(\bar{x}_{i^*})$. Поэтому предпочитаемое при цене p потребителем i количество общественного блага $\hat{x}_{i^*}$ — решение уравнения $v_i'(x_i) = \delta_i \bar{p}$ — не превышает величину $\bar{x}_i$. Таким образом $\hat{x}_i \leqslant \hat{x}_{i^*}$. Аналогично показывается, что если $\bar{x}_i \geqslant \bar{x}_{i^*}$, то $\hat{x}_i \geqslant \hat{x}_{i^*}$. А это и означает, что при ценах $\bar{p} = c'(\bar{x}_{i^*})$ потребитель i^* является медианным[21].

Сравним оптимальное количество общественного блага и его объем в равновесии при голосовании с долевым участием.

В особой ситуации, когда доли расходов равны предельным полезностям общественного блага, соответствующим оптимальному коли-

[21] Можно рассмотреть и несколько иную процедуру — голосование относительно величины издержек на производство общественного блага $r = c(x)$ (с индуцированными на множестве возможных общественных издержек предпочтениями $\tilde{v}_i(r) = v_i(c^{-1}(r))$). Анализ этого механизма проводится по той же схеме. При этом оказывается, что величина $c(\bar{x}_{i^*})$ представляет собой равновесное значение издержек. Таким образом, медианные общественные издержки соответствуют медианному уровню общественного блага, хотя эти две процедуры голосования подразумевают разные расходы (так как величина $\bar{p}\bar{x}_{i^*} = c'(\bar{x}_{i^*})\bar{x}_{i^*}$, вообще говоря, отлична от величины $c(\bar{x}_{i^*})$).

честву этого блага, т. е. $\delta_i = v_i'(\hat{x})$, для всех потребителей выполнено соотношение $\hat{x}_i = \hat{x}$, т. е. $\hat{x}$ предпочитается всеми потребителями (а не только более чем их половиной) любой другой альтернативе. Но для определения таких «правильных» долей финансирования требуется обладать приватной информацией о предпочтениях потребителей, т. е. надо *решить проблему выявления предпочтений*, трудности решения которой мы уже обсуждали и будем обсуждать ниже.

В общем случае можно ожидать как недопроизводства общественного блага $(\hat{x}_{i^*}, \hat{x}))$, так и его перепроизводства.

Пусть, например, потребители финансируют общественное благо поровну, т. е. $\delta_i = 1/m$, где число потребителей m нечетное. Тогда в равновесии при голосовании объем потребления общественного блага $\hat{x}_{i^*}$ будет таким, что

$$v_{i^*}'(\hat{x}_{i^*}) = \frac{1}{m} c'(\hat{x}_{i^*}).$$

В то же время, оптимальный (по Парето) объем потребления общественного блага есть величина $\hat{x}$, такая что

$$\frac{1}{m} \sum_{i \in I} v_i'(\hat{x}) = \frac{1}{m} c'(\hat{x}).$$

Таким образом, объем производства общественного блага в равновесии при голосовании с равными долями финансирования $\hat{x}_{i^*}$ является оптимальным тогда и только тогда, когда средняя предельная полезность для этого количества равна его предельной полезности для медианного потребителя.

Легко придумать такой набор функций $v_i(x)$, что для любого объема потребления общественного блага x средняя предельная полезность больше предельной полезности для медианного потребителя. В этом случае (при убывающей отдаче) можно доказать, что $\hat{x} > \hat{x}_{i^*}$. Если бы $\hat{x} \leqslant \hat{x}_{i^*}$, то выполнялось бы

$$\frac{1}{m} c'(\hat{x}) = \frac{1}{m} \sum_{i \in I} v_i'(\hat{x}) > \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}) \geqslant \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}_{i^*}) = \frac{1}{m} c'(\hat{x}_{i^*}) \geqslant \frac{1}{m} c'(\hat{x}),$$

чего быть не может. Наоборот, если для любого объема потребления общественного блага x средняя предельная полезность меньше предельной полезности медианного потребителя, то $\hat{x} < \hat{x}_{i^*}$. Если бы $\hat{x} \geqslant \hat{x}_{i^*}$, то

$$\frac{1}{m} c'(\hat{x}) = \frac{1}{m} \sum_{i \in I} v_i'(\hat{x}) < \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}) \leqslant \tilde{v}_{i^*}'(\hat{x}_{i^*}) = \frac{1}{m} c'(\hat{x}_{i^*}) < \frac{1}{m} c'(\hat{x}).$$

Пример 10.4 (продолжение Примеров 10.2 и 10.3)
В рассмотренном выше случае, когда

$$v_i(x_i) = 2\alpha_i \ln x_i \quad \text{и} \quad c(y) = y^2,$$

имеем $\hat{x}_{i^*} = \sqrt{m\alpha_{i^*}}$ и $\hat{x} = \sqrt{m\bar{\alpha}}$, где $\bar{\alpha} = \sum_{i \in I} \alpha_i / m$. Поэтому $\hat{x} \geqslant \hat{x}_{i^*}$ тогда и только тогда, когда $\bar{\alpha} \geqslant \alpha_{i^*}$.

Пусть, например, $\alpha_i = i$ и m нечетно. Тогда

$$\bar{\alpha} = \alpha_{i^*} = i^* = \frac{m+1}{2}$$

и объем производства общественного блага в равновесии при голосовании совпадает с оптимальным.

Если $\alpha_i = i^2$, то

$$\bar{\alpha} = \frac{(m+1)(2m+1)}{6} \quad \text{и} \quad \alpha_{i^*} = (i^*)^2 = \frac{(m+1)^2}{4}.$$

Так как $\bar{\alpha} > \alpha_{i^*}$ при $m > 1$, то $\hat{x} > \hat{x}_{i^*}$.

Если $\alpha_i = \exp(\gamma i)$, то при $\gamma > 0$ выполнено $\bar{\alpha} > \alpha_{i^*}$ и $\hat{x} > \hat{x}_{i^*}$. В то же время при $\gamma < 0$ выполнено $\bar{\alpha} < \alpha_{i^*}$ и $\hat{x} < \hat{x}_{i^*}$. △

Задачи

10.28 Для квазилинейной экономики с общественным благом докажите, что если предельные полезности, деленные на доли финансирования, $v_i'(x_i)/\delta_i$, упорядочены одинаково вне зависимости от уровня общественного блага, то определение медианного потребителя не зависит от цены.

10.7 Долевое финансирование: равновесие с нерыночным (политическим) механизмом коллективного выбора

В этом параграфе мы охарактеризуем общие свойства равновесий с различными механизмами принятия коллективных решений об объемах производства общественных благ (согласования предпочтений потребителей относительно этих количеств). Одним из примеров таких механизмов является рассмотренный выше механизм голосования по правилу простого большинства.

Будем использовать следующее (общее) представление механизма принятия коллективных решений об объемах производства общественных благ.

◆ Потребители могут влиять на общественное решение путем выбора значений некоторых политических переменных. Поэтому каждый механизм характеризуется множеством возможных значений политических переменных Z_i (произвольной природы, т. е. это не обязательно действительные числа), правилом выбора их значений $z_i \in Z_i$ каждым потребителем, а также процедурой принятия коллективного решения $G(z_1, \ldots, z_m)$ относительно объемов производства общественных благ. Объем производства общественных благ $\mathbf{x}^{(1)} \in X^{(1)}$ выбирается так, что

$$\mathbf{x}^{(1)} = G(z_1, \ldots, z_m).$$

◆ На выбор потребителя в данных моделях, в свою очередь, влияет размер бремени финансирования общественного блага. Будем, как и выше, рассматривать долевое финансирование с априорно устанавливаемыми долями потребителей в финансировании общественного блага $\delta_{ik}(x_k)$.

Выбор каждого потребителя является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} u_i\left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}\right) \to \max_{\mathbf{x}_i, z_i} \\ \sum_{k \in K_1} \delta_{ik}(x_k) p_k x_k + \sum_{k \in K_2} p_k x_{ik} + \tau_i(z_1, \ldots, z_m) \leqslant \beta_i, \\ \mathbf{x}^{(1)} = G(z_1, \ldots, z_m), \\ \mathbf{x}_i \in X_i, \quad z_i \in Z_i. \end{gathered} \tag{10.6}$$

Функция $\tau_i(z_1, \ldots, z_m)$ отражает расходы потребителя, связанные с политической деятельностью. Например, это могут быть расходы на лоббирование, подкуп должностных лиц, взносы в фонды политических партий[22].

Определение 10.8:

Равновесие с долевым финансированием и процедурой принятия коллективного решения $G(z_1, \ldots, z_m)$ есть набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$, такой что

[22] Для упрощения изложения мы не учитываем здесь другие формы влияния политических переменных на поведение и благосостояние потребителей. Можно было, например, ввести зависимость полезности потребителей от $\mathbf{z}$.

* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики с общественными благами;
* для каждого потребителя пара $\bar{\mathbf{x}}_i$ и $\bar{z}_i$ является решением соответствующей задачи потребителя (10.6) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, доходах
$$\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\omega_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i$$
и выбранных другими потребителями политических переменных $\mathbf{z}_{-i} = \bar{\mathbf{z}}_{-i}$;
* каждая технология $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением соответствующей задачи производителя (10.2) при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
* сумма расходов на политику равна сумме трансфертов:
$$\sum_{i \in I} S_i = \sum_{i \in I} \tau_i(\bar{\mathbf{z}}).$$
◀

Пример подобной конструкции можно построить на основе равновесия с голосованием простым большинством, рассмотренного в предыдущем параграфе. В таком равновесии переменными z_i могут служить функции $\tilde{u}_i(\cdot)$. При этом следует предположить, что потребители не обязательно правдиво сообщают эти функции.

Простейший политический механизм может состоять в том, что участники высказывают свои заявки $z_i \in \mathbb{R}_+$ на общественное благо, выраженные непосредственно в единицах этого блага, и действует какая-то схема «усреднения» этих заявок $G(z_1, \ldots, z_m)$, удовлетворяющая естественному требованию, состоящему в том, что если бы все подали одинаковые заявки, то был бы выбран соответствующий объем общественного блага:
$$G(\bar{z}, \ldots, \bar{z}) = \bar{z}.$$
Например, возможны такие схемы:

(V1) среднее арифметическое: $G(\mathbf{z}) = \sum_{i \in I} z_i / m$,

(V2) минимум: $G(\mathbf{z}) = \min_i z_i$,

(V3) максимум: $G(\mathbf{z}) = \max_i z_i$,

(V4) медиана: $G(\mathbf{z}) = \operatorname{med}(z_1, \ldots, z_m)$.

В схеме (V4) функция $\operatorname{med}(\cdot)$ принимает значение среднего из упорядоченных по возрастанию чисел $z_1, \ldots, z_m$, если же m четно, то среднего арифметического из двух средних. Это правило, как мы уже видели выше, практически тождественно в данном случае голосованию простым большинством.

Для первых трех из этих схем при $\tau_i(\mathbf{z}) = 0 \ \forall \mathbf{z}$ естественно ожидать равновесия, в котором один из потребителей обеспечивает себе желаемый уровень общественного блага. Так, при схеме (V1) в типичном равновесии один потребитель (тот, кто в сравнительно большей степени «любит» общественное благо) называет $z_i = m x_i$, где x_i — желательный для него объем общественного блага, а все остальные — $z_i = 0$.

Рассмотрим на примере схожую с (V1) схему (V3).

Пример 10.5 (продолжение Примера 10.2)
В той же ситуации, что и ранее, чистая полезность (излишек) потребителя при данном количестве общественного блага x и цене p равна

$$2\alpha_i \ln x - \delta_i p x.$$

Эта функция строго квазивогнута и определяет при данной цене p наиболее желательное для потребителя i количество общественного блага

$$x_i(p) = \frac{2\alpha_i}{\delta_i p}.$$

Рассмотрим модель при фиксированной цене p как игру, в которой игроками являются потребители и выигрыши равны

$$2\alpha_i \ln G(\mathbf{z}) - \delta_i p G(\mathbf{z}),$$

где $G(\mathbf{z}) = \max_i z_i$.

Предположим, что выбран объем общественного блага $x = G(\mathbf{z})$, такой что $x < x_i(p)$ для некоторого потребителя i. Тогда потребитель i может сделать заявку равной $z_i = x_i(p)$ и обеспечить желаемый уровень общественного блага. (Выбирая заявку выше остальных, он непосредственно влияет на уровень общественного блага.) Значит, такого не может быть в равновесии.

Покажем, что в игре есть равновесие по Нэшу следующего вида. Обозначим через i^* такого потребителя, который наиболее сильно ценит общественное благо при заданных долях. В условиях данного примера такой потребитель существует:

$$i^* = \operatorname*{argmax}_{i \in I} \alpha_i / \delta_i.$$

Следует предположить, что этот потребитель сделает заявку на уровне желаемого количества общественного блага $z_{i^*} = x_{i^*}(p)$, причем эта заявка будет максимальной, т. е. $z_i \leqslant z_{i^*}$ для остальных потребителей i. Покажем, что подобный набор заявок будет составлять равновесие Нэша.

Ясно, что потребителю i^* нет смысла менять свою заявку, поскольку выбранное количество общественного блага является для него оптимальным.

Если потребитель i ($i \neq i^*$) выберет заявку так, что $z_i \leqslant z_{i^*}$, то он не сможет повлиять на количество общественного блага и его полезность не изменится. Если же он выберет $z_i > z_{i^*}$, то тем самым изменит количество общественного блага до z_i, а это больше предпочитаемого им количества ($z_i > z_{i^*} = x_{i^*}(p) > x_i(p)$). При этом чистая полезность данного потребителя упадет (чистая полезность строго квазивогнута как функция количества общественного блага, $x_i(p)$ — максимум, а z_i дальше от максимума, чем $z_{i^*} = x_{i^*}(p)$).

В этом равновесии потребитель, который более ценит общественное благо, навязывает другим потребителям свой выбор.

В данной игре есть и другие равновесия Нэша, но они включают доминируемые стратегии, поэтому их можно исключить из рассмотрения. (Читатель может проанализировать это самостоятельно.)

По равновесию в игре при данной цене p несложно построить соответствующее общее равновесие в экономике в целом. △

Задачи

10.29 Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \sqrt{G} + x_1$ и $u_2 = 2\sqrt{G} + x_2$, где G и x_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Имеющаяся технология позволяет производить единицу общественного блага из двух единиц частного. Первый потребитель несет долю δ расходов на общественное благо, а второй — $1 - \delta$.

(A) Вычислите долю δ, при которой достигается консенсус (по возможности, проиллюстрируйте на графике). Найдите соответствующее равновесие.

(B) Предположим, что количество общественного блага выбирается по правилу $G = \min(g_1, g_2)$, где $g_i \geqslant 0$ — заявка i-го потребителя. Найдите соответствующее равновесие в зависимости от параметра δ.

(C) Будут ли указанные равновесия Парето-оптимальными? Поясните.

10.30 Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = 2\ln G + x_1$ и $u_2 = \ln G + x_2$, где G и x_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Имеющаяся технология позволяет производить единицу общественного блага из единицы частного. Первый потребитель несет долю δ расходов на общественное благо, а второй — $1 - \delta$.

(A) Вычислите долю δ, при которой достигается консенсус (по возможности, проиллюстрируйте на графике). Найдите соответствующее равновесие.

(B) Предположим, что количество общественного блага выбирается по правилу $M = \max(g_1, g_2)$, где $g_i \geqslant 0$ — заявка i-го потребителя. Найдите соответствующее равновесие в зависимости от параметра δ.

(C) Будут ли указанные равновесия Парето-оптимальными? Поясните.

10.8 Механизм Гровса—Кларка

В этом параграфе мы продолжим анализ долевого финансирования общественного блага и механизмов коллективного выбора уровня общественного блага. Поскольку проблема выявления предпочтений является ключевой при определении объема производства общественных благ, возникает вопрос об условиях, при которых она может быть решена. В данном параграфе показывается, что в частном случае, когда целевые функции квазилинейны, процедура, корректно выявляющая предпочтения и функцию спроса на общественное благо, существует. Это так называемый механизм Гровса—Кларка[23].

10.8.1 Описание механизма Гровса—Кларка

Вначале мы предложим традиционный анализ механизма Гровса—Кларка, отступив от равновесного подхода, которого мы последовательно придерживались до сих пор. Будем предполагать, что рассматриваемое сообщество непосредственно контролирует производство общественного блага. В такой модели потребители, принимая решение о потреблении общественного блага в объеме x, должны, в соответствии с используемой технологией, затратить $c(x)$ единиц частного блага, а не величину px — его стоимость, соответствующую рыночной цене p.

Ниже мы вернемся к предположению о конкурентном производстве общественных благ и покажем, как можно вписать процедуру Гровса—Кларка в рамки равновесной модели, рассмотренной в предыдущем параграфе.

[23] См. E. H. Clarke. Multipart Pricing of Public Goods, *Public Choice* **11** (1971): 17–33 и T. Groves. Incentives in Teams, *Econometrica* **41** (1973): 617–631.

Механизм Гровса—Кларка

⓪ Априорно устанавливаются доли финансирования общественного блага $\delta_i(x)$ для каждого возможного объема потребления общественного блага x ($\sum_{i\in I}\delta_i(x) = 1\ \forall x \in X$).

① Потребители сообщают функции $\varphi_i(\cdot) \in \Phi_i$ — их оценки общественного блага. Здесь Φ_i — множество возможных функций вида $\varphi_i \colon X \mapsto \mathbb{R}$.

По замыслу процедуры функции $\varphi_i(\cdot)$ должны отражать чистые полезности (потребительские излишки) при данной схеме финансирования от каждого уровня общественного блага, т. е.

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)c(x),$$

но, вообще говоря, могут не совпадать с ними. Потребители в принципе могут манипулировать этими оценками с целью увеличения своего благосостояния. Задача предлагаемого механизма как раз и состоит в том, чтобы побуждать потребителей сообщать истинные оценки.

Предполагается, конечно, что Φ_i включает $v_i(x) - \delta_i(x)c(x)$.

② Выбирается уровень общественного блага, максимизирующий суммарную чистую объявленную полезность:

$$\bar{x} \in \operatorname*{argmax}_x \sum_{i\in I} \varphi_i(x).$$

③ Определяется налог Кларка на каждого потребителя за изменение коллективного выбора, равный убыткам остальных потребителей, рассчитываемых на основе функций $\varphi_i(\cdot)$:

$$\tau_i = V_{(i)} - \sum_{j\neq i} \varphi_j(\bar{x}),$$

где $V_{(i)}$ — максимальное значение суммарной чистой объявленной полезности, которая получается без учета мнения i-го потребителя:

$$V_{(i)} = \max_x \sum_{j\neq i} \varphi_j(x).$$

(Очевидно, что этот налог неотрицателен.) Налог Кларка должен быть изъят из данной экономики.

В результате этой процедуры полезность i-го потребителя с точностью до константы определяется величиной

$$v_i(\bar{x}) - \delta_i(\bar{x})c(\bar{x}) - \tau_i.$$

В рассматриваемой модели предполагается, что каждый потребитель максимизирует эту величину, выбирая сообщаемую функцию

$\varphi_i(\cdot)$. При этом потребитель учитывает влияние своего выбора на выбираемый объем общественного блага $\bar{x}$ и на величину налога Кларка τ_i, которую он должен в результате выплатить. Однако предполагается, что потребитель не учитывает влияние выбора $\varphi_i(\cdot)$ на величину трансфертов, распределяющих налог Кларка. Будем предполагать, что это происходит по той причине, что таких трансфертов обратно рассматриваемым потребителям просто не существует: налог Кларка выплачивается в частном благе и не перераспределяется, а должен быть изъят из данной экономики.

Можно заметить, что приведенное описание механизма Гровса—Кларка не является полным. Это прежде всего относится к выбору уровня общественного блага. Во-первых, поскольку не задано никаких ограничений на функции $\varphi_i(\cdot)$, то величи́ны $\operatorname{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$, $V_{(i)}$, значения которых фигурируют в спецификации механизма Гровса—Кларка, не обязательно существуют. Во-вторых, величина $\bar{x}$ не задана однозначно (максимум не обязательно достигается в единственной точке), в результате чего истинные чистые полезности потребителей не заданы однозначно.

Поэтому специфицируем механизм Гровса—Кларка более детально, указав формальное представление данного механизма в виде класса игр. Чтобы задать механизм Гровса—Кларка как игру, следует указать соответствующие множество игроков, множество их стратегий и функции выигрышей.

1. Множество игроков совпадает с множеством потребителей.

2. Стратегии каждого игрока — это сообщаемые им оценки $\varphi_i(\cdot)$. В случае, когда множество возможных вариантов производства общественного блага не является конечным, множества возможных стратегий Φ_i должны удовлетворять ограничениям, гарантирующим существование максимума суммы оценок, фигурирующих в описании механизма Гровса—Кларка. Например, в ситуации, когда $x \in \mathbb{R}_+$, достаточно потребовать, чтобы эти оценки были непрерывными функциями, которые могут принимать положительные значения лишь на компактном множестве $[0, M]$, причем $\varphi_i(0) = 0\ \forall i$. И конечно, предполагается, что функция $v_i(x) - \delta_i(x)c(x)$ принадлежит множеству возможных стратегий Φ_i.

3. Поскольку условие $\bar{x} \in \operatorname{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ неоднозначно определяет объем общественного блага, а следовательно, и возможные выигрыши участников, то для полноты спецификации игры требуется указать правило выбора объема общественного блага $\bar{x} = G\left((\varphi_i(\cdot))_i\right)$,

такое что
$$G\left((\varphi_i(\cdot))_i\right) \in \operatorname*{argmax}_x \sum_{i\in I} \varphi_i(x).$$
Выигрыш i-го потребителя тогда рассчитывается по указанным выше формулам при $\bar{x} = G\left((\varphi_i(\cdot))_i\right)$.

10.8.2 Свойства механизма Гровса—Кларка

Основное свойство описанного механизма состоит в том, что называть истинную оценку — это доминирующая стратегия каждого участника.

Теорема 10.4:

Истинная функция чистой полезности
$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)c(x) -$$
доминирующая стратегия для каждого потребителя в любой из игр, соответствующих механизму Гровса—Кларка. ⌟

Доказательство: Пусть $\bar{x}$ — уровень общественного блага, который будет выбран, если потребитель сообщит истинную чистую полезность, т. е. назовет $\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)c(x)$, а $\tilde{x}$ — уровень общественного блага, который будет выбран, если потребитель сообщит некоторую другую возможную функцию $\tilde{\varphi}_i(\cdot) \in \Phi_i$.

В первом случае его выигрыш будет равен
$$v_i(\bar{x}) - \delta_i(\bar{x})c(\bar{x}) - V_{(i)} + \sum_{j\neq i} \varphi_j(\bar{x}),$$
во втором случае выигрыш будет равен
$$v_i(\tilde{x}) - \delta_i(\tilde{x})c(\tilde{x}) - V_{(i)} + \sum_{j\neq i} \varphi_j(\tilde{x}).$$
Заметим, что значение $V_{(i)}$ не зависит от выбора потребителя i и в обоих случаях одинаково.

Первая величина не может быть меньше второй. Действительно, величина $\bar{x}$ по определению выбирается так, что для любого x выполнено
$$\varphi_i(\bar{x}) + \sum_{j\neq i} \varphi_j(\bar{x}) \geqslant \varphi_i(x) + \sum_{j\neq i} \varphi_j(x),$$
где $\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)c(x)$. В том числе это выполнено для $x = \tilde{x}$. ■

Заметим, что равновесие в доминирующих стратегиях является также равновесием в смысле Нэша.

Таким образом, механизм Гровса—Кларка оказывается неманипулируемым в том смысле, что потребители не заинтересованы искажать объявляемые оценки с целью повлиять на выбор объема общественного блага в благоприятном для себя направлении[24]. Тот же механизм без налогов Кларка является манипулируемым. Это объясняется тем, что (как и в любой ситуации с экстерналиями) каждый потребитель не учитывает влияния своих решений на благосостояние других потребителей.

Теорема 10.5:

Если все потребители сообщили истинные функции чистой полезности

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)c(x),$$

то уровень потребления общественного блага, определенный посредством механизма Гровса—Кларка, Парето-оптимален, т. е. максимизирует общественное благосостояние $W(y) = \sum_{i\in I} v_i(y) - c(y)$. ┘

Доказательство этого факта очевидно. Достаточно заметить, что если все потребители сообщили истинные функции чистой полезности, то $W(y) = \sum_{i\in I} \varphi_i(y)$.

Итак, естественно ожидать, что при использовании этой процедуры будет выбран оптимальный уровень общественного блага. Однако состояние такой экономики окажется неоптимальным в случае, когда хотя бы один потребитель выплачивает налог Кларка, поскольку для данной экономики такие налоги — чистые потери частного блага. При этом мы следуем интерпретации, что налоги изымаются, но не

[24] Заметим, что анализируемый здесь механизм Гровса—Кларка является представителем семейства неманипулируемых механизмов, называемых механизмами Гровса, при которых налог на потребителя i рассчитывается по формуле

$$\tau_i = V_{(i)}\left((\varphi_j(\cdot))_{j\neq i}\right) - \sum_{j\neq i} \varphi_j(\bar{x})$$

(т. е. $V_{(i)}$ является произвольной функцией от всех оценок, кроме оценки i-го потребителя). Поскольку величина $V_{(i)}$ зависит только от оценок других потребителей, то она не влияет на мотивацию потребителя i. Таким образом, механизм остается неманипулируемым. Оказывается, что механизмы Гровса — это единственный класс механизмов, которые являются неманипулируемыми при отсутствии ограничений на функции $\varphi_i(\cdot)$ (см. J. Green and J. Laffont · Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods, *Econometrica* **45** (1977): 427–438).

перераспределяются. (Если предположить, что налоги идут потребителям, которые не участвуют в процедуре, и включить оценки этих потребителей в вычисление благосостояния, то оптимум в смысле Парето все же будет иметь место.)

В некоторых случаях, однако, можно гарантировать, что налоги Кларка равны нулю. Для случая бесконечно делимого общественного блага эти ситуации характеризует следующая теорема.

Теорема 10.6:

Пусть

* функции полезности и функция издержек дифференцируемы;
* функции полезности вогнуты, а функция издержек выпукла;
* доли финансирования общественного блага не зависят от объема его потребления и равны[25]

$$\delta_i = \frac{v_i'(\hat{x})}{\sum_{j \in I} v_j'(\hat{x})},$$

где $\hat{x}$ — Парето-оптимальный объем общественного блага;
* все потребители сообщили истинные функции чистой полезности, т. е.

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i c(x).$$

Тогда налоги Кларка равны нулю. ┘

Доказательство: Покажем сначала, что максимум функций

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \frac{v_i'(\hat{x})}{\sum_{j \in I} v_j'(\hat{x})} c(x)$$

достигается при $x = \hat{x}$. Действительно, производная функции $\varphi_i(x)$ в точке $x = \hat{x}$ равна нулю:

$$\varphi_i'(\hat{x}) = v_i'(\hat{x}) - \frac{v_i'(\hat{x})}{\sum_{j \in I} v_j'(\hat{x})} c'(\hat{x}) = 0.$$

[25] Заметим, что расчет такой величины основывается на знании предпочтений, которые сама используемая процедура и призвана выявить. Очевидно, что для априорно заданных долей финансирования найдутся предпочтения, при которых налоги Кларка не равны нулю. Более того, можно показать, что при априорно заданных долях финансирования не существует механизма Гровса, при котором сумма собранных налогов всегда была бы равна нулю.

Поскольку $\varphi_i(\cdot)$ — вогнутая функция, $c(\cdot)$ — выпуклая функция, а доли финансирования общественного блага не зависят от объема его потребления, значит, необходимые условия оптимальности здесь являются достаточными. Следовательно, при $x = \hat{x}$ функция достигает максимального значения, т. е.

$$\hat{x} \in \operatorname*{argmax}_x \varphi_i(x).$$

Отсюда следует, что

$$\hat{x} \in \operatorname*{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x).$$

Более того, нетрудно понять, что для любого $\bar{x} \in \operatorname{argmax}_x \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ имеет место равенство[26] $\varphi_i(\hat{x}) = \varphi_i(\bar{x})$, и поэтому

$$V_{(i)} = \sum_{j \neq i} \varphi_j(\hat{x}) = \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}).$$

Простое вычисление показывает, что для всех потребителей $\tau_i = 0$. ■

Имеет место и обратное утверждение, а именно: если налоги Кларка оказались равными нулю, то это говорит о том, что доли финансирования были пропорциональны предельным полезностям.

Теорема 10.7:

Пусть

* функции полезности и функция издержек дифференцируемы;
* доли финансирования общественного блага не зависят от объема;
* все потребители сообщили истинные функции чистой полезности, т. е.

$$\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i c(x);$$

* был выбран уровень общественного блага $\bar{x}$, такой что

$$\bar{x} \in \operatorname{int} X^{(1)};$$

* налоги Кларка равны нулю.

[26] Читателю предлагается доказать этот факт самостоятельно.

Тогда выполнено соотношение

$$\delta_i = \frac{v_i'(\bar{x})}{\sum_{j\in I} v_j'(\bar{x})}.$$

┘

Доказательство: Равенство всех налогов Кларка нулю означает, что для любого потребителя i

$$\max_x \sum_{j\neq i} \varphi_j(x) = \sum_{j\neq i} \varphi_j(\bar{x}).$$

Следовательно,

$$\sum_{j\neq i} \varphi_j'(\bar{x}) = 0 \; \forall i \in I.$$

С другой стороны, из того, что $\bar{x}$ определяется из условия

$$\bar{x} \in \operatorname*{argmax}_x \sum_{j\in I} \varphi_j(x)$$

следует, что

$$\sum_{j\in I} \varphi_j'(\bar{x}) = 0.$$

Таким образом, $\varphi_i'(\bar{x}) = 0$ для всех потребителей $i \in I$, откуда $v_i'(\bar{x}) = \delta_i c'(\bar{x})$ или

$$\delta_i = \frac{v_i'(\bar{x})}{c'(\bar{x})} \; \forall i \in I.$$

Это означает, что ??

$$\delta_i = \frac{v_i'(\bar{x})}{\sum_{j\in I} v_j'(\bar{x})} \; \forall i \in I.$$

■

Рассмотрим теперь работу механизма Гровса—Кларка на частном примере.

Пример 10.6 (продолжение Примера 10.2)
Пусть, как и ранее,

$$v_i(x) = 2\alpha_i \ln x, \quad c(y) = y^2$$

и потребители финансируют общественное благо поровну, т. е. $\delta_i = 1/m$. Истинная оценка общественного блага i-м потребителем равна

$$v_i(x) - c(x)/m = 2\alpha_i \ln x - x^2/m.$$

Если все потребители сообщат свои истинные оценки, то выбранный уровень общественного блага окажется равным

$$\bar{x} = \operatorname{argmax} \sum_{i \in I} \varphi_i(x) = \operatorname{argmax} \sum_{i \in I} (2\alpha_i \ln x - x^2/m),$$

откуда

$$\bar{x} = \operatorname{argmax}\left(2\sum_{i \in I} \alpha_i \ln x - x^2\right) = \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_i} = \sqrt{m\bar{\alpha}} = \hat{y},$$

т. е. будет выбрано Парето-оптимальное количество.

В частном случае, при $m = 3$, $\alpha_i = i$, получим $\bar{x} = \sqrt{6}$.

Сумма чистых полезностей потребителей 2 и 3 равна

$$\varphi_2(x) + \varphi_3(x) = 10 \ln x - 2x^2/3.$$

Максимизируя эту функцию, потребители 2 и 3 выбрали бы $x_{(1)} = \sqrt{7{,}5}$ и получили бы $V_{(1)} = 5\ln(7{,}5) - 5$. Фактически же при $\bar{x} = \sqrt{6}$ они получили в сумме $5 \ln 6 - 4$. Налог Кларка на первого потребителя должен быть равен «ущербу», который он наносит потребителям 2 и 3 своим присутствием:

$$\tau_1 = 5\ln(7{,}5) - 5 - (5\ln 6 - 4) = 5\ln(5/4) - 1 \approx 0{,}12.$$

Аналогичным образом находим $x_{(2)} = \sqrt{6}$, $V_{(2)} = 4\ln(6) - 4$ и $\tau_2 = 0$ (второй потребитель не оказывает влияния на двух остальных). Далее, $x_{(3)} = \sqrt{4{,}5}$, $V_{(3)} = 3\ln(4{,}5) - 3$ и $\tau_3 = 3\ln(4{,}5) - 3 - (3\ln 6 - 4) = 3\ln(3/4) + 1 \approx 0{,}14$.

В общем случае сумма чистых полезностей всех потребителей, кроме i-го, равна

$$2\sum_{j \neq i} \alpha_j \ln x - \frac{m-1}{m} x^2 = 2(m\bar{\alpha} - 1)\ln x - \frac{m-1}{m} x^2.$$

Эта величина достигает максимума при

$$x_{(i)} = \sqrt{m \frac{m\bar{\alpha} - \alpha_i}{m-1}},$$

откуда

$$V_{(i)} = (m\bar{\alpha} - \alpha_i)\ln\left(m\frac{m\bar{\alpha} - \alpha_i}{m-1}\right) - (m\bar{\alpha} - \alpha_i),$$

Поскольку

$$\sum_{j\neq i}\varphi_j(\bar{x}) = \sum_{j\neq i}\alpha_j \ln\Bigl(\sum_{i\in I}\alpha_i\Bigr) - \frac{m-1}{m}\sum_{i\in I}\alpha_i = \\ = (m\bar{\alpha}-\alpha_i)\ln(m\bar{\alpha}) - (m-1)\bar{\alpha},$$

то налог Кларка для i-го потребителя равен

$$\tau_i = V_{(i)} - \sum_{j\neq i}\varphi_j(\bar{x}) = \\ = (m\bar{\alpha}-\alpha_i)(\ln(m-\alpha_i/\bar{\alpha}) - \ln(m-1)) + \alpha_i - \bar{\alpha}. \qquad \triangle$$

Можно ожидать, что в «достаточно большой» экономике влияние отдельного потребителя на результат работы механизма Гровса—Кларка незначительно, и соответственно, в такой экономике размер налогов Кларка мал. Проиллюстрируем это утверждение на примере, показав, что размер налогов Кларка убывает в «достаточно больших» экономиках, являющихся t-репликами исходной (т. е. в таких экономиках, которые являются в определенном смысле t-кратным повторением исходной экономики).

Чтобы исследовать влияние изменений только размера экономики на величину налога Кларка и элиминировать влияние изменений оценок общественного блага при росте числа потребителей, определим t-реплику исходной экономики таким образом, что в ней

- существует технология, позволяющая производить x единиц общественного блага, затратив $tc(x)$ единиц частного;
- имеется $t-1$ «двойник» для каждого потребителя исходной экономики и тем самым t потребителей каждого типа. Соответственно доля каждого из них в финансировании общественного блага равна δ_i/t.

При таком определении t-реплики чистая полезность x единиц общественного блага у каждого потребителя типа i представляет собой не зависящую от t величину

$$v_i(x) - \delta_i(x)c(x).$$

Пример 10.7 (продолжение Примера 10.6)

Покажем, что если реплицировать экономику, рассмотренную нами выше, то налоги Кларка в ней стремятся к нулю. В t-й реплике будет mt потребителей, которых удобно нумеровать двумя индексами — i и s??, где индекс i означает, что этот потребитель совпадает с i-м потребителем исходной экономики, т. е. $\alpha_{is} = \alpha_i$. Функция издержек в t-й реплике будет иметь вид

$$c^{[t]}(y) = tc(y) = ty^2.$$

Пусть опять потребители сообщают истинные оценки, равные

$$\varphi_{is}(x) = v_i(x) - c^{[t]}(x)/(mt) = 2\alpha_i \ln x - x^2/m.$$

Сумма этих оценок равна

$$\sum_{s=1}^{t} \sum_{i \in I} \varphi_{is}(x) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{i \in I} (2\alpha_i \ln x - x^2/m) = t\left(2 \sum_{i \in I} \alpha_i \ln x - x^2\right) = \\ = 2tm\bar{\alpha} \ln x - tx^2.$$

Отсюда

$$\bar{x}^{[t]} = \operatorname{argmax} \sum_{s=1}^{t} \sum_{i \in I} \varphi_{is}(x) = \sqrt{m\bar{\alpha}},$$

т. е. выбираемый уровень общественного блага остается таким же, как в исходной экономике.

Сумма чистых полезностей всех потребителей, кроме is-го, равна

$$\sum_{r=1}^{t} \sum_{j \in I} \varphi_{jr}(x) - \varphi_{is}(x) = 2tm\bar{\alpha} \ln x - tx^2 - (2\alpha_i \ln x - x^2/m) = \\ = 2(tm\bar{\alpha} - \alpha_i) \ln x - \frac{tm-1}{m} x^2.$$

Максимум этой суммы достигается при

$$x_{(is)} = \sqrt{m \frac{tm\bar{\alpha} - \alpha_i}{tm - 1}}.$$

Таким образом,

$$V_{(is)} = (tm\bar{\alpha} - \alpha_i) \ln\left(m \frac{tm\bar{\alpha} - \alpha_i}{tm - 1}\right) - (tm\bar{\alpha} - \alpha_i).$$

С другой стороны, при $x = \bar{x} = \sqrt{m\bar{\alpha}}$ сумма чистых полезностей всех потребителей, кроме is-го, равна

$$\sum_{r=1}^{t} \sum_{i \in I} \varphi_{jr}(\bar{x}) - \varphi_{is}(\bar{x}) = (tm\bar{\alpha} - \alpha_i) \ln(m\bar{\alpha}) - (tm - 1)\bar{\alpha},$$

откуда получаем налог Кларка:

$$\tau_{is} = (tm\bar{\alpha} - \alpha_i) \ln\left(\frac{tm\bar{\alpha} - \alpha_i}{\bar{\alpha}(tm - 1)}\right) + \alpha_i - \bar{\alpha}.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получим $\tau_i \to 0$. Для этого надо воспользоваться тем, что при фиксированном ε

$$\lim_{N\to\infty} N \ln\left(\frac{N}{N+\varepsilon}\right) = -\varepsilon. \qquad \triangle$$

10.8.3 Механизм Гровса—Кларка в случае дискретного общественного блага

Рассмотрим частный случай экономики с общественным благом, когда x принимает два значения — 0 и 1, а доли δ_i постоянны. Будем считать, что $v_i(0) = 0\ \forall i \in I$ и $c(0) = 0$. Величина $v_i = v_i(1) - v_i(0) = v_i(1)$ представляет собой готовность платить — максимальную цену, которую потребитель i готов заплатить за данное благо, $c = c(1)$ — издержки на производство общественного блага. Чистая полезность для i-го потребителя при $x = 1$ равна

$$v_i(1) - \delta_i c(1) = v_i - \delta_i c,$$

а при $x = 0$ равна нулю ($v_i(0) - \delta_i c(0) = 0$).

Обозначим через φ_i объявленные чистые полезности $\varphi_i(1)$ (считая, что действует ограничение $\varphi_i(0) = 0$).

Согласно механизму Гровса—Кларка рассматриваемое сообщество выберет $\bar{y} = 1$, если $\sum_{i\in I}\varphi_i(1) > \sum_{i\in I}\varphi_i(0)$, т. е. если $\sum_{i\in I}\varphi_i > 0$, и $\bar{y} = 0$, если $\sum_{i\in I}\varphi_i < 0$. Заметим, что в случае, когда $\sum_{i\in I}\varphi_i = 0$, потребителям безразлично, производить ли общественное благо. Для определенности будем считать, что в этом случае $\bar{y} = 1$.

Если $\bar{y} = 1$, а без i-го потребителя был бы выбран объем $y = 0$, то $V_{(i)} = 0$ и налог Кларка равен

$$\tau_i = \sum_{j\neq i}\varphi_j(0) - \sum_{j\neq i}\varphi_j(1) = V_{(i)} - \sum_{j\neq i}\varphi_j = -\sum_{j\neq i}\varphi_j.$$

Если же $\bar{y} = 0$, а без i-го потребителя был бы выбран объем $y = 1$, то

$$V_{(i)} = \sum_{j\neq i}\varphi_j(1) = \sum_{j\neq i}\varphi_j \geqslant 0$$

и налог Кларка равен

$$\tau_i = \sum_{j\neq i}\varphi_j(1) - \sum_{j\neq i}\varphi_j(0) = V_{(i)} - 0 = \sum_{j\neq i}\varphi_j.$$

Таблица 10.1. *Механизм Гровса—Кларка в случае дискретного общественного блага*

Случай	Выбор	Налог Кларка (τ_i)	Выигрыш i-го потребителя
$\sum_{j\in I}\varphi_j \geqslant 0$ и $\sum_{j\neq i}\varphi_j \geqslant 0$	$\bar{x}=1$, $x_{(i)}=1$	0	$v_i-\delta_i c$
$\sum_{j\in I}\varphi_j \geqslant 0$ и $\sum_{j\neq i}\varphi_j < 0$	$\bar{x}=1$, $x_{(i)}=0$	$-\sum_{j\neq i}\varphi_j$	$v_i-\delta_i c+\sum_{j\neq i}\varphi_j$
$\sum_{j\in I}\varphi_j < 0$ и $\sum_{j\neq i}\varphi_j \geqslant 0$	$\bar{x}=0$, $x_{(i)}=1$	$\sum_{j\neq i}\varphi_j$	$-\sum_{j\neq i}\varphi_j$
$\sum_{i\in I}\varphi_j < 0$ и $\sum_{j\neq i}\varphi_j < 0$	$\bar{x}=0$, $x_{(i)}=0$	0	0

Выигрыш i-го потребителя равен

$$v_i-\delta_i c-\tau_i,$$

если будет принято решение производить общественное благо, и 0 в противном случае.

В Таблице 10.1 представлены возможные варианты равновесия с точки зрения i-го потребителя. Через $x_{(i)}$ обозначен выбор всех потребителей, кроме i-го.

Приведем пример действия механизма в случае дискретного общественного блага.

Пример 10.8

Пусть три соседа по комнате принимают решение относительно покупки телевизора ценой 6000 руб. при равных долях финансирования $\delta_i = 1/3$. Исходные данные и результаты использования механизма Гровса—Кларка приведены в Таблице 10.2.

Найдем в той же ситуации условия на доли финансирования, при которых налоги Кларка равны нулю. Вместе они выбирают $\bar{x}=1$, значит, требуется, чтобы (для всех i) без i-го тоже был выбран $x=1$ ($x_{(i)}=1$). Поэтому должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned}\varphi_1+\varphi_2 &= 3000-(\delta_1+\delta_2)6000 \geqslant 0,\\ \varphi_1+\varphi_3 &= 6000-(\delta_1+\delta_3)6000 \geqslant 0,\\ \varphi_2+\varphi_3 &= 7000-(\delta_2+\delta_3)6000 \geqslant 0\end{aligned}$$

Таблица 10.2. *Данные к Примеру 10.8*

i	Взнос потребителя ($\delta_i c$)	Оценка полезности телевизора потребителем (v_i)	Полезность телевизора за вычетом взноса ($\varphi_i = v_i - \delta_i c$)	Налог Кларка (τ_i)
1	2000	1000	-1000	0
2	2000	2000	0	0
3	2000	5000	3000	1000
Сумма	6000	8000	2000	1000

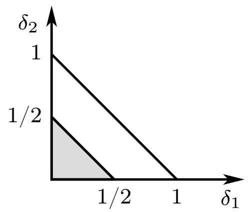


Рис. 10.7. *Доли финансирования, приводящие к нулевым налогам Кларка, Пример 10.8*

или

$$\delta_1 + \delta_2 \leqslant 1/2, \quad \delta_1 + \delta_3 \leqslant 1, \quad \delta_2 + \delta_3 \leqslant 7/6.$$

Последние два неравенства выполнены при любых долях.

На Рис. 10.7 показана в координатах (δ_1, δ_2) область долей финансирования, приводящих к нулевым налогам Кларка (третью долю можно однозначно вычислить через две другие: $\delta_3 = 1 - \delta_1 - \delta_2$). Допустимые доли задаются треугольником с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Доли, соответствующие нулевым налогам Кларка, составляют меньший треугольник (показан серым). $\triangle$

Для рассматриваемой экономики с дискретным общественным благом можно формально доказать, что при реплицировании экономики налоги Кларка становятся в конце концов равными нулю.

Теорема 10.8:

Рассмотрим механизм Гровса—Кларка в случае дискретного общественного блага (x принимает два значения — 0 и 1). Предположим, что потребители называют свои истинные чистые полезности и что $\sum_{i\in I} v_i \neq c$. Тогда каковы бы ни были доли δ_i, найдется число T, такое что для всех t-реплик при $t \geqslant T$ налоги Кларка равны нулю. ┘

Доказательство: Несложно понять, что если потребитель не платит налог Кларка в исходной экономике, то он (и его двойники) не будет платить и в любой t-реплике. Поэтому достаточно рассмотреть только потребителей, которые платят этот налог.

Пусть потребитель i платит налог Кларка в исходной экономике. Тогда выполняется одно из условий:

$$\sum_{j\in I} \varphi_j \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j\neq i} \varphi_j < 0$$

или

$$\sum_{j\in I} \varphi_j < 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j\neq i} \varphi_j \geqslant 0,$$

где $\varphi_j = v_j - \delta_j c$. Рассмотрим первый случай (анализ второго оставляем читателю). Поскольку, по предположению, $\sum_{j\in I} \varphi_j = \sum_{j\in I} v_j - c \neq 0$, это означает, что $\sum_{j\in I} \varphi_j > 0$ и величина φ_i отрицательная. Поэтому найдется T_i такое, что $T_i \sum_{j\in I} \varphi_j - \varphi_i > 0$. Это означает, что налог Кларка для любого потребителя типа i в реплике $t > T_i$ равен нулю. Справедливость утверждения следует тогда из того факта, что число потребителей в исходной экономике конечно. ■

Заметим, что если предположение $\sum_{i\in I} v_i \neq c$ не выполняется, это утверждение оказывается неверным. Действительно, в этом случае потребитель i, для которого выполняются соотношения $\sum_{j\in I} \varphi_j = 0$ и $\sum_{j\neq i} \varphi_j < 0$, (и любой его двойник) в любой реплике платит налог, равный величине $-\varphi_i$.

10.8.4 Механизм Гровса—Кларка в модели общего равновесия

Рассмотрим теперь механизм Гровса—Кларка в контексте модели общего равновесия.

Если общественное благо приобретается на рынке в условиях совершенной конкуренции, то в процедуре Гровса—Кларка надо $c(x)$ заменить на px. Будем предполагать, в отличие от рассмотренного выше подхода, что налоги Кларка собираются в денежном выражении и что в равновесии налог Кларка перераспределяется между потребителями посредством трансфертов. При этом трансферты фиксированы априорно и решения потребителей не влияют на их величину (точнее, потребители не учитывают это влияние). Таким образом, здесь мы отказываемся от той интерпретации, которой придерживались выше,— что налоги Кларка представляют собой чистые потери благосостояния. Новая интерпретация более соответствует духу классической модели общего равновесия, когда влияние отдельного экономического субъекта на экономику незначительно.

Если $G(\cdot)$ — функция коллективного выбора, соответствующая механизму Гровса—Кларка, $\tau_i(\cdot)$ — функции, определяющие налоги Кларка, то спрос на общественное благо определяется на основе задач потребителя, которые в данном случае имеют следующий вид:

$$v_i(x) - \delta_i(x)px - \tau_i(\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_m(\cdot)) \to \max_{x \geqslant 0, \varphi_i(\cdot)}$$
$$x = G(\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_m(\cdot)),$$
$$\varphi_i(\cdot) \in \Phi_i.$$

Данная задача фактически является частным случаем задачи потребителя (10.6). Отличие заключается только в том, что мы, пользуясь квазилинейностью функции полезности, подставили бюджетное ограничение в целевую функцию.

Предложение общественного блага определяется на основе задачи производителя

$$py - c(y) \to \max_{y}. \tag{10.8}$$

Равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса—Кларка — это равновесие с долевым финансированием и коллективным выбором на основе механизма $G\left((\varphi_i(\cdot))_i\right)$. Конкретизируем это определение для рассматриваемого случая.

Определение 10.9:

Равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса—Кларка есть набор $\langle \bar{p}, \bar{x}, \bar{y}, (\varphi_i(\cdot))_{i \in I} \rangle$, такой что

* $\bar{x} = \bar{y}$;
* объем потребления общественного блага $\bar{x}$ и оценка $\varphi_i(\cdot)$ являются решениями задачи потребителя (10.7);
* объем производства общественного блага $\bar{y}$ является решением задачи производителя (10.8) при цене $\bar{p}$. ◀

Для этого типа равновесия мы можем доказать аналог второй теоремы благосостояния.

Теорема 10.9:

Предположим, что в квазилинейной экономике с общественными благами функция издержек дифференцируема, предельные полезности убывают, а предельные издержки не убывают. Пусть $\hat{x} > 0$ — Парето-оптимальный объем общественного блага и $\varphi_i(x) = v_i(x) - \delta_i(x)px$.

Тогда $\langle c'(\hat{x}), \hat{x}, \hat{x}, (\varphi_i(\cdot))_{i \in I} \rangle$ — равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса—Кларка. ⌟

Доказательство: При сделанных предположениях о предельных полезностях и предельных издержках максимум благосостояния единственный — это $\hat{x}$. Когда все потребители сообщают свои истинные чистые полезности, то количество общественного блага в процедуре Гровса—Кларка соответствует максимуму благосостояния, поэтому значение функции $G(\cdot)$ будет равно $\hat{x}$. Отсюда следует, что $\hat{x}$ и $\varphi_i(\cdot)$ допустимы в задаче i-го потребителя, если все остальные потребители сообщают свои истинные чистые полезности.

Далее, $\hat{x}$ и $\varphi_i(\cdot)$ — это не только допустимое, но и оптимальное решение задачи i-го потребителя в случае, когда все остальные потребители тоже назвали свои истинные оценки. Доказательство практически совпадает с доказательством Теоремы 10.4.

Наконец, при цене $p = c'(\hat{x})$ объем $\hat{x}$ будет решением задачи производителя, поскольку этот объем удовлетворяет условию первого порядка максимума прибыли, а предельные издержки не убывают. ■

Мы не можем гарантировать справедливость первой теоремы благосостояния для любого такого равновесия. Однако можно выделить класс равновесий, для которых этот результат имеет место. Это равновесия, в которых оценка $\varphi_i(\cdot)$ любого потребителя i максимизирует его полезность при любых оценках, сообщаемых другими потребителями, то есть является аналогом равновесия в доминирующих стратегиях. Выполнение условий предыдущей теоремы гарантирует существование таких равновесий при существовании Парето-оптимального объема общественного блага.

Задачи

10.31 Отметьте верные из нижеприведенных утверждений и заполните пробел. Если предпочтения потребителей . . . . . . , тогда механизм Гровса—Кларка приводит. . .

(A) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

(B) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если начальные запасы всех потребителей строго положительны;
(C) к Парето-оптимальному состоянию экономики при отсутствии ключевых участников;
(D) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если налоги Кларка нулевые;
(E) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если налоги Кларка ненулевые;
(F) к тому, что участники объявляют истинные предпочтения.
(G) Все вышеприведенные утверждения неверны.

10.32 Выберите верный вариант. В процедуре Гровса—Кларка налоги Кларка...
(A) идут на финансирование общественного блага;
(B) распределяются пропорционально между участниками;
(C) передаются участникам, пострадавшим от выбора того, с кого взят налог;
(D) не передаются ни кому из участников.

10.33 Укажите, какие из свойств функций полезности (вогнутость, квазилинейность, непрерывность, дифференцируемость, локальная ненасыщаемость) и другие дополнительные характеристики механизма Гровса—Кларка являются достаточными и/или необходимыми для того, чтобы этот механизм...
(A) был применим: ......
(B) корректно выявлял предпочтения: ......
(C) обеспечивал эффективный уровень общественного блага: ......
(D) обеспечивал Парето-эффективное для голосующих состояние: ......

10.34 Три соседа по дому (A, B и C) решают, приобрести ли в складчину спутниковую антенну. В продаже имеются антенны двух типов — дорогие (ценой 3000 руб.) и дешевые (ценой 1200 руб.). Каждый из соседей определил лично для себя ценность антенны. Денежные выражения этих оценок приведены в Таблице 10.3.

Чтобы каждый из соседей правдиво сообщил свою оценку, используется механизм Гровса—Кларка, с равными долями финансирования. Какой из вариантов — не покупать антенну, купить дешевую, купить дорогую — будет выбран? Укажите численные значения результирующих налогов Кларка. Какой вариант будет выбран при голосовании по правилу простого большинства? Какой выбор является Парето-оптимальным?

Таблица 10.3. *Данные к задаче 10.34*

	Полезность дорогой антенны, руб.	Полезность дешевой антенны, руб.
A	500	150
B	900	450
C	2000	550

10.35 Галя, Дима и Егор с помощью механизма Гровса—Кларка хотят принять решение о покупке общего компьютера стоимостью \$1000. Галя готова отдать за компьютер не более \$500, Дима — \$600, Егор — \$300. Найдите диапазон долей финансирования, при которых может быть достигнут Парето-оптимум.

10.36 Три потребителя (A, B, C) с помощью механизма Гровса—Кларка с равными долями финансирования принимают решение, производить ли дискретное общественное благо (т. е. выбрать $y = 0$ или $y = 1$). Производство общественного блага. обходится в 12000 руб. A готов отдать за общественное благо не более 2000 руб., B — 7000 руб., C — 5000 руб.

(A) Что они выберут? Каковы будут налоги Кларка?

(B) Предположите, что в экономике имеется N человек типа A, N — типа B, и N — типа C, а общественное благо обходится в $12000N$ руб. (это называется N-репликой исходной экономики). При каком N будет достигнут оптимум Парето?

Задачи к главе

10.37 Для трех соседей коллективным благом является внешний вид их общего двора (y). Каждый может затрачивать труд h_i по уходу за двором, причем $y = h_1 + h_2 + h_3$. Каждый имеет неограниченный запас труда. Функции полезности имеют следующий вид:

$$u_i = -h_i^2 + iy.$$

(A) Найдите нерегулируемое равновесие в данной экономике.

(B) Найдите равновесие с равнодолевым финансированием и голосованием по правилу простого большинства.

(C) Найдите равновесие Линдаля.

10.38 В квазилинейной экономике с общественным благом (x) функции полезности трех потребителей имеют вид $u_i = -(i+1-x)^2 + z_i$, а функция издержек — вид $c(y) = 12y$.

(A) Найдите Парето-границу.

(B) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

(C) Найдите равновесие при финансировании равными долями и голосовании простым большинством.

(D) Найдите доли финансирования, при которых налоги Кларка в процедуре Гровса—Кларка равны нулю.

10.39 В квазилинейной экономике с общественным благом (x) функции полезности трех потребителей имеют вид $u_i = -(i+4-x)^2 + z_i$, а функция издержек — вид $c(y) = 12y$.

(A) Найдите Парето-границу.

(B) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

(C) Найдите условия на доли финансирования, которые гарантируют Парето-оптимальный исход голосования простым большинством.

10.40 Пусть три соседа по даче хотели ли бы подвести к имеющейся общей емкости водопровод с мощностью подачи X тонн в сутки стоимостью 4 рубля за тонну, выбирая размер мощности. Функции полезности имеют вид

$$u_i(X, z_i) = (i+2)\ln X + z_i.$$

(A) Охарактеризуйте Парето-оптимум.

(B) Для каждого соседа определите, какую из трех возможных процедур общественного выбора он бы предпочел:

- равновесие с добровольным финансированием;
- равновесие Линдаля;
- долевое финансирование с равными долями и голосованием простым большинством;
- механизм Гровса—Кларка с долями 1/4, 2/3, 5/12.

Аргументируйте свой ответ.

10.41 Рассмотрим долевое финансирование с голосованием по правилу простого большинства (при стандартных гипотезах) в экономике с квазилинейными функциями полезности с одним общественным и одним частным благом. Отметьте верные из нижеприведенных утверждений. Этот механизм обязательно приводит...

(A) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

(B) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если начальные запасы всех участников строго положительны;
(C) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если предпочитаемый медианным потребителем уровень общественного блага совпал с Парето-оптимальным;
(D) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если все участники удовлетворены выбранным уровнем общественного блага (не желают его изменения при данных ценах и долях);
(E) к такому же состоянию равновесия, как и механизм добровольного финансирования.
(F) Все вышеприведенные утверждения, вообще говоря, неверны.

10.42 Рассмотрим долевое финансирование с голосованием по правилу усреднения заявок (при стандартных гипотезах). Отметьте верные из нижеприведенных утверждений. Этот механизм обязательно приводит...
(A) к Парето-оптимальному состоянию экономики;
(B) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если все участники проголосовали за одинаковый положительный уровень общественного блага;
(C) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если доли финансирования пропорциональны предельным нормам замещения общественного блага на частное;
(D) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если участники предложили уровни общественного блага, пропорциональные предельным нормам замещения общественного блага на частное;
(E) к такому же состоянию равновесия, как и механизм Линдаля.
(F) Все вышеприведенные утверждения, вообще говоря, неверны.

10.43 ⟦Laffont⟧ Рассмотрим квазилинейную экономику с m потребителями и тремя благами: двумя частными и одним общественным (благо 1). Потребитель i описывается функцией полезности $u_i = \ln x_1 + 2\ln x_{i2} + z_i$, где x_{i2} — его потребление второго (частного) блага, а x_1 — потребление общественного блага. У потребителей имеются только запасы квазилинейного блага. Благо 2 производится из квазилинейного блага в соответствии с функцией издержек $c_2(y_2) = y_2^2$. Благо 1 (общественное) производится в соответствии с функцией издержек $c_1(y_1) = y_1$ $(y_1 \geqslant 0)$.

(A) Найдите границу Парето. Вычислите соответствующий уровень благосостояния.

(B) Для финансирования общественного блага решено облагать налогом t потребление блага 2. Вычислите величину налога, которая позволит профинансировать объем общественного блага, найденный в пункте (A).

(C) Объясните, почему этот налог приводит к неоптимальному по Парето состоянию. Вычислите чистые потери благосостояния.

(D) Получите тот же результат, используя концепцию излишка. Дайте графическое представление чистых потерь на графике спроса и предложения на рынке блага 2.

(E) Пусть мы находимся в ситуации финансирования общественного блага через налогообложение потребления второго блага. Найдите оптимальный налог и оптимальное производство общественного блага (оптимум второго ранга). Объясните, почему в оптимуме второго ранга производство общественного блага отличается от полученного в пункте (A). Вычислите потери благосостояния для этого случая. Найдите выигрыш благосостояния, полученный благодаря оптимизации второго ранга (по сравнению с уровнем пункта (C)).

10.44 «Выявление предпочтений в отношении общественных благ» ⟦Laffont⟧ Рассмотрим квазилинейную экономику с m потребителями, двумя частными благами и одним общественным благом. Функция полезности i-го потребителя имеет вид $u_i = \theta_i(x_1 + \sqrt{x_{i2}}) + z$, где x_1 — потребление первого (общественного) блага, x_{i2} — потребление i-м потребителем второго (частного) блага, θ_i — параметр вкуса, известный только потребителю i. У потребителей имеются только начальные запасы квазилинейного блага. Блага 1 и 2 производятся в соответствии с функциями издержек $c_1(y_1) = my_1^2/2$ и $c_2(y_2) = y_2$ ($y_2 \geqslant 0$). Бремя финансирования общественного блага делится поровну между всеми потребителями, а благо 2 производится конкурентно. При решении задачи абстрагируйтесь от проблемы банкротства.

(A) Определите оптимальный по Парето уровень потребления общественного блага.

(B) Предположим, что каждый потребитель заявляет свой параметр вкуса $\tilde{\theta}_i$ (некоторое действительное число, возможно, не совпадающее с θ_i), зная, что уровень производства общественного блага будет выбран в соответствии с правилом

$$y_1 = \frac{1}{m}\sum \tilde{\theta}_i.$$

Рассмотрите этот механизм как игру, вычислив для этого непрямые функции полезности потребителей $V_i(\theta_i, y_1)$. Покажите, что эта игра в общем случае не будет иметь равновесия по Нэшу.

(C) Предложите механизм со стимулирующими платежами, аналогичный механизму Гровса—Кларка, который позволил бы планирующему органу получить истинные оценки $\tilde{\theta}_i = \theta_i$ как доминирующие стратегии участников.

(D) Предположим, что планирующий орган получает оценки θ_i из наблюдений за потреблением блага 2 и выбирает потребление общественного блага по приведенной выше формуле. Зная механизм принятия решений планирующим органом, потребители приспосабливают к нему свое поведение и изменяют потребление блага 2. Вычислите потери благосостояния, возникающие как следствие такого стратегического поведения, и покажите, что они стремятся к нулю при неограниченном росте m.

(E) Вычислите налог на потребление блага 2, который нейтрализует поведение потребителей на рынке блага 2, возникающее в предположениях предыдущего пункта. Сравните с результатом пункта (C).

(F) В рамках предположений пунктов (C) и (D) найдите равновесие, в котором доли финансирования общественного блага зависят от предпочтений потребителей по следующему правилу:

$$\delta_i = \tilde{\theta}_i / \sum \tilde{\theta}_j.$$

Покажите, что асимптотические результаты (при m, стремящемся к бесконечности) изменятся.

Глава 11

Рынки с асимметричной информацией

В этой главе мы продолжим обсуждение последствий невозможности заключить некоторые виды сделок. Рассматриваемые ниже модели демонстрируют, как различная информированность продавцов и покупателей может приводить к неоптимальному объему торговли.

Рынки, где одна из сторон лучше информирована о свойствах продаваемого товара, чем другая, получили название рынков с асимметричной информацией. Можно привести достаточно много примеров таких рынков. Так, на рынке страхования страхователь лучше знает, каковы шансы страхового случая, чем страховщик. На кредитном рынке заемщик лучше знает свое финансовое положение, чем кредитор.

При анализе моделей с асимметричной информацией следует соответствующим образом модифицировать определения Парето-оптимальности и равновесия. В основе модификации концепции Парето-оптимальности должна лежать «объективная» концепция Парето-оптимальности, которая была введена в гл. 7 (см. Определение 7.3 на с. 462). Объективные вероятности, фигурирующие в этом определении должны вычисляться *исходя из полной информации, которая имеется в экономике в целом, у всех экономических субъектов в совокупности.* Например, если хотя бы один экономический субъект точно знает, что осуществилось некоторое конкретное состояние мира, то при расчете ожидаемой полезности вероятность этого состояния мира следует принять равной единице, а вероятности остальных — нулю. Такое определение исходит из того, что информация имеет черты коллективного блага (см. в гл. 10 Определение 10.1 на с. 629): коль скоро информация доступна одному экономическому субъекту, то (за исключением некоторых издержек, связанных с передачей информации) она, как правило, может быть в полном объеме передана другому экономическому субъекту.

При модификации концепции равновесия следует принимать во внимание тот факт, что цены в ситуации асимметричной информированнности являются не только сигналом относительной редкости благ, но и, вообще говоря, несут менее информированным экономическим субъектам информацию о состоянии мира, (частично) выявляя информацию, которой обладают более информированные субъекты.

11.1 Асимметричная информация в случае двусторонней монополии. Теорема Майерсона—Саттертуэйта

Проблему достижения соглашения в условиях двусторонней монополии одним из первых рассмотрел Фрэнсис Эджворт[1]. Анализ этой ситуации привел Эджворта к выводу, что процесс торга между сторонами должен в конце концов (если издержки сделок отсутствуют) завершиться на контрактной кривой, т. е. на подмножестве границы Парето, которое задается тем ограничением, что благосостояние сторон не должно ухудшиться по сравнению с исходным состоянием (точкой угрозы или статус-кво)[2].

Однако у Эджворта формальная модель торга в явном виде не присутствует, и его вывод — скорее убеждение, чем результат строгого анализа. Некоторые исследователи высказали серьезные сомнения в справедливости такого вывода. Так, например, Пол Самуэльсон[3] считал, что «для многих типов монополий конечное равновесие может быть достигнуто за пределами контрактной кривой». Основной аргумент Самуэльсона состоял в том, что при двусторонней монополии нельзя однозначно предсказать, каким образом выгоды торговли будут разделены между участвующими сторонами. В стремлении «тянуть одеяло на себя» участники могут не достичь взаимовыгодного соглашения, в результате чего торг завершится вне контрактной кривой.

Аргумент Самуэльсона можно считать косвенной критикой так называемой «теоремы Коуза», поскольку экстерналии зачастую являются двусторонними и следовательно, стороны, связанные экстерналиями, оказываются в ситуации двусторонней монополии. Поэто-

[1] F. Y. Edgeworth *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, London: C. Kegan Paul & Co., 1881.

[2] Распространение этого анализа на случай более чем двух участников позволило сформулировать утверждение о том, что процесс торга должен завершиться в *ядре* рассматриваемой экономики, т. е. в подмножестве эффективных состояний, для которых благосостояние любой *коалиции* (группы) участников не ниже того уровня, которого эта коалиция может достичь автономно.

[3] P. A. Samuelson *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947, p. 238.

му, возражая критикам «теоремы Коуза», Рональд Коуз изложил свой взгляд и на критику Самуэльсоном Эджворта[4]. По мнению Коуза, неоптимальный исход противоречит гипотезе о рациональности участников торга просто потому, что наносит им ущерб. Неопределенность того, как будут поделены выгоды, не связана с проблемой достижения соглашения и сама по себе не может автоматически приводить к неоптимальности.

Рассуждения (и соответственно доводы) Р. Коуза, однако, как и рассуждения Эджворта, не опираются на формальные модели торга. Более того, эти рассуждения остаются в рамках стандартных предположений экономического анализа (рациональное поведение и симметричная информированность участников торга, отсутствие трансакционных издержек) и не применимы к ситуациям с асимметричной информированностью.

В этом параграфе проводится анализ, который позволяет увидеть проблемы достижения оптимальных состояний в случае двусторонней монополии в условиях асимметричной информированности сторон и дать строгое обоснование тезису Пола Самуэльсона, а также оценить (и уточнить) аргументы в дискуссии вокруг «теоремы Коуза».

Ключевым аспектом анализа ситуации двусторонней монополии оказывается неодинаковая информированность сторон. Во-первых, нетрудно придумать пример разумного механизма торга, который при асимметричной информированности приводит к неоптимальному результату. Во-вторых, как показывает теорема Майерсона—Саттертуэйта, существуют ситуации двусторонней монополии с асимметричной информированностью, в которых ни один механизм торга не может привести к оптимальному результату.

11.1.1 Формулировка теоремы Майерсона—Саттертуэйта

Рассмотрим торговлю единицей неделимого блага. Продавец блага характеризуется издержками c (возможно, это альтернативные издержки), а покупатель — оценкой v (готовность платить). Продавец и покупатель могут либо вступить в сделку, либо остаться в исходном состоянии (т. е. благо остается у продавца).

[4] См. R. H. Coase. Notes on the Problem of Social Cost, in *The Firm, the Market and the Law*, University of Chicago Press, 1988: 157–186 (рус. пер. Р. Коуз. Заметки к „Проблеме социальных издержек“, в кн. *Фирма, рынок и право*, М.: Дело, 1993).

Предположим, что то, кому достается благо и сколько за него платится, определяется в результате некоторой игры. Такую игру принято называть торгом. В данном случае это двусторонний торг. Мы не будем конкретизировать структуру этой игры (процедуру торга), сделаем только предположения самого общего характера.

Будем предполагать, что это байесовская игра, в которой c — это тип продавца, а v — тип покупателя. Как обычно в байесовской игре, предполагается, что тип игрока известен только самому игроку (является приватной информацией), но не партнеру. Набор стратегий продавца и покупателя определяют для каждой пары параметров c и v, происходит ли торговля и по какой цене. Пусть $x(c, v) = 1$, если торговля происходит и $x(c, v) = 0$ в противном случае, и пусть $t(c, v)$ — плата покупателя продавцу[5]. Следует учитывать, что это не цена, а общая сумма. Плата, вообще говоря, может быть отрицательной, кроме того, механизм торга может предусматривать осуществление ненулевой платы даже в том случае, если товар не продается.

Как покупатель, так и продавец имеют квазилинейные функции выигрыша и нейтральны к риску. Выигрыш покупателя равен

$$u_v(c, v) = vx(c, v) - t(c, v),$$

а выигрыш продавца (прибыль) равен

$$u_c(c, v) = t(c, v) - cx(c, v).$$

Будем предполагать, что каждый из игроков любого типа может обеспечить себе в игре неотрицательный ожидаемый выигрыш. Например, это условие будет выполнено, если у каждого игрока есть до начала собственно торга ход, состоящий в выборе, участвовать или не участвовать в торговле. При этом каждая из сторон может обеспечить себе по крайней мере нулевой резервный выигрыш, поэтому в равновесии игрок не участвует в торге, если его ожидаемый выигрыш от торга отрицательный.

Обозначим через $U_v(v)$ ожидаемый выигрыш от сделки покупателя с оценкой v при условии, что эта оценка известна:

$$U_v(v) = \mathsf{E}[vx(\tilde{c}, v) - t(\tilde{c}, v)] = v\,\mathsf{E}\,x(\tilde{c}, v) - \mathsf{E}\,t(\tilde{c}, v).$$

[5] Можно рассмотреть и смешанные стратегии (торговля происходит с некоторой вероятностью), но при этом ситуация изменится незначительно. Плату $t(c, v)$ тогда следует интерпретировать как ожидаемую, рассчитанную по плате в случае, если торговля происходит, и плате в случае, если она не происходит. Такой прием можно использовать, поскольку предполагается нейтральность к риску.

Условие добровольности участия (или просто условие участия) для покупателя с оценкой v означает, что $U_v(v) \geqslant 0$. Аналогично, для продавца с издержками c ожидаемый выигрыш от сделки

$$U_c(c) = \mathsf{E}[t(c, \tilde{v}) - cx(c, \tilde{v})] = \mathsf{E}\, t(c, \tilde{v}) - c\, \mathsf{E}\, x(c, \tilde{v}).$$

Условие добровольности участия для продавца с издержками c означает, что $U_c(c) \geqslant 0$.

До начала торга (но после того, как игроки узнали, какого они типа) совокупная информация в рассматриваемой экономике эквивалентна полной информации. Действительно, продавец знает свой тип, а покупатель — свой, поэтому если суммировать информацию, доступную обеим сторонам, то окажутся известными оба типа — c и v. Следовательно, с точки зрения всей имеющейся в экономике информации Парето-оптимальный набор стратегий данной игры таков, что соответствующая ему функция $x(c, v)$ при любых c и v принимает значения, являющиеся решениями следующей задачи:

$$(v - c)x \to \max_{x=0,1}.$$

Если $v > c$, то максимум здесь достигается при $\hat{x} = 1$, а если $v < c$, то при $\hat{x} = 0$ (в случае $v = c$ решение неоднозначно). То есть если выгода от торговли $v - c$ положительна, то она осуществляется, а если отрицательна, то нет. Таким образом, торговля в этих условиях исчерпывает все возможные Парето-улучшения.

Существует общий результат[6] (теорема Майерсона—Саттертуэйта) о принципиальной невозможности достижения Парето-оптимума при *любой* процедуре торга, или, другими словами, в (байесовском) равновесии *любой* такой игры, если случайные величины $c = \tilde{c}$ и $v = \tilde{v}$ имеют непрерывное распределение, независимы и нельзя заранее сказать, имеет ли место выгода от торговли (существует положительная вероятность того, что $\tilde{v} > \tilde{c}$, и того, что $\tilde{v} < \tilde{c}$).

Более точно, предположим, что издержки продавца $\tilde{c}$ являются случайной величиной, имеющей распределение, характеризующееся функцией распределения $G(\cdot)$ с носителем $[c_1, c_2]$ ($c_1 < c_2$) и функцией плотности $g(\cdot)$, а оценка покупателя $\tilde{v}$ — случайной величиной с функцией распределения $F(\cdot)$, носителем $[v_1, v_2]$ ($v_1 < v_2$) и функцией плотности $f(\cdot)$. Носители распределений «перехлестываются», т. е. $v_1 \leqslant c_2$ и $c_1 \leqslant v_2$. Кроме того, предположим, что случайные величины $\tilde{c}$ и $\tilde{v}$ независимы (т. е. совместная функция распределения

[6] См. R. B. Myerson and M. A. Satterthwaite. Efficient Mechanisms for Bilateral Trading, *Journal of Economic Theory* **29** (1983): 265–281.

равна произведению $G(\cdot)$ и $F(\cdot)$, а плотность совместного распределения равна произведению плотностей).

Рассмотрим конкретное байесовское равновесие в анализируемой игре. Пусть $\bar{x}(c, v)$ — объем торговли в этом равновесии и пусть $\bar{t}(c, v)$ — соответствующая этому равновесию оплата.

В равновесии ожидаемый выигрыш покупателя с оценкой v от сделки равен

$$U_v(v) = v\,\mathsf{E}\,\bar{x}(\tilde{c}, v) - \mathsf{E}\,\bar{t}(\tilde{c}, v),$$

а выигрыш продавца с издержками c равен

$$U_c(c) = \mathsf{E}\,\bar{t}(c, \tilde{v}) - c\,\mathsf{E}\,\bar{x}(c, \tilde{v}).$$

Для анализа рассматриваемой ситуации удобно ввести вспомогательную игру, в которой игроки выбирают не те стратегии, которые им доступны в исходной игре торга, а числа v и c соответственно, т. е. объявляют (возможно, ложно), какого они типа. При этом, назвав v, покупатель с оценкой $\check{v}$ получает ожидаемый выигрыш

$$U_{\check{v}}(v) = \check{v}\,\mathsf{E}\,\bar{x}(\tilde{c}, v) - \mathsf{E}\,\bar{t}(\tilde{c}, v),$$

а продавец с издержками $\check{c}$, назвав c, получает ожидаемый выигрыш

$$U_{\check{c}}(c) = \mathsf{E}\,\bar{t}(c, \tilde{v}) - \check{c}\,\mathsf{E}\,\bar{x}(c, \tilde{v}).$$

Смысл этого вспомогательного приема становится ясным, если учесть следующие рассуждения. Предположим, что в новой игре игроку типа $\check{\theta}$ выгоднее назвать тип θ, а не свой истинный тип, притом что партнер называет свой тип правдиво. Но тогда в исходной игре ему было бы выгодно использовать не ту стратегию, которую он выбрал, а ту стратегию, которую выбрал игрок типа θ, а это противоречит равновесности стратегий, на основе которых мы построили функции выигрыша в новой игре. Следовательно, каждому типу каждого игрока выгодно называть свой истинный тип[7]. То есть функция $U_{\check{v}}(v)$ достигает максимума при $v = \check{v}$, а функция $U_{\check{c}}(c)$ — при $\check{c} = c$. Эту характеристику равновесия можно назвать условиями самовыявления.

Теорема Майерсона—Саттертуэйта фактически утверждает, что несовместны следующие три условия:

- Парето-оптимальность равновесия,
- добровольность участия для участников всех типов,

[7] Другими словами, во вспомогательной игре стратегии, состоящие в том, чтобы называть свой истинный тип, составляют (байесовское) равновесие. Эти рассуждения называют принципом выявления.

- условия самовыявления для участников всех типов.

Доказательство этой теоремы приводится в приложении к данной главе.

11.1.2 Примеры торга при асимметричной информации

При полной информированности (когда обе стороны знают v и c) торг эффективен. Пусть, например, продавец обладает переговорной силой, он называет цену p, а покупатель либо соглашается, либо отказывается от торговли (торг типа «не хочешь — не бери»). Тогда продавец назовет цену v, и покупатель согласится[8]. Вся выгода от торговли достанется при этом продавцу, и будет достигнут Парето-оптимум.

С другой стороны, неполная асимметричная информированность может привести к неэффективности торга. Рассмотрим следующую ситуацию: издержки известны обоим, а оценка покупателя v известна только ему самому. Продавцу известно, что $\tilde{v}$ имеет распределение с носителем $[v_1, v_2]$, функцией распределения $F(\cdot)$ и плотностью $f(\cdot)$. Предположим, что, с одной стороны, торговля выгодна с ненулевой вероятностью, а с другой стороны, наличие выгоды не гарантировано, т. е. выполнено

$$v_1 < c < v_2.$$

Предположим, кроме того, что переговорная сила полностью принадлежит продавцу и осуществляется торг типа «не хочешь — не бери». Покупатель может согласиться на предложенную продавцом плату p, только если $v \geqslant p$. Следовательно, вероятность того, что при данной цене торговля состоится, равна $1 - F(p)$. Продавец назначает p так, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш:

$$(p - c)(1 - F(p)) \to \max_p .$$

Оптимальная для продавца цена $\bar{p}$ должна удовлетворять следующему условию первого порядка:

$$1 - F(p) = (p - c)f(p).$$

[8]Можно считать, что продавец называет цену $v - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малой величиной.

Отметим, что условие первого порядка является достаточным, если отношение[9]

$$\frac{f(p)}{1 - F(p)}$$

возрастает в точке $\bar{p}$.

Из условия первого порядка следует, что $\bar{p} > c$. Такая ситуация не может быть эффективной, поскольку покупатель будет с ненулевой вероятностью отказываться от покупки, притом что с общественной точки зрения существуют выгоды от торговли. Это будет происходить, когда $c < v < \bar{p}$. Оптимальности по Парето можно было бы достичь, только если бы была назначена цена $p = c$, поскольку при этом покупатель всегда выбирал бы оптимальный с общественной точки зрения объем торговли, но такая цена невыгодна продавцу. Таким образом, ожидаемый объем торговли неоптимально мал.

Заметим, что у этой модели есть прямая аналогия — модель недискриминирующей монополии с функцией спроса $D(p) = 1 - F(p)$. И в той, и в другой модели имеет место неоптимальность.

Рассмотрим теперь противоположную ситуацию, когда плату предлагает покупатель, а продавец решает, продавать или нет. В этом случае продавец согласится продать благо, если $p \geqslant c$. Зная это, покупатель предложит $p = c$. Такой результат будет оптимален по Парето.

Из рассмотрения этих двух противоположных ситуаций следует вывод, что при асимметричной информированности эффективность торга может определяться распределением переговорной силы. *Желательно, чтобы право назначать плату принадлежало информированной стороне.*

Рассмотрим также ситуацию, аналогичную той, о которой речь идет в теореме Майерсона—Саттертуэйта, но отличающуюся тем, что типы продавца и покупателя однозначно связаны. Пусть, например, если издержки продавца равны c, то оценка покупателя равна αc, где $\alpha > 1$, т. е. оценки покупателя и продавца жестко положительно коррелированы: $\tilde{v} = \alpha \tilde{c}$ (это можно интерпретировать так, что оценки покупателя и продавца зависят от характеристики, которая интересует обоих,— качества товара). Здесь можно использовать стандартную процедуру торга: продавец предлагает цену, а покупатель при данной цене решает купить или нет. При этом продавец установит цену на уровне αc, покупатель купит благо (предполагаем, что он ведет себя благожелательно по отношению к продавцу),

[9] Оно известно в статистике под названием «интенсивность отказов» (англ. *hazard rate*).

и будет достигнут Парето-оптимум. На основе этого примера можно предположить, что условие независимости типов продавца и покупателя может быть существенным для справедливости теоремы Майерсона—Саттертуэйта. Заметим также, что этот пример близко связан с моделью Акерлова, рассматриваемой ниже, и соответствует случаю, когда качество товара известно как продавцу, так и покупателю (случаю полной информации).

С другой стороны, результат меняется и при симметричной неинформированности; в этих условиях существует контракт, который приводит к Парето-эффективности, подобно симметричной полной информированности. Анализ этого случая приводится в следующем параграфе.

11.1.3 Покров неведения и конституционный контракт

Рассмотрим следующую двухпериодную модель торга. В первом периоде v и c неизвестны ни той, ни другой стороне — они симметрично неинформированы и знают только распределение величин $\tilde{v}$ и $\tilde{c}$. Во втором периоде ситуация с информированностью каким-то образом меняется.

Пусть, например, покупатель узнаёт свою оценку v, и обеим сторонам становятся известны издержки c. Эффективный исход возможен, если в первом периоде заключен контракт следующего вида: во втором периоде право выбрать цену предоставляется покупателю, но продавец может отказаться от продажи по этой цене. За право устанавливать цену покупатель платит фиксированную цену, которая устанавливается в результате торга (на первом этапе). Вне зависимости от распределения переговорной силы в первом периоде эта процедура приводит к эффективному исходу. То есть симметричная неинформированность, подобно симметричной полной информированности, может приводить к оптимальности.

В ситуации, когда во втором периоде обе стороны асимметрично неинформированы — каждый знает только свой тип, существует контракт, подписываемый в первом периоде (когда стороны еще симметрично неинформированы), такой что будет достигнут оптимум. Этот контракт может, например, состоять в том, что стороны обязуются во втором периоде участвовать в следующей процедуре торга.

Продавец и покупатель одновременно объявляют свои оценки — c' и v' соответственно, которые, вообще говоря, могут не совпадать с их действительными оценками c и v. Если $c' \leqslant v'$, то товар передается покупателю. Другими словами, передаваемое количество блага определяется по формуле

$$x(c', v') = \begin{cases} 1, & \text{если } c' \leqslant v', \\ 0, & \text{если } c' > v'. \end{cases}$$

Кроме того, вне зависимости от того, передается товар или нет, покупатель выплачивает продавцу сумму, вычисляемую по формуле

$$t(c', v') = \mathsf{E}[\tilde{c}x(\tilde{c}, v') + \tilde{v}x(c', \tilde{v})] + A,$$

где A — некоторая константа.

Механизм построен таким образом, что стратегия, состоящая в том, чтобы сообщать свою истинную оценку, является (слабо) доминирующей. Рассмотрим, например, ожидаемый выигрыш продавца с издержками c, назвавшего c':

$$U_c(c') = \mathsf{E}\, t(c', \tilde{v}') - c\, \mathsf{E}\, x(c', \tilde{v}').$$

Здесь $\tilde{v}'$ — случайная величина, являющаяся результатом стратегии покупателя. А именно, если стратегия покупателя состоит в том, чтобы называть $v'(v)$, когда его оценка равна v, то $\tilde{v}' = v'(\tilde{v})$. Покажем, что вне зависимости от $\tilde{v}'$ ожидаемая полезность продавца с издержками c будет такой, что $U_c(c') \leqslant U_c(c)$ для всех c'. Подставляя в $U_c(c')$ плату $t(c', v')$, получим

$$U_c(c') = \mathsf{E}[\tilde{c}x(\tilde{c}, \tilde{v}') + \tilde{v}'x(c', \tilde{v}')] + A - c\, \mathsf{E}\, x(c', \tilde{v}') =$$

$$= \mathsf{E}[\tilde{c}x(\tilde{c}, \tilde{v}')] + \mathsf{E}[(\tilde{v}' - c)x(c', \tilde{v}')] + A.$$

Отсюда

$$U_c(c) - U_c(c') = \mathsf{E}[(\tilde{v}' - c)(x(c, \tilde{v}') - x(c', \tilde{v}'))].$$

Рассмотрев все возможные случаи взаимного положения величин c, c' и v, убеждаемся, что выражение

$$(v - c)(x(c, v) - x(c', v)),$$

от которого здесь берется ожидание, всегда неотрицательно. Читатель может проделать это несложное упражнение самостоятельно.

Следовательно, $U_c(c') \leqslant U_c(c)$ для всех c', т. е. называть свои истинные издержки — доминирующая стратегия продавца.

Аналогично для ожидаемого выигрыша покупателя

$$U_v(v') = v\, \mathsf{E}\, x(\tilde{c}', v') - \mathsf{E}\, t(\tilde{c}', v'),$$

выполнено $U_v(v') \leqslant U_v(v)$ для всех v', т. е. называть свою истинную оценку — доминирующая стратегия покупателя.

При таком механизме продавец и покупатель будут правдиво сообщать свои типы, в результате чего будет достигнут оптимум. Это следует из того, что в описанном механизме объем торговли $x(c', v')$ оптимален по Парето, когда c' и v' — истинные типы участников.

Если ожидаемые выгоды от торговли положительны, то можно подобрать константу A так, чтобы обеим сторонам было выгодно подписать контракт. Более того, для любого неэффективного механизма торга можно подобрать константу A так, чтобы предложенный эффективный механизм приводил к более высоким ожидаемым выигрышам обоих участников.

Данные рассуждения доказывают, что в теореме Майерсона—Саттертуэйта важную роль играет условие участия для *каждого* из типов продавца и покупателя. Если его заменить на условие участия *в среднем*, то теорема перестает быть верной и асимметричность информации не приводит к неоптимальности.

Проведенный анализ двухэтапной процедуры торга демонстрирует важную роль так называемых *конституционных контрактов*. Данная игра представляет собой пример двухэтапных «игр», являющихся инструментом анализа в политической философии[10] и теории общественного выбора[11].

На первом, конституционном этапе игры, в так называемом «естественном состоянии» рациональные и свободные индивидуумы на основе единогласия и под покровом неведения (их будущие роли индивидуумам неизвестны) выбирают правила игры — «принципы устройства общества». Эти правила носят обязывающий характер, и в дальнейшем, на втором этапе, индивидуумы живут именно по этим правилам.

Задачи

11.1 Рассмотрите ситуацию двусторонней монополии с неделимым благом. Пусть издержки продавца могут принимать значение c_1 с вероятностью μ и значение c_2 с вероятностью $1 - \mu$, а оценка покупа-

---

[10] Например, эта конструкция лежит в основе анализа Джоном Роулзом концепции справедливости. См. J. Rawls. *A Theory of Justice*, Harvard University Press, 1971 (рус. пер.: Дж. Ролз. *Теория справедливости*, Новосибирск: НГУ, 1995).

[11] См. J. M. Buchanan and G. Tullock. *The Calculus of Consent: Logical Foundations of Constitutional Democracy*, University of Michigan Press, 1962; J. M. Buchanan and G. Brennan. *The Reason of Rules: Constitutional Political Economy*, Cambridge University Press, 1985.

Таблица 11.1. *Данные к задаче 11.2*

	Покупатель	
Продавец	L	H
L	$x = 1,\ t = 0$	$x = 1,\ t = 19$
H	$x = 0,\ t = 7$	$x = 1,\ t = 10$

теля может принимать значение v_1 с вероятностью ν и значение v_2 с вероятностью $1 - \nu$, где $c_1 < v_1 < c_2 < v_2$, $0 < \mu < 1$, $0 < \nu < 1$.

(A) Какое условие теоремы Майерсона—Саттертуэйта (в том варианте, который изложен в тексте главы) здесь не выполняется?

(B) Запишите для этой ситуации условия добровольности участия и условия самовыявления.

11.2 Пусть в ситуации предыдущей задачи $c_1 = 0$, $c_2 = 16$, $v_1 = 8$ и $v_2 = 24$. Оба типа продавца и оба типа покупателя встречаются с равной вероятностью ($\mu = 0{,}5$ и $\nu = 0{,}5$).

Рассмотрите следующий механизм торга (так называемый *прямой* механизм). Каждый участник торга — как продавец, так и покупатель — объявляет свой тип: является ли его оценка низкой (L) или высокой (H). Правила торга заданы Таблицей 11.1.

(A) Запишите соответствующую байесовскую игру в виде таблицы.

(B) Продемонстрируйте, что если игроки правдиво объявляют собственный тип, то достигается оптимум Парето.

(C) Продемонстрируйте, что объявлять правдиво собственный тип является равновесием Нэша—Байеса в этой игре (т. е. что каждый тип каждого игрока получает более высокую ожидаемую полезность, когда он правдиво сообщает свой тип, если ни один из типов другого игрока не меняет свою стратегию). При этом можно воспользоваться симметрией игры.

(D) Продемонстрируйте, что оба типа каждого из игроков добровольно согласятся участвовать в этой игре.

(E) Объясните, почему эта игра представляет собой контрпример к теореме Майерсона—Саттертуэйта.

11.3 В ситуации задачи 11.1 предложите «конституционный контракт», который стороны согласны были бы подписать «под покровом неведения», если (A) переговорная сила принадлежит продавцу, (B) переговорная сила принадлежит покупателю.

11.4 Рассмотрите ситуацию, о которой идет речь в теореме Майерсона—Саттертуэйта. Пусть торг между покупателем и продавцом происходит по следующей схеме. Продавец и покупатель одновременно объявляют свои оценки — c' и v' соответственно, которые, вообще говоря, могут не совпадать с их действительными оценками c и v. Если $c' \leqslant v'$, то товар передается покупателю, покупатель платит сумму $\max\{c', v_1\}$, а продавец получает сумму $\min\{c_2, v'\}$. Если $c' > v'$, то товар остается у продавца и никаких платежей не производится.

(A) Покажите, что условие добровольности участия в сделке выполнено. (*Указание:* Воспользуйтесь доказательством теоремы Майерсона—Саттертуэйта.)

(B) Докажите, что сообщать свою истинную оценку — доминирующая стратегия продавца и покупателя.

(C) Пользуясь результатом пункта (B), объясните, почему в результате торга будет достигнут оптимум.

(D) Какому условию теоремы Майерсона—Саттертуэйта не удовлетворяет описанный механизм?

11.2 Модели рынка с асимметричной информацией

Есть рынки (например, рынок подержанных автомобилей) на которых качество конкретного экземпляра товара покупатель может определить с трудом, зато оно неплохо известно продавцу. Рыночная цена едина и не зависит от качества. Чем больше доля некачественных товаров, тем ниже цена, а чем ниже цена, тем менее выгодно продавать качественные товары. Такой процесс может закончиться полным вытеснением качественных товаров с рынка. Разрушение рынка при несимметричной информированности называют неблагоприятным отбором.

Самая известная модель такого рода — модель Акерлова[12], модель так называемого рынка «лимонов». Эта модель существенно отличается от классических моделей рынка. В качестве промежуточного звена рассмотрим модификацию классических моделей, в которой имеет место неоптимальность, связанная с асимметричной информацией.

[12] G. A. Akerlof. The Market for ‘Lemons’: Quality Uncertainty and the Market Mechanism, *Quarterly Journal of Economics* **84** (1970): 488–500.

11.2.1 Модификация классических моделей равновесия: равновесия с неотличимыми благами

Рассмотрим квазилинейную экономику с тремя благами, оним репрезентативным потребителем с функцией полезности $v(x_1, x_2) + z$ и одним репрезентативным производителем с функцией издержек $c(y_1, y_2)$. Пусть в этой экономике потребитель в момент покупки не может отличить благо 1 от блага 2, в то время как производитель может это делать. В связи с неотличимостью двух благ для потребителя рыночная цена на них должна быть одинаковой. Потребитель максимизирует свою полезность исходя из рыночных долей двух благ — α_1 и α_2 ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$), которые соответствуют объемам продаж этих благ.

Задача потребителя при данной цене p и долях α_1 и α_2 имеет вид

$$v(\alpha_1 x, \alpha_2 x) - px \to \max_{x \geqslant 0},$$

где $x = x_1 + x_2$ — это суммарный объем потребления двух неотличимых благ, причем $x_1 = \alpha_1 x$ и $x_2 = \alpha_2 x$. При дифференцируемости функции $v(\cdot)$ дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя имеет вид

$$\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = p.$$

Задача производителя обычная, только цены на оба блага одинаковы ($p_1 = p_2 = p$):

$$p(y_1 + y_2) - c(y_1, y_2) \to \max_{y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0}.$$

При дифференцируемости функции издержек дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи производителя имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial y_1} = p \quad \text{и} \quad \frac{\partial c}{\partial y_2} = p.$$

Равновесие в данной модели — это такие цена $\bar{p}$, доли $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, объемы потребления $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и объемы производства $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- объемы потребления $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ являются решением задачи потребителя при цене $\bar{p}$ и долях $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$;
- объемы производства $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ являются решением задачи производителя при цене $\bar{p}$;
- рынки сбалансированы, т. е. $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$ и $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$;
- доли $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ являются долями продаж соответствующих благ на рынке, т. е. $\bar{x}_1 = \bar{\alpha}_1(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ и $\bar{x}_2 = \bar{\alpha}_2(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$.

Как обычно, дифференциальная характеристика внутреннего Парето-оптимума имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial c}{\partial y_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial c}{\partial y_2}.$$

Таким образом, для Парето-оптимальности внутреннего равновесия требуется выполнение условия

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial c}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial c}{\partial y_2}.$$

Ясно, что в общем случае нельзя ожидать выполнения этого условия.

В частности, предположим, что $v(x_1, x_2) = V(x_1 + \beta x_2)$, где функция $V(\cdot)$ имеет положительную производную. Здесь единица блага 2 заменяет для этого потребителя β единиц блага 1. При этом

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = V' \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \beta V'.$$

Если $\beta > 1$, то равенство $\partial v/\partial x_1 = \partial v/\partial x_2$ не может быть выполнено.

Покажем, что в равновесии недопроизводится более ценимое второе благо. Для этого укажем Парето-улучшение в дифференциалах для состояния равновесия. Пусть производство и потребление блага 2 меняется на величину $dx_2 = dy_2 > 0$ и пусть суммарное производство двух благ не меняется, т. е. $dx_1 = dy_1 = -dx_2$. При этом в первом приближении издержки (затраты третьего блага в производстве) остаются на прежнем уровне:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial c}{\partial y_2} dy_2 = p dy_1 + p dy_2 = 0.$$

Поэтому потребление третьего блага не изменяется ($dz = 0$).

Изменение полезности тогда составляет величину

$$du = \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2 + dz = V'(-dx_2) + \beta V' dx_2 = (\beta - 1)V' dx_2 > 0.$$

11.2.2 Модель Акерлова: классическая постановка

Следующий пример демонстрирует модель Акерлова для простого случая двух градаций качества. Назовем товар высокого качества «сливой», а плохого — «лимоном»[13]. Каждый продавец знает,

[13] В английском языке одно из значений слова *lemon* — «некачественный товар», а слова *plum* — «лакомый кусочек».

лимон или сливу он продает. В денежном выражении полезность сохранения лимона у себя равна c_1, а сливы — c_2 ($c_2 > c_1$). Полезность лимона для типичного покупателя равна $v_1 \geqslant c_1$, а сливы — $v_2 \geqslant c_2$, причем покупатель узнает только в процессе использования, лимон или сливу он купил. Он знает только вероятность μ попадания лимона среди всех продаж??. Соответственно вероятность попадания сливы?? есть $1 - \mu$. Предположим, что покупатель нейтрален к риску. Цена p, которую он заплатил бы за покупку, не превышает $p' = \mu v_1 + (1 - \mu)v_2$. Если окажется, что эта цена не ниже резервной цены сливы c_2, то можно ожидать, что в равновесии происходит торговля и лимонами, и сливами. Если же $p' < c_2$, то никто из продавцов не вынесет на продажу сливы, хотя их потенциальная полезность для покупателя выше. Это приводит к неоптимальности. Действительная вероятность $\mu' \neq \mu$ появления лимона среди продаваемых товаров?? станет выше. Когда покупатели узна́ют об этом по опыту, резервная цена покупателей еще более понизится. Такой рынок разрушается. Заметьте, что если продавцы тоже не знают, лимон или сливу они продают, и являются, как и покупатели, нейтральными к риску, то торговля сохранится и равновесие будет Парето-оптимальным, так что добавление информации (несимметричное) ухудшает положение!

На рынке, описываемом некоторым вариантом модели Акерлова, ситуация меняется, если возможно посредничество. Пусть существуют посредники — эксперты по «сливам» и «лимонам», которые могут отличить их друг от друга. Посредники либо торгуют сами, либо дают платные советы. Если посредники дорожат репутацией, то оценивают товар достоверно. Перед потребителем встает выбор: покупать «кота в мешке» самому или заплатить за совет специалиста (либо покупать товары у посредников). Еще одним возможным решением проблемы асимметричности информации является гарантия. В момент совершения сделки покупатель не может определить качество товара, но это качество выявляется в процессе использования. Продавцу хорошего товара выгодно взять на себя обязательство замены или ремонта некачественного товара. Наличие гарантии служит сигналом для покупателя, что этот товар хороший. Сигнализированием называют действия владельцев лучшего товара, направленные на информирование покупателей о его качестве. Сигнал должен быть таким, чтобы владельцам «лимонов» было бы трудно произвести его.

В модели Акерлова перед владельцем товара стоит только выбор продавать или не продавать товар. Ситуация усложняется, если продавец сам является производителем товара и может повлиять на его качество. Здесь возникает другой эффект — моральный риск. Его также можно показать на примере гарантий. Фирме, дающей гарантию, трудно отличить, вызвано ли повреждение товара его плохим качеством при покупке или действиями покупателя. Поэтому покупатель, имея гарантию, может обращаться с товаром менее аккуратно.

Следуя оригинальному подходу Акерлова, продемонстрируем влияние асимметричной информированности субъектов рыночных отношений на структуру рыночных сделок на примере рынка некоторого неделимого товара (например, подержанных автомобилей), который может приобретаться в количестве, не превышающем единицу.

Предположим, что на рынке существуют n градаций качества этого блага, причем доля градации s равна μ_s ($\mu_s > 0$). Они различаются по внутренним характеристика, но не по внешнему виду. Продавцы не могут выбирать качество того товара, который у них имеется. Оценки покупателей (продавцов) товара типа s равны v_s (соответственно c_s). Предполагается, что все участники торговли оценивают товары одного и того же качества одинаково[14]. То есть все продавцы товара качества s готовы отдать его не менее чем за c_s, а все покупатели готовы заплатить за товар качества s не более, чем v_s.

Покупатели и продавцы имеют квазилинейные предпочтения и нейтральны по отношению к риску, так что если благо типа s продается по цене p, то покупатель получает выигрыш (потребительский излишек)

$$v_s - p,$$

а продавец — выигрыш

$$p - c_s.$$

В Парето-оптимальном состоянии экономики благо должно принадлежать тому, кто его больше ценит. Действительно, пусть x_s — индикаторная переменная, принимающая значение 1, если товар качества s передается от продавца покупателю, и 0 в противном случае[15]. В этих обозначениях можно записать ожидаемое благосостояние в расчете на единицу товара как

$$W = \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s x_s - \sum_{s=1}^{n} \mu_s c_s x_s = \sum_{s=1}^{n} \mu_s (v_s - c_s) x_s. \qquad (\circledast)$$

Ясно, что максимум по x_s достигается, если $x_s = 0$ при $v_s < c_s$ и $x_s = 1$ при $v_s > c_s$.

[14] Несложно распространить модель на случай, когда оценки различаются.

[15] Можно рассматривать и случай, когда $x_s \in [0, 1]$. Тогда x_s интерпретируется как вероятность передачи товара покупателю.

Если бы как продавцы, так и покупатели были полностью информированы (точнее, информация о качестве товара и об оценках продавцов и покупателей была бы *общеизвестна*), то в результате обменов (в равновесии) достигался бы Парето-оптимум. Цены p_s товара разного качества были бы, вообще говоря, различны и зависели бы от переговорной силы сторон. Товар качества s мог бы быть продан ($x_s = 1$), только если бы $c_s \leqslant v_s$. При этом цена должна удовлетворять соотношению

$$c_s \leqslant p_s \leqslant v_s.$$

(Если же $c_s > v_s$, то товары качества s не будут продаваться.) В дальнейшем будем предполагать, что продавцов меньше, чем покупателей и что им принадлежит переговорная сила. Следовательно, в равновесии $p_s = v_s$. По сути дела, рынок распадается на n отдельных рынков, на каждом из которых установится своя цена (если только $c_s \leqslant v_s$ и товар продается; в противном случае, конечно, цена не существует).

Если как покупатели, так и продавцы не знают качества, а только распределение, т. е. они одинаково (не)информированы, то в равновесии установится единая цена и Парето-оптимум достигается и в этом случае: если ожидаемая оценка покупателя выше ожидаемой оценки продавца,

$$\mathsf{E}\, v(\tilde{s}) > \mathsf{E}\, c(\tilde{s}),$$

т. е.

$$\sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s > \sum_{s=1}^{n} \mu_s c_s,$$

то сделка происходит ($x = 1$), а если ниже, то нет ($x = 0$). Здесь опять и товар должен достаться тому, кто его больше ценит. Это Парето-оптимум, поскольку такой выбор x обеспечивает максимум ожидаемого благосостояния в расчете на единицу блага, которое в данном случае равно

$$W = x \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s - x \sum_{s=1}^{n} \mu_s c_s x_s = x \sum_{s=1}^{n} \mu_s (v_s - c_s) = x\, \mathsf{E}[v(\tilde{s}) - c(\tilde{s})].$$

Если переговорная сила принадлежит продавцам (и сделка происходит), то в равновесии цена равна

$$p = \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s.$$

Заметим, что если $c_s < v_s$ при всех s, то как в случае полной информированности, так и в случае полной неинформированности в Парето-оптимуме (и равновесии) товары всех n градаций качества должны перейти от продавцов к покупателям. Однако если есть такой уровень качества, что $c_s > v_s$, то Парето-оптимумы в этих двух ситуациях будут различаться, что объясняется различием способов подсчета ожидаемого благосостояния. В первом случае оно рассчитывается в предположении, что блага разного качества отличимы, во втором — что неотличимы.

При асимметричной информированности, когда покупатели не различают качества выставленных на продажу благ, то (как и в случае полной неинформированности) устанавливается единая рыночная цена. Наблюдая эту цену, рациональные покупатели, считая продавцов тоже рациональными, имеют основания ожидать, что выставляются на продажу только товары, качество которых s таково, что оценки продавцов c_s не ниже этой цены. Будем предполагать, что если продавцу все равно (т. е. $p = c_s$), то он выставляет на продажу это благо. Каждый покупатель оценивает набор предложенных благ в соответствии с ожидаемой полезностью, т. е.

$$\mathsf{E}(v(\tilde{s}) \mid c(\tilde{s}) \leqslant p) = \sum_{s\colon\, c_s \leqslant p} \mu_s v_s \Bigg/ \sum_{s\colon\, c_s \leqslant p} \mu_s.$$

(Это условное распределение v_s при условии, что $c_s \leqslant p$.) Если c_s расположены в порядке возрастания (чем выше качество, тем выше оценка продавца), то продаются первые $m(p)$ типов (для них $c_s \leqslant p$). Тогда ожидаемую полезность можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^{m(p)} \mu_s v_s \Bigg/ \sum_{s=1}^{m(p)} \mu_s.$$

Введем обозначение

$$V_m = \sum_{s=1}^{m} \mu_s v_s \Bigg/ \sum_{s=1}^{m} \mu_s.$$

Условие того, что благо приобретается, состоит в том, что величина V_m не превышает цену. Если переговорная сила у продавца, то равновесная цена задается уравнением

$$p = V_{m(p)}.$$

При этом равновесное количество типов блага, которые продаются, $m = m(p)$, должно удовлетворять соотношению

$$c_m \leqslant V_m < c_{m+1}.$$

Если $m(p) = n$, то второе неравенство здесь не требуется. Это будет равновесие, в котором продаются товары всех типов. Условие существования подобного равновесия, таким образом, имеет вид

$$c_n \leqslant V_n = \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s.$$

Предположим, что $c_s < v_s$ для всех s. Тогда равновесие в модели Акерлова существует. Докажем это на основе индукции. При $m = 1$, $V_1 = v_1$, поэтому если $V_1 < c_2$, то существует равновесие, в котором продаются только товары первого типа, поскольку $c_2 > V_1 = v_1 > c_1$. В противном случае $V_1 \geqslant c_2$.

Пусть теперь выполнено соотношение $V_{m-1} \geqslant c_m$ при $m < n$. Тогда либо

$$c_m < V_m < c_{m+1},$$

либо

$$V_m \geqslant c_{m+1}.$$

Для доказательства этого достаточно показать, что $c_m < V_m$. Действительно, $c_m \leqslant V_{m-1}$ и $c_m < v_m$, поэтому

$$V_m = \left(\sum_{s=1}^{m-1} \mu_s v_s + \mu_m v_m\right) \Bigg/ \sum_{s=1}^{m} \mu_s =$$
$$= \left(\sum_{s=1}^{m-1} \mu_s \cdot V_{m-1} + \mu_m v_m\right) \Bigg/ \sum_{s=1}^{m} \mu_s > c_m.$$

Первая ситуация ($c_m < V_m < c_{m+1}$) соответствует равновесию, в котором продается m типов благ. Если же равновесия нет, то $c_{m+1} \leqslant V_m$. Рассуждая по индукции, видим, что если равновесие не существует при $m \leqslant n - 1$, то выполняется соотношение $c_n \leqslant V_{n-1}$, что соответствует равновесию при $m = n$ (продаются блага всех n типов).

Нетрудно придумать ситуации, в которых равновесие не единственно. Поэтому в общем случае (без предположения о «хорошем» поведении последовательностей c_s и v_s) равновесия следует искать полным перебором.

И наконец, рассмотрим условия оптимальности равновесия. Как и в случае полной симметричной информированности, благосостояние задается формулой (⊛). Дело в том, что ожидаемое благосостояние следует рассчитывать исходя из всей информации, которая имеется в экономике. В модели Акерлова это полная информация о качестве каждого блага, поскольку качество известно продавцам. Поэтому Парето-оптимум в модели Акерлова такой же, как и в случае полной симметричной информированности, т. е. он достигается в том случае, если товар качества s продается при $c_s < v_s$ и не продается при $c_s > v_s$.

При сделанном ранее предположении, что $c_s < v_s$ для всех s, среди всех возможных равновесий оптимальным является только такое, в котором продаются блага всех n типов, т. е. Парето-оптимальное равновесие может существовать, только если

$$c_n \leqslant V_n = \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s.$$

Кроме того, в случае, когда равновесие не единственно, все возможные равновесия упорядочены по возрастанию благосостояния. Равновесия с более высоким $m(p)$ доминируют по Парето равновесия с низким $m(p)$.

Пример 11.1

Проиллюстрируем этот анализ в частном случае рынка со 100 типами благ (подержанных автомобилей), на котором $c_s = 300 + s$ и $v_s = 300 + b + s$, где $b > 0$ — разница в оценках продавцов и покупателей, не зависящая от типа автомобиля.

Если покупателей больше, чем продавцов, то равновесие оптимально, если все автомобили проданы ($m = 100$), поскольку выгоды от торговли положительны при каждой возможной сделке: $v_s - c_s = b > 0$.

Возможны разные варианты информированности и соответствующие равновесия.

Полная информированность продавцов и покупателей. По сути, рынок распадается на 100 отдельных рынков, на каждом из которых установится своя цена $p_s = v_s$. Все 100 типов автомобилей будут продаваться, т. е. равновесное состояние Парето-оптимально.

При неполной информированности покупателей и/или продавцов равновесие зависит от относительной частоты разных типов автомобилей. Мы предположим, что автомобили всех типов имеются в одинаковом количестве.

Полная неинформированность продавцов и покупателей. Ожидаемая оценка автомобиля продавцом будет равна

$$\mathsf{E}\, c(\tilde{s}) = \frac{1}{100}\sum_{s=1}^{100} c_s = \frac{301 + \cdots + 400}{100} = \frac{301 + 400}{2} = 350{,}5,$$

покупателем —

$$\mathsf{E}\, v(\tilde{s}) = \frac{1}{100}\sum_{s=1}^{100} v_s = \\ = \frac{301 + b + \cdots + 400 + b}{100} = \frac{301 + b + 400 + b}{2} = 350{,}5 + b.$$

Цена установится на уровне ожидаемой оценки покупателя и будет равна $350{,}5 + b$. Как и в предыдущем случае полной информированности, все 100 типов автомобилей будут продаваться, т. е. равновесие Парето-оптимально.

Продавцы знают качество автомобилей, а покупатели — нет; покупатели близоруки. Если покупатели исходят из априорной гипотезы, что каждый из 100 типов автомобилей будет продаваться с вероятностью $1/100$ (характеризуются близоруким поведением), то цена «кота в мешке» окажется равной

$$p = (301 + b + 400 + b)/2 = 350{,}5 + b.$$

При этой цене будут продаваться все те автомобили, для которых

$$300 + s \leqslant 350{,}5 + b.$$

Таким образом будет продаваться $m = \lfloor 50{,}5 + b \rfloor$ типов автомобилей. Величина m не убывает с ростом b и при $b \geqslant 40{,}5$ равна 100. При $b < 40{,}5$ равновесие не Парето-оптимально.

Предположение о близорукости покупателей несовместимо с предположением об их рациональности в случае, когда они знают структуру предложения.

Продавцы знают качество автомобилей, а покупатели — нет; покупатели учитывают фактические вероятности. Пусть покупатели ориентируются на текущую структуру предложения, и рассчитывают свою оценку, исходя из данной информации (m худших типов автомобилей будут продаваться с вероятностью $1/m$). Тогда при условии, что продаются автомобили m типов, ожидаемая оценка равна

$$V_m = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} v_s = \frac{301 + b + \cdots + 300 + m + b}{m} =$$
$$= \frac{301 + b + 300 + m + b}{2} = 300{,}5 + \frac{m}{2} + b.$$

При этом количество продаваемых типов автомобилей для возможных равновесий задается соотношениями

$$c_m \leqslant V_m < c_{m+1}$$

или

$$300 + m \leqslant 300{,}5 + \frac{m}{2} + b < 301 + m,$$

т. е.

$$m \leqslant 1 + 2b < m + 2.$$

Следовательно, равновесное количество типов характеризуется неравенствами

$$2b - 1 < m \leqslant 2b + 1.$$

Равновесная цена равна $p = V_m = 300{,}5 + \frac{m}{2} + b$.

При $b < 1/2$ существует единственное равновесие с $m = 1$. При $b \geqslant 50$ равновесие также единственное с $m = n$ и Парето-оптимально. При $b \in [0{,}5, 50)$ существует два равновесия, одно из которых заведомо не оптимально. Так, при $b = 20$ в одном из возможных равновесий $m = 40$, а в другом $m = 41$, причем оба равновесия не оптимальны.

Сравнивая случаи близорукого и дальновидного поведения покупателей, видим, что во втором случае неблагоприятный отбор проявляется сильнее (объемы продаж меньше) и цена ниже, чем в первом, так как в равновесии учитывается реакция продавцов на цену, кроме того, по той же причине разрушение рынка во втором случае происходит при меньших значениях b. $\triangle$

Неединственность равновесия в модели Акерлова — обычное явление, особенно при немонотонном поведении разности $V(s) - c(s)$. В рассмотренном примере поведение оценок покупателей и продавцов с ростом s довольно «правильное», но равновесие не единственное, что является следствием дискретности распределения типов. Если данный пример видоизменить таким образом, чтобы распределение типов было непрерывным, то равновесие оказывается единственным (см. ниже).

Естественные предположения об оценках v_s и c_s, не имеющие аналогов для дискретных распределений (например, непрерывность соответствующих зависимостей), делают модель с непрерывным распределением более простым инструментом анализа неблагоприятного отбора. Рассмотрим такую модель.

Предположим, что возможные типы блага, s, описываются интервалом числовой прямой $[s_1, s_2]$, и пусть $f(\cdot)$ — плотность распределения этих типов, известная покупателям, такая что $f(s) > 0$ при $s \in (s_1, s_2)$, а $F(\cdot)$ — функция распределения. Как и в дискретном случае, оценки покупателей (продавцов) товара типа s совпадают и равны $v(s)$ (соответственно $c(s)$), покупатели и продавцы имеют квазилинейные предпочтения и нейтральны по отношению к риску. Будем предполагать, что функция $c(\cdot)$ является непрерывной и возрастающей и что $c(s) < v(s)$ для всех s.

Если функция $c(s)$ возрастает и продаются товары качеством не выше s, то оценка покупателей при асимметричной информированности равна

$$
\begin{aligned}
V(s) &= \mathsf{E}(v(\tilde{s}) \mid \tilde{s} \leqslant s) = \\
&= \int_{s_1}^{s} v(t)f(t)dt \bigg/ \int_{s_1}^{s} f(t)dt = \frac{1}{F(s)} \int_{s_1}^{s} v(t)f(t)dt.
\end{aligned}
$$

Аналогично дискретному случаю граничное качество $\bar{s}$ в равновесии либо задается уравнением

$$c(\bar{s}) = V(\bar{s}),$$

если это уравнение имеет решение, либо равно $\bar{s} = s_2$. Второй вид равновесия (когда продаются товары всех типов) возможен при выполнении условия $c(s_2) \leqslant V(s_2)$. Единая для всех типов блага равновесная цена $\bar{p}$ равна

$$\bar{p} = V(\bar{s}).$$

Если $c(s_2) > V(s_2)$, то существует решение уравнения $c(\bar{s}) = V(\bar{s})$, поскольку $c(s_1) < V(s_1) = v(s_1)$, а функции $c(\cdot)$ и $V(\cdot)$ непрерывны. В этом случае существует равновесие, в котором имеет место неблагоприятный отбор. Если же $c(s_2) \leqslant V(s_2)$, то существует равновесие без неблагоприятного отбора. Таким образом, при сделанных предположениях хотя бы одно равновесие существует.

Пример 11.2

Пусть, по аналогии с Примером 11.1, качество $\tilde{s}$ имеет равномерное распределение на $[1, 100]$, $c(s) = 300 + s$, и $v(s) = 300 + b + s$, где $b > 0$.

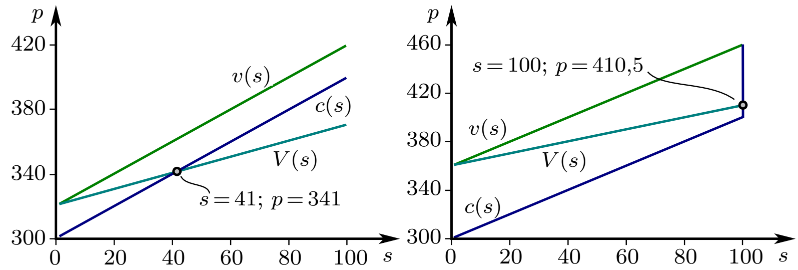


Рис. 11.1. *Равновесие при $b = 20$ и $b = 60$ в Примере 11.2*

Найдем равновесие при несимметричной информированности. Ожидаемая оценка покупателя равна

$$V(s) = \int_1^s v(t) \frac{1}{s-1} dt = \frac{1}{s-1} \int_1^s (300 + b + t) dt = 300{,}5 + b + \frac{s}{2}.$$

Граничное качество $\bar{s}$ в равновесии с неблагоприятным отбором задается уравнением

$$300 + \bar{s} = 300{,}5 + b + \frac{\bar{s}}{2}.$$

Таким образом, $\bar{s} = 2b+1$ и $\bar{p} = 301+2b$. Такое равновесие существует при $2b + 1 < 100$, т. е. при $b < 49{,}5$. При $b \geqslant 49{,}5$ в равновесии продаются блага всех типов и равновесная цена равна $\bar{p} = V(100) = 350{,}5 + b$.

Можно интерпретировать функцию $V^{-1}(p)$ как функцию спроса (которая, в отличие от привычной функции спроса, возрастает), а функцию, которая совпадает с $c^{-1}(p)$ при $s \in [c(1); c(100)]$ и равна 100 при $p \geqslant c(100)$ — как функцию предложения. Точка пересечения соответствующих кривых определяет равновесие (Рис. 11.1). $\triangle$

Проведенный выше анализ феномена неблагоприятного отбора основывается на обобщении понятия равновесия (по Вальрасу) на случай асимметричной информации. При этом соответствующая игра определена не полностью и введено определение равновесия, которое годится только для рассмотренной модели. С таким равновесием совместимы разные интерпретации поведения игроков и того, какая информация им доступна. Так, можно предполагать, что покупатели помимо цены блага знают, в каких пропорциях предлагаются товары разных типов; при этом в равновесии это знание согласуется с ценой, по которой благо продается. Можно также (как мы это сделали выше) исходить из предположения, что априорное распределение типов благ и оценки продавцов общеизвестны; пропорции предложения разных типов блага вычисляются покупателем на основе этой информации с учетом рыночной цены блага.

Другой (более строгий) подход к анализу данной ситуации — специфицировать соответствующую игру (т. е. описать возможные действия, последовательность ходов и ожидания игроков — покупателей и продавцов и т. д.) и охарактеризовать решение этой игры, что и будет проделано в следующем параграфе. Преимущество такого подхода состоит в том, что нет необходимости вводить специально придуманное для данного случая определение равновесия, можно использовать стандартное определение равновесия игры (совершенного байесовского равновесия). Это позволяет по единой схеме изучать различные аспекты неблагоприятного отбора и институты, регулирующие эти феномены (гарантии, сигнализирование, репутация). Для этого достаточно каждый раз описывать соответствующую модификацию игры и находить обычное равновесие, вместо того чтобы определять для каждой модели равновесие заново.

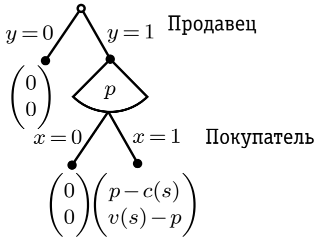


Рис. 11.2. *Дерево игры для модели Акерлова при полной информированности*

11.2.3 Модель Акерлова как динамическая игра

Рассмотрим вариант модели Акерлова, в котором рынок с асимметричной информацией моделируется как динамическая байесовская игра.

Благо дискретное. Предполагается, что каждый продавец либо выставляет единицу товара на продажу, либо нет ($y = 0, 1$). Каждый покупатель либо покупает единицу товара, либо нет ($x = 0, 1$).

Пусть s — качество товара. Асимметричность информации состоит в том, что продавец знает качество своего товара, а покупатель — нет.

Если продавец продал товар по цене p, то его прибыль равна $\Pi = p - c(s)$, где $c(s)$ — его издержки при данном качестве. Будем предполагать, что функция $c(\cdot)$ является возрастающей. Как и в классической постановке модели, $c(s)$ можно интерпретировать как альтернативные издержки, т. е. выигрыш продавца от альтернативного использования товара. Если продавец не продал товар, то $\Pi = 0$. (Если $c(s)$ — обычные производственные издержки, и товар произведен, но не куплен, то естественно считать, что $\Pi = -c(s)$.)

Будем предполагать, что предпочтения покупателя квазилинейны, т. е. его потребительский излишек при покупке товара по цене p составляет величину $u = v(s) - p$. Оценка $v(\cdot)$ — возрастающая функция. Предполагается, что у всех покупателей одинаковые предпочтения. Если покупатель не купил товар, его потребительский излишек равен нулю.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда покупатель знает качество товара. Дерево игры в этой ситуации представлено на Рис. 11.2.

Для поиска равновесия этой игры используем обратную индукцию. Рассмотрим решение покупателя. Если $v(s) > p$, то покупатель покупает, если $v(s) < p$, то нет. Будем также предполагать, что если покупателю безразлично, приобретать товар или нет, то он поступает благожелательно по отношению к продавцу и покупает товар. Учитывая это, при свертывании дерева игры получаем следующие выигрыши продавца:

$$\Pi(p) = \begin{cases} 0, & v(s) < p, \\ p - c(s), & v(s) \geqslant p. \end{cases}$$

Если $v(s) \geqslant c(s)$, т. е. в принципе есть смысл производить товар, то $p = v(s)$ дает максимум прибыли. Если $v(s) < c(s)$, то продавец не будет предлагать товар или же может назначить цену $p > v(s)$, с тем чтобы покупатель его не купил.

Таким образом, в равновесии при всех уровнях качества s, таких что $v(s) \geqslant c(s)$, благо будет продаваться и цена будет $p = v(s)$, Таким образом, любое равновесие является Парето-оптимальным.

Рассмотрим теперь модификацию этой игры, предположив, вслед за Акерловым, что продавцам известен их тип, а покупателям известна только статистическая информация о возможных типах продавца — распределение типов s, причем покупатели нейтральны по отношению к риску.

Формально можно рассматривать эту модель как динамическую байесовскую игру и найти в ней совершенное байесовское равновесие — совокупность согласованных стратегий и ожиданий. В игре «нулевой» ход делает природа — она выбирает тип продавца. Далее при каждом s дерево игры совпадает с деревом, изображенным на Рис. 11.2[16].

Найдем решение данной игры (совершенное байесовское равновесие). Напомним, что в совершенном байесовском равновесии ожидания определяются равновесными стратегиями игроков в соответствии с правилом Байеса, в ситуациях, для которых это возможно, т. е. в ситуациях, возникающих в игре с ненулевой вероятностью при данных стратегиях. С другой стороны, при данных ожиданиях и данных стратегиях других игроков стратегия каждого игрока является оптимальной.

Таким образом, чтобы охарактеризовать равновесие в данной игре, следует задать:

[16]В полном дереве игры вершины, в которых покупатель делает выбор, должны лежать в одном информационном множестве, поскольку он не знает, какой ход сделала природа.

- стратегию продавца: для каждого типа s продавать/не продавать и если продавать, то по какой цене p;
- стратегию покупателя: покупать или не покупать при данной цене p;
- ожидания: покупатель, видя цену p, должен предложить, каким должно быть распределение качества (это распределение не обязательно совпадает с первоначальным).

Заметим, прежде всего, что потребитель при данной цене p решает задачу

$$\mathsf{E}(u \mid p) = \mathsf{E}(v(\tilde{s}) - px \mid p) \to \max_{x=0,1}.$$

(Это математическое ожидание берется по тому распределению, из которого исходит продавец — по его ожиданиям при данной цене p.) Отсюда следует, что покупатель покупает благо, если его ожидаемая полезность не меньше нуля.

Дальнейшее свертывание данной игры невозможно, поскольку стратегия продавца зависит от ожиданий покупателя, которые, в свою очередь, зависят от стратегии продавца.

Ясно, что товары не могут продаваться по разным ценам. Пусть s' продается по цене p', а s'' — по цене p'', причем $p' > p''$. Но раз товар покупают по цене p', то продавец s'' мог назначить p', а не p''. Следовательно, цены всех *продаваемых* товаров в равновесии должны быть одинаковыми. То есть $p(s) = \bar{p}$ для товара любого качества s, которое продается.

Теперь посмотрим на решение «продавать/не продавать по цене $\bar{p}$». Если $c(s) > \bar{p}$, то продавать невыгодно, а если $c(s) < \bar{p}$, то выгодно.

Будем предполагать[17], что множество возможных типов (носитель распределения случайной величины $\tilde{s}$) составляет замкнутый отрезок числовой прямой, т. е. множество $[s_1, s_2]$, $F(\cdot)$ — функция распределения, $f(\cdot)$ — плотность распределения.

Логически возможны ситуации равновесия: (1) продаются товары любого качества, (2) часть товаров продается, а часть нет и (3) все товары не продаются. Охарактеризуем последовательно все три типа равновесия и условия, при которых они существуют.

(1) Предположим сначала, что существует равновесие, при котором продаются товары всех уровней качества. В этом случае ожидания потребителей относительно уровня качества совпадают с априорными, и товар покупается тогда и (в предположении благожелательности потребителя) только тогда, когда ожидаемый потребительский

[17] Заметим, что если распределение непрерывное, то без потери общности можно считать, что это равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, т. е. $\tilde{s} \sim U[0, 1]$.

излишек неотрицателен, т. е.

$$\mathsf{E}\, u = \mathsf{E}(v(\tilde{s}) - px) \geqslant 0.$$

Таким образом, продавец, максимизируя прибыль, будет продавать по максимальной цене, удовлетворяющей этому условию, т. е. по цене

$$\bar{p} = \mathsf{E}\, v(\tilde{s}) = \int_{s_1}^{s_2} v(s) f(s) ds.$$

Продавец любого типа заинтересован продавать благо по данной цене, только если $\bar{p} \geqslant c(s)$ для всех s, что эквивалентно условию $\bar{p} \geqslant c(s_2)$, поскольку функция $c(\cdot)$ возрастает (мы предполагаем здесь благожелательность продавца, т. е. что он будет продавать благо, даже если $\bar{p} = c(s)$). Следовательно, такое равновесие существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{s_1}^{s_2} v(s) f(s) ds \geqslant c(s_2).$$

(2) Рассмотрим теперь равновесие, в котором часть благ продается, а часть нет. Тогда в равновесии стратегии продавцов должны быть такими: существуют числа $(\bar{p}, \bar{s})$, такие что продавец *не продает* при $s > \bar{s}$ и *назначает цену* $p = \bar{p}$, если *продает*. (Мы не будем рассматривать стратегии продавца следующего типа: если продавцу невыгодно продавать товар некоторого качества s по цене $\bar{p}$, то он выставляет его на продажу и назначает цену такую, чтобы его не купили.) Значит, в равновесии если благо продается, то $s \leqslant c^{-1}(\bar{p})$.

Если потребителю предложен товар по цене $p = \bar{p} = c(\bar{s})$, то он ожидает, что не продаются товары качества $s > \bar{s}$ (потому что таковы стратегии продавцов). Следовательно (по правилу Байеса), ожидания имеют вид усеченного распределения F, в котором отбрасываются s правее $\bar{s}$. Носителем этого распределения будет отрезок $[s_1, \bar{s}]$. Обозначим такое распределение через $F^{\bar{s}}$. Концепция совершенного байесовского равновесия не предписывает никаких ограничений на формирование ожиданий в ситуации отклонения от равновесных стратегий, поэтому ожидания покупателя в случае, если он наблюдал бы цену $p \neq \bar{p}$, могут быть любыми. Мы рассмотрим равновесие, в котором покупатель ожидает, что отклонение от равновесной стратегии $p \neq \bar{p}$ не влечет за собой отклонения от равновесной стратегии «продавать при $s \in [s_1, \bar{s}]$», т. е. его ожидания при цене $p \neq \bar{p}$ тоже имеют вид $\tilde{s} \sim F^{\bar{s}}$.

При данных ожиданиях покупатель должен действовать оптимальным образом: если ожидаемая полезность неотрицательна, то он покупает благо. Математическое ожидание здесь следует считать по ожиданиям, что $\tilde{s} \sim F^{\bar{s}}$. Плотность этого усеченного распределения равна $f(s)/F(\bar{s})$ при $s \in [s_1, \bar{s}]$ и нулю в противном случае. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(u \mid \tilde{s} \leqslant \bar{s}) = \mathsf{E}(v(\tilde{s})x - px \mid \tilde{s} \leqslant \bar{s}) = \\ = \int_{s_1}^{\bar{s}} v(s) \frac{f(s)}{F(\bar{s})} ds \cdot x - px = (V(\bar{s}) - p)x, \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение

$$V(s) = \frac{1}{F(s)} \int_{s_1}^{s} v(t) f(t) dt.$$

Если величина ожидаемой полезности не меньше нуля, то благо покупается.

Продавцы, максимизируя прибыль, назначат максимальную цену при условии, что благо покупается, т. е. при условии, что

$$\mathsf{E}(u \mid \tilde{s} \leqslant \bar{s}) = V(\bar{s}) - p \geqslant 0.$$

Значит, в равновесии

$$\bar{p} = V(\bar{s}).$$

Получаем систему уравнений для равновесных параметров $\bar{p}$ и $\bar{s}$:

$$\bar{p} = c(\bar{s}), \quad \bar{p} = V(\bar{s}).$$

Заметим, что такое равновесие существует тогда и только тогда, когда эта система уравнений имеет решение $(\bar{p}, \bar{s})$, такое что $s_1 < \bar{s} < s_2$.

(3) Рассмотрим, наконец, равновесие, в котором товары любого качества не продаются. Тогда при любых ожиданиях покупателя его ожидаемая оценка блага не меньше, чем $v(s_1)$, поскольку $v(\cdot)$ возрастает. Таким образом, производитель мог бы выставить товар на продажу по цене не ниже $v(s_1)$ и такой что потребитель купил бы его. Если производитель этого не делает, то его издержки выше $v(s_1)$. Так как мы рассматриваем равновесие, в котором товары любого качества не продаются, то, в частности, издержки при качестве $s = s_1$ выше, чем $v(s_1)$. Следовательно, если равновесие указанного типа существует, то $v(s_1) < c(s_1)$.

Наоборот, если условие $v(s_1) < c(s_1)$ выполняется, то существует равновесие, в котором товар любого качества не продается. Чтобы это показать, следует указать ожидания покупателей, поддерживающих это равновесие.

Один из возможных вариантов таких ожиданий состоит в том, что $\tilde{s} \sim F^{\bar{s}}$, где $\bar{s}$ выбирается таким, чтобы $p = V(\bar{s})$, если

$$V(s_2) = \int_{s_1}^{s_2} v(s)f(s)ds \leqslant p,$$

и $\tilde{s} \sim F$ в противном случае.

Равновесие может быть не единственным, причем разные равновесия могут различаться с точки зрения объема продаж и ожидаемого уровня благосостояния.

Пусть, например, функции $v(\cdot)$ и $c(\cdot)$ таковы, что

$$v(s_1) < c(s_1), \quad V(s_2) \geqslant c(s_2).$$

Тогда в модели имеется как минимум два вида равновесия: в одном из них товар не продается вне зависимости от его качества, в другом товар любого качества продается.

Задачи

11.5 Сформулируйте модель Акерлова с двумя градациями качества благ и условия, когда блага низшего качества вытесняют блага высшего качества.

11.6 Автомобили трех градаций качества встречаются с одинаковой вероятностью. Оценки продавцов для этих трех типов автомобилей равны 1, 3 и f, а оценки покупателей — 2, 5 и 8 соответственно. Качество автомобилей известно только продавцам. Найдите максимальную величину f, при которой будет существовать равновесие, в котором продаются автомобили всех трех типов.

11.7 Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов» с тремя градациями качества. Пусть резервные оценки продавцов для трех типов товара составляют \$2000, \$2300, \$2600, а оценки покупателей — $\$2000 + \beta$, $\$2300 + \beta$, $\$2600 + \beta$ соответственно. Пусть частота существования в природе первого типа товара — $1/3$, второго — $1/3$, третьего — $1/3$. При каких параметрах β существует равновесие, в котором продаются (A) товары всех типов, (B) только двух худших типов, (C) только самые плохие?

11.8 Рассмотрите в рамках модели Акерлова рынок товара, имеющего пять градаций качества. Цену назначает продавец (рынок продавца). Покупатели нейтральны к риску. Параметры рынка указаны в Таблице 11.2.

Таблица 11.2. *Данные к задаче 11.8*

Качество	1	2	3	4	5
Вероятность (доля)	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
Оценка продавца	1	2	3	4	5
Оценка покупателя	1	3	5	7	9

Таблица 11.3. *Данные к задаче 11.11*

	L	M	H
Оценка продавца	100	400	500
Оценка покупателя	200	300	600

При каком условии на вероятности π_j на этом рынке может существовать равновесие, в котором будут продаваться только товары двух худших градаций качества?

11.9 Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 50]$.

(A) Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) совпадает с параметром качества s, а оценка товара покупателем равна αs ($\alpha > 1$). При каких значениях параметра α будет происходить разрушение рынка лучших товаров (неблагоприятный отбор)? Как ведет себя граничное качество в равновесии при возрастании α?

(B) Решите ту же задачу, предполагая, что оценка товара покупателем равна $s + \alpha$ ($\alpha > 0$).

(C) Решите ту же задачу, предполагая, что параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[40, 50]$.

11.10 Рассмотрите модель Акерлова, в которой товар с вероятностью $1-s$ может иметь дефект, из-за которого он негоден (s — вероятность того, что товар годен). Все потребители ценят годный товар в 10 д. е., а негодный — в 0 д. е. Тип продавца определяется величиной s. Тип s имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Издержки продавцов: $c(s) = (s + 1)$ д. е. Найдите и опишите равновесие.

11.11 На рынке, описываемом моделью Акерлова, имеются товары трех разновидностей: L, M и H. Оценки продавцов и покупателей приведены в Таблице 11.3.

(A) Найдите равновесие в случае, когда качество товара наблюдают как продавцы, так и покупатели, и объясните, почему оно будет оптимальным по Парето.

(B) Найдите равновесие в случае, когда качество товара не могут наблюдать ни продавцы, ни покупатели, и объясните, почему оно будет оптимальным по Парето.

(C) Для стандартной ситуации асимметричной информации найдите условия на доли товаров разного качества, при которых равновесие может быть оптимальным по Парето (либо, если Парето-оптимум недостижим, приведите рассуждения, доказывающие это).

11.12 Рассмотрите модель Акерлова для рынка с асимметричной информацией. Параметр качества товара q имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 30]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $6 + 0{,}2q$ при $q \leqslant 15$ и $3 + 0{,}4q$ при $q \geqslant 15$, а оценка товара покупателем равна $5 + 0{,}6q$. Каким может быть равновесие на этом рынке?

11.13 Решите предыдущую задачу, предполагая, что q имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 20]$, оценка продавцом своего товара равна $150 + q^2$, а оценка товара покупателем равна $100 + 30q$.

11.14 Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[s_1, s_2]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $c(s)$, а оценка товара покупателем равна $v(s)$. На рынке имеются посредники (оценщики), которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену $\alpha > 0$.

(A) Пусть $s_1 = 10$, $s_2 = 10$, $c(s) = 2s$, $v(s) = 3s$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра α.

(B) Пусть $s_2 = 200$, $c(s) = 3s$, $v(s) = 5s$, $\alpha = 100$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра s_1.

(C) Пусть $s_1 = 3$, $s_2 = 50$, $c(s) = 4s - \gamma$, $v(s) = 5s$, $\alpha = 20$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра $\gamma > 0$.

(D) Пусть $s_1 = 1$, $s_2 = 10$, $c(s) = 3s$, $v(s) = 4s + \delta$, $\alpha = 3$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра $\delta > 0$.

11.15 Рассмотрите модель Акерлова с дискретным качеством, заданную Таблицей 11.4.

(A) Каким будет равновесие? Будет ли оно единственным?

(B) Предположим, что государство вводит обязательный контроль, возмещая издержки контроля налогом α с каждого продавца (с единицы товара). При этом информация о качестве товара не разглаша-

Таблица 11.4. *Данные к задаче 11.15*

Оценки покупателей	$v_1 = 10$ д. е.	$v_2 = 30$ д. е.	$v_3 = 50$ д. е.
Оценки продавцов	$c_1 = 9$ д. е.	$c_2 = 21$ д. е.	$c_3 = 45$ д. е.
Количество товаров	10 млн	10 млн	10 млн

ется, а запрещается продажа товара самого низкого качества. Найдите равновесие в зависимости от этих издержек (α д. е., $0 < \alpha < 9$).

(C) Приведет ли введение контроля к росту благосостояния при некоторых параметрах?

11.16 ⟦Tirole⟧ Рассмотрим рынок подержанных автомобилей с градациями качества, заданными непрерывной случайной величиной s, которая равномерно распределена на отрезке $[s^1, s^2]$. Продавец оценивает единицу товара качества s как s, а покупатель — как αs, где α — коэффициент, *разный* для разных покупателей. Предполагаем, что α распределены равномерно на отрезке $[\alpha^1, \alpha^2]$. Покупатели нейтральны по отношению к риску (т. е. покупатель купит автомобиль с ожидаемым качеством s^e тогда и только тогда, когда $\alpha s^e > p$.

(A) Найдите объем торговли в условиях полной информации.

(B) Изобразите кривые спроса и предложения при асимметричной информации. Может ли быть так, что кривая спроса имеет положительный наклон?

(C) Найдите конкурентное равновесие. Будет ли объем торговли больше или меньше Парето-оптимального?

(D) Покажите, что на таком рынке равновесие может быть не единственным и что равновесие с более высокой ценой доминирует по Парето равновесие с более низкой ценой.

(E) Государство вводит стандарт качества. Автомобили качества ниже s_0 продавать запрещено. Может ли это увеличить общее благосостояние (с точки зрения суммарного излишка)?

11.17 Рассмотрите модель Акерлова в предположении, что переговорная сила принадлежит покупателю (можно интерпретировать такой рынок как рынок труда). Покажите, что если $v(s) \geqslant c(s)$ для всех s, то в одном из равновесий продавец назначает цену, равную предельным издержкам.

Приложение 11.А Доказательство теоремы Майерсона—Саттертуэйта

Введем обозначения для ожидаемой платы с точки зрения продавца

$$P^c(c) = \mathsf{E}\,\bar{t}(c, \tilde{v}) = \int_{v_1}^{v_2} \bar{t}(c, v) f(v) dv$$

и с точки зрения покупателя

$$P^v(v) = \mathsf{E}\,\bar{t}(\tilde{c}, v) = \int_{c_1}^{c_2} \bar{t}(c, v) g(c) dc,$$

а также *ожидаемого объема торговли* с точки зрения продавца

$$X^c(c) = \mathsf{E}\,\bar{x}(c, \tilde{v}) = \int_{v_1}^{v_2} \bar{x}(c, v) f(v) dv$$

и с точки зрения покупателя

$$X^v(v) = \mathsf{E}\,\bar{x}(\tilde{c}, v) = \int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c, v) g(c) dc.$$

В этих обозначениях

$$U_{\check{v}}(v) = \check{v} X^v(v) - P^v(v),$$

и

$$U_{\check{c}}(c) = P^c(c) - \check{c} X^c(c).$$

По условиям самовыявления для двух оценок покупателя v и $\check{v}$, можно записать следующие два неравенства:

$$U_v(v) \geqslant U_v(\check{v}) \quad \text{и} \quad U_{\check{v}}(\check{v}) \geqslant U_{\check{v}}(v).$$

Из этих неравенств следует, что

$$U_v(v) - U_{\check{v}}(v) \geqslant U_v(v) - U_{\check{v}}(\check{v}) \geqslant U_v(\check{v}) - U_{\check{v}}(\check{v})$$

или

$$(v - \check{v}) X^v(v) \geqslant U_v(v) - U_{\check{v}}(\check{v}) \geqslant (v - \check{v}) X^v(\check{v}).$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\check{v} \to v$, получим, что

$$\frac{dU_v(v)}{dv} = X^v(v).$$

Отсюда, беря интеграл получим[18],

$$U_v(v) = U_{v_1}(v_1) + \int_{v_1}^{v} X^v(z)dz.$$

Ожидаемый объем торговли $X^v(z)$ неотрицателен, поэтому если условие добровольности участия выполнено для покупателя с оценкой v_1, то оно выполнено для всех покупателей:

$$U_{v_1}(v_1) \geqslant 0 \Leftrightarrow U_v(v) \geqslant 0 \ \forall v.$$

Применяя аналогичные рассуждения к поведению продавцов разных типов, получим, что

$$\frac{dU_c(c)}{dc} = -X^c(c),$$

откуда

$$U_c(c) = U_{c_2}(c_2) + \int_{c}^{c_2} X^c(z)dz.$$

Кроме того, коль скоро условие добровольности участия выполнено для продавца с издержками c_2, то оно выполнено для всех продавцов:

$$U_{c_2}(c_2) \geqslant 0 \Leftrightarrow U_c(c) \geqslant 0 \ \forall c.$$

Вспомним, что

$$U_v(v) = vX^v(v) - P^v(v), \quad \text{и} \quad U_c(c) = P^c(c) - cX^c(c).$$

Отсюда

$$P^v(v) = vX^v(v) - U_{v_1}(v_1) - \int_{v_1}^{v} X^v(z)dz$$

и

$$P^c(c) = cX^c(c) + U_{c_2}(c_2) + \int_{c}^{c_2} X^c(z)dz.$$

Предположим теперь, что равновесие является оптимальным по Парето, т. е. объем торговли в этом равновесии должен удовлетворять условиям $\bar{x}(c, v) = 1$ при $v > c$ и $\bar{x}(c, v) = 0$ при $v < c$. Покажем, что справедливо следующее соотношение для ожидаемой платы в равновесии:

$$\mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\}\bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})] \leqslant \mathsf{E}\, t(\tilde{c}, \tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\}\bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})].$$

[18] Из приведенных неравенств следует, что $X_v(v)$ — неубывающая функция. Таким образом, она интегрируема.

Рассмотрим сначала покупателя и получим оценку сверху для ожидаемой платы в равновесии, т. е. $\mathsf{E}\, t(\tilde{c}, \tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\}\bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})]$.

Так как $U_{v_1}(v_1) \geqslant 0$, то

$$P^v(v) \leqslant vX^v(v) - \int_{v_1}^{v} X^v(z)dz.$$

Подставляя $X^v(v) = \int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c,v)g(c)dc$, получим, что величина в правой части неравенства равна

$$\begin{aligned} vX^v(v) - \int_{v_1}^{v} X^v(z)dz &= v\int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c,v)g(c)dc - \int_{v_1}^{v}\int_{c_1}^{c_2} \bar{x}(c,z)g(c)dcdz = \\ &= \int_{c_1}^{c_2} v\bar{x}(c,v)g(c)dc - \int_{c_1}^{c_2}\int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dzg(c)dc = \\ &= \int_{c_1}^{c_2} [v\bar{x}(c,v) - \int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz]g(c)dc = \\ &= \int_{c_1}^{c_2} \max\{c, v_1\}\bar{x}(c,v)g(c)dc. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы использовали, что в Парето-оптимальном равновесии выполнено

$$v\bar{x}(c,v) - \int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz = \max\{c, v_1\}\bar{x}(c,v).$$

Это равенство можно установить на основе перебора возможных случаев.

(1) Если $c = v$, то интеграл равен нулю и $\max\{c, v_1\} = v$.

(2) Если $c > v$, то $\bar{x}(c,z) = 0$ при $z \leqslant v$, и, таким образом, обе части доказываемого равенства равны нулю.

(3) Если $c < v$ и $c \leqslant v_1$, то $\bar{x}(c,z) = 1$ при $z \in (v_1, v]$ и поэтому

$$\int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz = v - v_1 = (v - v_1)\bar{x}(c,v).$$

(4) Если $c < v$ и $c \geqslant v_1$, то $\bar{x}(c,z) = 1$ при $z \in (c, v]$ и поэтому

$$\int_{v_1}^{v} \bar{x}(c,z)dz = v - c = (v - c)\bar{x}(c,v).$$

Учитывая это соотношение, получим неравенство

$$P^v(v) \leqslant \int_{c_1}^{c_2} \max\{c, v_1\}\bar{x}(c,v)g(c)dc.$$

Беря интеграл по v, получим оценку сверху для ожидаемой платы в оптимальном равновесии:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, t(\tilde{c}, \tilde{v}) = \mathsf{E}\, P^v(\tilde{v}) = \int_{v_1}^{v_2} P^v(v) f(v) dv \leqslant \\ \leqslant \int_{v_1}^{v_2} \int_{c_1}^{c_2} \max\{c, v_1\} \bar{x}(c, v) g(c) dc f(v) dv\end{aligned}$$

или

$$\mathsf{E}\, t(\tilde{c}, \tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\} \bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})].$$

Для продавца рассуждения аналогичны. Из $U_{c_2}(c_2) \geqslant 0$ следует

$$P^c(c) \geqslant c X^c(c) + \int_c^{c_2} X^c(z) dz$$

или

$$P^c(c) \geqslant \int_{v_1}^{v_2} \min\{c_2, v\} \bar{x}(c, v) f(v) dv.$$

Отсюда получим оценку снизу для ожидаемой платы в оптимальном равновесии:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, t(\tilde{c}, \tilde{v}) = \mathsf{E}\, P^c(\tilde{c}) = \int_{c_1}^{c_2} P^c(c) g(c) dc \geqslant \\ \geqslant \int_{v_1}^{v_2} \int_{c_1}^{c_2} \min\{c_2, v\} \bar{x}(c, v) g(c) dc f(v) dv\end{aligned}$$

или

$$\mathsf{E}\, t(\tilde{c}, \tilde{v}) \geqslant \mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\} \bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})].$$

Окончательно получаем

$$\mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\} \bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})] \leqslant \mathsf{E}\, t(\tilde{c}, \tilde{v}) \leqslant \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\} \bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})].$$

Для любой оценки покупателя $v \in [v_1, v_2]$ и любых издержках продавца $c \in [c_1, c_2]$, таких что $v > c$, выполнено $\min\{c_2, v\} > \max\{c, v_1\}$, поскольку $v_1 < c_2$. Кроме того, так как $c_1 < v_2$, то вероятность того, что $\tilde{v} > \tilde{c}$, т. е. того, что $\bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v}) = 1$, не равна нулю. Отсюда следует

$$\mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\} \bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})] < \mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\} \bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})].$$

Тем самым получено противоречие, что и доказывает несовместимость трех условий: участия, самовыявления и эффективности.

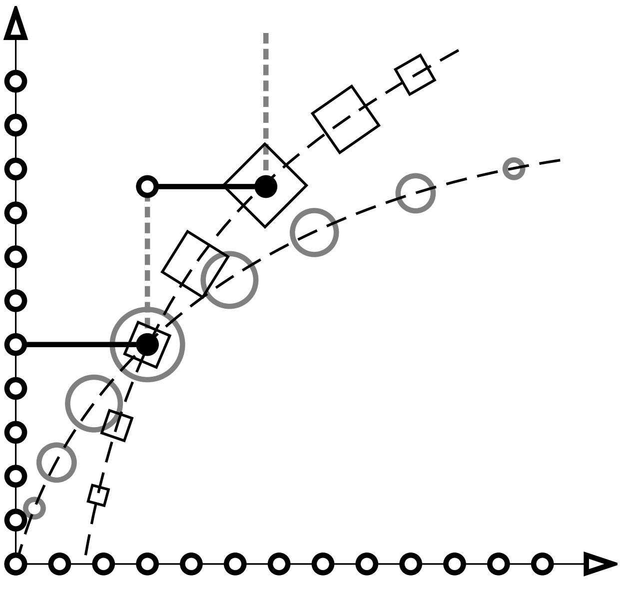
Есть вариант этой теоремы для модели, в которой сумма, выплаченная покупателем, не обязательно равняется сумме, полученной продавцом. Данная модель позволяет рассматривать и такие механизмы торга, которые требуют издержек для своего осуществления, а также такие, которые предусматривают субсидии со стороны третьих лиц. Этот вариант теоремы Майерсона—Саттертуэйта утверждает, что несовместимы четыре условия. Четвертым условием является сбалансированность платежей: ожидаемая сумма, выплаченная покупателем, не меньше ожидаемой суммы, полученной продавцом. Это условие можно интерпретировать как отсутствие субсидий со стороны. Заметим, что имеются в виду субсидии не для каждой реализации типов $(\tilde{c}, \tilde{v})$, а в среднем. (То есть неявно предполагается возможность воспользоваться услугами нейтрального к риску стороннего страховщика. Ясно, что это довольно слабое требование.)

Действительно, если в приведенном доказательстве рассмотреть плату, которая может не совпадать для продавца и покупателя, т. е. $t^c(c, v)$ и $t^v(c, v)$, то по аналогии с приведенным выше доказательством можно получить неравенство

$$\mathsf{E}\, t^c(\tilde{c}, \tilde{v}) \geqslant \mathsf{E}[\min\{c_2, \tilde{v}\}\bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})] > \mathsf{E}[\max\{\tilde{c}, v_1\}\bar{x}(\tilde{c}, \tilde{v})] \geqslant \mathsf{E}\, t^v(\tilde{c}, \tilde{v}).$$

Таким образом, в такой модели двусторонней монополии Парето-оптимальность равновесия может иметь место только в играх торга с недобровольным участием или же с субсидиями.

Часть III



Глава

Монополия

12

Как показывают теоремы благосостояния (см. параграф 4.5), мир совершенной конкуренции достаточно просто и хорошо устроен: каждое равновесие оказывается (при естественных предположениях) Парето-оптимальным и каждое оптимальное по Парето состояние экономики можно реализовать как равновесие при подходящем перераспределении начальных запасов, прав собственности и т. д. Предположения совершенной конкуренции, однако, не всегда достаточно удовлетворительно описывают ситуации на существующих рынках. Так, с гипотезой рационального поведения несовместимо предположение о том, что производитель является ценополучателем (рассматривает цену как неизменную) в ситуации, когда у него нет конкурентов или их немного. В этой и следующей главе мы изучим, чем принципиально рынки, где отсутствуют условия совершенной конкуренции (так называемые несовершенные рынки), отличаются от совершенных рынков.

Анализ несовершенной конкуренции традиционно проводится в рамках квазилинейной экономики (см. гл. 5). При этом предполагается, что рынок данного продукта не связан с остальными рынками, т. е. неявно подразумевается, что экономика не только квазилинейна, но и сепарабельна по рассматриваемому благу. Поэтому без ограничения общности можно рассматривать экономику с двумя благами. Эти предположения позволяют проводить частный равновесный анализ, что существенно упрощает рассуждения. При анализе несовершенной конкуренции с использованием более общей модели общего равновесия мы не только сталкиваемся с серьезными техническими трудностями; нам зачастую не удается сделать конкретные предсказания о результатах функционирования такого рынка.

Естественно начать с наиболее простого случая несовершенного рынка, когда имеется всего один производитель рассматриваемого продукта.

12.1 Классическая модель монополии

Монополией называют фирму, которая является единственным производителем некоторого блага. Напомним классическую модель поведения монополиста.

Предположим, что существует «много» потребителей данного блага, и поэтому условия совершенной конкуренции выполняются на стороне потребителей. Мы предполагаем, таким образом, что потребители рассматривают условия покупки, предлагаемые монополистом, как данные. В классической модели монополии фирма-монополист предлагает всем потребителям производимое благо по одной и той же цене p. Исходя из этой цены (являясь ценополучателем), каждый потребитель предъявляет свой спрос на благо. Функцию совокупного спроса, т. е. сумму индивидуальных функций спроса, обозначим через $D(p)$. Будем считать, что функция спроса определена на всех положительных ценах и что рассматриваемое благо — нормальное, т. е. функция спроса не убывает.

Предположим далее, что допустимые технологии фирмы-монополиста описывает функция издержек $c(y)$. Обычно предполагается, что цель монополиста состоит в максимизации прибыли[1]. Таким образом, монополист выбирает цену p^{M}, являющуюся решением следующей задачи:

$$\Pi(p) = pD(p) - c(D(p)) \to \max_{p>0}.$$

Эту цену p^{M} и соответствующий ему объем производства $y^{\mathsf{M}} = D(p^{\mathsf{M}})$ будем называть равновесием при монополии.

Модель монопольного рынка полезно рассматривать как двухэтапную игру с почти совершенной информацией. На первом этапе монополия выбирает цену. На втором этапе потребители одновременно выбирают количества блага, которые они хотели бы приобрести при данной цене. Модель монополии является при этой интерпретации редуцированной игрой первого этапа для данной динамической игры, а равновесие при монополии можно рассматривать как исход, соответствующий совершенному в подыграх равновесию этой игры.

Потребители $i = 1, \ldots, m$ имеют квазилинейные функции полезности вида $u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i$, где $x_i \geqslant 0$ — потребление блага, производимого монополией, z_i — потребление «квазилинейного» бла-

[1] Здесь и далее, если не оговорено противное, мы не накладываем ограничение на положительность прибыли. Предполагается, что производитель не может свернуть производство и уйти из отрасли.

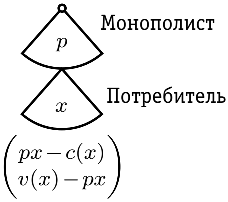


Рис. 12.1. *Представление классической модели монополии в виде игры*

га, которое можно интерпретировать как деньги, оставшиеся на покупку других благ, а $v_i(x_i)$ — денежная оценка данным потребителем потребления производимого монополией блага в объеме x_i. Если монополия предлагает благо по цене p, то выбор потребителя является решением следующей задачи максимизации потребительского излишка:

$$v_i(x_i) - px_i \to \max_{x_i}.$$

Поскольку в классической модели монополии цена одинаковая для всех потребителей, то можно упростить анализ за счет агрегирования потребителей, заменив m исходных потребителей на одного репрезентативного с функцией полезности $u(x, z) = v(x) + z$. (Способ получения оценки $v(\cdot)$ на основе оценок $v_i(\cdot)$ подробно описан в гл. 5.) Репрезентативный потребитель является ценополучателем и предъявляет такой же спрос, как и m исходных потребителей.

Таким образом, монопольный рынок удобно представить в виде игры с двумя игроками — монополистом и репрезентативным потребителем. Монополист делает первый ход, выбирая цену p, затем репрезентативный потребитель выбирает величину покупки (потребления) $x \geqslant 0$. Выигрыш монополиста — это его прибыль $px - c(x)$, а выигрыш репрезентативного потребителя — его излишек $v(x) - px$. На Рис. 12.1 представлено дерево такой игры.

Задачу монополиста можно преобразовать к виду, во многих случаях более удобному. Обозначим через $p(y) = D^{-1}(y)$ обратную функцию спроса. Будем предполагать, что она определена при $y \geqslant 0$ (т. е. область значений прямой функции спроса — интервал $[0, \infty)$)[2]. Тогда

[2] Данное условие подразумевает, в числе прочего, что функция $p(y)$ определена при $y = 0$, что, безусловно, является слишком ограничительным предположением. Так, оно не выполнено для функции $p(y) = 1/\sqrt{y}$. Тем не менее несложно модифицировать дальнейший анализ так, чтобы он подходил для этой и ей подобных функций.

величина монопольного выпуска y^{M} находится как решение следующей задачи[3]:

$$\Pi(y) = p(y)y - c(y) \to \max_{y \geqslant 0}.$$

12.1.1 Свойства монопольного равновесия

Предположим, что обратная функция спроса и функция издержек являются дифференцируемыми при $y \geqslant 0$. Производная функции прибыли $\Pi(y)$ равна

$$\Pi'(y) = p(y) + p'(y)y - c'(y).$$

Объем производства y^{M}, являющийся решением задачи максимизации прибыли, должен удовлетворять условию первого порядка

$$\Pi'(y^{\text{M}}) = p(y^{\text{M}}) + p'(y^{\text{M}})y^{\text{M}} - c'(y^{\text{M}}) \leqslant 0,$$

причем по условию дополняющей нежесткости, если решение задачи внутреннее ($y^{\text{M}} > 0$), то производная равна нулю, т. е.

$$p(y^{\text{M}}) + y^{\text{M}}p'(y^{\text{M}}) = c'(y^{\text{M}}).$$

Из условия первого порядка следует, что если $p(0) > c'(0)$, то выпуск монополии будет положительным ($y^{\text{M}} > 0$). Максимум не может достигаться в нуле, так как если $y^{\text{M}} = 0$, то должно быть выполнено

$$\Pi'(0) = p(0) - c'(0) \leqslant 0,$$

а это противоречит предположению $p(0) > c'(0)$. Если разность $p(y) - c'(y)$ убывает, то условие $p(0) > c'(0)$ является не только достаточным, но и необходимым условием положительности монопольного выпуска (докажите это самостоятельно). Выполнение этого условия необходимо, чтобы сделать анализ содержательно интересным, так как при $p(0) \leqslant c'(0)$ нулевой объем производства выгоден с точки зрения как монополиста, так и общества, и предмет анализа — рынок — отсутствует[4].

Будем предполагать, что приведенное условие выполнено, так что $y^{\text{M}} > 0$. Условие первого порядка в этом случае означает, что, так же

---

[3]Заметим, что предположения о выпуклости предпочтений и технологических множеств не гарантируют, что прибыль монополиста как функция выпуска является вогнутой (т. е. задача монополиста является выпуклой), что затрудняет использование некоторых стандартных приемов для анализа этой задачи.

[4]Анализ равновесия на монопольном рынке с точки зрения благосостояния проводится ниже. Для квазилинейной экономики верно $p(y) = v'(y)$, поэтому $p(y) - c'(y) = v'(y) - c'(y) = W'(y)$.

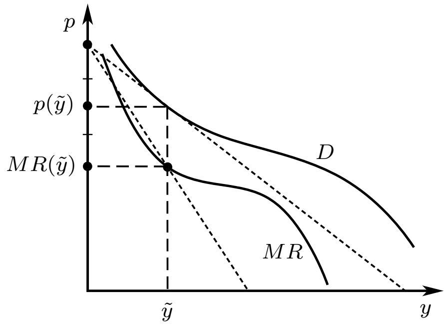


Рис. 12.2. *Построение кривой предельной выручки*

как и в условиях совершенной конкуренции, предельная выручка равна предельным издержкам:

$$p(y^{\mathsf{M}}) + y^{\mathsf{M}}p'(y^{\mathsf{M}}) = MR(y^{\mathsf{M}}) = MC(y^{\mathsf{M}}) = c'(y^{\mathsf{M}}).$$

Отличие состоит в том, что в ситуации монополии цена, по которой фирма-монополист может продать продукцию, т. е. $p(y)$, меняется в зависимости от количества, поэтому предельная выручка не равна цене.

??Приведем стандартную графическую иллюстрацию равновесия при монополии. Укажем сначала простой способ[5] построения на графике точек кривой предельной выручки $MR(y)$. Проведем касательную к кривой спроса D в точке, соответствующей некоторому объему производства $\tilde{y}$. Соответствующая объему производства $\tilde{y}$ точка кривой предельной выручки строится следующим образом: проекция точки $(\tilde{y}, p(\tilde{y}))$ на ось ординат отстоит от точки пересечения с этой осью касательной на в два раза большее расстояние, чем проекция самой этой точки $(\tilde{y}, MR(\tilde{y}))$ на кривую спроса (см. Рис. 12.2).

Другими словами, точка предельной выручки для объема производства $\tilde{y}$ лежит на медиане треугольника, отсекаемого от положительного ортанта касательной к кривой спроса в той же точке $\tilde{y}$. В случае же линейной функции спроса кривая предельной выручки оказывается просто соответствующей медианой треугольника, гипотенуза которого — кривая спроса.

Для решения монополиста можно привести графическую иллюстрацию (Рис. 12.3). На этом графике кривая предельной выручки

[5]Этот способ построения кривой предельной выручки основывается на определении и свойствах касательной в точке $\tilde{y}$ к кривой спроса.

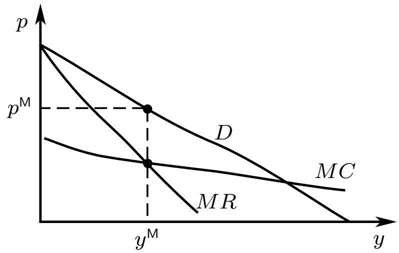


Рис. 12.3. *Равновесие при монополии*

монополиста задается уравнением $MR = p(y) + p'(y)y$, а кривая предельных издержек — уравнением $MC = c'(y)$.

Пример 12.1

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, и пусть издержки заданы функцией $c(y) = cy$ (a, b, c — константы). Тогда прибыль монополии равна

$$\Pi(y) = y(a - by) - cy = (a - c)y - by^2.$$

Максимум прибыли будет достигнут при

$$y^{\mathrm{M}} = \frac{a - c}{2b} \quad \text{и} \quad p^{\mathrm{M}} = \frac{a + c}{2}. \qquad \triangle$$

Условие равновесия при монополии можно представить в виде, явно демонстрирующем зависимость монопольной цены от издержек производителя и эластичности спроса на его продукцию. Напомним определение эластичности спроса по цене в заданной точке:

$$\varepsilon(p) = D'(p)\frac{p}{D(p)}.$$

Эластичность как функцию от объема производства можно записать через обратную функцию спроса в предположении, что производная $p'(y)$ нигде не равна нулю:

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{p'(y)}\frac{p(y)}{y}.$$

Так как мы предполагаем, что функция спроса убывает, то эластичность отрицательна и

$$|\varepsilon(y)| = -\varepsilon(y) = -\frac{1}{p'(y)}\frac{p(y)}{y}.$$

Используя эластичность, условие первого порядка можно записать в виде

$$p(y^{\mathsf{M}})\left[1-\frac{1}{|\varepsilon(y^{\mathsf{M}})|}\right]=c'(y^{\mathsf{M}}).$$

Заметим, что из условий первого порядка при естественном предположении о положительности предельных издержек ($c'(y)>0$) следует, что выбранный монополистом объем производства лежит на «эластичном» участке кривой спроса, т. е.

$$|\varepsilon(y^{\mathsf{M}})|>1.$$

В другой форме условие первого порядка максимума прибыли монополии имеет вид

$$\frac{p(y^{\mathsf{M}})-c'(y^{\mathsf{M}})}{p(y^{\mathsf{M}})}=\frac{1}{|\varepsilon(y^{\mathsf{M}})|}.$$

Здесь выражение слева — индекс Лернера[6]. Он измеряет степень искажения из-за несовершенной конкуренции через относительную величину отклонения цены от предельных издержек. Заметим, что индекс Лернера принимает значения меньшие единицы и равен нулю в условиях, когда спрос на продукцию данного производителя при монопольном выпуске y^{M} является совершенно эластичным. Выражение справа — обратная эластичность, измеряющая степень монопольной власти производителя. Если эластичность спроса бесконечна, то фирма является ценополучателем и не обладает рыночной властью.

Если обратная функция спроса $p(\cdot)$ и функция издержек монополиста $c(\cdot)$ дважды дифференцируемы, то объем производства y^{M}, максимизирующий прибыль, удовлетворяет также и условию второго порядка:

$$2p'(y^{\mathsf{M}})+y^{\mathsf{M}}p''(y^{\mathsf{M}})-c''(y^{\mathsf{M}})\leqslant 0.$$

Это условие можно также представить в виде

$$MR'(y^{\mathsf{M}})\leqslant MC'(y^{\mathsf{M}}).$$

Данное соотношение означает, что тангенс угла наклона кривой предельной выручки не превышает тангенс угла наклона кривой предельных издержек в точке их пересечения y^{M}. Другими словами, кривая предельной выручки пересекает кривую предельных издержек сверху вниз.

[6] А. Лернер предложил использовать показатель монопольной силы, который впоследствии был назван по его имени, в работе A. P. Lerner. The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power, *Review of Economic Studies* **1** (1934): 157–175.

Если для некоторого объема производства y выполнено условие первого порядка, а также условие второго порядка в виде строгого неравенства, т. е.

$$2p'(y) + yp''(y) - c''(y) < 0,$$

то этот объем производства отвечает точке локального максимума прибыли.

Рассмотрим к каким последствиям приводит наличие рыночной власти, т. е. того факта, что фирма может влиять на цену выпускаемой ею продукции и при выборе варианта своего функционирования учитывает, как ее выпуск влияет на цену. Сравним сначала выпуск и цену монополиста с объемом выпуска и ценой воображаемой фирмы, имеющей ту же функцию издержек и сталкивающейся с тем же спросом, что и рассматриваемая фирма-монополист, но являющейся ценополучателем[7]. Фирма-ценополучатель выберет такой объем производства $\bar{y}$, чтобы при фиксированной цене $p = p(\bar{y})$ получить максимум прибыли, т. е. она решает задачу

$$py - c(y) \to \max_{y \geqslant 0}.$$

При дифференцируемости равновесный выпуск $\bar{y}$ удовлетворяет условию $p(\bar{y}) - c'(\bar{y}) \leqslant 0$ (цена не превышает предельные издержки). Если равновесие внутреннее ($\bar{y} > 0$), то цена равна предельным издержкам:

$$p(\bar{y}) - c'(\bar{y}) = 0.$$

Теорема 12.1:

{i} Предположим, что (обратная) функция спроса убывает, y^{M} — объем производства, выбранный монополией, а $\bar{y}$ — объем производства, который был бы выбран фирмой с такой же функцией издержек, но действующей как ценополучатель. Тогда $y^{\mathsf{M}} \leqslant \bar{y}$.

{ii} Если, кроме того, обратная функция спроса и функция издержек дифференцируемы, $y^{\mathsf{M}} > 0$ и $p'(y^{\mathsf{M}}) < 0$[8], то $y^{\mathsf{M}} < \bar{y}$. ⌟

Доказательство: {i} По определению y^{M} максимизирует прибыль монополии. Поэтому

$$p(y^{\mathsf{M}})y^{\mathsf{M}} - c(y^{\mathsf{M}}) \geqslant p(\bar{y})\bar{y} - c(\bar{y}).$$

[7] Следует понимать, что такой выпуск может не существовать. Например, он не существует в случае так называемой естественной монополии, когда предельные издержки убывают. Таким образом, указанное сравнение не всегда оказывается возможным.

[8] Это можно гарантировать, если вторые производные $v_i''(\cdot)$ существуют и отрицательны.

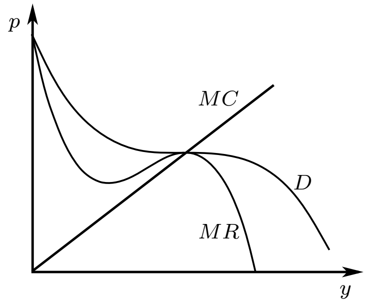


Рис. 12.4. *Пример совпадения выпусков фирмы-ценополучателя и фирмы-монополиста*

С другой стороны, выпуск $\bar{y}$ обеспечивает максимальную прибыль фирме-ценополучателю при неизменной цене $p(\bar{y})$. Поэтому

$$p(\bar{y})\bar{y} - c(\bar{y}) \geqslant p(\bar{y})y^{\mathsf{M}} - c(y^{\mathsf{M}}).$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$p(y^{\mathsf{M}})y^{\mathsf{M}} \geqslant p(\bar{y})y^{\mathsf{M}}.$$

Достаточно рассмотреть случай $y^{\mathsf{M}} > 0$ (при $y^{\mathsf{M}} = 0$ доказываемое утверждение тривиально). При этом $p(y^{\mathsf{M}}) \geqslant p(\bar{y})$, откуда, с учетом убывание обратной функции спроса, следует, что $y^{\mathsf{M}} \leqslant \bar{y}$.

{ii} Так как $y^{\mathsf{M}} > 0$, функции спроса и издержек дифференцируемы, то условие первого порядка выполнено в виде равенства. Поскольку $p'(y^{\mathsf{M}}) < 0$, цена в равновесии выше предельных издержек:

$$p(y^{\mathsf{M}}) - c'(y^{\mathsf{M}}) = -y^{\mathsf{M}}p'(y^{\mathsf{M}}) > 0,$$

С другой стороны, выпуск $\bar{y}$, удовлетворяет соотношению $p(\bar{y}) - c'(\bar{y}) \leqslant 0$. Отсюда следует, что $\bar{y}$ не может совпадать с y^{M}, а значит, $y^{\mathsf{M}} < \bar{y}$. ■

Убывания функции спроса, вообще говоря, недостаточно для справедливости второй части утверждения (т. е. условие $p'(y^{\mathsf{M}}) < 0$ теоремы существенно), что показывает приведенный на Рис. 12.4 контрпример, в котором $p(y) = -(y-1)^3 + 1$ и $c(y) = y^2/2$. В нем кривая предельной выручки касается кривой спроса в точке $y = 1$ и через ту же самую точку проходит кривая предельных издержек.

Производитель использует рыночную власть — влияние на цену продажи — для увеличения своей прибыли. Приведенные свойства позволяют понять, как возможность манипулировать ценой продаж влияет на благосостояние. Анализ потерь благосостояния, связанных с монопольной организацией рынка, является основной задачей нашего анализа несовершенных рынков и проводится в п. 12.1.2.

12.1.2 Анализ благосостояния в условиях монополии

Как известно, если предпочтения потребителей описываются квазилинейными функциями полезности, то в качестве индикатора благосостояния может использоваться величина

$$W = \sum_{i=1}^{m} v_i(x_i) - c(y)$$

(см. гл. 5). При этом множество объемов, которые максимизируют благосостояние, является множеством Парето-оптимальных состояний. При анализе благосостояния вместо m исходных потребителей можно использовать одного репрезентативного и записать благосостояние как функцию производства/потребления рассматриваемого блага:

$$W(y) = v(y) - c(y).$$

Покажем, что объем производства данного блага при монополии не может превышать Парето-оптимальный объем производства. Более того, при естественных предположениях он не может совпадать с оптимальным и поэтому меньше оптимального. Доказательство во многом схоже с доказательством Теоремы 12.1[9].

Теорема 12.2:

{i} Если обратная функция спроса $p(y)$ порождается решением задачи репрезентативного потребителя и убывает, y^{M} — объем производства, выбранный монополией, а $\hat{y} > 0$ — Парето-оптимальный объем производства, то $y^{\mathsf{M}} \leqslant \hat{y}$.

{ii} Если, кроме того, функция спроса и функция издержек дифференцируемы и $p'(y^{\mathsf{M}}) < 0$, то $y^{\mathsf{M}} < \hat{y}$. ┘

Доказательство: {i} Пусть $v(y) + z$ — функция полезности рассматриваемого репрезентативного потребителя. Так как $p(y)$ — его обратная

[9] В доказательстве не используется ни единственность монопольного равновесия, ни единственность оптимального с точки зрения общества объема выпуска. Результат теоремы следует понимать как соотношение между двумя любыми представителями соответствующих множеств.

функция спроса, то должно выполняться неравенство

$$v(y^{\mathsf{M}}) - p(y^{\mathsf{M}})y^{\mathsf{M}} \geqslant v(\hat{y}) - p(y^{\mathsf{M}})\hat{y}.$$

С другой стороны, по определению оптимума Парето

$$W(\hat{y}) = v(\hat{y}) - c(\hat{y}) \geqslant v(y^{\mathsf{M}}) - c(y^{\mathsf{M}}) = W(y^{\mathsf{M}}).$$

Сложим эти два неравенства:

$$p(y^{\mathsf{M}})\hat{y} - c(\hat{y}) \geqslant p(y^{\mathsf{M}})y^{\mathsf{M}} - c(y^{\mathsf{M}}).$$

Так как y^{M} максимизирует прибыль монополии, то

$$p(y^{\mathsf{M}})y^{\mathsf{M}} - c(y^{\mathsf{M}}) \geqslant p(\hat{y})\hat{y} - c(\hat{y}).$$

Таким образом,

$$p(y^{\mathsf{M}})\hat{y} \geqslant p(\hat{y})\hat{y}.$$

По предположению $\hat{y} > 0$, а функция $p(y)$ убывающая, значит, $y^{\mathsf{M}} \leqslant \hat{y}$.

{ii} Предположим, что утверждение второй части теоремы неверно, т. е. $y^{\mathsf{M}} = \hat{y}$. Выбор монополиста при $y^{\mathsf{M}} > 0$ должен удовлетворять условиям первого порядка:

$$p(y^{\mathsf{M}}) + p'(y^{\mathsf{M}})y^{\mathsf{M}} - c'(y^{\mathsf{M}}) = 0,$$

откуда $p(y^{\mathsf{M}}) - c'(y^{\mathsf{M}}) > 0$ (цена выше предельных издержек).

В задаче репрезентативного потребителя с квазилинейной функцией полезности обратная функция спроса $p(\cdot)$ задается формулой

$$p(y) = v'(y) \; \forall y > 0,$$

поэтому, учитывая, что $y^{\mathsf{M}} = \hat{y} > 0$, имеем

$$v'(y^{\mathsf{M}}) - c'(y^{\mathsf{M}}) > 0.$$

Однако $v'(y^{\mathsf{M}}) - c'(y^{\mathsf{M}})$ есть значение производной функции благосостояния в точке y^{M}. Таким образом, $W(y)$ не достигает максимума в точке y^{M}. Мы получили противоречие. Значит, $y^{\mathsf{M}} < \hat{y}$. ■

С учетом утверждения первой теоремы благосостояния о Парето-оптимальности множества конкурентных равновесий из только что доказанной теоремы следуют все результаты, полученные нами ранее в Теореме 12.1.

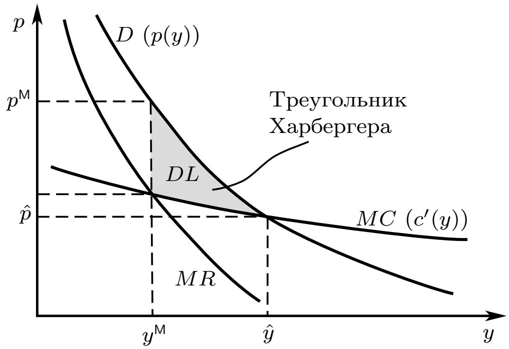


Рис. 12.5. *Чистые потери благосостояния в монопольной отрасли*

В предположениях пункта {ii} только что доказанной теоремы имеет место неравенство $W'(y^{\mathsf{M}}) > 0$, из которого следует, что уровень благосостояния в ситуации монополии ниже оптимального, т. е.

$$W(y^{\mathsf{M}}) < W(\hat{y}).$$

Другими словами, при монополии *возникают чистые потери благосостояния* ($DL > 0$), которые вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} DL = W(\hat{y}) - W(y^{\mathsf{M}}) = v(\hat{y}) - c(\hat{y}) - [v(y^{\mathsf{M}}) - c(y^{\mathsf{M}})] = \\ = [(v(\hat{y}) - \hat{p}\hat{y}) - (v(y^{\mathsf{M}}) - p^{\mathsf{M}}y^{\mathsf{M}})] + [(\hat{p}\hat{y} - c(\hat{y})) - (p^{\mathsf{M}}y^{\mathsf{M}} - c(y^{\mathsf{M}}))] = \\ = \Delta CS + \Delta PS, \end{aligned}$$

где $\hat{p} = p(\hat{y})$ — цена, соответствующая Парето-оптимальному объему производства, p^{M} — монопольная цена, ΔCS — изменение потребительского излишка, а ΔPS — изменение излишка производителя.

Напомним, что величи́ны излишков потребителя и производителя можно с точностью до константы рассчитать по формулам

$$CS(y) = \int_0^y [v'(t) - p(y)]dt = \int_0^y [p(t) - p(y)]dt$$

и

$$PS(y) = \int_0^y [p(y) - c'(t)]dt + \mathrm{const}.$$

Сумма излишков потребителя и производителя — это совокупный излишек, совпадающий с индикатором благосостояния. Таким образом,

$$W(y) = \int_0^y [p(t) - c'(t)]dt + \text{const}.$$

Другими словами, совокупный излишек соответствует площади фигуры заключенной между кривой спроса, кривой предельных издержек, осью ординат и параллельной ей прямой, проходящей через точку $(y, 0)$.

Чистые потери от монополии можно также представить в виде интеграла:

$$DL = \int_{\hat{y}}^{y^{\text{M}}} [p(t) - c'(t)]dt.$$

На Рис. 12.5 чистые потери благосостояния, которые несет общество от монополизации рынка, равны площади (криволинейного) «треугольника», называемого треугольником Харбергера[10].

Пример 12.2 (продолжение Примера 12.1)
Вычислим чистые потери от монополии в случае линейной функции спроса и постоянных предельных издержек, т. е. когда $p(y) = a - by$ и $c'(y) = c$.

Оптимальный объем производства составит

$$\hat{y} = \frac{a - c}{b},$$

монополия же, как мы видели, будет производить

$$y^{\text{M}} = \frac{a - c}{2b},$$

т. е. выпуск монополии в два раза меньше Парето-оптимального количества блага. Чистые потери от монополии составляют величину

$$DL = \int_{y^{\text{M}}}^{\hat{y}} [(a - bt) - c]dt = \frac{(a - c)^2}{8b}.$$

Таким образом, чистые потери от монополии в данном случае составляют четверть (исходного) потребительского излишка:

$$CS(\hat{y}) = \int_0^{\hat{y}} [(a - bt) - (a - b\hat{y})]dt = \frac{(a - c)^2}{2b}.$$

Рис. 12.6 иллюстрирует рассмотренный пример. △

[10]Количественные измерения потерь благосостояния были популяризированы А. Харбергером (A. C. Harberger. The Measurement of Waste, *American Economic Review* **54** (1964): 58–76).

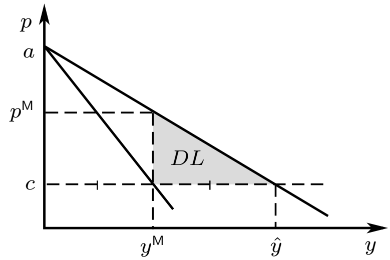


Рис. 12.6. *Чистые потери в Примере 12.2*

Помимо вышеприведенных свойств монопольного равновесия представляет интерес анализ поведения монопольного равновесия и его характеристик при изменении параметров модели, что составляет предмет сравнительной статики, рассматриваемой в п. 12.1.3.

12.1.3 Сравнительная статика

Рассмотрим сравнительную статику равновесия при монополии, т. е. поведение оптимального равновесия при изменении экзогенных параметров. Следующее утверждение описывает связь монопольного равновесия с функцией издержек[11].

Теорема 12.3:

{i} Пусть $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ — функции издержек такие, что разность $c_2(y) - c_1(y)$ возрастает на $[0, \infty)$, и пусть $y_1^{\mathsf{M}} \geqslant 0$ дает максимум прибыли монополии при издержках $c_1(\cdot)$, а $y_2^{\mathsf{M}} \geqslant 0$ — при издержках $c_2(\cdot)$. Тогда $y_1^{\mathsf{M}} \geqslant y_2^{\mathsf{M}}$.

{ii} Пусть, кроме того, $p(\cdot)$, $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ — дифференцируемые функции, причем $c_1'(y) < c_2'(y)$ при всех $y \geqslant 0$. Тогда либо $y_1^{\mathsf{M}} = y_2^{\mathsf{M}} = 0$, либо $y_1^{\mathsf{M}} > y_2^{\mathsf{M}}$. ┘

Доказательство: {i} По условиям максимальности прибыли в обеих сравниваемых точках y_1^{M} и y_2^{M} имеем:

$$p(y_1^{\mathsf{M}})y_1^{\mathsf{M}} - c_1(y_1^{\mathsf{M}}) \geqslant p(y_2^{\mathsf{M}})y_2^{\mathsf{M}} - c_1(y_2^{\mathsf{M}}),$$
$$p(y_2^{\mathsf{M}})y_2^{\mathsf{M}} - c_2(y_2^{\mathsf{M}}) \geqslant p(y_1^{\mathsf{M}})y_1^{\mathsf{M}} - c_2(y_1^{\mathsf{M}}).$$

[11]Отметим, что мы не предполагаем единственности решения задачи монополиста. В случае множественности *каждое* решение, соответствующее издержкам $c_1(\cdot)$, больше *каждого* решения, соответствующего издержкам $c_2(\cdot)$.

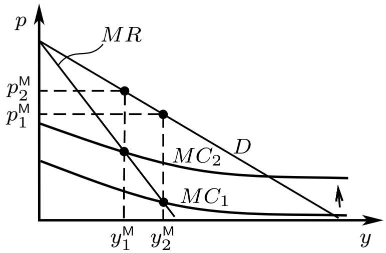


Рис. 12.7. *Влияние роста предельных издержек на выпуск монополии*

Отсюда следует, что

$$c_2(y_1^{\text{M}}) - c_1(y_1^{\text{M}}) \geqslant c_2(y_2^{\text{M}}) - c_1(y_2^{\text{M}}).$$

Из возрастания функции $c_2(y) - c_1(y)$ получаем требуемое соотношение: $y_1^{\text{M}} \geqslant y_2^{\text{M}}$.

{ii} Вторая часть утверждения (с учетом доказанной первой части) следует из сравнения дифференциальных характеристик выпусков y_1^{M} и y_2^{M} при $y_1^{\text{M}} = y_2^{\text{M}} > 0$. (Читателю предлагается провести соответствующие рассуждения самостоятельно.) ■

Доказанное утверждение иллюстрирует Рис. 12.7, на котором кривая предельных издержек смещается вверх ($MC_1 \to MC_2$).

Для частного случая постоянных предельных издержек вышеприведенная теорема может быть получена непосредственным использованием условий первого и второго порядка.

Условие первого порядка для случая постоянных предельных издержек ($c'(y) = c$) имеет следующий вид:

$$y^{\text{M}} p'(y^{\text{M}}) + p(y^{\text{M}}) = c.$$

Оно задает в виде неявной функции зависимость объема производства, выбираемого монополистом, от величины предельных издержек $y^{\text{M}} = y(c)$. В предположении существования производных обратной функции спроса $p(y)$ и функции $y(c)$ продифференцируем по c тождество

$$y(c)p'(y(c)) + p(y(c)) = c.$$

Получим соотношение

$$2p'(y(c))y'(c) + y(c)p''(y(c))y'(c) = 1,$$

или

$$y'(c) = \frac{1}{2p'(y(c)) + y(c)p''(y(c))}.$$

В знаменателе дроби стоит вторая производная прибыли, которая (по условиям второго порядка) неположительна. Отсюда следует, что $y(c)$ имеет отрицательную производную и убывает по предельным издержкам.

По изменению выпуска можно найти изменение цен по следующей формуле.

$$\frac{dp}{dc} = p'(y(c))y'(c) = \frac{p'(y(c))}{2p'(y(c)) + p''(y(c))y(c)} > 0.$$

Это соотношение показывает, что равновесная цена растет при росте издержек.

Приведенные соотношения можно применять для анализа влияния на монопольное равновесие изменения в величине издержек (шоков со стороны предложения). В качестве примера такого изменения можно рассмотреть введение налога с продаж. Так, при линейной функции спроса и постоянных предельных издержках введение налога с единицы продукции при ставке t приводит к росту цены на $t/2$. В случае же функции спроса с постоянной эластичностью $\varepsilon < 0$ (т. е. $y(p) = ap^{\varepsilon}$) введение такого налога приводит к росту цены на величину $t|\varepsilon|/(|\varepsilon|-1)$. (Справедливость этих утверждений проверьте самостоятельно, см. задачу 12.5.)

В заключение параграфа мы приведем условия существования равновесия при монополии, хотя, по нашему мнению, анализ различных условий существования — предмет скорее математической экономики, чем собственно микроэкономики.

12.1.4 Существование равновесия при монополии

Заметим, что множество допустимых решений задачи монополиста ($y \geqslant 0$) неограниченно и поэтому мы можем гарантировать существование равновесия лишь при некоторых предположениях относительно поведения функций спроса и издержек. Приводимая ниже теорема существования указывает на такие условия.

Идея доказательства состоит в том, чтобы выделить множество «возможных» монопольных выпусков, показать его ограниченность (при данных предположениях относительно функций спроса и издержек), а затем воспользоваться теоремой Вейерштрасса о существовании экстремумов непрерывной функции на компактном множестве. Другими словами, мы доказываем, что при естественных условиях относительно функций издержек и спроса задача максимизации прибыли монополиста на $y \geqslant 0$ эквивалентна задаче максимизации на некотором конечном отрезке действительной прямой (в том смысле, что множества решений этих двух задач совпадают). А для этого достаточно доказать, что прибыль вне этого отрезка ниже, чем в какой-либо точке, принадлежащей этому отрезку.

Теорема 12.4:

Пусть выполнены следующие условия:

- функция издержек $c(y)$ непрерывна на $[0, \infty)$;
- обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает на $[0, \infty)$;
- существует объем производства $\tilde{y} > 0$, такой что $W(y) \leqslant W(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$.

Тогда равновесие при монополии существует. ⌟

Доказательство: Покажем, что в условиях теоремы $\Pi(y) < \Pi(\tilde{y})$ при $y > \tilde{y}$.

Так как $p(y)$ для всех y является ценой, при которой репрезентативный потребитель выбирает y, то при любой другой величине потребления излишек потребителя не может быть выше. В частности, для $\tilde{y}$ выполнено

$$v(y) - p(y)y \geqslant v(\tilde{y}) - p(y)\tilde{y}.$$

Далее, обратная функция спроса убывает, поэтому при $y > \tilde{y}$ выполнено $p(\tilde{y}) > p(y)$, откуда $p(\tilde{y})\tilde{y} > p(y)\tilde{y}$.

Кроме того, по условиям теоремы при $y > \tilde{y}$ выполнено $v(\tilde{y}) - c(\tilde{y}) \geqslant v(y) - c(y)$.

Складывая эти три неравенства, получим, что при $y > \tilde{y}$ выполняется

$$\Pi(\tilde{y}) = p(\tilde{y})\tilde{y} - c(\tilde{y}) > \Pi(y) = p(y)y - c(y).$$

Таким образом, прибыль при выпуске $\tilde{y}$ выше, чем при любом более высоком выпуске y, поэтому задача максимизации прибыли при $y \geqslant 0$ сводится к задаче максимизации прибыли на отрезке $[0, \tilde{y}]$.

Из предположений теоремы следует, что функция прибыли $\Pi(y)$ непрерывна. Непрерывная функция прибыли согласно теореме Вейерштрасса должна достигать максимума на компактном множестве $[0, \tilde{y}]$, откуда следует существование точки y^{M}, которая максимизирует прибыль при ограничении $y \geqslant 0$. ■

Третье условие теоремы подразумевает, что после какого-то предела невозможно наращивать благосостояние простым ростом объема производства блага. Выбор объема производства выше $\tilde{y}$ не имеет смысла с точки зрения общественного благосостояния. Как видно из доказательства теоремы, из этого условия следует, что монополия тоже не станет выбирать объемы производства выше $\tilde{y}$.

Заметим, что вместо предположений относительно поведения индикатора благосостояния можно сделать соответствующие предположения относительно его производной $v'(y) - c'(y) = p(y) - c'(y)$: достаточно предположить, что функция издержек $c(y)$ и обратная функция спроса $p(y)$ являются дифференцируемыми, что $p'(y) < 0$ при $[0, \infty)$ и что существует выпуск $\tilde{y} > 0$, такой что $p(y) < c'(y)$ при $y \geqslant \tilde{y}$.

12.1.5 Модификация классической модели: ценовая дискриминация

Внутри треугольника Харбергера (см. Рис. 12.5) лежат сделки, которые являются взаимовыгодными для производителя и потребителя, т. е. любой точке внутри треугольника соответствует цена, по которой монополист готов произвести и продать, а потребитель — купить дополнительную единицу блага. Другими словами, чистые потери благосостояния представляют собой результат нереализованных взаимовыгодных сделок, но эти сделки можно осуществить только при более низких ценах, чем та, которая обеспечивает монопольную прибыль. Единственное, что сдерживает монополиста от предложения таких сделок,— это то обстоятельство, что каждую единицу блага он должен продавать *по одной и той же цене.* От сделок внутри треугольника Харбергера он мог бы выиграть за счет дополнительных продаж, но этот выигрыш будет более чем перекрыт потерями от снижения цены продажи y^{M} единиц блага.

Таким образом, треугольник Харбергера представляет взаимовыгодные, но не реализуемые при организации продаж по единой цене сделки. Однако если бы монополист мог проводить ценовую дискриминацию, т. е. продавать разные единицы блага по разным ценам, например, продавать каждую единицу блага по цене, равной соответствующему приросту полезности, то он увеличил бы свою прибыль. Конечно, осуществить это монополист мог бы лишь обладая полной информацией о предпочтениях каждого потребителя. Однако (и мы это покажем в дальнейшем) даже при более скромных предположениях об информированности монополиста о предпочтениях потребителей он может, подходящим образом организуя продажи, осуществляя «несовершенную» ценовую дискриминацию, увеличить свою прибыль.

И действительно, мир вокруг нас полон примеров такой «несовершенной» ценовой дискриминации. Например, кинотеатры часто предлагают скидки для возрастных групп потребителей. Стоимость проезда на некоторых видах транспорта зависит от признаков, которые, как считается, характерны для групп потребителей с различным спросом на данное благо (бизнесменов, туристов, студентов и т. д.).

Ниже мы рассмотрим различные виды (и схемы) ценовой дискриминации в зависимости от предположений об информированности монополиста, обратив внимание прежде всего на влияние дискриминации на благосостояние.

Различают следующие три типичных вида ценовой дискриминации:

- Дискриминация первого типа, когда монополист может как назначать разные цены за разные проданные количества блага отдельному потребителю, так и продавать одно и то же количество блага разным потребителям по разным ценам. По причинам, которые будут ясны из дальнейшего изложения, такую дискриминацию называют идеальной.
- Дискриминация второго типа — когда цена блага зависит от количество приобретаемых единиц данного блага. В качестве примера можно привести скидки для оптовых покупателей или зависимость тарифа на телефонные переговоры от их длительности. Если сравнивать этот тип дискриминации с дискриминацией первого типа, то при дискриминации второго типа с разных потребителей монополист берет *одинаковую* плату за одно и то же количество товара. (Дискриминацию первого и второго типа можно назвать нелинейным ценообразованием, поскольку цена единицы блага зависит от приобретаемого количества. Различаются они тем, что в случае идеальной дискриминации нелинейный тариф является индивидуализированным.)
- Дискриминация третьего типа — по группам потребителей (сегментированным рынкам). В качестве примера можно привести скидки студентам и пенсионерам. Дискриминация третьего типа осуществляется монополистом относительно типов потребителей вне зависимости от количества приобретаемых благ.

Данная классификация была предложена английским экономистом Артуром Пигу в работе «Экономическая теория благосостояния»[12]. В следующих параграфах мы разберем эти три типа дискриминации более подробно.

Анализируя ценовую дискриминацию, мы будем, как и ранее, исходить из предположения, что потребители рассматривают условия покупки, предлагаемые монополистом, как данные[13]. Заметим, что при этом возникают затруднения с интерпретацией дискриминации первого типа: монополист в этом случае реализует серию двусторонних сделок, так как он имеет дело с каждым потребителем индивидуально. Поэтому сделка с каждым потребителем осуществляется в ситуации двусторонней монополии. Таким образом, наше предположение в этом случае эквивалентно тому, что «переговорная сила» принадлежит монополии.

Задачи

12.1 Пусть $D(p) = 10p^{-3}$, $c(y) = 2y$. Каковы оптимальный выпуск и цена устанавливаемые монополистом?

12.2 Обоснуйте предложенный в тексте (см. с. 751 и Рис. 12.2) способ построения кривой предельного дохода по кривой спроса. (Подсказка приведена в сноске 5.)

12.3 Пусть спрос на монопольном рынке порожден двумя группами потребителей, функции спроса которых имеют вид

$$p_1(y) = a_1 - b_1 y \quad \text{и} \quad p_2(y) = a_2 - b_2 y.$$

[12] A. C. Pigou • *The Economics of Welfare*, London: Macmillan, 1932 (рус. пер. А. С. Пигу • *Экономическая теория благосостояния*, М.: Прогресс, 1985).

«Первый уровень выражается в назначении различных цен на все различные единицы товара, так что цена каждой из этих единиц равна соответствующей цене спроса, и у покупателя не остается какого-либо излишка для потребителя. Второй уровень предполагает, что монополист в состоянии установить n различных цен, вот почему все единицы товара, на которые назначена цена спроса, превышающие x, продаются по цене x, а все единицы с ценой спроса меньше x, но превышающей y, продаются по цене y и т. д. Третий уровень означает, что монополист в состоянии выделить среди своих покупателей n различных групп, которые можно в большей или меньшей мере практически различать между собой, и монополист способен назначать свою монопольную цену покупателям из каждой группы» (т. I, с. 348).

Как видно из приведенного отрывка, «второй уровень» дискриминации Пигу соответствует, скорее, неидеальной дискриминации первого типа в нашей терминологии. Мы следуем здесь сложившемуся на данный момент в экономической литературе толкованию этих терминов.

[13] Если рассматривать модели дискриминации как динамические игры, то наше предположение состоит в том, что монополист делает ход первым.

Какова общая функция спроса на продукцию данного монополиста? Какой объем производства окажется оптимальным для монополиста при разных значениях параметров?

12.4 Вычислите индекс Лернера, если предельные издержки монополиста постоянны и равны c, а функция спроса на его продукцию имеет вид

(A) $p(y) = a - by$, (B) $p(y) = ay^{-b}$,
(C) $p(y) = a - by^d$, (D) $p(y) = a - b \ln y$.

(Параметры должны быть такими, чтобы равновесие существовало.)

12.5 Вычислите в условиях задачи 12.4, как изменится цена, назначаемая монополистом, если его продукция облагается налогом с единицы продукции по ставке t.

12.6 Покажите прямыми вычислениями, что в ситуациях, описанных в задаче 12.4, объем производства, оптимальный с точки зрения монополиста, меньше такого объема производства, при котором цена равна предельным издержкам.

12.7 (A) Предположив, что $p'(y) < 0$ при всех y, покажите, что дотация на продукцию монополии приведет к увеличению объема производства. Рассчитайте величину дотации, обеспечивающую совпадение величин y^{M} и $\hat{y}$.

(B) Какой величины дотации обеспечивают совпадение объемов производства y^{M} и $\hat{y}$ в ситуациях, описанных в задаче 12.4?

12.8 При каких значениях параметров функций спроса и издержек, описанных в задаче 12.4, функция прибыли окажется вогнутой функцией объемов выпуска?

12.9 Монопольный объем производства оказался равным объему производства той же фирмы при «ценополучательном» поведении. Чем можно объяснить эту ситуацию? Перечислите возможные причины.

12.10 Приведите пример, показывающий, что условия убывания функции спроса $p(y)$, вообще говоря, недостаточно, чтобы гарантировать, что выпуск при монополии y^{M} не является Парето-оптимальным.

12.11 Приведите пример, показывающий, что условия непрерывности функций спроса и издержек являются, вообще говоря, существенными для существования равновесия при монополии.

12.12 Приведите пример, показывающий, что условие

> «Существует $\tilde{y} > 0$, такой что $W(y) \leqslant W(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$»

является существенным для существования равновесия при монополии.

12.13 Пусть спрос на продукцию монополии имеет вид $D(p,\alpha)$, где α — параметр, причем $D(p,\alpha)$ возрастает по α.

(А) Запишите необходимые и достаточные условия того, что монопольный объем выпуска растет по α.

(В) Как ведет себя прибыль по α?

12.14 Пусть спрос на продукцию монополиста равен $4-p$. Предельные издержки равны $1+y/4$. Какую сумму монополист готов заплатить за инновацию, снижающую предельные издержки до уровня $1+y/8$?

12.15 Пусть спрос на продукцию монополиста равен $1-p$. Предельные издержки равны 0,5. Какую сумму монополист готов заплатить за инновацию, снижающую предельные издержки до уровня 0,2?

12.16 Рассмотрим ситуацию, когда монополист действует на рынке с обратной функцией спроса $p(y)$. Монополист выбирает, сколько единиц блага продавать (y) и сколько инвестировать в сокращение издержек (I). Если инвестиции монополиста в сокращение издержек составляют величину I, то издержки на производство единицы блага равны $c(I)$, причем $c'(I) < 0$ и $c''(I) > 0$. Получите условия первого порядка для задачи монополиста. Сравните выбор монополиста и выбор, оптимальный с точки зрения общества. Как соотносятся y и I в двух этих случаях?

12.17 Пусть спрос на продукцию монополиста равен $1-p$, издержки на производство единицы продукции равны $(0{,}5-I)$, где I — затраты на снижение удельных издержек. Найдите выпуск, который выберет монополист, и оптимальный с точки зрения общества объем производства.

12.18 Пусть функция спроса на продукцию монополиста $1-p$. Предельные издержки монополиста равны 0,5. Государство назначает налог на единицу блага со ставкой t, уплачиваемый монополистом. Какую ставку налога установит государство в случае, если его цель — максимизация общественного благосостояния? максимизация налоговых поступлений?

12.19 Пусть функция спроса на продукцию монополиста имеет вид $D(p) = p^{-\alpha}$. Функция издержек монополиста имеет вид $c(y) = cy$. Верно ли, что при изменении издержек (росте c) изменение цены перекрывает изменение издержек?

12.20 Пусть функция спроса на некоторое благо имеет вид $D(p) = 4-p$. На этом рынке присутствуют единственный торговый посредник, который, собственно, и продает товар потребителям и монопольный производитель этого блага. Оба максимизируют свою прибыль, причем посредник не может повлиять на цену производителя. Издержки на производство единицы блага равны 2. Запишите модель, которая описывает данную экономическую ситуацию. Какие цены будут назначены производителем и посредником? Найдите чистые потери благосостояния. Сравните эти потери с потерями, которые несло бы общество в случае, если бы производитель товара сам продавал товар конечным потребителям.

12.21 Пусть в отрасли действуют монополист и торговый посредник с эксклюзивным правом продажи его товара. Как соотносятся между собой превышение цены перепродавца над ценой монополиста и превышение цены монополиста над предельными издержками? Рассмотрите различные случаи с точки зрения знака второй производной функции спроса: положительна, отрицательна, равна нулю.

12.22 Пусть спрос потребителей равен $1 - p$. На рынке этого товара присутствуют монопольный производитель, издержки которого на единицу продукции равны c, и n посредников-перепродавцов (первый перепродает второму, второй — третьему и т. д.). Найдите цену, устанавливаемую каждой из фирм, и объем продаж.

12.23 Опишите поведение монополиста после неожиданного изменения спроса на продукцию после того, как он уже произвел m единиц продукции. (Издержки утилизации излишней продукции равны нулю.) Проведите анализ для ситуаций, когда возможно дополнительное производство продукции и когда оно невозможно.

12.2 Сегментация рынка (третий тип ценовой дискриминации)

Предположим теперь, что монополист не знает точно предпочтения каждого отдельного потребителя и поэтому не может практиковать идеальную дискриминацию. Однако он может наблюдать некоторые характеристики, на которые потребитель не может повлиять (сигнал, который потребитель не может «подделать»), что позволяет выделить несколько групп потребителей. Другими словами монополист имеет возможность продавать на k *сегментах* рынка или на подрынках. Будем предполагать, что (1) монополисту известен совокупный спрос потребителей каждой группы (на каждом подрынке), но недоступна недоступна никакая информация относительно индивидуальных предпочтений[14]; (2) арбитраж между подрынками отсутствует, а именно: невозможна покупка на одном рынке и перепродажа на другом, и каждый потребитель может покупать на одном, и только на одном подрынке (отсутствует персональный арбитраж). В этом случае монополист может установить разные цены на разных подрынках (притом что в пределах одного подрынка все потребители покупают благо по одной и той же цене).

Как следствие отсутствия арбитража подрынки независимы в том смысле, что спрос на благо на каждом i-м подрынке ($i = 1, \ldots, k$) зависит только от цены на этом подрынке:

$$D_i = D_i(p_i).$$

Будем считать, что для каждого подрынка i функция спроса определена при положительных ценах и дифференцируема на множестве $(0, p_i^c]$, где p_i^c — цена удушения спроса (т. е. цена, начиная с которой спрос равен нулю).

Задача монополиста состоит в том, чтобы установить цены таким образом, чтобы получить максимальную прибыль:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i D_i(p_i) - c\left(\sum_{i=1}^{k} D_i(p_i)\right) \to \max_{p_i > 0}.$$

Из условия первого порядка в предположении, что на всех подрынках $p_i < p_i^c$, имеем

$$D_i(p_i) + p_i D_i'(p_i) = c'\left(\sum_{s=1}^{k} D_s(p_s)\right) \cdot D_i'(p_i).$$

Используя определение эластичности спроса на i-м подрынке

$$\varepsilon_i(p_i) = D_i'(p_i)\frac{p_i}{D_i(p_i)},$$

получим для всех $i = 1, \ldots, k$

$$p_i\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_i(p_i)|}\right) = c'\left(\sum_{s=1}^{k} D_s(p_s)\right).$$

[14]Отсутствие подобной информации не позволяет ему осуществлять дискриминацию внутри группы потребителей, например, использовать нелинейное ценообразование.

Поскольку правая часть во всех условиях первого порядка одинакова, то для любых двух подрынков i, s мы можем записать

$$\frac{p_i}{p_s} = \frac{1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_s(p_s)|}}{1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_i(p_i)|}}.$$

Поэтому если в равновесии $|\varepsilon_i(p_i)| < |\varepsilon_s(p_s)|$, то $p_i > p_s$. Таким образом, при дискриминации третьего типа *монополист установит цену выше на том рынке, где эластичность спроса по цене меньше по абсолютной величине.*

Понятно, что монополист не может проиграть от дискриминации, но как влияет дискриминация третьего типа на благосостояние? В частности, могут ли выиграть от такой дискриминации и потребители (за счет уменьшения чистых потерь)? Ответ на этот вопрос зависит от свойств функций спроса. Здесь мы ограничимся исследованием частного случая, когда эти функции линейны.

По тем же причинам, которые были рассмотрены ранее, мы можем анализировать влияние дискриминации третьего типа на благосостояние, считая, что спрос на каждом из подрынков порождается поведением репрезентативного потребителя, по одному на каждый подрынок, имеющего квазилинейную функцию полезности

$$u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i.$$

Поскольку репрезентативный потребитель покупает на данном рынке весь объем предложения ($x_i = y_i$), то в дальнейшем будем писать y_i вместо x_i в качестве соответствующего аргумента его функции полезности.

Сравним рынок без дискриминации, на котором монополист устанавливает единую цену $\bar{p}$, с рынком в условиях дискриминации третьего типа, когда монополист практикует дискриминирующее ценообразование, устанавливая различные цены $\tilde{p}_i$ на разных подрынках ($i = 1, \ldots, k$). Общая формула для индикатора благосостояния имеет вид

$$W(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{i=1}^{k} v_i(y_i) - c\left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right).$$

Таким образом, мы должны сравнить $\bar{W} = W(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k)$ с $\tilde{W} = W(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)$, где $\bar{y}_i = D_i(\bar{p})$, $\tilde{y}_i = D_i(\tilde{p}_i)$.

Так как спрос является решением задачи потребителя, то выполняются неравенства

$$v_i(\bar{y}_i) - \bar{p}\bar{y}_i \geqslant v_i(\tilde{y}_i) - \bar{p}\tilde{y}_i,$$
$$v_i(\tilde{y}_i) - \tilde{p}_i\tilde{y}_i \geqslant v_i(\bar{y}_i) - \tilde{p}_i\bar{y}_i.$$

Используя данные неравенства, можно записать

$$\tilde{p}_i \Delta y_i \leqslant v_i(\tilde{y}_i) - v_i(\bar{y}_i) \leqslant \bar{p}\Delta y_i,$$

где $\Delta y_i = \tilde{y}_i - \bar{y}_i$. Суммируя по всем подрынкам, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i \Delta y_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} v_i(\tilde{y}_i) - \sum_{i=1}^{k} v_i(\bar{y}_i) \leqslant \bar{p} \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i. \qquad (\#)$$

Мы рассмотрим только случай, когда монополист имеет постоянные предельные издержки, равные c, т. е. когда $c\,(y) = cy$. Вычитая из всех трех частей соотношения (#) изменение издержек при введении дискриминации, равное

$$c(\tilde{y}_\Sigma) - c(\bar{y}_\Sigma) = c\tilde{y}_\Sigma - c\bar{y}_\Sigma = c\Delta y_\Sigma,$$

где

$$\bar{y}_\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i, \quad \tilde{y}_\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i, \quad \Delta y_\Sigma = \tilde{y}_\Sigma - \bar{y}_\Sigma,$$

можно оценить изменение индикатора благосостояния $\Delta W = \tilde{W} - \bar{W}$:

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i \Delta y_i - c\Delta y_\Sigma \leqslant \sum_{i=1}^{k} v_i(\tilde{y}_i) - c\tilde{y}_\Sigma - \left(\sum_{i=1}^{k} v_i(\bar{y}_i) - c\bar{y}_\Sigma\right) \leqslant \bar{p}\Delta y_\Sigma - c\Delta y_\Sigma$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} (\tilde{p}_i - c)\Delta y_i \leqslant \Delta W \leqslant (\bar{p} - c)\Delta y_\Sigma.$$

Правое неравенство показывает, что в ситуации, когда суммарный объем продаж не увеличивается, т. е. $\Delta y_\Sigma \leqslant 0$, благосостояние (а также совокупный потребительский излишек, так как предельные издержки, по предположению, постоянны) при переходе к дискриминации не может возрасти, т. е. $\Delta W \leqslant 0$. Следовательно, необходимым условием того, что благосостояние и совокупный потребительский излишек в результате дискриминации не упадут, является рост совокупных продаж. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 12.5:

Предположим, что монополист, предельные издержки которого постоянны, перешел от единой цены ($\bar{p}$) к дискриминации по сегментам рынка. Тогда совокупное благосостояние общества может возрасти только в случае роста суммарного выпуска. ┘

Заметим, что полученная оценка изменения благосостояния опирается только на анализ поведения потребителей, но не на анализ поведения монополии. Смысл данного утверждения в том, что дискриминация вносит искажения в предельные нормы замещения по подрынкам: без дискриминации они одинаковы, а в случае дискриминации третьего типа, вообще говоря, различаются. Если отрицательный эффект этих искажений не перекрывается ростом общего потребления, то излишек потребителей, а следовательно, и общее благосостояние, не может возрасти.

Полученную оценку изменения благосостояния можно использовать для анализа влияния дискриминации в различных ситуациях, когда удается оценить изменения объема продаж и цен как результат дискриминирующего ценообразования. Это особенно просто сделать в ситуации, когда функции спроса всех групп потребителей линейны.

Пример 12.3 («теорема Дж. Робинсон и Р. Шмалензи»[15])

Предположим, что функции спроса линейны, предельные издержки постоянны и равны c и что недискриминирующий монополист продает положительный объем блага на каждом подрынке. Пусть обратные функции спроса имеют вид

$$p_i(y_i) = a_i - b_i y_i,$$

где $a_i > c$, $b_i > 0$. Недискриминирующий монополист, устанавливающий цену p, при которой спрос на i-м подрынке положителен, продает на нем

$$y_i(p) = \frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{b_i} p$$

[15] Джоан Робинсон в своей работе J. Robinson· *The Economics of Imperfect Competition*, London: Macmillan, 1933 (рус. пер. Дж. Робинсон· *Экономическая теория несовершенной конкуренции*, М.: Прогресс, 1986) показала, что в случае линейных функций спроса и издержек суммарный выпуск монополии, не проводящей ценовую дискриминацию, совпадает с выпуском монополии, проводящей дискриминацию третьего типа. Ричард Шмалензи показал, что в случае линейных функций спроса и издержек благосостояние ниже при использовании дискриминации (R. Schmalensee· Output and Welfare Implications of Monopolistic Third-Degree Price Discrimination, *American Economic Review* **71** (1981): 242–247).

единиц блага. Суммируя по подрынкам, получим, что спрос при таких ценах равен

$$y(p) = \sum_{i=1}^{k} y_i(p) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} - \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i} \right) p.$$

Обратная функция спроса при таких ценах имеет вид

$$p(y) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i/b_i}{\sum_{i=1}^{k} 1/b_i} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} 1/b_i} y,$$

и поэтому оптимальный объем продаж равен (см. Пример 12.1 на с. 752)

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} - c \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i} \right).$$

При дискриминации по подрынкам монополист продает на i-м подрынке объем

$$\tilde{y}_i = \frac{a_i - c}{2b_i}.$$

Суммируя по подрынкам, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i - c}{2b_i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} - c \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i} \right).$$

Поскольку объем продаж не меняется, то согласно Теореме 12.5 благосостояние не может возрасти, и, следовательно, чистые потери не могут уменьшиться. Более того, благосостояние при использовании дискриминации должно быть меньше, поскольку, как было отмечено выше, цены, а следовательно, и предельные нормы замещения у разных потребителей оказываются разными. Совпадение чистых потерь возможно только при совпадении цен на всех подрынках, т. е. когда

$$p_i = \frac{a_i + c}{2} = p_s = \frac{a_s + c}{2} \ \forall i, s$$

или

$$a_i = a_s \ \forall i, s.$$

Можно также непосредственно вычислить чистые потери в двух ситуациях и затем сравнить их. Читатель может проделать это самостоятельно. Мы дадим лишь графическую иллюстрацию для случая двух подрынков.

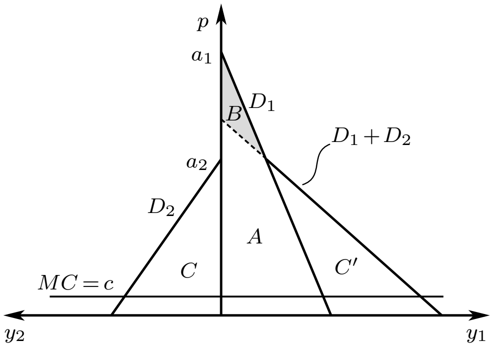


Рис. 12.8. *Сравнение чистых потерь при дискриминации по подрынкам и при отсутствии дискриминации*

На Рис. 12.8 первый подрынок изображен в правой системе координат, а второй — в левой. Соответствующие графики функций спроса обозначены через D_1 и D_2. Предполагаем, что $a_1 > a_2$. Совокупный излишек на первом подрынке равен площади фигур A и B, а на втором — площади фигуры C. Чистые потери составляют четверть этих площадей, поскольку можно рассматривать дискриминирующую монополию как недискриминирующую на каждом из подрынков (см. Пример 12.2 на с. 759). Таким образом, если монополист дискриминирует по подрынкам, то чистые потери составляют $(A+B+C)/4$.

Если монополист не проводит дискриминацию, то он сталкивается со спросом $D_1(p)+D_2(p)$ при низких ценах и со спросом $D_1(p)$ — при высоких (так как при $a_1 > p > a_2$ спрос на втором подрынке равен нулю, в то время как спрос на первом подрынке все еще остается положительным). Таким образом, кривая спроса представляет собой ломаную. Пусть параметры функций спроса и предельных издержек таковы, что в оптимуме монополист продает на обоих подрынках, и, следовательно, цена $\bar{p}$ лежит на нижнем участке кривой спроса ($\bar{p} < a_2$). При нахождении чистых потерь в этом случае форма кривой спроса важна только при ценах, не превышающих $\bar{p}$. Таким образом, можно считать, что в верхней части кривая спроса не изгибается, что показано на Рис. 12.8 пунктиром. При этом чистые потери должны быть равны четверти площади треугольника, составленного из фигур A и C'. Значит, без дискриминации чистые потери составляют $(A+C')/4$.

Заметим теперь, что площади треугольников C и C' равны, поскольку высоты и основания у них одинаковы. Получаем, что без дискриминации чистые потери меньше на величину $B/4$. △

Задачи

12.24 Фирма с функцией издержек $c(y) = y^2$ является монополистом на внутреннем рынке и продает на нем свою продукцию по цене 20. В то же время она имеет доступ на конкурентный внешний рынок, где цена равна 10. Арбитраж между рынками невозможен. Найдите индекс Лернера для внутреннего и внешнего рынков.

12.25 Проверьте, что если функции спроса имеют вид $D(p_i) = \alpha_i(\beta - p)$, то монополисту невыгодно применять дискриминацию третьего типа.

12.26 Фирма-монополист может разделить своих потребителей на k непересекающихся групп. Функция спроса каждой группы $(i = 1, \ldots, k)$ от цены равна $D_i(p_i)$ $(D_i' < 0)$, общая функция издержек: $c(y)$, где $y = \sum_{i=1}^k y_i$ $(c'(\cdot) > 0)$.

Пусть $k = 2$,

$$
\begin{aligned}
D_1(p_1) &= (a_1 + a_2 + b_1) - b_1 p_1, \\
D_2(p_2) &= (a_2 + b_1 + b_2) - (b_1 + b_2) p_2, \\
c(y) &= y,
\end{aligned}
$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные константы.

(A) Возьмите конкретные числа a_1, a_2, b_1, b_2 и найдите максимум прибыли при использовании дискриминации и без (когда цена одинакова). В каком случае объем производства выше?

(B) Покажите, что при любом наборе констант цену для первой группы выгодно установить более высокую.

12.27 В ситуации предыдущей задачи взять $y_i = b_i p_i^{1+1/a_i}$, $a_i, b_i > 0$. Доказать, при произвольном k, что отношения цен в равновесии не зависят от $c(\cdot)$ и найти их.

12.28 Пусть монополист продает на двух независимых рынках, где эластичность спроса постоянна и составляет ε_1 на одном и ε_2 на другом рынке. Предельные издержки постоянны $(c'(y) = c)$. Какие цены установятся на этих двух рынках?

12.29 Как в ситуации Примера 12.3 (с. 773) соотносятся цены, назначаемые монополистом на каждом из подрынков при дискриминации, и без применения дискриминации?

12.30 В ситуации Примера 12.3 (с. 773), вычислив чистые потери благосостояния при дискриминации, проверьте, проведя соответствующие алгебраические преобразования, что они не меньше, чем потери без дискриминации. Для упрощения считайте предельные издержки нулевыми. При доказательстве воспользуйтесь неравенством Коши—Буняковского:

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ky_k)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_k^2)(y_1^2 + \cdots + y_k^2).$$

12.31 Постройте пример, в котором при дискриминации третьего типа чистые потери были бы меньше, чем без дискриминации.

12.32 Монополия продает однородный товар на двух рынках. Продажи товара на втором рынке связаны с дополнительными транспортными издержками. Приведите пример функций спроса, такой что монополии выгодно установить на втором рынке более низкую цену, чем на первом, несмотря на более высокие издержки.

12.33 Пусть монополия продает товар на двух подрынках. Эластичности спроса по цене постоянные, причем $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|$. Предельные издержки постоянные и равны c. Доказать, что если объемы продаж положительны, то цена без дискриминации $\bar{p}$ лежит в промежутке между ценами при дискриминации по подрынкам $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$. (Что больше, $\tilde{p}_1$ или $\tilde{p}_2$?) (*Указание:* $|\varepsilon(p)| = \sum_{i=1}^{k} |\varepsilon_i(p)| D_i(p) / \sum_{i=1}^{k} D_i(p)$.)

12.34 Монополия продает свою продукцию на двух взаимосвязанных подрынках. Функции спроса равны $D_1(p_1, p_2) = p_2^{\alpha}/p_1^{\beta}$ и $D_2(p_1, p_2) = p_1^{\alpha}/p_2^{\beta}$ соответственно, где $\alpha > 0$, $\beta > \alpha + 1$. Как соотносятся индекс Лернера и обратные эластичности спроса на подрынках? (*Указание:* Оптимальные цены будут одинаковы).

12.3 Нелинейное ценообразование

12.3.1 Идеальная ценовая дискриминация (дискриминация первого типа)

Как уже говорилось, особенность идеальной дискриминации (дискриминации первого типа) состоит в том, что монополист может назначать разные цены в зависимости от того, какое количество блага и какому потребителю он продает. Таким образом, можно сказать, что при дискриминации первого типа каждая продаваемая единица блага имеет свою цену, в общем случае не совпадающую с ценой другой единицы блага. При идеальной дискриминации монополист выбирает *оптимальную* для себя схему ценообразования в условиях, когда

- он знает индивидуальные функции спроса каждого потребителя;
- может различать потребителей;
- и невозможен так называемый арбитраж — перепродажа благ потребителями друг другу[16].

Очевидно, что этот тип дискриминации имеет лишь теоретическое значение, как недостижимая идеальная для монополиста ситуация из-за чрезмерно высоких требований к информированности монополиста относительно предпочтений потребителей производимого им блага.

Проанализируем свойства сделок при такого типа дискриминации.

Пусть имеется m потребителей, предпочтения которых представимы квазилинейными функциями полезности $u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i$. Будем предполагать, что каждая функция полезности является дифференцируемой, $v_i'(\cdot) > 0$ и $v_i'(\cdot)$ убывает (предельная полезность положительна и убывает). Потребители обладают фиксированными запасами «квазилинейного» блага ω_i (но благо x у них отсутствует). О функции издержек монополиста $c(\cdot)$ будем предполагать, что она дифференцируема, $c'(\cdot) > 0$ и $c'(\cdot)$ не возрастает (предельные издержки положительны и технология характеризуется убывающей отдачей от масштаба).

Рассмотрим сначала условную ситуацию, в которой монополист может назначить количество блага (x_i), которое купит у него каждый потребитель, а также ту сумму денег (t_i), которую заплатит ему потребитель за полученное количество блага. Заметим, что если x_i и t_i такие, что

$$u_i(x_i, \omega_i - t_i) < u_i(0, \omega_i),$$

то потребителю более выгодно «уйти с рынка», чем приобрести x_i, заплатив t_i. Но ту же прибыль монополист получит, предложив потребителю i сделку $x_i = 0$, $t_i = 0$. Таким образом, без ограничения общности можем ограничиться рассмотрением сделок, на которые потребитель согласится, т. е. сделок x_i, t_i, которые удовлетворяют ограничению

$$v_i(x_i) - t_i \geqslant v_i(0).$$

[16]Если монополист не может различать потребителей, то одни потребители могли бы покупать те единицы блага, которые предназначены для других потребителей. Такую ситуацию, как уже говорилось выше, можно назвать «персональным арбитражем».

Это ограничение принято называть условием участия. С целью упрощения будем предполагать, что функции полезности нормированы так, что $v_i(0) = 0$. При этом условие участия принимает вид

$$v_i(x_i) \geqslant t_i.$$

Максимизирующий прибыль монополист предложит потребителям сделки, которые соответствуют решению следующей оптимизационной задачи:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} t_i - c\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \to \max_{(t_i, x_i)_i}$$
$$v_i(x_i) \geqslant t_i \ \forall i \in I,$$
$$x_i \geqslant 0 \ \forall i \in I.$$

В оптимуме все ограничения участия выходят на равенство, поскольку монополисту выгодно установить плату для каждого потребителя как можно выше:

$$t_i = v_i(x_i) \ \forall i \in I.$$

Подставляя эти равенства в прибыль, получаем эквивалентную задачу:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} v_i(x_i) - c\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \to \max_{x_1 \geqslant 0, \ldots, x_m \geqslant 0}.$$

Нетрудно заметить, что целевая функция здесь в точности совпадает с индикатором благосостояния. Это означает, что решение данной задачи соответствует Парето-оптимуму.

Будем предполагать, что такое «идеальное» решение (x_i^*, t_i^*) существует[17].

Предположим, что это решение является внутренним для всех потребителей, т. е. каждый потребитель покупает положительное количество блага ($x_i^* > 0$)[18]. В предположении, что функции $v_i(\cdot)$, $c(\cdot)$ дифференцируемы, внутреннее решение удовлетворяет условию первого порядка

$$v_i'(x_i^*) = c'\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^*\right) \ \forall i \in I.$$

[17] При невозрастающей отдаче от масштаба существование решения следует из непрерывности функций $v_i(\cdot)$, $c(\cdot)$ и из того, что существуют $\tilde{y}_i > 0$, такие что $v_i(\tilde{y}_i) - c(\tilde{y}_i) > v_i(y) - c(y)$ при $y > \tilde{y}_i$.

[18] Если предельные издержки не возрастают и $v_i'(0) > c'(0)$, то из существования оптимального решения следует положительность: $x_i^* > 0$.

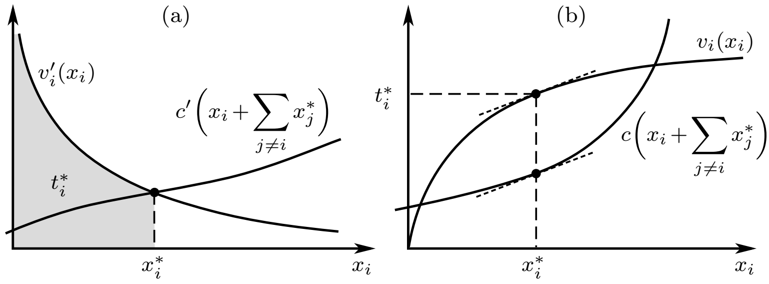


Рис. 12.9. *«Идеальная» пара* (x_i^*, t_i^*)

Из этого следует, в частности, равенство предельных норм замещения

$$v_i'(x_i^*) = v_j'(x_j^*)\ \forall i, j.$$

«Идеальная» плата t_i^* находится из условия $t_i^* = v_i(x_i^*)$.

На Рис. 12.9 представлены две различные интерпретации нахождения «идеальной» пары (x_i^*, t_i^*) монополистом. На Рис. 12.9a при $x_i = x_i^*$ предельные издержки равны предельной полезности. На Рис. 12.9b при $x_i = x_i^*$ расстояние по вертикали между кривыми $c(x_i + \sum_{j \neq i} x_j^*)$ и $v_i(x_i)$ максимально; соответственно, касательные к обеим кривым имеют одинаковый наклон. «Идеальная» плата соответствует на Рис. 12.9a площади под кривой предельной полезности, поскольку

$$t_i^* = v_i(x_i^*) = \int_0^{x_i^*} v_i'(x)dx.$$

Пример 12.4

Пусть функция полезности i-го потребителя имеет вид $u_i(x_i, z_i) = \sqrt{x_i} + z_i$ и функция издержек линейна: $c(x) = cx$. Тогда объем потребления этого потребителя x_i^* находится из уравнения

$$c = \frac{1}{2\sqrt{x_i^*}}$$

и составляет

$$x_i^* = \frac{1}{4c^2}.$$

При этом плата за приобретаемое благо t_i^* равна

$$\sqrt{x_i^*} = \sqrt{\frac{1}{4c^2}} = \frac{1}{2c}.$$

△

Покажем, что монополист, во-первых, не может получить более высокую прибыль при любых способах организации сделок с потребителями и, во-вторых, может реализовать эти оптимальные сделки, предложив каждому потребителю некоторую схему оплаты (схему ценообразования или, как еще говорят, нелинейный тариф) — функцию $t_i(\cdot)$. Более того, существует *бесконечно много* способов реализовать «идеальные» сделки с помощью нелинейного тарифа.

Согласно схеме нелинейного тарифа $t_i(\cdot)$ потребитель может приобрести количество x за $t_i(x)$. Обычную схему ценообразования, т. е.

$$t_i(x_i) = px_i,$$

называют *линейной*. Ценообразование по любой другой схеме, в том числе по схеме вида

$$t_i(x_i) = A + px_i,$$

которая будет рассмотрена ниже, принято называть нелинейным ценообразованием.

Задача монополиста состоит в том, чтобы выбрать функции $t_i(\cdot)$, обеспечивающие максимальную прибыль. Если при данной системе сделок потребители выбрали объемы покупок x_i, $i = 1, \ldots, n$, то прибыль монополиста составит

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} t_i(x_i) - c\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right).$$

Конечно, эта формула верна только в случае, когда все потребители решают остаться на рынке. В противном случае $x_i = 0$ и соответствующее слагаемое $t_i(x_i)$ в первой сумме отсутствует.

При выборе схемы оплаты монополист должен учитывать, как, столкнувшись с такой схемой, будет действовать потребитель, которому она предназначена. При этом можно считать, что потребитель, столкнувшись с такой схемой, принимает решение в два этапа. На первом этапе он решает следующую задачу[19] (выбора наилучшей сделки при условии, что он в ней участвует):

$$v_i(x_i) + z_i \to \max_{x_i \geqslant 0, z_i}$$

$$t_i(x_i) + z_i \leqslant \omega_i.$$

Кратко задачу потребителя можно переписать в следующем виде:

$$v_i(x_i) - t_i(x_i) \to \max_{x_i \geqslant 0}.$$

[19] Будем предполагать здесь и ниже, что монополист предлагает только такие схемы, при которых задачи потребителей имеют решения.

На втором этапе потребитель принимает решение, участвовать ли ему в предложенной сделке. Если значение целевой функции этой задачи в точке оптимума меньше нуля, то ограничение участия не выполнено и потребителю выгоднее уйти с рынка. Заметим, что если потребитель уйдет с рынка, то монополист получит такую же прибыль, как и в случае, когда потребитель остается на рынке, но покупает нулевой объем ($x_i = 0$) и ничего за это не платит ($t_i = 0$). Таким образом, без ограничения общности можно рассматривать только такие нелинейные тарифы, что $t_i(x_i) = 0$. При этом можно считать, что потребитель осуществляет выбор в один этап.

Заметим, что *при любом выборе нелинейных тарифов монополист не может получить бо́льшую прибыль, чем в случае «идеальных» пар* (x_i^*, t_i^*). Действительно, пусть монополист назначил для всех потребителей $i = 1, \ldots, m$ некоторые тарифы $t_i(\cdot)$. Пусть при этих тарифах потребители выбрали объемы потребления x_i. Фактически реализовавшиеся пары $(x_i, t_i(x_i))$ должны удовлетворять ограничению участия. Следовательно, они допустимы в задаче выбора «идеальных» пар и не могут дать монополисту более высокую прибыль.

Если условие участия выполняется как равенство, то сделка не увеличивает полезность потребителя. Тем не менее будем исходить из предположения, что такие сделки совершаются (предположения «благожелательного» поведения потребителей), ведь у монополиста всегда есть возможность назначить плату немного ниже $t_i(x_i)$.

В дальнейшем мы для упрощения записи будем опускать индекс i поскольку в каждом случае будем рассматривать поведение отдельного потребителя. При сделанных нами предположениях несложно найти схемы оплаты, которые позволяют реализовать оптимальный контракт (x^*, t^*).

Самая простая схема оплаты заключается в том, что монополист предлагает потребителю приобрести количество x за плату t. (Так называемый тип «не хочешь — не бери»[20]). Такую схему можно условно представить в виде следующей функции:

$$t(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ t^*, & 0 < x \leqslant x^*, \\ +\infty, & x > x^*. \end{cases}$$

[20]Англ. *take-it-or-leave-it.*

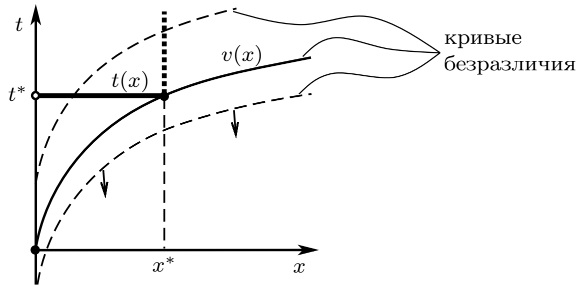


Рис. 12.10. *Тариф типа «не хочешь — не бери»*

Если потребитель столкнется с такой схемой оплаты, то его оптимальным выбором будет $x = x^*$. Рис. 12.10 иллюстрирует выбор потребителя при этой схеме оплаты.

Пример 12.5 (продолжение Примера 12.4)
Для рассмотренного выше примера схема оплаты «не хочешь — не бери» примет вид

$$t(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1/(2c), & 0 < x \leqslant 1/(4c^2), \\ +\infty, & x > 1/(4c^2). \end{cases}$$

△

Идеальную дискриминацию можно проводить и в других формах. Наиболее известная из них — так называемый двухставочный тариф. Оплата состоит из двух частей: фиксированной суммы $A > 0$ за право приобретения (любого количества) товара и части, пропорциональной количеству приобретенного товара — px, т. е.

$$t(x) = A + px.$$

Подобная практика, например, действует в увеселительных парках, где платят и за право входа, и отдельно за каждый аттракцион. Для реализуемости схемы важно, что купивший право входа не может перепродать благо (вынести и перепродать аттракцион).

Идеальную схему дискриминации при двухставочном тарифе можно реализовать, если установить цену единицы блага p на уровне $v'(x^*)$, а A выбрать равным $v(x^*) - px^*$ (см. Рис. 12.11). Фиксированная часть тарифа A равна *обычному* потребительскому излишку при

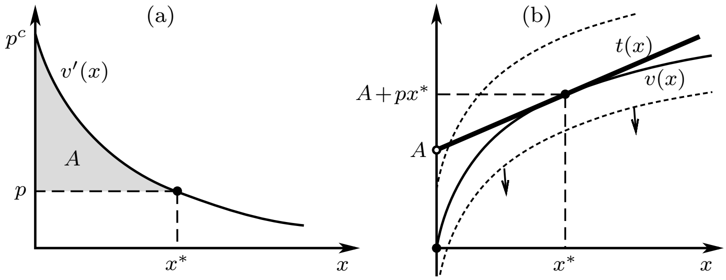


Рис. 12.11. *Двухставочный тариф*

цене p и соответствует площади под графиком предельной полезности (см. Рис. 12.11a):

$$A = v(x^*) - px^* = \int_p^{p^c} x(s)ds = \int_0^{x^*} (v'(x) - p)dx$$

(через p^c мы обозначили цену удушения спроса). При такой схеме оплаты потребитель, так же как и в случае схемы «не хочешь — не бери», выберет $x = x^*$ (см. Рис. 12.11b). Это, вообще говоря, только одно из оптимальных решений потребителя. Здесь можно считать, что потребитель выбирает именно тот объем потребления, который запланировал монополист. Дело в том, что монополист может немного (сколь угодно мало) исказить функцию $t(\cdot)$ и сделать x^* единственным оптимальным решением для потребителя.

Пример 12.6 (продолжение Примера 12.4)
Для рассмотренного выше примера параметры двухставочного тарифа равны

$$A = \frac{1}{4c} \quad \text{и} \quad p = c.$$

Схема оплаты имеет вид

$$t(x) = \begin{cases} 1/(4c) + cx, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

△

Еще одна возможная схема совершенной дискриминации состоит в установлении индивидуализированных цен за каждую «единицу» приобретаемого блага.

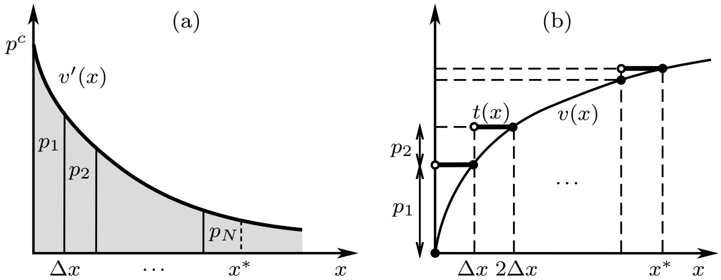


Рис. 12.12. *«Ступенчатый» тариф*

Пусть Δx — (произвольная) единица блага и N таково, что $N\Delta x = x^*$. Зададим цену каждой j-й единицы товара по формуле

$$p_j = v(j\Delta x) - v((j-1)\Delta x).$$

Покупая благо в количестве x^*, потребитель должен заплатить сумму $\sum_{j=1}^N p_j$, равную общей оценке количества x^*, т. е. $v(x^*) - v(0) = v(x^*)$, в чем легко убедиться, сложив индивидуализированные цены.

Графическая иллюстрация данной схемы приведена на Рис. 12.12. Можно считать, что функция $t(\cdot)$ в рассматриваемом случае имеет ступенчатую форму (см. Рис. 12.12b), так что размер «ступеньки» равен цене единицы блага.

В пределе, при $N \to \infty$ ($\Delta x \to 0$) данная схема все больше приближается к схеме

$$t(x) = v(x),$$

которая тоже реализует «идеальную» пару (x^*, t^*).

Пример 12.7 (продолжение Примера 12.4)
Пусть $N = 4$. Тогда

$$\Delta x = \frac{1}{4}x_i^* = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4c^2} = \frac{1}{16c^2}.$$

Поскольку $v(x) = \sqrt{x}$, то цены находятся по формуле

$$p_j = \sqrt{j\Delta x} - \sqrt{(j-1)\Delta x},\ i = 1, \ldots, 4,$$

откуда

$$p_1 = 1/4c, \quad p_2 = (\sqrt{2}-1)/4c,$$
$$p_3 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})/4c, \quad p_4 = (2-\sqrt{3})/4c. \qquad \triangle$$

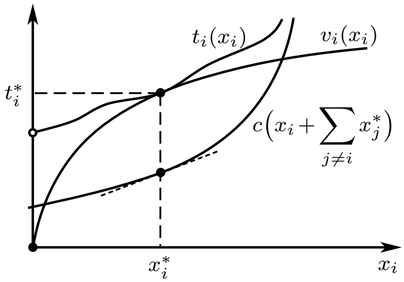


Рис. 12.13. *Нелинейный тариф — общий случай*

Мы рассмотрели три различные схемы, к которым может прибегнуть монополист. Но это не единственные возможные схемы. В общем случае нелинейная схема оплаты $t_i(\cdot)$ при идеальной дискриминации должна быть такой, чтобы соответствующая кривая всюду лежала не ниже кривой $v_i(\cdot)$ и проходила через ту же точку $(x_i^*, v_i(x_i^*))$, т. е. чтобы кривая $t_i(\cdot)$ касалась кривой $v_i(\cdot)$ при $x_i = x_i^*$. Эти требования соответствуют тому, что потребитель должен добровольно выбрать $x_i = x_i^*$ и, кроме того, должен добровольно участвовать в сделке — прирост его полезности в результате сделки должен равняться нулю. Графическая иллюстрация оптимального нелинейного контракта дана на Рис. 12.13.

При идеальной дискриминации количество блага, покупаемое каждым потребителем, таково, что предельные полезности равны предельным издержкам. То есть ситуация с производством этого блага такая же, как при совершенной конкуренции, чего нельзя сказать о распределении дохода от этой деятельности. В условиях совершенной конкуренции потенциальный излишек остается у каждого потребителя, а здесь он целиком достается монополисту. Если нас не интересует проблема справедливости распределения доходов, например, если мы считаем, что ее можно решить в рамках эффективной системы налогов и трансфертов, то мы видим, что идеальная дискриминация приводит к эффективным вариантам производственной деятельности монополиста. Таким образом, проблема с неэффективностью монополии состоит в первую очередь не в том, что монополист получает «сверхприбыль», а в том, что он не может осуществлять идеальную дискриминацию, которая приводит к эффективности по Парето.

Что мешает монополисту осуществлять идеальную дискриминацию? Перечислим некоторые возможные причины.

(1) *Существует вторичный рынок (арбитраж).* Те сделки, которые монополист сконструировал для каждого покупателя, вполне могут не реализоваться. Потребитель может купить не то количество x_i^*, которое ему предлагается, а большее количество, т. е. $x_i > x_i^*$, и перепродать $x_i - x_i^*$ по выгодной цене другому потребителю.

(2) *Монополист должен знать слишком много.* Он должен знать функцию полезности каждого потребителя. Если он не знает функцию полезности каждого потребителя или не может различать потребителей, то он просто не может проводить идеальную дискриминацию.

(3) По каким-то соображениям *«персонифицированная» дискриминация может быть законодательно запрещена.*

Могут возникнуть и другие обстоятельства, которые способны помешать реализации данного варианта дискриминации. Любая дискриминация в реальных условиях не может быть идеальной. Эти рассуждения являются точкой отсчета для сравнения идеального с точки зрения эффективности с тем, что в реальности является возможным.

12.3.2 Нелинейное ценообразование при асимметричной информации (дискриминация второго типа)

Предположим теперь, что монополист не имеет возможности предлагать разным потребителям разные сделки, потому что не умеет различать потребителей. Мы будем придерживаться именно интерпретации асимметричной информированности, хотя возможны и другие интерпретации (например, монополист может быть ограничен законодательством в праве такой «персонифицированной» дискриминации).

Поскольку монополист не может различать потребителей, то он должен предложить общие для всех потребителей условия продаж. Предположим, что он предлагает нелинейную схему оплаты (нелинейный тариф) $t(\cdot)$, сопоставляющую каждому выбранному объему покупки x плату $t(x)$. Как и ранее, будем считать, что отсутствуют возможности для арбитража. Это означает, что каждый потребитель может потреблять только то количество блага, которое он приобрел у монополиста.

Проведем анализ случая, когда на рынке всего два типа потребителей: l и h. Готовность платить для потребителя типа $i = l, h$

выражается возрастающей вогнутой функцией $v_i(\cdot)$. Если предполагается, что $v_i(\cdot)$ дифференцируемы, то предельную полезность $v_i'(\cdot)$ будем считать положительной и убывающей. Потребители типа l при любых количествах рассматриваемого блага оценивают «малую» единицу этого блага ниже, чем потребители типа h, т. е. для всех объемов потребления x

$$v_l'(x) < v_h'(x).$$

Это предположение гарантирует возрастание разности $v_h(x) - v_l(x)$ по x. Будем обозначать эту разность через $\varphi(x)$. Последующий анализ в основном оказывается справедливым, если использовать возрастание функции $\varphi(\cdot)$ как исходную посылку, не предполагая дифференцируемости функций полезности и издержек.

При $v_i(0) = 0$ $(i = l, h)$ из возрастания $\varphi(\cdot)$ следует также и соотношение

$$v_l(x) < v_h(x)$$

для всех положительных объемов потребления $(x > 0)$.

Сталкиваясь с нелинейным тарифом, потребитель выбирает объем покупки, решая следующую задачу:

$$v_i(x) - t(x) \to \max_{x \geqslant 0}.$$

Пусть x_i — ее решение. Заметим, во-первых, что, как и в случае идеальной дискриминации, потребитель i соглашается на сделку тогда и только тогда, когда

$$v_i(x_i) - t(x_i) \geqslant 0.$$

Как обычно, мы предполагаем, что потребитель благожелателен по отношению к монополисту, т. е. если ему все равно, соглашаться ли на сделку или отказаться от нее, то он соглашается на сделку. Во-вторых, если потребитель отказывается от сделки, то выигрыш потребителя равен нулю, поэтому без ограничения общности можно считать, что $t(0) = 0$ и что потребитель всегда соглашается на сделку.

Поскольку каждый потребитель при любом предложенном тарифе $t(\cdot)$ выберет некоторый конкретный объем покупки, то с учетом предположения благожелательности каждому такому тарифу можно сопоставить пакетную сделку. Установим сначала, какие пакетные сделки являются оптимальными с точки зрения монополиста, а затем — как реализовать эти сделки на основе нелинейных тарифов.

12.3.3 Дискриминация второго типа: пакетная дискриминация

В общем случае монополист может предложить потребителям на выбор меню из k пакетов: (x_j, t_j), $j = 1, \ldots, k$. Задача монополиста состоит в том, чтобы выбрать пакеты так, чтобы получить наибольшую прибыль (от тех пакетов, которые ему удастся продать). Прежде всего приведем модель к эквивалентному, но более простому виду.

Во-первых, достаточно рассмотреть случай, когда монополист предлагает только два пакета ($k = 2$). (Читатель может сам провести рассуждения, доказывающие это.)

Во-вторых, без ограничения общности можно рассматривать такие пары пакетов, при которых первый пакет для потребителей типа l не хуже, чем второй, и соответственно второй пакет для потребителей типа h не хуже, чем первый, т. е. считать, что пакеты помечены индексами типов потребителей:

$$(x_l, t_l) \quad \text{и} \quad (x_h, t_h).$$

Действительно, набор пакетов, такой что потребители выберут «не свои» пакеты, дает монополисту ту же прибыль, что и набор из этих же пакетов, в котором индексы переставлены, а такой набор уже удовлетворяет указанному ограничению. В ситуации, когда все потребители выберут один и тот же пакет, набор из двух пакетов, совпадающих с выбранным, также удовлетворяет указанному свойству, причем от такого изменения прибыль монополиста не меняется.

Таким образом, будем рассматривать такие пары пакетов, для которых выполняются так называемое условие самовыявления — ограничение, которое гарантирует, что ни одному потребителю невыгодно выбирать пакет, который ему не предназначен. Для потребителей типа l условие самовыявления имеет вид

$$v_l(x_l) - t_l \geqslant v_l(x_h) - t_h,$$

а для потребителей типа h — вид

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant v_h(x_l) - t_l.$$

Ограничения самовыявления в контексте рассматриваемой ситуации ценовой дискриминации называют также ограничениями на персональный арбитраж.

В-третьих, как и в контексте дискриминации первого типа, если ограничение участия не выполнено, то потребитель уйдет с рынка и монополист получит такую же прибыль, как и в случае, когда потребитель выбрал пакет вида $(x_i, t_i) = (0, 0)$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением таких пакетов, при которых ни один потребитель не уйдет с рынка. Это в точности такие пакеты, для которых выполняются *условия участия*:

$$v_i(x_i) - t_i \geqslant 0, \; i = l, h.$$

Таким образом, множество стратегий монополиста можно ограничить наборами пакетов, которые удовлетворяют ограничениям участия и ограничениям самовыявления.

Проведем сначала анализ неформально на основе графического представления рассматриваемой ситуации (см. Рис. 12.14). Проиллюстрируем прежде всего тот факт, что условия самовыявления существенны в том смысле, что пакеты, которые монополист выбрал бы при идеальной дискриминации, в данном случае не являются допустимыми и поэтому не могут быть решением задачи монополиста в рассматриваемой ситуации скрытых типов. При этом будем использовать дополнительное упрощающее предположение, что предельные издержки постоянны ($c > 0$).

Каждому из типов потребителей $i = l, h$ при идеальной дискриминации будет предложена сделка

$$(x_i, t_i) = (x_i^*, t_i^*),$$

причем объем x_i^* будет выбран так, чтобы выполнялось

$$v_i'(x_i^*) = c,$$

а плата t_i^* будет выбрана такой что потребительский излишек окажется равным нулю, т. е. $t_i^* = v_i(x_i^*)$.

На Рис. 12.14 плате t_l^* потребителей типа l соответствует площадь $A + B + C$, а плате t_h^* потребителей типа h — площадь $A + B + C + D + E + F$.

Если «персонифицированная» дискриминация неосуществима и потребители обоих типов могут выбирать любую из двух предложенных им сделок, то все они предпочтут сделку первого типа (x_l^*, t_l^*). Потребитель типа h предпочтет сделку первого типа, поскольку если он покупает x_l^* блага по цене, равной площади $A + B$, то его излишек составит величину C, в то время как в случае, когда он соглашается на сделку второго типа, его излишек равен нулю.

Таким образом, производитель должен сконструировать второй пакет так, чтобы он был добровольно выбран потребителем типа h. Предположим, что он оставляет во втором пакете то же количество

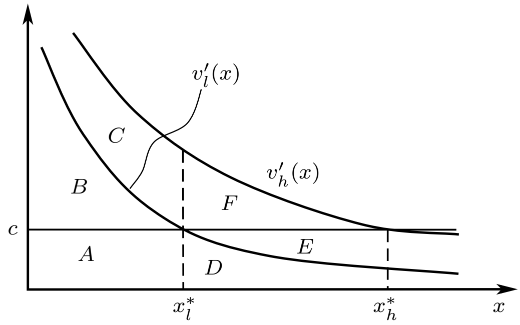


Рис. 12.14. *«Персонифицированная» дискриминация возможна*

блага. Тогда, чтобы этот пакет для потребителей типа h оказался не менее привлекательным, чем первый пакет, монополист должен уменьшить его цену на величину, не меньшую, чем площадь фигуры C (т. е. $v_h(x_l^*) - v_l(x_l^*)$). При этом потребитель типа h оказывается безразличным к выбору между сделкой первого и второго типа, но мы будем считать, как и ранее, что из внемодельных соображений он всегда будет предпочитать то, что более выгодно производителю т. е. сделку второго типа. Таким образом, оптимальные сделки будут иметь вид

$$(x_l^*, v_l(x_l^*)) \quad \text{и} \quad (x_h, v_h(x_h^*) - [v_h(x_l^*) - v_l(x_l^*)]).$$

Эта система сделок удовлетворяет условию самовыявления: потребитель каждого типа предпочитает предназначенную для него сделку. На Рис. 12.14 плате по сделкам типа h соответствует площадь $A + B + D + E + F$.

Хотя данная система сделок удовлетворяет условиям участия и самовыявления, нетрудно видеть, что она не оптимальна с точки зрения производителя. Это проиллюстрировано на Рис. 12.15. Действительно, монополист может увеличить совокупную прибыль от этих сделок, понижая x_l^* на небольшую величину Δx_l.

Если уменьшим x_l^* на $\Delta x_l > 0$, тогда прибыль монополиста от сделки первого типа (сделки с потребителем l) сократится на величину площади треугольника ② (раньше монополист получал всю площадь B, а сейчас — площадь B за вычетом площади малого треугольника ②, т. е. площадь B'). При этом в первом приближении прибыль от каждой сделки первого типа уменьшится на величину,

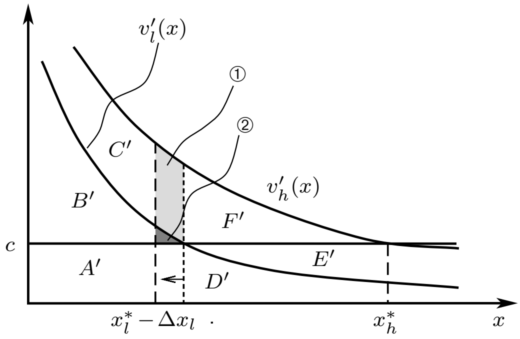


Рис. 12.15. *Данное меню пакетов не оптимально с точки зрения монополиста*

пропорциональную квадрату Δx_l (при достаточно малом Δx_l площадь треугольника ② — величина того же порядка, что и $(\Delta x_l)^2$).

Напомним, что монополист вынужден обеспечить потребителю типа h некоторый излишек, чтобы он не претендовал на сделку, предназначенную для потребителя типа l. Прежнему количеству x_l^* соответствовал излишек C. Сократив количество x_l^*, предлагаемое потребителю типа l, на величину Δx_l, монополист должен обеспечить потребителю типа h излишек C', который меньше C на площадь криволинейной трапеции ①. Площадь этой трапеции в первом приближении пропорциональна Δx_l.

Таким образом, при малых Δx_l потери прибыли от сделки с потребителями типа l будут компенсированы увеличением прибыли от сделки с потребителями типа h. Тем самым прибыль монополиста возрастет.

Можно продолжать сокращать x_l. При некоторой величине x_l прирост прибыли от сделки с потребителями типа h не будет покрывать падение прибыли от сделки с потребителями типа l. По-видимому, должна существовать некоторая величина x_l, которая соответствует оптимальной системе сделок, дающей монополисту максимальную прибыль.

Проанализируем теперь формально задачу, которую решает монополист, конструируя пакетные сделки. В предположении, что монополист имеет дело с $m_l > 0$ одинаковыми потребителями типа l и $m_h > 0$ одинаковыми потребителями типа h, оптимальная система сделок $\{(x_l^{\mathsf{P}}, t_l^{\mathsf{P}}), (x_h^{\mathsf{P}}, t_h^{\mathsf{P}})\}$ определяется решением следующей задачи:

$$\Pi = m_l t_l + m_h t_h - c(m_l x_l + m_h x_h) \to \max_{x_l \geqslant 0, t_l, x_h \geqslant 0, t_h}$$

при ограничениях

$$v_l(x_l) - t_l \geqslant 0, \tag{1l}$$

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant 0, \tag{1h}$$

(условия участия)

$$v_l(x_l) - t_l \geqslant v_l(x_h) - t_h, \tag{2l}$$

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant v_h(x_l) - t_l. \tag{2h}$$

(условия самовыявления)

Мы проанализируем эту задачу с использованием приемов, которые позволяют установить ряд свойств ее решения и тем самым упростить рассматриваемую задачу, сведя ее к эквивалентной задаче с меньшим числом ограничений. Эти приемы (свойства решений) обобщаются на случай более двух типов и особенно полезны именно в этой ситуации.

Во-первых, заметим, что условие участия для потребителя типа h является следствием ограничений ($1l$) и ($2h$):

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant v_h(x_l) - t_l \geqslant v_l(x_l) - t_l \geqslant 0,$$

где мы использовали предположение $v_h(x) \geqslant v_l(x)$. Таким образом, ограничение ($1h$) можно отбросить, не меняя множества допустимых решений задачи[21].

Во-вторых, сложив ограничения ($2l$) и ($2h$), получим, что

$$v_h(x_h) - v_l(x_h) \geqslant v_h(x_l) - v_l(x_l)$$

или

$$\varphi(x_h) \geqslant \varphi(x_l)$$

Поскольку, по предположению, функция $\varphi(\cdot)$ возрастает, то $x_h \geqslant x_l$. Таким образом, для любой пары пакетов, удовлетворяющих ограничениям самовыявления, должна выполняться монотонность объемов потребления.

В-третьих, оптимальная пара пакетов $\{(x_l^{\mathsf{P}}, t_l^{\mathsf{P}}), (x_h^{\mathsf{P}}, t_h^{\mathsf{P}})\}$ должна быть такой, чтобы ($1l$) выполнялось как строгое равенство. Если бы

[21] Полученную задачу с тремя ограничениями в случае дифференцируемости функций $v_l(\cdot)$, $v_h(\cdot)$ и $c(\cdot)$ достаточно просто проанализировать с использованием теоремы Куна—Таккера (что мы предлагаем проделать читателю самостоятельно).

это было не так, то можно было бы увеличить прибыль монополиста, подняв на одну и ту же величину $v_l(x_l) - t_l$ оплату за оба пакета, не нарушая при этом ограничений задачи. Таким образом, для решения задачи должно выполняться соотношение

$$t_l^{\text{P}} = v_l(x_l^{\text{P}}),$$

В четвертых, ограничение самовыявления ($2h$) выполняется как равенство. Если бы это было не так, то, увеличивая плату потребителя типа h на величину $v_h(x_h) - v_h(x_l) + t_l - t_h$, монополист, не нарушая ограничений задачи, получил бы прирост прибыли. Таким образом, для решения задачи выполнено

$$v_h(x_h^{\text{P}}) - t_h^{\text{P}} = v_h(x_l^{\text{P}}) - t_l^{\text{P}}.$$

И наконец, в пятых, из последнего соотношения и монотонности потребления с учетом возрастания функции $\varphi(\cdot)$ следует ограничение самовыявления для типа l ($2l$).

Проведенный анализ показывает, что, заменив первоначальные ограничения задачи на следующие три ограничения:

$$t_l = v_l(x_l), \tag{1l=}$$

$$v_h(x_h) - t_h = v_h(x_l) - t_l, \tag{2h=}$$

$$x_h \geqslant x_l$$

(последнее — это ограничение монотонности), мы сузим множество допустимых решений задачи, не потеряв при этом оптимальные решения.

Используя ($1l=$) и ($2h=$), выразим величины t_l и t_h:

$$t_l = v_l(x_l), \quad t_h = v_h(x_h) - v_h(x_l) + v_l(x_l).$$

Подставив их в функцию прибыли, сведем задачу монополиста к задаче с одним ограничением:

$$m_l v_l(x_l) + m_h[v_h(x_h) - v_h(x_l) + v_l(x_l)] - c(m_l x_l + m_h x_h) \to \max_{x_l \geqslant 0, x_h \geqslant 0}$$

$$x_h \geqslant x_l.$$

Графический анализ ??Рис? позволяет предположить, что ограничение монотонности потребления является несущественным. Покажем это формально, убедившись, что решение задачи выбора оптимальных пакетных контрактов без этого ограничения ему удовлетворяет.

Предположим сначала, что функция издержек является линейной и c — предельные издержки, т. е. $c(y) = cy$. Тогда задача без учета ограничения монотонности распадается на две задачи:

$$v_h(x_h) - cx_h \to \max_{x_h \geqslant 0}$$

и

$$v_l(x_l) - cx_l - \frac{m_h}{m_l}[v_h(x_l) - v_l(x_l)] = v_l(x_l) - cx_l - \frac{m_h}{m_l}\varphi(x_l) \to \max_{x_l \geqslant 0}.$$

В предположении линейности издержек задача монополиста при идеальной дискриминации также распадается на две, так что x_i^* $(i = l, h)$ является решением задачи

$$v_i(x_i) - cx_i \to \max_{x_i \geqslant 0}.$$

Видно, что задачи вычисления x_h^{P} и x_h^* совпадают, а значит, совпадают и множества решений. С другой стороны, целевые функции в задачах вычисления x_l^{P} и x_l^* различаются слагаемым $\frac{m_h}{m_l}\varphi(x_l)$. Сравним между собой эти величины. По определению величины x_l^* должно выполняться неравенство

$$v_l(x_l^*) - cx_l^* \geqslant v_l(x_l^{\mathsf{P}}) - cx_l^{\mathsf{P}},$$

а по определению величины x_l^{P} — неравенство

$$v_l(x_l^{\mathsf{P}}) - cx_l^{\mathsf{P}} - \frac{m_h}{m_l}\varphi(x_l^{\mathsf{P}}) \geqslant v_l(x_l^*) - cx_l^* - \frac{m_h}{m_l}\varphi(x_l^*).$$

Сложив эти два очевидные неравенства, получим, что

$$\varphi(x_l^*) \geqslant \varphi(x_l^{\mathsf{P}}).$$

Из возрастания функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $x_l^* \geqslant x_l^{\mathsf{P}}$ (для любой пары решений).

Аналогичным образом можно доказать, что при линейных издержках $x_l^* \leqslant x_h^*$ (см. задачу 12.37). Таким образом, выполнено

$$x_l^{\mathsf{P}} \leqslant x_l^* \leqslant x_h^* = x_h^{\mathsf{P}}.$$

Равенство $x_h^* = x_h^{\mathsf{P}}$ здесь предполагает единственность того и другого решения.

Плата для потребителя типа h при полной информированности равна $t_h^* = v_h(x_h^*)$, а в рассматриваемой ситуации (с учетом того, что $x_h^* = x_h^{\mathsf{P}}$) она равна $t_h^{\mathsf{P}} = v_h(x_h^*) - v_h(x_l^{\mathsf{P}}) + v_l(x_l^{\mathsf{P}})$, т. е. уменьшается на величину $\varphi(x_l^{\mathsf{P}})$. На эту же величину изменяется и потребительский излишек, который по аналогии с линейным тарифом естественно определить как

$$CS_h(x_h, t_h) = v_h(x_h) - t_h.$$

Прирост потребительского излишка по сравнению с ситуацией полной информированности называют информационной рентой. Таким образом, информационная рента потребителя типа h равна $\varphi(x_l^{\mathsf{P}})$. Заметим, что эта информационная рента положительна тогда и только когда, когда монополист находит выгодным иметь дело с потребителем типа l ($x_l^{\mathsf{P}} > 0$), поскольку $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$. С другой стороны, информационная рента потребителя типа l равна нулю.

Рассмотрим теперь, какие дополнительные выводы можно сделать в этой модели на основе условий первого порядка в предположении дифференцируемости функций $v_h(\cdot)$ и $v_l(\cdot)$.

В случае, когда монополист обслуживает потребителей обоих типов, т. е. когда $x_l^{\mathsf{P}} > 0$ и $x_h^{\mathsf{P}} > 0$, необходимым условием оптимальности сделок является равенство нулю первых производных максимизируемой функции, т. е. оптимум должен удовлетворять следующим двум соотношениям:

$$(m_l + m_h)v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) - m_h v_h'(x_l^{\mathsf{P}}) = m_l c'(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}),$$
$$v_h'(x_h^{\mathsf{P}}) = c'(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}).$$

С учетом вида функции издержек эти условия первого порядка принимают вид

$$(m_l + m_h)v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) - m_h v_h'(x_l^{\mathsf{P}}) = m_l c,$$
$$v_h'(x_h^{\mathsf{P}}) = c.$$

При идеальной дискриминации в случае, если монополисту выгодно иметь дело с обоими типами потребителей, т. е. если $x_l^* > 0$ и $x_h^* > 0$, будут предложены два пакета $\{(x_l^*, t_l^*), (x_h^*, t_h^*)\}$, такие что

$$v_l'(x_l^*) = c \quad \text{и} \quad v_h'(x_h^*) = c,$$
$$t_l^* = v_i(x_l^*) \quad \text{и} \quad t_h^* = v_i(x_h^*).$$

Сравнивая условия $v_h'(x_h^{\mathsf{P}}) = c$ и $v_h'(x_h^*) = c$, заключаем, что в сделке, предназначенной потребителю типа h, количество блага x_h^{P} совпадает с количеством x_h^*, которое он получил бы при идеальной дискриминации (и которое фактически является Парето-оптимальным), что согласуется с теми выводами, которые мы сделали выше.

Что же касается потребителя типа l, то в предлагаемой ему сделке количество блага ниже, чем при идеальной дискриминации (ниже Парето-оптмального количества). Действительно, условие первого порядка можно представить в виде

$$m_l v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) = m_l c'(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) + m_h[v_h'(x_l^{\mathsf{P}}) - v_l'(x_l^{\mathsf{P}})],$$

откуда следует, что

$$v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) > c = v_l'(x_l^*)$$

и $x_l^{\mathsf{P}} < x_l^*$. Кроме того, из $v_l'(x_l^*) = v_h'(x_h^*) = c$ следует, что $x_l^* < x_h^*$. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$x_l^{\mathsf{P}} < x_l^* < x_h^* = x_h^{\mathsf{P}}.$$

При недифференцируемости функций полезности[22], вообще говоря, могла бы возникнуть ситуация, когда

$$x_l^{\mathsf{P}} = x_h^{\mathsf{P}}.$$

При этом следствием асимметричной информированности было бы только перераспределение выгоды от сделки: потребитель типа h получил бы положительную информационную ренту; пакетная сделка осталась бы Парето-оптимальной. Однако такое, как мы убедились, невозможно, если функции полезности дифференцируемы (и решения внутренние). В этом анализируемом нами теперь случае следствием асимметричной информированности помимо перераспределения выгод от сделок является еще и неэффективность предлагаемых монополистом пакетов за счет того, что уменьшается по сравнению со случаем полной информированности величина блага в пакете, приобретаемом потребителем типа l. Монополист, пытаясь ослабить ограничение на персональный арбитраж, снижает величину блага в пакете для потребителя типа l ($x_l^{\mathsf{P}} < x_l^*$). Мерой искажения здесь может служить следующий показатель (являющийся аналогом индекса Лернера):

$$\frac{v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) - c}{c}.$$

Поясним оптимальную систему сделок на графике (см. Рис. 12.16). Отметим, что оптимальный контракт для потребителей типа l характеризуется тем, что в точке $x_l = x_l^{\mathsf{P}}$ отношение расстояния между кривыми предельной полезности двух типов потребителей к расстоянию между кривой предельной полезности потребителя типа l

[22]Это довольно редкая ситуация: вогнутая функция дифференцируема всюду за исключением не более чем счетного множества точек. В то же время такое вполне может быть для благ, потребляемых в дискретных количествах.

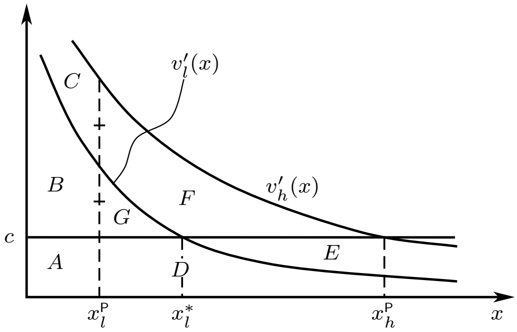


Рис. 12.16. *Оптимальные пакеты при асимметричной информации*

и кривой предельных издержек равно отношению числа потребителей типа l к числу потребителей типа h:

$$\frac{v_h'(x_l^{\mathsf{P}}) - v_l'(x_l^{\mathsf{P}})}{v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) - c'(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}})} = \frac{v_h'(x_l^{\mathsf{P}}) - v_l'(x_l^{\mathsf{P}})}{v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) - c} = \frac{m_l}{m_h}.$$

Когда число потребителей каждого типа одинаково, соответствующие отрезки равны, что и показано на графике.

Согласно оптимальной системе сделок потребитель типа h заплатит за свой пакет сумму, равную площади $A+B+D+E+F+G$, а потребитель типа l заплатит за свой пакет сумму, равную площади $A+B$.

(1) Поскольку $v_h'(x_h^{\mathsf{P}}) = c'(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) = c$, то $x_h^{\mathsf{P}} = x_h^*$, т. е. потребитель типа h приобретает то же количество благ. Однако он заплатит меньше, чем при идеальной дискриминации. Действительно, плата $t_h^* = v_i(x_h^*)$ потребителя типа h равна площади $A+B+C+D+E+F+G$, что больше платы

$$t_h^{\mathsf{P}} = t_h^* + t_l^{\mathsf{P}} - v_h(x_l^{\mathsf{P}}) = t_h^* - [v_h(x_l^{\mathsf{P}}) - v_l(x_l^{\mathsf{P}})]$$

(см. равенство (2h=)), равной $A+B+D+E+F+G$. Разница $v_h(x_l^{\mathsf{P}}) - v_l(x_l^{\mathsf{P}})$ есть площадь фигуры C. Таким образом, присутствие потребителей типа l (и то обстоятельство, что монополист их не может различать) оказывает благоприятное влияние на уровень благосостояния потребителей типа h (тем большее, чем больше число потребителей первого типа).

(2) При идеальной дискриминации, если $v_l'(0) > c$ (и следовательно, $v_h'(0) > 0$), то $x_l^* > 0$ и $x_h^* > 0$. При оптимальной пакетной дискриминации эти условия гарантируют лишь то, что $x_h^{\mathsf{P}} > 0$ (вне

зависимости от числа потребителей обоих типов — m_l и m_h), т. е. любой потребитель типа h будет обслуживаться. Однако потребители типа l будут обслуживаться, только если их доля достаточно велика. (Докажите это самостоятельно.)

(3) Если присутствует хотя бы один потребитель типа h, объем потребления блага потребителями типа l будет меньше, чем при идеальной дискриминации. Это означает, что будут иметь место потери благосостояния:

$$DL = m_l \cdot \Big([v_l(x_l^*) + v_h(x_h^*) - (x_l^* + x_h^*)c] - \\ - [v_l(x_l^{\mathsf{P}}) + v_h(x_h^{\mathsf{P}}) - (x_l^{\mathsf{P}} + x_h^{\mathsf{P}})c] \Big) = \\ = m_l \cdot \Big(v_l(x_l^*) - v_l(x_l^{\mathsf{P}}) - (x_l^* - x_l^{\mathsf{P}})c \Big) > 0.$$

Таким образом, присутствие потребителей типа h оказывает внешнее влияние на сделки с потребителями типа l, приводя к неоптимальности сделок: от невозможности различения потребителей монополистом при пакетной дискриминации потребители типа l ничего не выиграли и не проиграли (их потребительский излишек равен нулю), хотя их уровень потребления изменился, потребители типа h выиграли (извлекли информационную ренту, равную площади C), а монополист проиграл (его прибыль уменьшилась на величину $m_h \cdot \langle$площадь $C\rangle + m_l \cdot \langle$площадь $G\rangle$). В результате возникли чистые потери благосостояния, измеряемые величиной $m_l \cdot \langle$площадь $C\rangle$.

Пример 12.8

Пусть функции полезности потребителей типа l и h имеют вид $u_l(x_l, z_l) = \sqrt{x_l} + z_l$ и $u_h(x_h, z_h) = 2\sqrt{x_h} + z_h$ соответственно, а функция издержек линейна: $c(x) = cx$. Тогда оптимальные объемы x_i^{P}, где $i = l, h$, для этих типов потребителей находятся из системы уравнений:

$$(m_l + m_h)\frac{1}{2\sqrt{x_l^{\mathsf{P}}}} - m_h \frac{1}{\sqrt{x_l^{\mathsf{P}}}} = m_l c,$$
$$\frac{1}{\sqrt{x_h^{\mathsf{P}}}} = c.$$

Если $m_l > m_h$, то решение этой системы уравнений существует (в противном случае будут предлагаться сделки только одного типа):

$$x_l^{\mathsf{P}} = \left(\frac{m_l - m_h}{2m_l c}\right)^2, \quad x_h^{\mathsf{P}} = \frac{1}{c^2}.$$

При этом плата за приобретаемое благо будет равна:

$$t_l^{\mathsf{P}} = v_l(x_l^{\mathsf{P}}) = \frac{m_l - m_h}{2m_l c},$$
$$t_h^{\mathsf{P}} = v_h(x_h^{\mathsf{P}}) - v_h(x_l^{\mathsf{P}}) + v_l(x_l^{\mathsf{P}}) = \frac{3m_l + m_h}{2m_l c}.$$

В частном случае, когда m_l относится к m_h как 2 к 1, получим

$$x_l^{\mathsf{P}} = \frac{1}{16c^2}, \quad x_h^{\mathsf{P}} = \frac{1}{c^2},$$
$$t_l^{\mathsf{P}} = \frac{1}{4c}, \quad t_h^{\mathsf{P}} = \frac{7}{4c}.$$

Получается, что потребитель типа l платит за единицу блага $4c$, а потребитель типа h — $\frac{7c}{4}$.

Найдем также чистые потери общественного благосостояния. Они равны

$$DL = m_l \cdot \big(v_l(x_l^*) - v_l(x_l^{\mathsf{P}}) + c(x_l^{\mathsf{P}} + x_h^{\mathsf{P}}) - c(x_l^* + x_h^{\mathsf{P}})\big) =$$
$$= m_l \cdot \big(v_l(x_l^*) - v_l(x_l^{\mathsf{P}}) + (x_l^{\mathsf{P}} - x_l^*)c\big)\,.$$

Как несложно рассчитать, $x_l^* = \frac{1}{4c^2}$, поэтому

$$DL = m_l \cdot \left(\frac{1}{2c} - \frac{m_l - m_h}{2m_l c} + \left[\left(\frac{m_l - m_h}{2m_l c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2}\right]c\right) = \frac{m_h^2}{4m_l c}.$$

При небольшом числе потребителей типа h (по сравнению с числом потребителей типа l) схема оплаты приближается к схеме оплаты при идеальной дискриминации, и потери благосостояния близки к нулю. $\triangle$

Мы охарактеризовали пакетную дискриминацию (решение задачи монополиста по конструированию оптимальных пакетных сделок) при постоянных предельных издержках. Рассмотрим теперь связь оптимальных пакетных сделок с нелинейным тарифом. (Этот анализ не зависит от вида функции издержек.)

Заметим прежде всего, что, используя нелинейный тариф, монополист не может получить больше того, что он имеет от оптимальных пакетных сделок. Так, предположим, что в результате использования некоторой схемы ценообразования $t(\cdot)$ потребитель типа l купит x_l блага и заплатит за него t_l, а потребитель типа h купит x_h блага и заплатит за него t_h. Тогда монополист мог бы использовать пакетную дискриминацию, предложив потребителям «пакеты» (x_l, t_l)

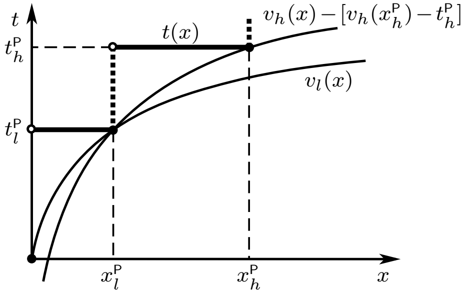


Рис. 12.17. *Оптимальные пакеты и соответствующий нелинейный тариф*

и (x_h, t_h), первый из которых предпочитает потребитель типа l, а второй — потребитель типа h. Таким образом, пара (x_l, t_l) и (x_h, t_h) является допустимой в задаче выбора оптимальных пакетных сделок, и поэтому прибыль, получаемая монополистом при использовании любой схемы $t(\cdot)$ не может превышать прибыль, получаемую при использовании оптимальных пакетных сделок.

Теперь покажем, как оптимальные пакеты *реализовать* на основе нелинейного тарифа. При двух типах (конечном числе типов) потребителей это можно сделать разными способами. Действительно, любой тариф (нелинейная функция количества блага) приводит к такому же выбору потребителей (и той же прибыли монополиста), что и пакетная дискриминация тогда (и только тогда), когда график этой тарифной схемы лежит выше кривых безразличия потребителей, проходящих через точки, представляющие предназначаемые им пакеты, и проходит через эти точки. Понятно, что этим двум требованиям удовлетворяет бесконечно много различных тарифных схем.

На Рис. 12.17 представлены оптимальные пакетные сделки и один из возможных нелинейных тарифов, который их реализует. Поскольку у потребителя типа l не остается потребительского излишка, то его кривая безразличия, проходящая через точку $(x_l^{\mathrm{P}}, t_l^{\mathrm{P}})$, должна также проходить через начало координат (напомним, что мы приняли $v_l(0) = 0$). Потребитель типа h безразличен к выбору между пакетами, поэтому его кривая безразличия, проходящая через точку $(x_l^{\mathrm{P}}, t_l^{\mathrm{P}})$, должна проходить также и через точку $(x_h^{\mathrm{P}}, t_h^{\mathrm{P}})$.

Заметим, что в данной ситуации (и вообще при конечном числе типов потребителей) при дифференцируемых функциях полезности не существует нелинейного тарифа, который является дифференцируемой функцией (см. задачу 12.48). С другой стороны, можно выбрать схему нелинейного тарифа, которая дифференцируема всюду, за исключением одной точки (соответствующей пакету, предназначенному потребителю типа l), и имеет в этой точке односторонние производные.

Вернемся к ситуации, когда функция издержек нелинейна. Поскольку нашей задачей является демонстрация того, как асимметричная информированность влияет на структуру сделок, мы каждый раз ограничиваемся простыми ситуациями, минимизируя влияние технических усложнений на проводимый анализ (квазилинейные строго выпуклые предпочтения, линейные издержки и т. д.). Поэтому мы ограничимся здесь несколькими краткими комментариями относительно того, как взаимодействие технологии и асимметричной информированности модифицирует приведенные результаты.

Проведя преобразования, можно представить задачу монополиста в следующем виде:

$$m_l v_h(x_l) + m_h v_h(x_h) - (m_l + m_h)\varphi(x_l) - c(m_l x_l + m_h x_h) \to \max_{x_l, x_h \geqslant 0}$$

$$x_h \geqslant x_l.$$

Покажем, что ограничение монотонности $x_h \geqslant x_l$ несущественно (и следовательно, его можно отбросить). Пусть x_l^{P} и x_h^{P} — решение без учета ограничения и $\dot{x} = (m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}})/(m_l + m_h)$. По определению $x_l = \dot{x}$, $x_h = \dot{x}$ не может дать более высокое значение целевой функции, чем x_l^{P} и x_h^{P}, поэтому

$$m_l v_h(x_l^{\mathsf{P}}) + m_h v_h(x_h^{\mathsf{P}}) - (m_l + m_h)\varphi(x_l^{\mathsf{P}}) - c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) \geqslant$$
$$\geqslant (m_l + m_h) v_h(\dot{x}) - (m_l + m_h)\varphi(\dot{x}) - c\big((m_l + m_h)\dot{x}\big)$$

или

$$\frac{m_l v_h(x_l^{\mathsf{P}}) + m_h v_h(x_h^{\mathsf{P}})}{m_l + m_h} - \varphi(x_l^{\mathsf{P}}) \geqslant v_h(\dot{x}) - \varphi(\dot{x}).$$

При вогнутости функции $v_h(\cdot)$ должно быть выполнено

$$v_h(\dot{x}) = v_h\left(\frac{m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}}{m_l + m_h}\right) \geqslant \frac{m_l v_h(x_l^{\mathsf{P}}) + m_h v_h(x_h^{\mathsf{P}})}{m_l + m_h}.$$

Отсюда

$$\varphi(\dot{x}) \geqslant \varphi(x_l^{\mathsf{P}}).$$

Из возрастания функции $\varphi(\cdot)$ при этом следует $\dot{x} \geqslant x_l^{\mathsf{P}}$, и тем самым

$$x_l^{\mathsf{P}} \leqslant x_h^{\mathsf{P}}.$$

Таким образом, мы доказали для случая функции издержек общего вида, что ограничение монотонности объемов потребления несущественно и его можно отбросить.

Сравним теперь пакетную дискриминацию при ненаблюдаемости типов с идеальной дискриминацией (и тем самым с Парето-оптимальными состояниями). Несложно убедиться, что при возрастании функции $\varphi(\cdot)$ выполнено $x_l^* \leqslant x_h^*$ (см. задачу 12.37).

Кроме того, можно показать, что $x_l^{\mathsf{P}} \leqslant x_l^*$. Действительно, по определению величин x_l^* и x_l^{P} должны выполняться следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
m_l v_l(x_l^{\mathsf{P}}) + m_h v_h(x_h^{\mathsf{P}}) - (m_l + m_h)\varphi(x_l^{\mathsf{P}}) - c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) \geqslant \\
\geqslant m_l v_l(x_l^*) + m_h v_h(x_h^*) - (m_l + m_h)\varphi(x_l^*) - c(m_l x_l^* + m_h x_h^*), \\
m_l v_l(x_l^*) + m_h v_h(x_h^*) - c(m_l x_l^* + m_h x_h^*) \geqslant \\
\geqslant m_l v_l(x_l^{\mathsf{P}}) + m_h v_h(x_h^{\mathsf{P}}) - c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}).
\end{aligned}
$$

Сложив их, получим $\varphi(x_l^{\mathsf{P}}) \leqslant \varphi(x_l^*)$, откуда $x_l^{\mathsf{P}} \leqslant x_l^*$. Значит, монополист по сравнению с идеальной дискриминацией либо не меняет пакет, предназначенный для потребителя типа l, либо уменьшает количество блага в этом пакете, чтобы сделать его менее привлекательным для потребителей типа h.

Таким образом, можно утверждать, что при сделанных предположениях $x_l^{\mathsf{P}} \leqslant x_l^* \leqslant x_h^*$ и $x_l^{\mathsf{P}} \leqslant x_h^{\mathsf{P}}$. Остается установить, в каком соотношении находятся величины x_h^{P} с x_h^*.

При линейности функции издержек, как мы видели, эти величины совпадают; в общем же случае x_h^* может не совпадать с x_h^{P}.

Действительно, каждая из величин x_h^* и x_h^{P} максимизирует по x_h разность

$$
m_h v_h(x_h) - c(m_l x_l + m_h x_h)
$$

при данном значении x_l ($x_l = x_l^*$ и $x_l = x_l^{\mathsf{P}}$ соответственно, где $x_l^* \leqslant x_l^{\mathsf{P}}$). Сравнение x_h^* и x_h^{P} зависит, таким образом, от формы функции издержек. Сложив два неравенства,

$$
\begin{aligned}
m_h v_h(x_h^{\mathsf{P}}) - c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) \geqslant m_h v_h(x_h^*) - c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^*), \\
m_h v_h(x_h^*) - c(m_l x_l^* + m_h x_h^*) \geqslant m_h v_h(x_h^{\mathsf{P}}) - c(m_l x_l^* + m_h x_h^{\mathsf{P}}),
\end{aligned}
$$

получим

$$
c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^*) - c(m_l x_l^* + m_h x_h^*) \geqslant c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) - c(m_l x_l^* + m_h x_h^{\mathsf{P}}).
$$

Рассмотрим случай, когда функция издержек является строго выпуклой (убывающая отдача от масштаба). Предположим, что $x_h^* <$

x_h^{P}. Обозначим

$$\alpha = \frac{m_l x_l^{\mathsf{P}} - m_l x_l^*}{m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}} - m_l x_l^{\mathsf{P}} - m_h x_h^*}.$$

Из строгой выпуклости следует, что

$$\alpha c(m_l x_l^* + m_h x_h^*) + (1-\alpha) c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) > c(m_l x_l^* + m_h x_h^{\mathsf{P}})$$

и что

$$(1-\alpha) c(m_l x_l^* + m_h x_h^*) + \alpha c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) > c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^*).$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$c(m_l x_l^* + m_h x_h^*) + c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}) > c(m_l x_l^* + m_h x_h^{\mathsf{P}}) + c(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^*)$$

в противоречие полученному выше.

Таким образом, при убывающей отдаче от масштаба должно выполняться $x_h^* \geqslant x_h^{\mathsf{P}}$. Аналогичным образом доказывается, что при возрастающей отдаче от масштаба должно выполняться $x_h^* \leqslant x_h^{\mathsf{P}}$.

В предположении, что функции полезности и издержек дифференцируемы и что все количества положительны, строгие неравенства следуют из условий первого порядка задачи производителя:

$$(m_l + m_h) v_l'(x_l^{\mathsf{P}}) - m_h v_h'(x_l^{\mathsf{P}}) = m_l v_h'(x_h^{\mathsf{P}}) = m_l c'(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^{\mathsf{P}}),$$

и

$$v_l'(x_l^*) = v_h'(x_h^*) = c'(m_l x_l^* + m_h x_h^*).$$

Предположим, как обычно, что предельная полезность потребителей обоих типов убывающая и при одинаковом потреблении выше у потребителя типа h ($\varphi'(\cdot) > 0$). Нетрудно видеть, что равенство $x_l^{\mathsf{P}} = x_h^{\mathsf{P}}$ не может быть верным и поэтому $x_l^{\mathsf{P}} < x_h^{\mathsf{P}}$. Также ясно, что $x_l^* < x_h^*$.

Если $x_h^{\mathsf{P}} = x_h^*$, то $c'(m_l x_l^* + m_h x_h^*) = c'(m_l x_l^{\mathsf{P}} + m_h x_h^*)$. При убывающей отдаче (когда предельные издержки растут) и при возрастающей отдаче (когда предельные издержки падают) это может быть, только если $x_l^{\mathsf{P}} = x_l^*$. Но полное совпадение пакетов $x_h^{\mathsf{P}} = x_h^*$, $x_l^{\mathsf{P}} = x_l^*$ несовместимо с дифференциальными характеристиками. Таким образом, при убывающей отдаче от масштаба должно выполняться $x_h^* > x_h^{\mathsf{P}}$, а при возрастающей отдаче, наоборот, $x_h^* < x_h^{\mathsf{P}}$.

Для того чтобы доказать, что x_l^{P} и x_l^* не совпадают, и, следовательно $x_l^{\mathsf{P}} < x_l^*$, требуется сделать дополнительные предположения относительно поведения предельных издержек и предельной полезности (см., например, задачу 12.47).

В заключение укажем, какие из полученных характеристик нелинейного тарифа (и соответствующей пакетной дискриминации) имеют место и в более общем случае, когда существует более чем два типа потребителей.

Пусть $i = 1, \ldots, n$ — типы потребителей, m_i — число потребителей типа i. Функция полезности потребителей типа i имеет вид

$$u_i(x, z) = v_i(x) - z$$

и задана на потребительских наборах из множества $X \times \mathbb{R}$, где X — некоторое подмножество $\mathbb{R}^+$ $(0 \in X)$.

При пакетной дискриминации монополия предлагает для каждого из типов свой пакет (x_i, t_i). Для учета условия участия удобно ввести пакет $(x_0, t_0) = (0, 0)$. Меню пакетов должно максимизировать общую прибыль монополии при ограничениях участия и самовыявления потребителей (которые мы можем записать по одной схеме):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i t_i - c\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right) \to \max_{(x_i, t_i)_{i=1,\ldots,n}}$$
$$v_i(x_i) - t_i \geqslant v_i(x_j) - t_j,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, n,$$
$$x_i \in X,\ i = 1, \ldots, n.$$

Как и ранее, будем предполагать, что оценки $v_i(\cdot)$ упорядочены по типам потребителей. А именно, если $x' > x''$ $(x', x'' \in X)$ и i, j — два типа потребителей, таких что $i < j$, то

$$v_j(x') - v_i(x') > v_j(x'') - v_i(x'').$$

Это эквивалентно тому, что разница

$$\varphi_i(x) = v_{i+1}(x) - v_i(x)$$

является возрастающей функцией от x при $i = 1, \ldots, n-1$. При дифференцируемости функций $v_i(\cdot)$ делается более сильное предположение — что если $i < j$, то при всех x выполняется неравенство $v_i'(x) < v_j'(x)$ (или, что эквивалентно, $\varphi_i'(x) > 0$ при всех x и $i = 1, \ldots, n-1$). Это условие упорядоченности оценок также называется условием единственности точки пересечения (поскольку при его выполнении кривые безразличия потребителей двух разных типов пересекаются в единственной точке)[23].

Если условие упорядоченности оценок выполнено, то анализ задачи конструирования оптимальных пакетов можно провести в основном по той же схеме (см. также анализ модели найма со скрытой

[23] Еще одно название — условие Спенса—Миррлиса.

информацией в параграфе 14.3). Прежде всего аналогичным образом устанавливается, что следствием (соответствующих пар) условий самовыявления является монотонность потребления:

$$x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$$

Далее, существенными оказываются только (локальные) условия самовыявления следующего типа: $v_i(x_i) - t_i = v_i(x_{i-1}) - t_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, имеет место правило ценообразования «по цепочке» («цепное правило») и исходную задачу можно свести к следующей:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i t_i - c\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right) \to \max_{(x_i, t_i)_{i=1,\ldots,n}}$$
$$v_i(x_i) - t_i = v_i(x_{i-1}) - t_{i-1},\ i = 1, \ldots, n,$$
$$x_i \geqslant x_{i-1},\ i = 2, \ldots, n.$$
$$x_i \in X,\ i = 1, \ldots, n.$$

Другими словами, можно показать, что в данном случае решение задачи монополиста обладает характеристиками, аналогичными решению задачи монополиста в ситуации с двумя типами потребителей.

1. Объемы потребления упорядочены по типам. Чем «выше» тип потребителя, тем больше он потребляет.

2. Из ограничений самовыявления активны только ограничения, связанные с предшествующим пакетом — потребителю типа i ($i = 2, \ldots, n$) должен быть безразличен выбор «своего» пакета (x_i, t_i) по сравнению с предыдущим пакетом (x_{i-1}, t_{i-1}). Для потребителя с наименьшей оценкой блага (потребителя типа 1) должно быть активно условие участия.

Мы не будем здесь доказывать утверждение о том, что приведенные задачи имеют одни и те же оптимальные решения. Читатель может проделать это самостоятельно, используя в качестве образца аналогичное утверждение для модели найма со скрытыми типами — Теорему 14.3 (см. задачу 12.49).

Отличительная особенность случая, когда $n > 2$, это то, что меню пакетов может быть не только разделяющим, когда все типы потребителей имеют разные пакеты, но и (даже в ситуации дифференцируемых функций полезности) частично объединяющим, когда существуют группы типов потребителей с одинаковыми пакетами, т. е. монотонность объемов потребления не строгая.

Оптимальные пакеты должны удовлетворять следующим свойствам. Уровни платы t_i упорядочены по типу потребителей, как и объемы потребления,— если $i < j$, то $t_i \leqslant t_j$. Информационная рента потребителя типа i совпадает с потребительским излишком $CS_i = v_i(x_i) - t_i$. Информационная рента не убывает по типу потребителя. Если $x_i > 0$, то потребители типа $i+1$ и выше получают положительную информационную ренту. Информационная рента потребителя типа i положительна тогда и только тогда, когда положителен объем потребления потребителя типа $i-1$ ($i = 2, \ldots, n$). Для потребителя с самой низкой оценкой блага (потребителя типа 1) она равна нулю: положительная информационная рента удерживает потребителя от персонального арбитража, в котором в данной ситуации отдельный потребитель заинтересован лишь в том случае, если существуют потребители с более низкой, чем у него, оценкой блага.

Аналогичный анализ можно провести и в случае континуума типов потребителей в ситуации, когда различия во вкусах потребителей определяются различиями в значении только одного параметра: поскольку существенными являются только «локальные» условия самовыявления, бесконечное число таких условий можно заменить одним условием первого порядка. Интересная особенность этого случая — при непрерывном распределении типов потребителей (в случае, когда функция распределения является дифференцируемой) нелинейный тариф определяется однозначно и является вогнутой функцией количества блага. Таким образом, имеет место скидка на объем: при покупке большего количества цена единицы снижается.

Ту же схему анализа можно использовать в ситуации дискриминации по качеству, когда товар потребляется в дискретном количестве $X = \{0, 1\}$ и есть некоторый показатель качества $s \in \mathbb{R}$, который не влияет на издержки производства. Все потребители предпочитают более высокое качество менее высокому. (См., напр., задачу 12.56.)

12.3.4 Дискриминация второго типа: двухставочный тариф

Простейший и широко распространенный нелинейный тариф — это так называемый двухставочный тариф. (Он уже рассматривался нами выше в случае идеальной дискриминации; см. с. 783.) Напомним, что при положительных объемах покупки схема двухставочного тарифа имеет следующий вид: $t(x) = A + px$. Тот факт, что потребители имеют возможность ничего не покупать на рынке, ничего при этом не заплатив, можно учесть в функции $t(x)$, так что она в результате может быть записана как

$$t(x) = \begin{cases} A + px, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Определим характеристики оптимального двухставочного тарифа (A, p) в той же ситуации, что и ранее, что позволит нам в дальнейшем сравнить его с оптимальным нелинейным тарифом. Для этого необходимо прежде всего рассмотреть поведение потребителей каждого из типов $i = l, h$, сталкивающихся с такой схемой оплаты.

Потребительский выбор при таком тарифе можно условно представлять как двухэтапный: на первом этапе потребитель принимает решение относительно объема покупки в предположении, что он ее делает, а на втором этапе он решает (с учетом оптимального объема покупки), приобретать ли благо или же отказаться от покупки.

Рассмотрим сначала выбор потребителя на первом этапе (т. е. при условии, что благо покупается). По сути, бюджетное ограничение при двухставочном тарифе можно рассматривать как обычное бюджетное ограничение с доходом, который меньше исходного на A. Из-за квазилинейного характера функции полезности эта потеря в доходе не влияет на выбор объема покупки x_i. Таким образом, выбранное количество блага будет совпадать с обычным спросом потребителя при линейном тарифе с ценой p и будет решением следующей задачи:

$$v_i(x) - px \to \max_{x \geqslant 0}.$$

В предположении (которое в дальнейшем будем считать выполненным), что функция $v_i(\cdot)$ строго вогнута, спрос потребителя однозначен и является функцией цены блага. Будем обозначать эту функцию через $D_i(p)$ $(i = l, h)$. При дифференцируемости функции $v_i(\cdot)$ спрос потребителя при данной величине p (если он положителен т. е. решение задачи является внутренним) находится из условия первого порядка

$$v_i'(x_i) = p.$$

Таким образом, функцию спроса $D_i(\cdot)$ для цен, при которых спрос положителен, можно получить, обратив функцию $v_i'(\cdot)$.

Далее (на втором этапе), решая, приобретать ли благо (в количестве $x_i = D_i(p)$), потребитель сравнивает величину $v_i(x_i) - A - px_i$ с нулем. Поэтому условие участия потребителя типа i имеет вид

$$v_i(x_i) - A - px_i \geqslant 0.$$

Таким образом, если $D_i(\cdot)$ — функция спроса, то потребитель покупает благо тогда и только тогда, когда

$$v_i(D_i(p)) - A - pD_i(p) \geqslant 0.$$

Охарактеризовав поведение потребителей, мы можем упростить задачу монополиста (выбора параметров тарифа). В дальнейшем разберем только случай, когда оптимальное для монополиста решение внутреннее в том смысле, что каждый потребитель покупает благо в положительном количестве, т. е. $x_i > 0$. Это подразумевает, что условие участия выполнено для каждого потребителя. (Очевидно, что если оптимальное решение не внутреннее, то оно должно иметь следующий вид: потребление потребителей типа l равно нулю, а в отношении потребителей типа h монополист проводит идеальную дискриминацию по двухставочной схеме. Читатель может доказать это самостоятельно.)

С учетом предположения, что все потребители соглашаются делать покупки, совокупный спрос, с которым столкнется монополист, выбрав коэффициент переменной части тарифа на уровне p, будет равен

$$D(p) = m_l D_l(p) + m_h D_h(p).$$

Таким образом, задачу выбора монополистом оптимальных параметров A и p можно записать как задачу максимизации прибыли при двух ограничениях участия:

$$\begin{gathered}(m_l + m_h)A + pD(p) - c(D(p)) \to \max_{A, p (p>0)} \\ v_l(D_l(p)) - A - pD_l(p) \geqslant 0, \\ v_h(D_h(p)) - A - pD_h(p) \geqslant 0.\end{gathered}$$

Используя сделанные предположения об упорядоченности оценок блага потребителями разных типов, эту задачу можно свести к задаче безусловной оптимизации. Заметим сначала, что по крайней мере одно из условий участия в точке оптимума должно выполняться как равенство. В противном случае монополист мог бы увеличить прибыль, увеличив фиксированную плату A. При наших предположениях об упорядоченности оценок $v_i(\cdot)$ из условия участия для потребителей типа l следует условие участия для потребителей типа h, причем как строгое неравенство. Если $x_l = D_l(p)$, $x_h = D_h(p)$, то

$$0 \leqslant v_l(x_l) - A - px_l < v_h(x_l) - A - px_l \leqslant v_h(x_h) - A - px_h.$$

(Крайнее правое неравенство следует непосредственно из рациональности выбора потребителя типа h, $x_h = D_h(p)$.) Таким образом, монополист выведет на равенство ограничение участия потребителей типа l, назначив фиксированную плату A на уровне стандартного потребительского излишка потребителей типа l. Зная функцию спроса потребителей типа l, можно представить фиксированную часть тарифа A как функцию p:

$$A(p) = v_l(D_l(p)) - pD_l(p).$$

Теперь мы можем представить задачу монополиста как задачу выбора параметра p:

$$\Pi(p) \to \max_{p>0},$$

где

$$\begin{aligned}\Pi(p) &= (m_l + m_h)A(p) + pD(p) - c(D(p)) = \\ &= (m_l + m_h)[v_l(D_l(p)) - pD_l(p)] + pD(p) - c(D(p)).\end{aligned}$$

Заметим, что при данном p спрос потребителя типа l ниже спроса потребителя типа h. Действительно, если $x_l = D_l(p)$ и $x_h = D_h(p)$, то

$$v_h(x_h) - px_h \geqslant v_h(x_l) - px_l,$$

и

$$v_l(x_l) - px_l \geqslant v_l(x_h) - px_h.$$

Сложив эти неравенства, с учетом упорядоченности оценок потребителей получим $x_l \leqslant x_h$.

Установим дополнительные свойства оптимального двухставочного тарифа (решения данной задачи) в предположении, что функция спроса дифференцируема при ценах из промежутка $(0, p_i^c]$, где p_i^c — цена удушения спроса для потребителей типа i.

Заметим сначала, что при дифференцируемости функций полезности в соотношении $x_l \leqslant x_h$ должно быть выполнено строгое неравенство, поскольку одновременное выполнение условий первого порядка $v_l'(x) = p$ и $v_h'(x) = p$ противоречит тому, что $v_l'(x) < v_h'(x)$. Из этого следует, что то же неравенство для объемов потребления выполнено и для выбора потребителей при оптимальном тарифе:

$$x_l^{\text{ТР}} < x_h^{\text{ТР}},$$

где $x_l^{\text{ТР}} = D_l(p^{\text{ТР}})$ и $x_h^{\text{ТР}} = D_h(p^{\text{ТР}})$ — объемы покупок потребителей двух типов при оптимальной цене $p^{\text{ТР}}$.

Структуру оптимального решения в этой ситуации иллюстрирует Рис. 12.18. Кривая безразличия потребителя типа l проходит через

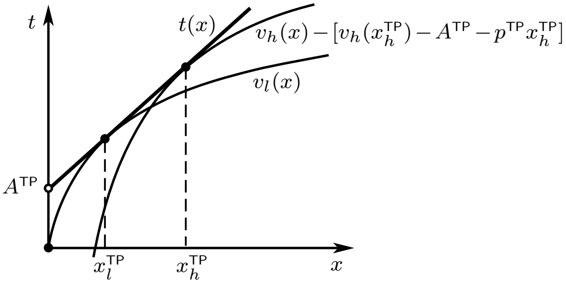


Рис. 12.18. *Двухставочный тариф*

точку $(0,0)$, соответствующую нулевому объему покупки, и касается графика функции $t(\cdot)$ при $x_l = x_l^{\text{ТР}}$. Как следствие упорядоченности оценок потребителей (и дифференцируемости их функций полезности), кривая безразличия потребителя типа h касается графика функции $t(\cdot)$ в более высокой точке $x_h^{\text{ТР}}$.

Далее, покажем, что ставка переменной части тарифа — величина p — будет превышать предельные издержки. Для этого, продифференцировав функцию прибыли по p, получим характеристику внутреннего решения (когда потребители обоих типов покупают благо, $p^{\text{ТР}} \in (0, \min\{p_l^c, p_h^c\})$):

$$\frac{d\Pi(p^{\text{ТР}})}{dp} = (m_l + m_h)\frac{dA(p^{\text{ТР}})}{dp} + D(p^{\text{ТР}}) + [p^{\text{ТР}} - c'(D(p^{\text{ТР}}))]D'(p^{\text{ТР}}) = 0.$$

Здесь

$$\frac{dA(p^{\text{ТР}})}{dp} = \left[(v_l'(D_l(p^{\text{ТР}})) - p^{\text{ТР}}) \cdot D_l'(p^{\text{ТР}}) - D_l(p^{\text{ТР}})\right].$$

Воспользовавшись условием первого порядка для решения задачи потребителя, имеющими вид

$$v_l'(D_l(p)) = p,$$

находим, что

$$\frac{dA(p^{\text{ТР}})}{dp} = D_l(p^{\text{ТР}}).$$

Подставляя в условие первого порядка значения $\frac{dA(p^{\text{ТР}})}{dp}$ и $D(p^{\text{ТР}})$, получим, что

$$m_h[D_h(p^{\text{ТР}}) - D_l(p^{\text{ТР}})] + [p^{\text{ТР}} - c'(D(p^{\text{ТР}}))]D'(p^{\text{ТР}}) = 0.$$

При сделанном нами предположении, что $v_l'(x) < v_h'(x)$, должно выполняться неравенство

$$D_l(p) < D_h(p),$$

поэтому

$$p^{\text{тр}} > c'(D(p^{\text{тр}})).$$

(Отрицательность $D'(\cdot)$ следует из отрицательности $v_l''(\cdot)$ и $v_h''(\cdot)$.)

Отсюда следует, что правило оптимального ценообразования — равенство цены предельным издержкам — не выполнено и производимое количество блага $y^{\text{тр}} = D(p^{\text{тр}})$ меньше оптимального с общественной точки зрения количества $\hat{y}$, которое должно удовлетворять условию

$$D(c'(\hat{y})) = \hat{y}.$$

Таким образом, при оптимальном двухставочном тарифе чистые потери всегда положительны. В дальнейшем мы сопоставим прибыли, оценки благосостояния и чистые потери при оптимальном двухставочном тарифе, недискриминирующем ценообразовании и пакетной дискриминации в одной и той же ситуации и тем самым оценим предпочтения продавца и покупателей (общества) относительно этих схем ценообразования.

Вычислим параметры оптимального двухставочного тарифа и оценим потери благосостояния на конкретном примере.

Пример 12.9 (продолжение Примера 12.8)

Пусть, как и ранее, функции полезности потребителей типа l и h имеют вид $u_l(x_l, z_l) = \sqrt{x_l} + z_l$ и $u_h(x_h, z_h) = 2\sqrt{x_h} + z_h$ соответственно, а функция издержек линейна: $c(x) = cx$.

Функции спроса имеют вид

$$D_l(p) = \frac{1}{4p^2} \quad \text{и} \quad D_h(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Отсюда функция совокупного спроса равна

$$D(p) = \frac{m_l + 4m_h}{4p^2},$$

а ее производная равна

$$D'(p) = -\frac{m_l + 4m_h}{2p^3}.$$

Подставляя найденное в условия первого порядка, имеющие вид

$$m_h[D_h(p^{\text{тр}}) - D_l(p^{\text{тр}})] + [p^{\text{тр}} - c'(D(p^{\text{тр}}))]D'(p^{\text{тр}}) = 0,$$

получим

$$\frac{3m_h}{4(p^{\mathsf{TP}})^2} - [p^{\mathsf{TP}} - c]\frac{m_l + 4m_h}{2(p^{\mathsf{TP}})^3} = 0,$$

откуда

$$p^{\mathsf{TP}} = \frac{2m_l + 8m_h}{2m_l + 5m_h}c > c.$$

Фиксированная плата равна

$$A = v_l(D_l(p^{\mathsf{TP}})) - p^{\mathsf{TP}}D_l(p^{\mathsf{TP}}) = \frac{1}{2p^{\mathsf{TP}}} - \frac{1}{4p^{\mathsf{TP}}} = \frac{1}{4p^{\mathsf{TP}}}.$$

Чистые потери благосостояния в случае двухставочного тарифа равны

$$\begin{aligned} DL = m_l\sqrt{D_l(c)} + m_h \cdot 2\sqrt{D_h(c)} - cD(c) - \\ - [m_l\sqrt{D_l(p^{\mathsf{TP}})} + m_h \cdot 2\sqrt{D_h(p^{\mathsf{TP}})} - cD(p^{\mathsf{TP}})] = \\ = \frac{m_l + 4m_h}{2c} - \frac{m_l + 4m_h}{4c} - \frac{m_l + 4m_h}{2p^{\mathsf{TP}}} + c\frac{m_l + 4m_h}{4(p^{\mathsf{TP}})^2} = \\ = \frac{m_l + 4m_h}{4c}(1 - \frac{2c}{p^{\mathsf{TP}}} + \frac{c^2}{(p^{\mathsf{TP}})^2}) = \frac{m_l + 4m_h}{4c}(1 - \frac{c}{p^{\mathsf{TP}}})^2 = \\ = \frac{m_l + 4m_h}{4c}(1 - \frac{2m_l + 5m_h}{2m_l + 8m_h})^2 = \frac{9m_h^2}{16(m_l + 4m_h)c}. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Сравнение двухставочного тарифа с линейным

Последние два слагаемых в выражении для прибыли монополии, предлагающей двухставочный тариф, представляют собой прибыль монополии, которая не применяет ценовую дискриминацию. Обозначим ее через $\Pi^{\mathsf{ND}}(p)$. В этих обозначениях

$$\Pi(p) = (m_l + m_h)A(p) + \Pi^{\mathsf{ND}}(p).$$

Комбинируя два очевидных неравенства $\Pi(p^{\mathsf{TP}}) \geqslant \Pi(p^{\mathsf{ND}})$ и $\Pi^{\mathsf{ND}}(p^{\mathsf{ND}}) \geqslant \Pi^{\mathsf{ND}}(p^{\mathsf{TP}})$ видим, что

$$A(p^{\mathsf{TP}}) \geqslant A(p^{\mathsf{ND}}).$$

Здесь $A(p) = v_l(D_l(p)) - pD_l(p)$ — стандартный излишек потребителя типа l при цене p. Он является убывающей функцией цены. Это означает, что $p^{\mathsf{TP}} \leqslant p^{\mathsf{ND}}$.

Покажем, что при дифференцируемости неравенство в этом соотношении строгое, т. е. $p^{\mathsf{TP}} < p^{\mathsf{ND}}$.

Приравнивая к нулю производную, получим

$$\frac{d\Pi^{\mathsf{ND}}(p^{\mathsf{TP}})}{dp} = -(m_l + m_h)\frac{dA(p^{\mathsf{TP}})}{dp} = -(m_l + m_h)D_l(p^{\mathsf{TP}}).$$

Видим, что $d\Pi^{\mathsf{ND}}(p^{\mathsf{TP}})/dp < 0$, откуда следует, что p^{TP} не может совпадать с ценой p^{ND}, которую назначила бы недискриминирующая монополия.

Таким образом, $p^{\mathsf{TP}} < p^{\mathsf{ND}}$. Из убывания функции спроса следует, что производимое при использовании двухставочного тарифа количество блага $y^{\mathsf{TP}} = D(p^{\mathsf{TP}})$ выше, чем без дискриминации: $y^{\mathsf{TP}} > y^{\mathsf{ND}}$.

Сравним теперь потери благосостояния при двухставочном тарифе и линейном (недискриминирующем) ценообразовании. Несложно понять, что линейное ценообразование с точки зрения благосостояния эквивалентно неоптимальному двухставочному тарифу с параметрами p^{ND} и $A(p^{\mathsf{ND}})$ (различие состоит только в том, что при двухставочном тарифе происходит перераспределение части излишка в пользу монополии). Поэтому для целей сравнения можно рассматривать уровни благосостояния при различных двухставочных тарифах с параметрами p и $A(p)$. Индикатор благосостояния можно вычислить по формуле

$$W(p) = m_l v_l(D_l(p)) + m_h v_h(D_h(p)) - c(D(p)).$$

Производная индикатора благосостояния по p равна

$$W'(p) = m_l v_l'(D_l(p))D_l'(p) + m_h v_h'(D_h(p))D_h'(p) - c'(D(p))D'(p).$$

Известно, что спрос потребителей при двухставочном тарифе таков, что $v_i'(D_i(p)) = p$, а совокупный спрос равен $D(p) = m_l D_l(p) + m_h D_h(p)$. Таким образом,

$$W'(p) = (p - c'(D(p)))D'(p).$$

Отсюда следует, что при снижении p с p^{ND} до p^{TP} благосостояние растет, поскольку при этом p остается выше соответствующих предельных издержек $c'(D(p))$. При $p = p^{\mathsf{TP}}$ все еще $W'(p) < 0$. Другими словами, использование оптимального двухставочного тарифа уменьшает чистые потери благосостояния по сравнению с недискриминирующей монополией, хотя величина чистых потерь остается положительной.

Пример 12.10 (продолжение Примера 12.9)

Сравним теперь цену, назначаемую дискриминирующим монополистом, с ценой недискриминирующего. Условия первого порядка для недискриминирующей монополии имеют следующий вид:

$$D(p^{\mathsf{ND}}) + [p^{\mathsf{ND}} - c'(D(p^{\mathsf{ND}}))]D'(p^{\mathsf{ND}}) = 0.$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{m_l/4 + m_h}{(p^{\mathsf{ND}})^2} - (p^{\mathsf{ND}} - c)\frac{2(m_l/4 + m_h)}{(p^{\mathsf{ND}})^3} = 0,$$

откуда

$$p^{\mathsf{ND}} = 2c > p^{\mathsf{TP}} = \frac{2m_l + 8m_h}{2m_l + 5m_h}c.$$ △

Сравнение двухставочного тарифа с пакетным

Поскольку монополист, выбирая нелинейную цену $t(\cdot)$, мог использовать двухставочный тариф (в том числе линейный), при использовании двухставочного тарифа ($^{\mathsf{TP}}$) он не может получить более высокую прибыль, чем при использовании оптимальных пакетных сделок ($^{\mathsf{P}}$), т. е.

$$\Pi^{\mathsf{ND}} \leqslant \Pi^{\mathsf{TP}} \leqslant \Pi^{\mathsf{P}}.$$

Покажем, что при дифференцируемости функций полезности и издержек правое неравенство является строгим, т. е. $\Pi^{\mathsf{TP}} < \Pi^{\mathsf{P}}$.

Для этого построим на основе оптимального двухставочного тарифа меню из двух пакетов — $(x_l^{\mathsf{TP}}, t_l^{\mathsf{TP}})$, $(x_h^{\mathsf{TP}}, t_h^{\mathsf{TP}})$, где $x_i^{\mathsf{TP}} = D_i(p^{\mathsf{TP}})$ — объем покупок рассматриваемого блага потребителями типа i $(i = l, h)$ при двухставочном тарифе, а

$$t_l^{\mathsf{TP}} = A^{\mathsf{TP}} + p^{\mathsf{TP}}x_l^{\mathsf{TP}}, \quad t_h^{\mathsf{TP}} = A^{\mathsf{TP}} + p^{\mathsf{TP}}x_h^{\mathsf{TP}},$$

и покажем, что эти пакеты не оптимальны для монополиста.

Заметим, во-первых, что ограничение самовыявления не является связывающим для потребителей типа h и поэтому прибыль монополиста может быть увеличена за счет увеличения платы с каждого потребителя этого типа. Действительно, вариант $(x_l^{\mathsf{TP}}, t_l^{\mathsf{TP}})$ доступен потребителям типа h, но они выбирают $(x_h^{\mathsf{TP}}, t_h^{\mathsf{TP}})$, поэтому

$$v_h(x_h^{\mathsf{TP}}) - t_h^{\mathsf{TP}} \geqslant v_h(x_l^{\mathsf{TP}}) - t_l^{\mathsf{TP}}.$$

Неравенство здесь строгое, поскольку x_h^{TP} является единственным максимумом функции $v_h(x) - px$, а при дифференцируемости функций полезности $x_l^{\mathsf{TP}} \neq x_h^{\mathsf{TP}}$.

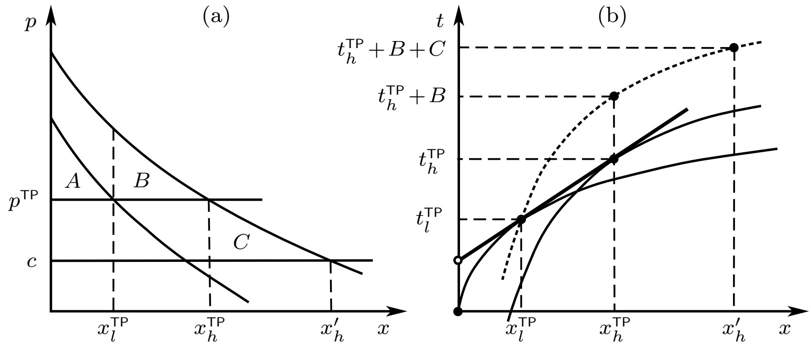


Рис. 12.19. *Сравнение двухставочного тарифа с пакетным*

Таким образом, монополист может повысить t_h по сравнению с $t_h^{\text{ТР}}$, не нарушая условие самовыявления. При этом его прибыль возрастет, что и доказывает неравенство $\Pi^{\text{ТР}} < \Pi^{\text{Р}}$.

Во-вторых, так как $v'(x_h^{\text{ТР}}) = p^{\text{ТР}} > c'(D(p^{\text{ТР}}))$, то прибыль производителя можно увеличить за счет некоторого увеличения количества блага в пакете, предназначенном для потребителей типа h, без нарушения соответствующего условия самовыявления.

Для случая линейных издержек сравнение двухставочного тарифа с пакетным иллюстрирует Рис. 12.19. Площадь фигуры B на Рис. 12.19a равна величине $t_h - t_h^{\text{ТР}}$ прироста платы за предлагаемое покупателю типа h количество блага ($x_h^{\text{ТР}}$), при котором вариант $(x_h^{\text{ТР}}, t_h)$ для него все еще не хуже, чем $(x_l^{\text{ТР}}, t_l^{\text{ТР}})$. На Рис. 12.19b пакет $(x_h^{\text{ТР}}, t_h^{\text{ТР}} + B)$ лежит на кривой безразличия (пунктирная линия), полученной сдвигом первоначальной кривой безразличия потребителя типа h вверх таким образом, чтобы она проходила через точку $(x_l^{\text{ТР}}, t_l^{\text{ТР}})$.

Площадь фигуры C представляет величину прироста прибыли монополиста за счет увеличения количества блага в пакете, предназначенном для потребителя типа h.

Пример 12.11 (продолжение Примера 12.9)

Сравним результаты применения двухставочного тарифа и пакетной дискриминации как с точки зрения общества, так и с точки зрения монополиста. Чистые потери благосостояния для двухставочного тарифа и пакетной дискриминации были вычислены ранее:

$$DL^{\text{ТР}} = \frac{9m_h^2}{16(m_l + 4m_h)c},$$

$$DL^{\text{Р}} = \frac{m_h^2}{4m_l c}.$$

С точки зрения благосостояния общества однозначного выбора между двумя схемами сделать невозможно. В зависимости от соотношения между m_l и m_h чистые потери могут быть меньше либо в том, либо в другом случае.

Прибыль монополиста в случае применения пакетной дискриминации равна $\frac{(m_l+m_h)^2}{4m_l c}$, а прибыль в случае применения двухставочного тарифа равна $\frac{(2m_l+5m_h)^2}{16(m_l+4m_h)c}$. Легко проверить, что вне зависимости от соотношения между m_l и m_h монополист предпочтет использовать пакетную дискриминацию. △

Задачи

12.35 Потребитель имеет функцию спроса $D(p) = 10 - p$. Предельные издержки монополии постоянны: $MC = 5$. Какие сделки может предложить ему монополия, чтобы получить весь излишек (идеальная ценовая дискриминация)? Для каждого предложенного вида сделок найти все параметры, ее характеризующие.

12.36 Рассмотрите задачу идеальной дискриминации с функцией издержек общего вида. Пусть функции $v_i(\cdot)$ (готовности платить) строго вогнуты. Пусть, кроме того, эти функции упорядочены в том смысле, что разности

$$\varphi_i(x) = v_{i+1}(x) - v_i(x)$$

либо тождественно равны нулю, либо возрастают по x при $i = 1, \ldots, m-1$. Покажите, что монополия выберет такие x_i^*, что объемы потребления будут монотонны по номеру потребителя:

$$x_1^* \leqslant \cdots \leqslant x_m^*.$$

(*Указание:* Предположите, что $x_{i+1}^* < x_i^*$. Если $\varphi_i(x)$ возрастает, то можно, поменяв x_i^* и x_{i+1}^*, увеличить прибыль. Если $\varphi_i(x)$ — константа, то можно вместо x_i^* и x_{i+1}^* взять их среднее арифметическое.)

12.37 Рассмотрите случай идеальной дискриминации в монополистической отрасли с двумя типами потребителей — l и h, число которых равно m_l и m_h соответственно. Пусть разность $\varphi(x) = v_h(x) - v_l(x)$ возрастает. Покажите, что $x_l^* \leqslant x_h^*$.

12.38 Докажите, что решение задачи идеальной дискриминации существует и является внутренним, предположив, что выполнены следующие условия:

- у всех потребителей функции $v_i(\cdot)$ дифференцируемы;
- предельные издержки постоянны;
- для всех потребителей $v_i'(0) > c'(0)$;
- для всех потребителей существуют $\tilde{y}_i > 0$, такие что $v_i(\tilde{y}_i) - c(\tilde{y}_i) > v_i(y) - c(y)$ при $y > \tilde{y}_i$.

12.39 Сравните рассмотренные схемы (поведение недискриминирующего монополиста или линейный тариф, двухставочный тариф, пакетную дискриминацию и идеальную дискриминацию) в случае, когда имеются потребители двух типов (l и h) с функциями полезности

$$u_l(x, z) = \ln(x+1) + z \quad \text{и} \quad u_h(x, z) = 2\ln(x+1) + z.$$

Число потребителей двух типов равно m_l и m_h соответственно. Предельные издержки монополии постоянны и равны $1/2$.

12.40 Представьте проанализированные способы дискриминации в виде динамических игр. Объясните, почему рассмотренные решения соответствуют совершенным в подыграх равновесиям данных игр.

12.41 Представьте проанализированные схемы дискриминации второго типа в виде динамических байесовских игр в случае постоянных предельных издержек, рассматривая доли потребителей разных типов как вероятности. Объясните, почему рассмотренные решения соответствуют совершенным байесовским равновесиям данных игр.

12.42 Предположим, что функции спроса потребителей и функция издержек линейны, а число потребителей типа l не превышает число потребителей типа h. Покажите, что если при линейном тарифе монополисту невыгодно обслуживать потребителей типа l, то их оказывается невыгодным обслуживать и при пакетной дискриминации. Покажите, построив контрпример, что обратное неверно.

12.43 (А) Покажите, что если при пакетной дискриминации монополисту невыгодно обслуживать потребителей типа l, то их оказывается невыгодным обслуживать и при двухставочном тарифе.

(В) Покажите, построив контрпример, что обратное неверно.

12.44 Предположим, что функции полезности строго вогнуты. Покажите, что если $x_h^{\mathsf{P}} = x_l^{\mathsf{P}}$, то $x_h^{\mathsf{TP}} = x_l^{\mathsf{TP}}$.

12.45 Монополия сталкивается со 100 потребителями с функцией полезности $\ln(x+1) + z$ и 100 потребителями с функцией полезности

$3\ln(x+1)+z$. Издержки производства единицы продукции равны 0,5.

(A) Найдите оптимальный для монополии двухставочный тариф.

(B) Покажите, приведя соответствующий пример нелинейной цены, что двухставочный тариф не является оптимальным для монополии способом дискриминации в данной ситуации.

12.46 Приведите пример пакетной дискриминации (конкретные функции полезности, издержки и т. п.), такой чтобы монополии было выгодно обслуживать покупателей только одного типа.

12.47 Рассмотрите оптимальную пакетную дискриминацию при ненаблюдаемости типов потребителей в случае двух типов потребителей. Предположите, что функции полезности и издержек дифференцируемы, $x_l^* > 0$ и $0 < x_h^{\mathsf{P}} \leqslant x_h^*$. Докажите, что при этом $x_l^{\mathsf{P}} < x_l^*$.

12.48 Докажите, что при дифференцируемости функций полезности оптимальный нелинейный тариф, при котором покупатели обоих типов приобретают положительное количество блага, не может быть дифференцируемой функцией.

12.49 Докажите правило ценообразования «по цепочке» для случая n типов потребителей.

12.50 Приведите пример ситуации (конкретные функции полезности, издержки, и т. п.), где двухставочный тариф является оптимальным нелинейным тарифом, притом что покупатели обоих типов приобретают положительное количество блага.

12.51 Докажите, что линейный тариф в ситуации, когда покупатели обоих типов приобретают положительное количество блага, не может быть оптимальным нелинейным тарифом, если функции полезности потребителей строго вогнуты.

12.52 Покажите, что если функция спроса дифференцируема при $p = p^{\mathsf{ND}}$, то прибыль недискриминирующего монополиста ниже, чем при использовании двухставочного тарифа.

12.53 Монополия, производящая однородное благо, имеет дело с потребителями двух типов, функции полезности которых имеют вид

$$u(x,z) = 0.5\theta(1-(1-x)^2)+z$$

с $\theta = 1$ и $\theta = 1/2$ соответственно. Здесь x — потребление блага, производимого монополией, z — деньги на потребление других благ. Число потребителей первого типа равно λ, а число потребителей второго типа $1-\lambda$. Средние издержки монополии равны $1/4$.

(A) Предположим, что монополист может различать потребителей. Найдите оптимальный двухставочный тариф для каждого типа.

(B) В той же ситуации найдите оптимальные пакеты для случая пакетного ценообразования.

(C) Предположим теперь, что монополист не может различать потребителей. В каком случае двухставочный тариф может совпасть с одним из тарифов в пункте (A)? Объясните.

(D) Найдите оптимальный двухставочный тариф в ситуации пункта (C).

12.54 (A) Монополия имеет дело с потребителями двух типов, функции полезности которых имеют вид

$$u_l(x, z) = x - 0{,}5x^2 + z \quad \text{и} \quad u_h(x, z) = 1{,}5x - 0{,}5x^2 + z.$$

Доля потребителей типа l равна μ. Издержки производства равны нулю. Найдите оптимальные пакеты, которые предложит монополия при ненаблюдаемости типов в зависимости от μ.

(B) Решите ту же задачу в случае, когда функция полезности потребителей типа h равна

$$u_h(x, z) = 10x - 4{,}5x^2 + z.$$

(C) В ситуации, когда обслуживаются оба типа потребителей сравните плату в расчете на единицу товара для потребителей двух типов. В каком случае монополист предложит скидку, а в каком — наценку за больший объем покупки?

12.55 Монополия имеет дело с потребителями трех типов, функции полезности которых имеют вид

$$u_1(x, z) = x - 4x^2 + z, \quad u_2(x, z) = x - 5x^2 + z.$$
$$u_3(x, z) = x - 6x^2 + z.$$

Издержки производства равны нулю. Монополия не различает потребителей разных типов.

(A) Найдите оптимальные пакеты, если число потребителей всех трех типов одинаково.

(B) Найдите необходимые и достаточные условия на доли потребителей, чтобы монополии было выгодно обслуживать потребителей всех трех типов.

12.56 Монополист производит благо, которое потребители могут потреблять в количестве 0 или 1, причем в двух вариантах (разного качества): B и A. Потребители бывают двух типов: H и L. Монополист не умеет их различать. Доля потребителей типа L равна λ. Оценки потребителей и издержки производства единицы блага зада-

Таблица 12.1. *Данные для задачи 12.56*

	Не покупает	B	A
H	0	3	7
L	0	2	4
Издержки	—	1	3

ны Таблицей 12.1. Найдите оптимальную для монополии пакетную схему в зависимости от λ.

12.57 Монополия-авиаперевозчик имеет дело с потребителями двух типов: бизнесменами и туристами. Она предлагает билеты двух типов: билет А с открытой обратной датой и билет Б с фиксированной обратной датой. Бизнесмены готовы платить за билет А по \$600 и только по \$250 за билет Б. Туристы же готовы платить по \$300 за билет А и по \$200 за билет Б. Издержки перевозки одного пассажира для авиакомпании равны \$100 вне зависисмости от типа билета. Число бизнесменов и туристов одинаковое. Авиакомпания не отличает бизнесметов от туристов. Сколько выиграет монополия при использовании дискриминации по сравнению с линейным тарифом? Как изменится благосостояние общества при запрете дискриминации?

Глава

Олигополия

13

В этой главе мы отказываемся от предположения, что на данном рынке существует единственный производитель, и рассматриваем ситуации, когда на рынке несколько производителей и каждый из них может влиять на цену. Такую структуру рынка называют олигополией. Когда на рынке два производителя, олигополию называют дуополией. По прежнему будем предполагать, что потребителей рассматриваемой продукции достаточно много, так что предположение о том, что они рассматривают цену благ как данную, представляется вполне естественным.

Принципиальное отличие от моделей монополии состоит в том, что в моделях олигополии решения принимаются сразу несколькими экономическими субъектами — олигополистами, причем результат функционирования каждого из них зависит не только от предпринимаемых им самим действий, но и от действий его конкурентов. Таким образом, мы сталкиваемся здесь с феноменом так называемого стратегического поведения — предмета теории игр[1]. В связи с этим практически все модели олигополии представляют собой игры различного рода, и анализ олигополистических рынков в существенной степени опирается на аппарат теории игр.

Мы будем предполагать здесь, если не оговорено иное, что общая структура олигополистической отрасли (технология, количество производителей, тип конкуренции и т. д.) заданы экзогенно. Логически возможны разные гипотезы о характере принимаемых фирмами решений (решение об объемах продаж, решение о ценах продаж и т. д.), характере их взаимодействия (одновременное принятие решений, последовательное принятие решений и т. д.), отражающиеся в структуре соответствующих игр, моделирующих такое взаимодействие. Хотя мы прежде всего сосредоточимся на рыночных структурах при

---

[1] Нужно оговориться, что модели монополии, особенно модели дискриминации, все же включают в себя некоторые элементы теории игр, поскольку кроме решений монополиста рассматривается также реакция на них потребителей.

Таблица 13.1. *Модели олигополии*

	Одновременно	*Последовательно*
Количество	Модель Курно	Модель Штакельберга
Цена	Модель Бертрана	Ценовое лидерство

некооперативном поведении олигополистов, но попутно будем рассматривать и кооперативное поведение (картель, сговор).

С учетом сказанного модели олигополии при некооперативном поведении фирм можно классифицировать по следующим признакам:

(1) Одновременное принятие решений.

(2) Последовательное принятие решений. Обычно рассматриваю такую рыночную структуру, когда одна из фирм (называемая лидером) первой принимает решение, остальные фирмы (называемые последователями) подстраиваются к ее решению. Возможны и более сложные последовательности принятия решений.

Дополняя гипотезы о том, в какой последовательности принимаются решения, предположениями о характере принимаемых решений (возможных стратегиях фирм), получаем четыре возможные группы моделей олигополии, представленные в Таблице 13.1.

В этой главе мы будем рассматривать ситуации, когда n фирм производят и продают однородную продукцию. Технологии производства представлены возрастающими функциями издержек $c_j(y_j)$, $j = 1, \ldots, n$, принимающими неотрицательные значения, а спрос на продукцию — также принимающей неотрицательные значения убывающей обратной функцией спроса $p(Y)$ (рассматривается рынок нормального блага). Областью определения обратной функции спроса везде будем считать $[0, +\infty)$. Кроме того, в дальнейшем мы не будем требовать неотрицательности прибыли отдельного олигополиста (как и при анализе монополии).

13.1 Модель Курно

В модели Курно производители принимают решения относительно объемов производства, причем делают это одновременно. Такая ситуация моделируется как статическая игра n лиц, а ее решение — как равновесие по Нэшу. Фирмы принимают решения об объемах выпуска, исходя из своих предположений (ожиданий) о решениях, принятых другими фирмами. В равновесии ожидания фирм оправдываются.

Пусть y^e_{ji} — ожидаемый (производителем j) объем производства производителя i, $\mathbf{y}^e_{-j}$ — составленный из этих ожиданий вектор $(y^e_{j1}, \dots, y^e_{j,j-1}, y^e_{j,}$
Тогда при выпуске y_j его (ожидаемая) прибыль составит величину

$$\Pi^e_j(y_j, \mathbf{y}^e_{-j}) = p\left(y_j + \sum_{i \neq j} y^e_{ji}\right) \cdot y_j - c_j(y_j).$$

Без ограничения общности можно считать, что фирма планирует продать именно такое количество продукции, какое выпускает. Поэтому ее возможные стратегии — неотрицательные объемы продаж ($y_j \geqslant 0$). Выпуск, максимизирующий прибыль при ограничении $y_j \geqslant 0$ при таких ожиданиях??, зависит только от ожидаемого объема производства других производителей. Если при этом ожидаемые объемы производства совпадают с фактическими, то такие объемы производства можно назвать равновесием олигополии. Описанное понятие равновесия было введено в XIX веке французом Антуаном Огюстеном Курно[2]. Это равновесие часто называют равновесием Курно. Следует отметить, однако, что было бы точнее говорить о *равновесии Нэша в модели Курно*[3].

Определение 13.1:

Равновесие Курно — это совокупность выпусков $(y^*_1, \dots, y^*_n)$ и ожиданий $(\mathbf{y}^e_{-1}, \dots, \mathbf{y}^e_{-n})$, таких что выпуск любого производителя y^*_j максимизирует его прибыль на $[0, +\infty)$ при ожиданиях $\mathbf{y}^e_{-j}$ и ожидания всех производителей оправдываются, т. е. $\mathbf{y}^e_{-j} = \mathbf{y}^*_{-j}$, $j = 1, \dots, n$. ◀

Другими словами, y^*_j является решением задачи фирмы j (максимизициии ее прибыли при равновесных выпусках других фирм)

$$\Pi_j(y_j) = p\left(y_j + \sum_{i \neq j} y^*_i\right) \cdot y_j - c_j(y_j) \to \max_{y_j \geqslant 0}.$$

Зависимость оптимального объема производства y_j от $\sum_{i \neq j} y^e_i$ называют функцией отклика, если решение задачи единственно (в общем случае — отображением отклика). Будем обозначать эту функцию через $R_j(Y_{-j})$, где $Y_{-j} = \sum_{i \neq j} y_i$ — (ожидаемый) суммарный

[2] A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris: Hachette, 1838.

[3] Часто равновесие в модели Курно называют также равновесием по Нэшу—Курно.

объем производства блага всеми другими производителями. Если оптимальный отклик однозначен, то равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ является решением следующей системы уравнений:

$$y_j^* = R_j\left(\sum_{i\neq j} y_i^*\right),\ j = 1, \ldots, n.$$

Если же отклики неоднозначны, то равновесие является решением аналогичной системы включений:

$$y_j^* \in R_j\left(\sum_{i\neq j} y_i^*\right),\ j = 1, \ldots, n.$$

Еще одну характеристику равновесия получим на основе условий первого порядка для задач фирм в состоянии равновесия в предположении дифференцируемости обратной функции спроса и функций издержек. Пусть $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — равновесие Курно. Тогда выполняются следующие соотношения (условия первого порядка):

$$\Pi_j'(y_j^*) = p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y_j^* - c_j'(y_j^*) \leqslant 0,$$

где $Y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$, причем

$$\Pi_j'(y_j^*) = 0, \text{ если } y_j^* > 0.$$

Данные соотношения при $j = 1, \ldots, n$ представляют собой дифференциальную характеристику равновесия Курно.

Рис. 13.1 иллюстрирует равновесие Курно для случая двух фирм (дуополии). На рисунке изображены кривые постоянной прибыли ($\Pi_1(y_1, y_2) = \text{const}$ и $\Pi_2(y_1, y_2) = \text{const}$) и кривые отклика ($y_1 = R_1(y_2)$ и $y_2 = R_2(y_1)$), которые можно определить как множества точек, в которых касательные к кривым равной прибыли параллельны соответствующим осям координат. Точка пересечения кривых отклика является равновесием Нэша—Курно ($\mathbf{y}^*$).

13.1.1 Свойства равновесия Курно в случае постоянных и одинаковых предельных издержек

Проведем сначала анализ модели Курно в упрощенном варианте, предположив, что предельные издержки постоянны и совпадают у всех производителей, т. е. $c_j'(y_j) = c$. Кроме того, будем предполагать выполнение следующих условий:

(C_1) $p(0) > c$;

(C_2) существует $\tilde{Y}$, такой что $p(\tilde{Y}) \leqslant c$;

(C_3) функция $p(\cdot)$ дифференцируема и $p'(y) < 0$ для всех $y > 0$.

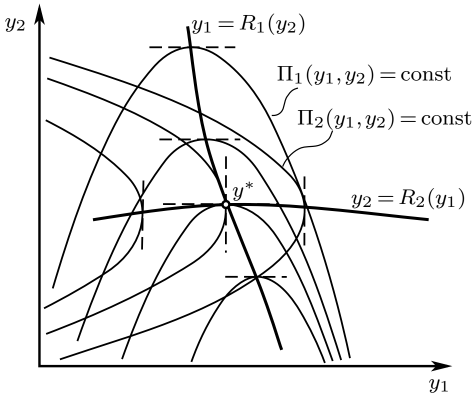


Рис. 13.1. *Равновесие Курно*

Симметричность равновесия и положительность выпусков

Докажем сначала, что объемы производства у всех олигополистов совпадают. Пусть это не так и существуют два производителя j и k, таких что $y_j^* > y_k^*$. Запишем условия первого порядка, учитывая, что выпуск y_j^* положителен, а y_k^* может быть равен нулю:

$$p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y_j^* - c = 0$$

и

$$p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y_k^* - c \leqslant 0.$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим

$$p'(Y^*)(y_k^* - y_j^*) \leqslant 0.$$

Так как $p'(Y^*) < 0$, то $y_k^* \geqslant y_j^*$. Получили противоречие. Таким образом, объемы производства у всех фирм в равновесии Курно одинаковы: $y_j^* = Y^*/n$ при всех $j = 1, \ldots, n$, а условия первого порядка совпадают и принимают вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c \leqslant 0,$$

причем неравенство заменяется на равенство, если суммарный выпуск Y^* положителен.

Так как согласно предположению (C_1) $p(0) > c$, то в равновесии Курно суммарный выпуск не может быть нулевым, иначе, подставляя $Y^* = 0$ в условия первого порядка, получим

$$p(0) - c \leqslant 0.$$

Существование и единственность равновесия

Таким образом, если равновесие Курно существует и выполнено условие (C_1), то совокупный выпуск отрасли в этом равновесии положителен и условия первого порядка принимают вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c = 0.$$

Далее, существование корня этого уравнения можно гарантировать, если выполнены условия (C_1)-(C_3) и, кроме того, функция $p(\cdot)$ *непрерывно* дифференцируема, поскольку в этих условиях непрерывная функция $p(Y) + p'(Y)\frac{Y}{n} - c$ принимает значения разных знаков на концах интервала $[0, \tilde{Y}]$.

Установить, что $(\frac{Y^*}{n}, \ldots, \frac{Y^*}{n})$ — равновесие Курно для любого корня Y^* рассматриваемого уравнения, можно при дополнительном предположении, что функция $p(y + y') \cdot y$ вогнута по y при любом $y' \geqslant 0$. Действительно, в этом случае условие первого порядка является также и достаточным условием максимума, поскольку функция прибыли будет вогнутой. Заметим, что так как при сделанном предположении функция $p(y)y$ вогнута, то равновесие Курно единственно, поскольку условие первого порядка выполнено в одной точке (уравнение имеет единственный корень). Действительно, функцию $p(Y) + p'(Y)\frac{Y}{n} - c$ можно представить в виде

$$\frac{1}{n}[p(Y) + p'(Y)Y] + p(Y)\frac{n-1}{n} - c.$$

Первое слагаемое здесь не возрастает, а второе убывает при $n > 1$, поэтому функция $p(Y) + p'(Y)\frac{Y}{n} - c$ убывает и может быть равной нулю не более чем в одной точке.

Сравнение равновесия Курно с равновесиями при монополии и совершенной конкуренции

В дополнение к равновесию по Курно можно определить (и вычислить) для данной отраслевой структуры еще два равновесия — равновесие при совершенной конкуренции и равновесие при монополии.

Под состоянием равновесия при совершенной конкуренции будем понимать совокупность выпусков, при которых производители, максимизируя свою прибыль, игнорируют влияние принимаемых решений (своих выпусков) на цену продаж, т. е. действуют как ценополучатели.

непонятно??Далее, поскольку все производители используют одну и ту же технологию, характеризующуюся постоянной отдачей от масштаба, любой выпуск этих фирм может произвести любая из них с теми же издержками (либо все эти фирмы, объединившись в картель) и поэтому в данной ситуации можно вычислить равновесие при монополии.

Здесь мы сравним объемы выпусков, соответствующих трем указанным состояниям, установив следующие две характеристики равновесия Курно.

- Объем выпуска Y^* в равновесии Курно выше, чем объем выпуска y^{M} при монополии.
- Объем выпуска Y^* в равновесии Курно ниже, чем объем выпуска $\bar{Y}$ в условиях совершенной конкуренции.

Теорема 13.1:
Пусть $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — равновесие Курно, $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ — равновесие при совершенной конкуренции и y^{M} — равновесие при монополии[4]. Предположим, что выполнены условия $(\mathsf{C}_1)(\mathsf{C}_3)$. Тогда

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i > Y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^* > y^{\mathsf{M}}.$$

┘

Доказательство: Как было показано выше, равновесие Курно удовлетворяет условию

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c = 0.$$

Как было доказано в главе о монополии, выполнение условий (C_1)-(C_3) гарантирует, что $y^{\mathsf{M}} > 0$, поэтому y^{M} удовлетворяет условию первого порядка

$$p(y^{\mathsf{M}}) + p'(y^{\mathsf{M}})y^{\mathsf{M}} - c = 0.$$

С другой стороны, при совершенной конкуренции, как известно, цена равна предельным издержкам:

$$p(\bar{Y}) - c = 0.$$

[4]Как нетрудно показать, тот же самый объем производства будет выбран, если олигополисты образуют картель (см. ниже).

Вычитая из третьего соотношения первое, получим

$$p(\bar{Y}) - p(Y^*) = p'(Y^*)\frac{Y^*}{n}.$$

Правая часть этого соотношения отрицательна, а функция $p(\cdot)$ убывает, поэтому

$$Y^* > \bar{Y}.$$

Предположим, что $y^{\text{M}} > Y^*$. Тогда увеличение выпуска одного из производителей (например, первого) на величину $Y^* - y^{\text{M}}$ приводит к росту суммарной прибыли (до монопольно высокой). Поскольку при этом прибыль остальных производителей может только уменьшиться, прибыль первого возрастает, что противоречит предположению о том, что Y^* — совокупный выпуск в равновесии Курно. ■

Из теоремы непосредственно следует, что рыночная цена, как следствие рыночной власти фирм-олигополистов, оказывается выше предельных издержек — рыночной цены в условиях совершенной конкуренции, причем цена в условиях монополии всегда выше, чем цена в условиях олигополии при любом числе производителей данного блага. Полученный результат, касающийся соотношения выпуска (цены равновесия) и числа производителей в отрасли, можно усилить, установив, что при росте числа фирм объем выпуска в равновесии Курно приближается к объему выпуска в равновесии при совершенной конкуренции.

Теорема 13.2:

Предположим, что выполнены условия (C_1)-(C_3) и, кроме того, функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Пусть Y_n^* — суммарный выпуск в равновесии Курно с n фирмами. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} Y_n^* = \bar{Y}.$$ ┘

Доказательство: Для любого Y_n^* выполняются соотношения (условия первого порядка)

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} - c = 0.$$

Предыдущая теорема гарантирует ограниченность последовательности Y_n^* ($Y_n^* \in (0, \bar{Y})$). Так как функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то из этого следует ограниченность $p'(Y_n^*)Y_n^*$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left[p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n}\right] = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} p(Y_n^*) = c.$$

Справедливость утверждения теоремы следует тогда из непрерывности обратной функции спроса. ■

13.1.2 Свойства равновесия Курно в случае функций издержек общего вида

Вышеприведенные результаты получены при достаточно сильных предположениях относительно функции издержек и функции спроса с использованием традиционных методов анализа, основанных на анализе условий первого порядка. Ниже будут приведены естественные обобщения полученных результатов при отказе от этих предположений.

Существование равновесия

Прежде всего укажем условия на функции издержек и функции спроса, при которых равновесие Курно существует[5]. Доказательство соответствующего утверждения оставляется в качестве упражнения (см. задачу 13.3).

Теорема 13.3:

Предположим, что в модели Курно выполнены следующие условия:

(1) обратная функция спроса $p(\cdot)$ порождена максимизацией полезности репрезентативного потребителя с функцией полезности $u(x,z) = v(x) + z$, причем $v(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция с убывающей производной и $v(0) = 0$;
(2) функция $p(y + y') \cdot y$ вогнута по y при любом $y' \geqslant 0$;
(3) функции издержек $c_j(y)$ являются непрерывными и выпуклыми[6];

[5] Условия данной теоремы гарантируют существование равновесия Нэша—Курно в чистых стратегиях. Применяя теорему Гликсберга (Теорема A.5 на с. 1039), можно доказать существование равновесия в смешанных стратегиях, не используя предположения (2) и (3). При этом доказательство теоремы изменится только частично.

[6] Обычно условия (2) и (3) теоремы существования заменяют следующие условия Хана: $p'(Y) + p''(Y)y_j < 0$ и $p'(Y) - c_j''(y_j) < 0$ $\forall j, Y, y_j$ (F. H. Hahn. The Stability of the Cournot Oligopoly Solution, *Review of Economic Studies* **29** (1962): 329–331). Заметим, что они также гарантируют строгую вогнутость функции

(4) существуют $\tilde{y}_j > 0$ ($j = 1, \ldots, n$), такие что $v(\tilde{y}_j) - c_j(\tilde{y}_j) \geqslant v(y_j) - c_j(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.

Тогда равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ существует, причем $0 \leqslant y_j^* < \tilde{y}_j \; \forall j$. ⌟

Сам факт существования равновесия хотя и повышает доверие к модели Курно как к инструменту анализа несовершенной конкуренции, но мало полезен для анализа олигополистического рынка. Без информации, характеризующей равновесие, модель Курно, как и любая модель, оказывалась бы малополезной. Следующие далее утверждения дают сравнительную характеристику объемов производства в отрасли при разных типах ее организации. Они обобщают соответствующие утверждения относительно свойств равновесия, полученные в предположении, что предельные издержки всех фирм одинаковы и постоянны, и, в частности, позволяют сравнить равновесие Курно с монопольным равновесием и равновесием в ситуации совершенной конкуренции.

Сравнение равновесия Курно с равновесием при совершенной конкуренции

Теорема 13.4:

{i} Предположим, что равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ и равновесие при совершенной конкуренции $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ существуют и обратная функция спроса $p(y)$ убывает. Тогда суммарный выпуск в равновесии Курно $Y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$ не превышает суммарный выпуск в условиях совершенной конкуренции $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i$.

{ii} Если, кроме того, выполнены следующие условия:

* существует фирма j_0, для которой $p(0) > c'_{j_0}(0)$,
* обратная функция спроса $p(y)$ и функции издержек $c_j(y)$ ($j = 1, \ldots, n$) дифференцируемы при всех неотрицательных y, причем $p'(Y^*) < 0$,
* функции издержек $c_j(y)$ выпуклы,

прибыли и, таким образом, вместе с другими условиями теоремы — существование равновесия Курно. Анализ поведения олигополии в ситуации, когда выполнены условия Хана, оказывается достаточно простым и приводится в задачах. Условие (4) заменяет условие: существует величина $\tilde{Y}$, такая что $p(Y) = 0$ для всех $Y \geqslant \tilde{Y}$. В приводимых ниже доказательствах существования и свойств равновесия Курно акцент делается на свойствах равновесия и следствиях рациональности поведения, которые можно рассматривать как аналоги выявленных предпочтений.

то Y^* меньше $\bar{Y}$. ⌟

Доказательство: {i} Выпуск y_j^* максимизирует прибыль j-го производителя в предположении, что суммарный объем производства остальных равен Y_{-j}^*, поэтому должно выполнятся неравенство

$$p(Y^*)y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j).$$

С другой стороны, $\bar{y}_j$ дает j-му производителю максимум прибыли в предположении, что цена неизменна и равна $p(\bar{Y})$, поэтому

$$p(\bar{Y})\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j) \geqslant p(\bar{Y})y_j^* - c_j(y_j^*).$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$p(Y^*)y_j^* + p(\bar{Y})\bar{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\bar{y}_j + p(\bar{Y})y_j^*. \qquad (\boxdot)$$

Предположим, что существует такая фирма j, которая в равновесии Курно производила бы больше, чем в конкурентном равновесии:

$$y_j^* > \bar{y}_j.$$

При убывающей функции спроса из этого неравенства следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j) > p(Y^*).$$

С учетом $\bar{y}_j \geqslant 0$, то из этого следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\bar{y}_j.$$

Сложив это неравенство с неравенством ($\boxdot$), получим

$$p(Y^*)y_j^* + p(\bar{Y})\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\bar{y}_j + p(\bar{Y})y_j^*$$

или

$$[p(Y^*) - p(\bar{Y})](y_j^* - \bar{y}_j) \geqslant 0.$$

Так как мы предположили, что $y_j^* > \bar{y}_j$, то

$$p(Y^*) \geqslant p(\bar{Y}).$$

В силу убывания функции спроса это означает, что

$$Y^* \leqslant \bar{Y}.$$

С другой стороны, пусть наше предположение неверно и для всех фирм выполнено $y_j^* \leqslant \bar{y}_j$. Суммируя по j, получаем, что $Y^* \leqslant \bar{Y}$.

{ii} Докажем, используя дополнительные условия, что неравенство здесь строгое. Пусть это не так и суммарные выпуски совпадают, т. е. $Y^* = \bar{Y}$.

Может быть только два случая: либо $y_j^* = \bar{y}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, либо $\bar{y}_j < y_j^*$ для некоторого j. И в том, и в другом случае существует производитель j, для которого $y_j^* > 0$ и $\bar{y}_j \leqslant y_j^*$ (все фирмы не могут выбрать нулевой выпуск, поскольку по условиям теоремы существует фирма j_0, для которой $p(0) > c'_{j_0}(0)$). Для этого производителя дифференциальная характеристика равновесия Курно имеет вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)y_j^* = c'_j(y_j^*).$$

Из выпуклости функции издержек следует, что

$$c'_j(\bar{y}_j) \leqslant c'_j(y_j^*).$$

Из условий первого порядка для равновесия при совершенной конкуренции следует, что

$$p(\bar{Y}) - c'_j(\bar{y}_j) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$p(Y^*) + p'(Y^*)y_j^* \geqslant c'_j(\bar{y}_j) \geqslant p(\bar{Y}).$$

Поскольку $Y^* = \bar{Y}$, то $p(Y^*) = p(\bar{Y})$, откуда

$$p'(Y^*)y_j^* \geqslant 0,$$

что противоречит тому, что функция спроса имеет отрицательный наклон при Y^*. Таким образом, $Y^* < \bar{Y}$. ■

Симметричность равновесия, положительность выпусков и единственность

В частном случае, когда издержки у всех производителей одинаковы, т. е. $c_j(y) = c(y)$, можно доказать, при некоторых дополнительных предположениях, что в равновесии выпуски всех производителей одинаковы (равновесие будет симметричным) и положительны. Кроме того, при дополнительном предположении вогнутости функции совокупной выручки несложно доказать единственность равновесия.

Теорема 13.5:

Предположим, что равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ существует и выполнены следующие условия:

* издержки у всех производителей одинаковы: $c_j(y) = c(y)$, $j = 1, \ldots, n$, причем $c(y)$ — выпуклая функция;
* обратная функция спроса $p(y)$ и функция издержек $c(y)$ дифференцируемы;
* $p(0) > c'(0)$;
* $p'(Y^*) < 0$.

Тогда верно следующее.

{i} Равновесие симметрично, т. е.

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n} \text{ для всех j= 1, \ldots, n},$$

и каждая фирма выпускает в равновесии положительное количество продукции, т. е.

$$y_j^* > 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

{ii} Если, кроме того, функция $p(y)y$ вогнута, то равновесие единственно. ⌟

Доказательство: {i} Покажем, что если функции издержек одинаковы, то все производители в равновесии Курно выпускают одно и то же количество продукции. Действительно, предположим, что существуют производители j и k, такие что $y_j^* > y_k^*$. Тогда из условий первого порядка следует, что

$$p'(Y^*)(y_k^* - y_j^*) \leqslant c'(y_k^*) - c'(y_j^*).$$

Но левая часть данного соотношения положительна, а правая — неположительна. Пришли к противоречию. Таким образом, выпуски всех производителей совпадают ($y_j^* = Y^*/n$).

Суммарный выпуск отрасли Y^* не может быть равным нулю. В противном случае из условия первого порядка любой из фирм следует, что

$$p(0) - c'(0) \leqslant 0,$$

а это противоречит условию теоремы. Как следствие, у всех фирм $y_j^* > 0$.

{ii} Дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c'\left(\frac{Y^*}{n}\right) = 0$$

или

$$\frac{n-1}{n}p(Y^*)+\frac{1}{n}[p(Y^*)+p'(Y^*)Y^*]-c'\left(\frac{Y^*}{n}\right)=0.$$

Из вогнутости функции $p(y)y$ следует, что ее производная $p(y)+p'(y)y$ не возрастает. Аналогично из выпуклости функции $c(y)$ следует неубывание предельных издержек. Учитывая убывание обратной функции спроса $p(y)$, получаем, что выражение в левой части данного уравнения убывает по Y^*. Отсюда следует единственность объема Y^*, удовлетворяющего дифференциальной характеристике. ■

Приводимый ниже пример показывает, что в случае, когда функции издержек олигополистов не совпадают, нельзя гарантировать симметричность равновесия. Более того при этом объемы выпуска в модели Курно у некоторых фирм могут быть и нулевыми, хотя условие $p(0)>c_j'(0)$ выполняется для всех фирм.

Пример 13.1

Пусть в дуопольной отрасли $p(y)=4-4y$, $c_1(y_1)=2y_1^2$, $c_2(y_2)=2y_2^2+3y_1$. Нетрудно проверить, что равновесием Курно в этом случае будет точка $y_1=1/3$, $y_2=0$. △

Утверждение теоремы, вообще говоря, перестает быть справедливым, если функция спроса не является дифференцируемой, как показывает следующий пример с неединственностью и несимметричностью равновесий по Курно.

Пример 13.2

Пусть в дуопольной отрасли

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{7-y}{6}, & y\leqslant 1,\\ 7-6y, & y\geqslant 1\end{cases}$$

и $c_j(y)=y^2/4$, $j=1,2$. В такой отрасли помимо симметричного равновесия $(1/2,1/2)$ существует бесконечно много асимметричных равновесий, в которых суммарное производство равно единице, например $(1/3,2/3)$[7]. (Заметим, что функция совокупной выручки вогнута, так что нарушено только одно условие теоремы.) △

[7] Заметим, что если выполнены условия теоремы существования (Теорема 13.3), то при одинаковости функций издержек *всегда* существует симметричное равновесие. В силу симметричности задач олигополистов мы имеем одинаковые отображения отклика $R(\cdot)$. Рассмотрим отображение $\tilde{R}(y)=R((n-1)y)$, отображающее отрезок $[0,\tilde{y}]$ в себя. Согласно теореме Какутани (с помощью которой доказывается теорема Нэша) оно имеет неподвижную точку, что и доказывает существование симметричного равновесия.

Поведение равновесия в модели Курно при росте числа фирм

Тот, кто изучал начальный курс микроэкономики, мог встретить неформальное утверждение о том, что если в отрасли достаточно много примерно одинаковых предприятий, так что доля отдельного предприятия в общем выпуске отрасли мала, то каждое предприятие можно рассматривать как не обладающее рыночной властью (т. е. кык ценополучателя) и ситуация в отрасли может быть довольно точно описана моделью совершенной конкуренции. Ниже приводится формальное обоснование этого тезиса (в контексте частного равновесия). Его идея (восходящая к Курно) в том, что с ростом числа фирм в отрасли рыночная власть каждой фирмы (ее возможность влиять на рыночную цену) убывает, так что отрасль в некотором смысле все более приближается к конкурентной. Конкурентная отрасль тогда — просто идеализация ситуаций, когда рыночная власть каждого экономического субъекта (как производителя, так и потребителя) настолько мала, что ею можно пренебречь.

Мы приведем доказательство соответствующего утверждения для частного случая, когда в модели Курно издержки у всех производителей одинаковы, т. е. $c_j(y) = c(y)$.

Теорема 13.6:

Предположим, что равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ и равновесие при совершенной конкуренции $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ существуют при любом $n \geqslant 2$, и выполнены следующие условия:

* $c_j(y) = c(y)$, $j = 1, \ldots, n$, причем $c(y)$ — выпуклая функция;
* функция совокупной выручки $p(y)y$ вогнута;
* обратная функция спроса $p(y)$ и функция издержек $c(y)$ непрерывно дифференцируемы при всех неотрицательных y, причем $p'(y) < 0$;
* $c'(0) > 0$, $p(0) > c'(0)$ и существует величина Y°, такая что $p(Y^\circ) = c'(0)$.

Тогда выполнено следующее.

{i} Суммарный выпуск в равновесии Курно с n фирмами Y_n^* растет с ростом n и меньше величины Y°.

{ii} Выпуск отдельной фирмы Y_n^*/n падает с ростом n, причем $\lim_{n\to\infty} Y_n^*/n = 0$.

{iii} Прибыль отдельной фирмы

$$p(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} - c\left(\frac{Y_n^*}{n}\right)$$

падает с ростом n.

{iv} $\lim_{n\to\infty} Y_n^* = \lim_{n\to\infty} \bar{Y}_n = Y^\circ$, где $\bar{Y}_n$ — суммарный выпуск тех же предприятий в условиях совершенной конкуренции. ⌟

Доказательство этого утверждения дается в следующем подпункте??, здесь же приведем более простое (не вполне формальное) обоснование этого результата при дополнительных упрощающих анализ предположениях.

Условие первого порядка для симметричного равновесия Курно

$$p(Y^*(n)) + p'(Y^*(n))\frac{Y^*(n)}{n} = c'\left(\frac{Y^*(n)}{n}\right)$$

определяет зависимость $Y^*(n)$ от n (при всех n, в том числе и не обязательно целых) как неявную функцию. Предположим, что выполнены условия, гарантирующие, что она дифференцируема.

Докажем, что функция $Y^*(\cdot)$ возрастает при $n \geqslant 1$. Точнее, покажем, что $dY^*(n)/dn > 0$.

Продифференцируем уравнение:

$$p' \cdot \frac{dY^*(n)}{dn} + p'' \cdot y^*(n)\frac{dY^*(n)}{dn} + p' \cdot \frac{dY^*(n)}{dn}\frac{1}{n} - p' \cdot \frac{y^*(n)}{n} = \\ = c'' \cdot \frac{dY^*(n)}{dn}\frac{1}{n} - c'' \cdot \frac{y^*(n)}{n}.$$

Отсюда

$$\left(p' + p'' \cdot y^*(n) + \frac{1}{n}p' - \frac{1}{n}c''\right)\frac{dY^*(n)}{dn} = (p' - c'')\frac{y^*(n)}{n}.$$

Перепишем это соотношение в следующем виде:

$$\Big((n-1)p' + [p'' \cdot Y^*(n) + 2p'] - c''\Big)\frac{dY^*(n)}{dn} = (p' - c'')y^*(n).$$

Функция совокупной выручки $R(y) = p(y)y$ вогнута, поэтому

$$R''(y) = p''(y)y + 2p'(y)y \leqslant 0.$$

Далее, учитывая, что $p' < 0$, $c''(y) \geqslant 0$, получим

$$\frac{dY^*(n)}{dn} > 0.$$

Докажем теперь, что функция $y^*(n)$ убывает при $n \geqslant 2$, точнее, что ее производная $dy^*(n)/dn$ отрицательна при всех значениях $n > 2$.

Перепишем исходное уравнение, которое определяет необходимое условие оптимальности, в виде

$$p(Y^*(n)) + p'(Y^*(n))y^*(n) = c'(y^*(n))$$

и продифференцируем его:

$$p' \cdot \frac{dY^*(n)}{dn} + p'' \cdot y^*(n)\frac{dY^*(n)}{dn} + p' \cdot \frac{dy^*(n)}{dn} = c'' \cdot \frac{dy^*(n)}{dn}.$$

Умножив это соотношение на n и преобразовав, получим

$$((n-2)p' + [p'' \cdot Y^*(n) + 2p'])\frac{dY^*(n)}{dn} = n(c'' - p')\frac{dy^*(n)}{dn}.$$

Отсюда следует при $n > 2$, что

$$\frac{dy^*(n)}{dn} < 0.$$

В задаче 13.4 предлагается доказать, используя полученные соотношения, что $\frac{d\Pi^*(n)}{dn} < 0$, где функция $\Pi^*(n)$ имеет смысл прибыли отдельной фирмы в отрасли с n фирмами и рассчитывается как

$$\Pi^*(n) = p(Y^*(n))y^*(n) - c(y^*(n)).$$

Таким образом, уменьшение монопольной власти при росте числа конкурентов — это довольно реалистическая, согласующаяся с нашим представлением о монопольной власти картина. Когда производителей много, то каждый из них оказывает малое влияние на рынок, на цену, по которой может продаваться продукция, и поэтому сама модель Курно как модель, описывающая феномен несовершенной конкуренции, оказывается привлекательной.

Следующий пример иллюстрирует приведенные выше утверждения в случае линейной функции спроса и постоянных предельных издержек.

Пример 13.3

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, так что каждая фирма максимизирует

$$\Pi_j = (a - bY)y_j - cy_j.$$

Условия первого порядка максимума прибыли имеют вид

$$a - bY^* - by_j^* = c.$$

Просуммировав по j, получим

$$na - nbY^* - bY^* = nc.$$

Таким образом, равновесный объем выпуска равен

$$Y^* = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}.$$

В частности, при дуополии

$$Y^* = \frac{2(a-c)}{3b}.$$

Равновесная цена равна

$$p^* = a - b\frac{n(a-c)}{(n+1)b} = \frac{a+nc}{n+1} = c + \frac{b}{n+1}\frac{a-c}{b}.$$

Выпуск в случае совершенной конкуренции был бы равен

$$\bar{Y} = \frac{a-c}{b}.$$

То есть, как и следует из теории, $Y^* \leqslant \bar{Y}$. При увеличении числа фирм в олигополии суммарный объем производства все больше сближается с объемом при совершенной конкуренции:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a-c)}{(n+1)b} = \frac{a-c}{b},$$

а цена стремится к предельным издержкам:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+nc}{n+1} = c. \qquad \triangle$$

Доказательство теоремы о монотонности выпуска олигополии

Доказательство (Теоремы 13.6): Как доказано выше, при сделанных предположениях все фирмы $j = 1, \ldots, n$ в равновесии Курно будут выпускать положительное и одинаковое количество продукции:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}.$$

Дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

$$p(Y^*) + p'(Y^*)y_j^* = c'(y^*).$$

(В остальной части доказательства с целью упрощения записи мы будем обозначать выпуск отдельной фирмы в равновесии Курно отрасли с n фирмами через $y_n^* = \frac{Y_n^*}{n}$.) Решение этого уравнения будет совокупным объемом производства, соответствующим единственному (по Теореме 13.5) равновесию Курно.

{i} Дифференциальные характеристики равновесий Курно в ситуациях с $n+1$ и n олигополистами имеют следующий вид:

$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)y_{n+1}^* = c'(y_{n+1}^*).$$

и

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)y_n^* = c'(y_n^*).$$

Используя эти соотношения, можно показать, что суммарный выпуск в олигополистической отрасли возрастает с ростом числа олигополистов.

Предположим обратное: существует такое n, что $Y_{n+1}^* \leqslant Y_n^*$. Из отрицательности производной обратной функции спроса следует, что

$$np(Y_{n+1}^*) \geqslant np(Y_n^*) \quad \text{и} \quad 0 > p'(Y_n^*)y_n^*.$$

Из вогнутости функции $p(y)y$ следует, что ее производная не возрастает, т. е.

$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)Y_{n+1}^* \geqslant p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)Y_n^*.$$

Сложив три последних неравенства, получим

$$\begin{aligned} &np(Y_{n+1}^*) + p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)Y_{n+1}^* > \\ &\qquad > np(Y_n^*) + p'(Y_n^*)y_n^* + p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)Y_n^* \end{aligned}$$

или

$$(n+1)[p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)y_{n+1}^*] > (n+1)[p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)y_n^*].$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой левые части условий первого порядка для Y_{n+1}^* и Y_n^* соответственно, поэтому

$$c'(y_{n+1}^*) > c'(y_n^*).$$

Из выпуклости функции издержек следует, что предельные издержки растут, поэтому данное неравенство может быть выполнено,

только если
$$y^*_{n+1} > y^*_n,$$
но это противоречит исходному предположению о том, что $Y^*_{n+1} \leqslant Y^*_n$. Таким образом, мы доказали, что последовательность объемов производства Y^*_n возрастает по n[8].

Чтобы доказать, что $Y^*_n < Y^\circ$, достаточно доказать, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$, поскольку согласно Теореме 13.4 $Y^*_n < \bar{Y}_n$.

Воспользовавшись дифференциальной характеристикой конкурентного равновесия, возрастанием предельных издержек и определением величины Y°, запишем
$$p(\bar{Y}_n) = c'\left(\frac{\bar{Y}_n}{n}\right) \geqslant c'(0) = p(Y^\circ).$$

Поскольку, по предположению, обратная функция спроса убывает, это означает, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$.

{ii} Требуется доказать, что $y^*_n = Y^*_n/n$ является убывающей последовательностью.

Так как $p(y)y$ — вогнутая функция, то она лежит под своей касательной. Поэтому
$$p(Y^*_{n+1})Y^*_{n+1} \leqslant p(Y^*_n)Y^*_n + [p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)Y^*_n](Y^*_{n+1} - Y^*_n)$$
или
$$[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)]Y^*_{n+1} \leqslant p'(Y^*_n)Y^*_n(Y^*_{n+1} - Y^*_n).$$
Поскольку суммарный выпуск положителен, это неравенство можно переписать в виде
$$\frac{n+1}{n}[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)] \leqslant (n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}}p'(Y^*_n)y^*_n. \qquad (\ddagger)$$

Пусть доказываемое неверно и для какого-то n выполнено
$$y^*_{n+1} \geqslant y^*_n,$$
т. е.
$$(n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}} \geqslant 1.$$

[8]Величина Y^*_1 представляет собой монопольный выпуск, т. е. $Y^*_1 = y^{\mathsf{M}}$. Из доказанного следует, что $Y^*_n > y^{\mathsf{M}}$ при всех $n > 1$. Заметим, что при анализе соотношения выпусков монополии и олигополии мы неявно предполагаем, что фирма состоит только из одного предприятия. Другой подход основан на сравнении поведения олигополии и монополии, состоящей из тех же предприятий. Частично он реализуется далее, при анализе поведения картеля.

Из (‡) и последнего неравенства в силу того, что $p'(Y_n^*) < 0$, следует неравенство

$$\frac{n+1}{n}[p(Y_{n+1}^*) - p(Y_n^*)] \leqslant p'(Y_n^*)y_n^*.$$

Так как $Y_{n+1}^* > Y_n^*$, то из убывания обратной функции спроса и положительности $n - \frac{n+1}{n}$ при $n \geqslant 2$ следует, что

$$[p(Y_{n+1}^*) - p(Y_n^*)]\left(n - \frac{n+1}{n}\right) < 0.$$

Из вогнутости функции $p(y)y$ следует, что ее производная не возрастает, т. е. при $Y_{n+1}^* > Y_n^*$ выполнено

$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)Y_{n+1}^* \leqslant p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)Y_n^*.$$

Складывая три последних неравенства, получим

$$np(Y_{n+1}^*) + p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)Y_{n+1}^* < \\ < np(Y_n^*) + p'(Y_n^*)y_n^* + p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)Y_n^*.$$

Приведя подобные и разделив на $n+1$, получим

$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)y_{n+1}^* < p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)y_n^*.$$

С учетом дифференциальной характеристики равновесия Курно это означает, что

$$c'(y_{n+1}^*) < c'(y_n^*).$$

Из выпуклости функции издержек получаем требуемое:

$$y_{n+1}^* < y_n^*.$$

Далее, убывание выпуска отдельной фирмы до нуля, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} y_n^* = 0,$$

следует из того, что суммарный выпуск Y_n^* ограничен сверху величиной Y°.

{iii} Так как спрос убывает, то при $Y_{n+1}^* > Y_n^*$ выполнено

$$p(Y_{n+1}^*)Y_{n+1}^* < p(Y_n^*)Y_{n+1}^*.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$p(Y_{n+1}^*)y_{n+1}^* < p(Y_n^*)y_n^* + p(Y_n^*)(y_{n+1}^* - y_n^*).$$

С другой стороны, функция издержек, как выпуклая функция, должна лежать выше своей касательной, поэтому

$$c(y^*_{n+1}) \geqslant c(y^*_n) + c'(y^*_n)(y^*_{n+1} - y^*_n).$$

Комбинируя два неравенства, получим, что

$$\Pi_{n+1} < \Pi_n - (c'(y^*_n) - p(Y^*_n))(y^*_{n+1} - y^*_n),$$

где мы обозначили через Π_n прибыль отдельной фирмы в отрасли с n фирмами в точке равновесия Курно:

$$\Pi_n = p(Y^*_n)y^*_n - c(y^*_n).$$

Из условий первого порядка

$$c'(y^*_n) - p(Y^*_n) = p'(Y^*_n)y^*_n < 0.$$

Поскольку $y^*_{n+1} < y^*_n$, то $\Pi_{n+1} < \Pi_n$.

{iv} Запишем еще раз дифференциальную характеристику равновесия Курно:

$$p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)y^*_n = c'(y^*_n).$$

Здесь Y^*_n лежит в интервале $[0, Y^\circ]$. Так как производная обратной функции спроса непрерывна, то первый сомножитель во втором слагаемом — величина ограниченная. Второй сомножитель представляет собой величину, которая убывает до нуля при $n \to \infty$. Поэтому[9]

$$\lim_{n\to\infty} p'(Y^*_n)y^*_n = 0.$$

Так как Y^*_n/n стремится к нулю, то в силу непрерывной дифференцируемости функции издержек

$$c'(y^*_n) \to c'(0).$$

Таким образом,

$$p(Y^*_n) \to c'(0).$$

Вспоминая, что $c'(0) = p(Y^\circ)$, из непрерывности и убывания обратной функции спроса получим

$$Y^*_n \to Y^\circ.$$

[9]Таким образом, мы видим, что при большом количестве олигополистов $p(Y^*_n) \approx c'(y^*_n)$, т. е. цена, по которой они продают продукцию, близка к предельным издержкам.

Поскольку конкурентный объем производства $\bar{Y}_n$ лежит между Y_n^* и Y°, то он стремится к тому же пределу:

$$\bar{Y}_n \to Y^\circ. \qquad \blacksquare$$

13.1.3 Равновесие Курно и благосостояние

Выше мы установили, как влияет рыночная власть фирм в олигопольной отрасли на цену и объем выпуска. Здесь на основе полученных ранее результатов, характеризующих олигополию (Курно), мы проанализируем влияние рыночной власти на уровень благосостояния.

Рассмотрим олигопольную отрасль, характеристики которой удовлетворяют условиям Теоремы 13.5, в том числе условию, что все фирмы имеют одинаковые функции издержек $c(\cdot)$. Как было доказано в Теореме 13.5, в такой отрасли существует симметричное равновесие Курно, причем объем производства каждой фирмы $j = 1, \ldots, n$ положителен:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n} > 0.$$

Предположим, что спрос на продукцию олигополистов в модели Курно получается как результат выбора репрезентативного потребителя с квазилинейной функцией полезности:

$$u(x, z) = v(x) + z.$$

Напомним, что в этом случае для положительных x выполнено соотношение

$$p(x) = v'(x).$$

Индикатор благосостояния преобразуется к виду

$$W(Y) = v(Y) - nc\left(\frac{Y}{n}\right),$$

а его производная рассчитывается как

$$W'(Y) = v'(Y) - c'\left(\frac{Y}{n}\right) = p(Y) - c'\left(\frac{Y}{n}\right).$$

В равновесии Курно

$$p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} + p(Y^*) - c'\left(\frac{Y^*}{n}\right) = 0,$$

откуда очевидна его неоптимальность с точки зрения благосостояния:

$$W'(Y^*) = -p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} > 0.$$

Отсюда следует, что если немного увеличить суммарный выпуск по сравнению с Y^*, то благосостояние общества возрастет.

Покажем, что равновесный объем продаж на олигополистическом рынке в модели Курно максимизирует следующую функцию:

$$\breve{W}(Y,n) = \frac{1}{n}\left(p(Y)Y - nc\left(\frac{Y}{n}\right)\right) + \frac{n-1}{n}\left(v(Y) - nc\left(\frac{Y}{n}\right)\right).$$

(Эту функцию можно интерпретировать как взвешенное среднее совокупной прибыли и индикатора благосостояния[10].) Действительно, производная этой функции равна

$$\breve{W}'(Y,n) = \frac{1}{n}\left(p'(Y)Y + p(Y) - c'\left(\frac{Y}{n}\right)\right) + \frac{n-1}{n}\left(v'(Y) - c'\left(\frac{Y}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(p'(Y)Y + p(Y) - c'\left(\frac{Y}{n}\right)\right) + \frac{n-1}{n}\left(p(Y) - c'\left(\frac{Y}{n}\right)\right) =$$
$$= p'(Y)\frac{Y}{n} + p(Y) - c'\left(\frac{Y}{n}\right).$$

Как мы видели, в равновесии Курно (когда $Y = Y^*$) данная величина равна нулю. Если предположить, как и ранее, что функция совокупной выручки вогнута, функция спроса $p(Y)Y$ убывает и функция издержек выпукла, то производная функции $\breve{W}(Y,n)$ убывает по Y, поэтому $\breve{W}(Y,n)$ строго вогнута по Y, откуда следует, что в точке Y^* достигается ее (единственный) максимум.

При $n \to \infty$ доля первого слагаемого в функции $\breve{W}$ стремится к нулю, а доля второго слагаемого — к единице, так что функция $\breve{W}$ все больше сближается с индикатором благосостояния. Это вполне согласуется с тем, что при большом количестве фирм равновесие Курно становится схожим с конкурентным равновесием, в котором, как мы знаем, при некоторых условиях индикатор благосостояния достигает максимума.

---

[10] Эта интерпретация предложена в работе T. C. Bergstrom and H. R. Varian• Two Remarks on Cournot Equilibria, *Economic Letters* **19** (1985): 5–8. К сожалению, данная интерпретация не распространяется на случай неодинаковых функций издержек.

13.1.4 Модель Курно и число фирм в отрасли

Выше, рассматривая поведение выпуска как олигополистической отрасли в целом, так и отдельных олигополистов, мы не касались вопроса о положительности прибыли, и по этой причине наш анализ поведения этих характеристик нельзя считать вполне удовлетворительным, по крайней мере в контексте анализа долгосрочного равновесия. Любой олигополист, сталкивающийся с отрицательной прибылью на некотором рынке, вероятнее всего будет рассматривать вопрос об уходе с этого рынка. Аналогично любой потенциальный производитель, решающий вопрос о входе в олигополистическую отрасль, оценивает возможность получения им положительной (неотрицательной) прибыли в случае его входа в отрасль. Как нетрудно догадаться, эти вопросы имеют одну и ту же природу и в простейшей модели, рассматриваемой нами далее, тесно связаны с величиной постоянных (фиксированных) издержек и числом фирм, уже вошедших и действующих в отрасли.

Рассмотрим олигопольную отрасль, в которой у всех олигополистов одинаковые функции издержек. Будем предполагать, что выполнены все условия Теоремы 13.6. Удобно представить издержки каждой фирмы как сумму издержек входа (постоянных издержек) $f > 0$ и переменных издержек $\tilde{c}(y)$, где $\tilde{c}(0) = 0$, т. е.

$$c(y) = f + \tilde{c}(y).$$

Пусть y^{M} максимизирует прибыль монополиста. Предположим, что постоянные издержки таковы, что монополист, действуя на этом рынке, получит неотрицательную прибыль

$$\Pi(y^{\mathrm{M}}) \geqslant 0.$$

Другими словами, постоянные издержки не слишком высоки: они не должны превышать прибыль монополиста без учета постоянных издержек:

$$f \leqslant \tilde{\Pi}(y^{\mathrm{M}}),$$

где $\tilde{\Pi}(y) = \Pi(y) + f$. Если это условие не выполнено, то рынок не может существовать, т. е. не найдется производителей, желающих функционировать на этом рынке.

Через Π_n будем, как и ранее, обозначать прибыль, получаемую отдельной фирмой в отрасли, где действуют n фирм, а через $\tilde{\Pi}_n$ — прибыль без учета постоянных издержек. При этом $\tilde{\Pi}_1$ — прибыль монополии без учета постоянных издержек.

Как мы доказали ранее, Π_n (а следовательно, и $\tilde{\Pi}_n$) представляет собой убывающую последовательность. При сделанных нами ранее предположениях прибыль $\tilde{\Pi}_n$ положительна (в том числе $\tilde{\Pi}_1 > 0$) и при увеличении n стремится к нулю ($\tilde{\Pi}_n \to 0$). Читателю предлагается установить этот факт самостоятельно (см. задачу 13.15).

Из убывания и стремления к нулю очевидно, что при $0 < f \leqslant \tilde{\Pi}_1$ существует единственное целое число фирм в отрасли $n(f)$ такое, что

$$\tilde{\Pi}_{n(f)} \geqslant f > \tilde{\Pi}_{n(f)+1}$$

или

$$\Pi_{n(f)} \geqslant 0 > \Pi_{n(f)+1}.$$

Отметим, что это число единственно в силу строгого убывания прибыли при увеличении числа олигополистов. Таким образом, для каждого f из промежутка $(0, \tilde{\Pi}_1]$ определена функция $n(f)$. Эта функция сопоставляет каждому значению постоянных издержек максимально возможное число фирм, при котором каждая фирма получает неотрицательную прибыль.

Докажем, что эта функция не возрастает по f и не ограничена сверху. Пусть $f' > f''$. Тогда по определению функции $n(f)$ имеем, что $\tilde{\Pi}_{n(f')} \geqslant f' > f'' > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$, т. е. $\tilde{\Pi}_{n(f')} > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$. Поскольку прибыль убывает по n, то отсюда следует, что $n(f'') + 1 > n(f')$ или $n(f'') \geqslant n(f')$. Неограниченность сверху следует из того факта, что $n(\tilde{\Pi}_N) = N$. Сопоставляя эти два свойства функции $n(\cdot)$, получим

$$\lim_{f \to 0} n(f) = \infty.$$

Таким образом, чем меньше постоянные издержки, тем больше фирм может войти в отрасль, и в пределе функционирование отрасли все более приближается к ситуации совершенной конкуренции (в силу Теоремы 13.6).

Мы представили число олигополистов на рынке как функцию от постоянных издержек. Естественно также рассмотреть вопрос об оптимальном с точки зрения общества числе олигополистов[11]. Это число должно максимизировать общественное благосостояние

$$W(n) = v(Y_n^*) - nc(y_n^*),$$

где, как и ранее, $v(\cdot)$ — функция полезности репрезентативного потребителя, Y_n^* — совокупный выпуск n фирм, конкурирующих по Кур-

[11] Следующий далее анализ основывается на статье N. G. Mankiw and M. D. Whinston. Free Entry and Social Inefficiency, *Rand Journal of Economics* **17** (1986): 48–58.

но, $y_n^* = \frac{Y_n^*}{n}$ — выпуск отдельной фирмы. Пусть $\hat{n}$ — оптимальное с точки зрения благосостояния число фирм в олигополистической отрасли. Следующие рассуждения показывают, что $n(f) > \hat{n} - 1$.

По определению $\hat{n}$ при $\hat{n} \geqslant 2$ выполнено $W(\hat{n}) \geqslant W(\hat{n}-1)$ или

$$v(Y_{\hat{n}}^*) - \hat{n}c(y_{\hat{n}}^*) \geqslant v(Y_{\hat{n}-1}^*) - (\hat{n}-1)c(y_{\hat{n}-1}^*).$$

Отсюда, прибавив к этому неравенству величину выручки, получим

$$\begin{aligned}\Pi_{\hat{n}-1} &= p(Y_{\hat{n}-1}^*)y_{\hat{n}-1}^* - c(y_{\hat{n}-1}^*) \geqslant \\ &\geqslant p(Y_{\hat{n}-1}^*)y_{\hat{n}-1}^* + v(Y_{\hat{n}-1}^*) - v(Y_{\hat{n}}^*) - \hat{n}[c(y_{\hat{n}-1}^*) - c(y_{\hat{n}}^*)].\end{aligned}$$

Так как $Y_{\hat{n}-1}^*$ по определению обратной функции спроса является решением задачи потребителя при цене $p(Y_{\hat{n}-1}^*)$, то

$$v(Y_{\hat{n}-1}^*) - p(Y_{\hat{n}-1}^*)Y_{\hat{n}-1}^* \geqslant v(Y_{\hat{n}}^*) - p(Y_{\hat{n}-1}^*)Y_{\hat{n}}^*.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\Pi_{\hat{n}-1} &\geqslant p(Y_{\hat{n}-1}^*)(y_{\hat{n}-1}^* + Y_{\hat{n}-1}^* - Y_{\hat{n}}^*) - \hat{n}[c(y_{\hat{n}-1}^*) - c(y_{\hat{n}}^*)] = \\ &= \hat{n}[p(Y_{\hat{n}-1}^*)(y_{\hat{n}-1}^* - y_{\hat{n}}^*) - c(y_{\hat{n}-1}^*) + c(y_{\hat{n}}^*)].\end{aligned}$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках положительно. Действительно, если в отрасли (с числом фирм $\hat{n}-1$) отдельная фирма выберет $y_{\hat{n}}^*$ вместо $y_{\hat{n}-1}^*$, то она не получит более высокую прибыль при условии, что остальные $\hat{n}-2$ фирмы производят по $y_{\hat{n}-1}^*$:

$$p(Y_{\hat{n}-1}^*)y_{\hat{n}-1}^* - c(y_{\hat{n}-1}^*) \geqslant p\Big((\hat{n}-2)y_{\hat{n}-1}^* + y_{\hat{n}}^*\Big)y_{\hat{n}}^* - c(y_{\hat{n}}^*).$$

Так как $y_{\hat{n}-1}^* > y_{\hat{n}}^*$, то из убывания обратной функции спроса следует, что

$$p\Big((\hat{n}-2)y_{\hat{n}-1}^* + y_{\hat{n}}^*\Big) > p\Big((\hat{n}-1)y_{\hat{n}-1}^*\Big) = p(Y_{\hat{n}-1}^*),$$

откуда

$$p(Y_{\hat{n}-1}^*)y_{\hat{n}-1}^* - c(y_{\hat{n}-1}^*) > p(Y_{\hat{n}-1}^*)y_{\hat{n}}^* - c(y_{\hat{n}}^*).$$

Воспользовавшись этим неравенством, получим, что

$$\Pi_{\hat{n}-1} > 0.$$

Пусть, как и выше, $n(f)$ — число фирм в отрасли при постоянных издержках f. По определению $0 > \Pi_{n(f)+1}$. Таким образом, $\Pi_{\hat{n}-1} > \Pi_{n(f)+1}$. В силу строгого убывания прибыли по числу фирм имеем

$$\hat{n} - 1 < n(f) + 1$$

или
$$n(f) \geqslant \hat{n} - 1.$$
Это означает, что число фирм в отрасли $n(f)$ не может быть меньше оптимального числа фирм $\hat{n}$ более чем на единицу. Приведенный ниже пример иллюстрирует случай, когда оптимальное с точки зрения общественного благосостояния число фирм в отрасли больше, чем при свободном входе для модели Курно.

Пример 13.4 (продолжение Примера 13.3)
Для рассмотренного случая прибыль отдельного олигополиста равна
$$\Pi_j(n) = \frac{(a-c)^2}{b} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} - f.$$
Индикатор благосостояния как функция числа фирм n равен
$$W(n) = \frac{(a-c)^2}{2b}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - nf.$$
Легко проверить, что для данного примера $n(f) = \left\lfloor \frac{a-c}{\sqrt{bf}} \right\rfloor - 1$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ — оператор взятия целой части. В частности, если $a = 28$, $b = 10$, $c = 10$, $f = 10$, то $n(f) = 0$. Для этих значений параметров значения индикатора благосостояния при n, принимающих значения от 0 до 2, равны соответственно $W(0) = 0$, $W(1) = \frac{172}{80}$, $W(2) = -\frac{56}{10}$, откуда следует, что $\hat{n} = 1$ — точка локального максимума. Рассмотрением производной функции $W(n)$ (в предположении, что n принимает произвольные неотрицательные значения) убеждаемся, что $\hat{n} = 1$ будет глобальным максимумом этой функции. △

Задачи

13.1 (A) Покажите, что в случае внутреннего равновесия Курно индекс Лернера для отдельного олигополиста
$$\frac{p - c'_j}{p}$$
прямо пропорционален его доле (δ_j) в суммарном выпуске и обратно пропорционален эластичности спроса;

(B) Покажите, что средневзвешенный (с весами δ_j) индекс Лернера прямо пропорционален индексу Герфиндаля и обратно пропорционален эластичности спроса. (Индекс концентрации Герфиндаля определяется как $H = \sum \delta_j^2$.)

(C) Докажите, что при данном числе фирм в отрасли индекс Герфиндаля минимален в симметричном равновесии.

(D) Рассмотрите симметричные равновесия в «симметричной» отрасли с постоянной эластичностью спроса. Объясните, почему средний индекс Лернера обратно пропорционален числу олигополистов.

13.2 Докажите, что в равновесии Курно прибыль любой фирмы ниже, чем в случае, когда эта фирма является монополистом на том же рынке. (Имеется в виду нетривиальное равновесие Курно, когда хотя бы одна другая фирма имеет ненулевой объем производства.)

13.3 Докажите существование равновесия в модели Курно (Теорему 13.3). При этом можно использовать следующие ниже указания. Основная идея такая же, как и в доказательстве существования равновесия при монополии (см. Теорему 12.4 на с. 763).

(A) На основе условий первого порядка задачи потребителя покажите, что функция обратного спроса $p(\cdot)$ является непрерывной и убывающей.

(B) Объясните, почему функция $v(\cdot)$ является вогнутой. Пользуясь вогнутостью этой функции, покажите, что $v(\tilde{y}_j + Y_{-j}) - c_j(\tilde{y}_j) \geqslant v(y_j + Y_{-j}) - c_j(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$ для любого $Y_{-j} \geqslant 0$.

(C) Докажите, что при любых ожиданиях относительно выпуска конкурентов ни одной из фирм не выгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_j$, т. е. выбор каждой фирмы может быть ограничен компактным множеством.

(D) Докажите непрерывность и вогнутость функции прибыли каждой фирмы на множестве $[0, \tilde{y}_j]$ при любых ожиданиях относительно выбора других.

(E) Воспользуйтесь теоремой Нэша (Теорема A.3 на с. 1037).

13.4 В тексте главы для симметричной отрасли в предположении, что количество фирм не обязательно целое, доказано, что $\frac{dY^*(n)}{dn} > 0$ и $\frac{dy^*(n)}{dn} < 0$. Покажите, используя полученные результаты, что при тех же предположениях $\frac{d\Pi^*(n)}{dn} < 0$.

13.5 Докажите, что если функция спроса убывает и вогнута, а функция издержек выпукла, причем обе они дважды непрерывно дифференцируемы, то для всех j, Y и y_j выполняются следующие условия (условия Хана)

$$p'(Y) + p''(Y)y_j < 0 \quad \text{и} \quad p'(Y) - c''_j(y_j) < 0.$$

13.6 Докажите, что если обратная функция спроса убывает и вогнута, то отображение отклика каждого производителя не возрастает, т. е. если $Y^1_{-j} < Y^2_{-j}$, то для любых $y^1_j \in R_j(Y^1_{-j})$ и $y^2_j \in R_j(Y^2_{-j})$

выполнено $y_j^1 \geqslant y_j^2$. (*Указание:* Воспользуйтесь тем, что

$$\Pi_j(Y_{-j}^1, y_j^1) \geqslant \Pi_j(Y_{-j}^1, y_j^2) \quad \text{и} \quad \Pi_j(Y_{-j}^2, y_j^2) \geqslant \Pi_j(Y_{-j}^2, y_j^1).$$

Предположите противное ($y_j^1 < y_j^2$) и используйте определение вогнутости функции.)

13.7 Предположим, что обратная функция спроса $p(y)$ и функция издержек $c_j(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям Хана:

$$p'(Y) + p''(Y)y_j < 0 \quad \text{и} \quad p'(Y) - c_j''(y_j) < 0 \; \forall j, Y, y_j. \qquad (\circ)$$

Докажите что при этих предположениях существует единственное равновесие Курно, а если, кроме того, функции издержек всех производителей одинаковы, то это равновесие симметрично, т. е. $y_j^* = y_i^*$ для любых фирм j, i.

Указание: Рассмотрите функции двух переменных

$$T_j(Y, y_j) = p(Y) + p'(Y)y_j.$$

Заметим, что если $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — равновесие Курно, то

$$T_j(Y^*, y_j^*) \leqslant 0,$$

причем

$$T_j(Y^*, y_j^*) = 0, \text{ если } y_j^* > 0,$$

где $Y^* = \sum_{j=1}^n y_j^*$.

(A) Покажите, что в условиях ($\circ$) функции $T_j(Y^*, y_j^*)$ монотонно убывают по обеим переменным. Обозначим это предположение ($\circ\circ$).

(B) Пусть существуют два равновесия Курно, таких что для суммарных объемов производства выполнено $Y^1 \geqslant Y^2$. Докажите от противного, используя предположение ($\circ\circ$), что $y_j^1 \leqslant y_j^2$ для всех j. Таким образом, суммарный объем производства в двух равновесиях Курно должен совпадать. Рассмотрите случай $Y^1 = Y^2$ и докажите, что $y_j^1 = y_j^2 \; \forall j$.

(C) Докажите симметричность равновесия.

13.8 Пусть, так же как и в предыдущей задаче, выполнено предположение ($\circ\circ$). Рассмотрите внутренние равновесия Курно при числе фирм n и $n+1$. Покажите, что $Y_{n+1}^* > Y_n^*$ и $y_{j,n+1}^* < y_{j,n}^*$.

13.9 Предположим, что предельные издержки у всех фирм постоянны и выполнено предположение ($\circ\circ$) из задачи 13.7. Покажите, что если предельные издержки одной из фирм сокращаются при неизменных предельных издержках других, то выпуск каждой из остальных фирм в равновесии Курно сокращается, а совокупный выпуск возрастает.

13.10 Предположим, что фирмы в отрасли конкурируют по Курно, выполнено условие (∘) из задачи 13.7, функции издержек олигополистов одинаковы и средние издержки не убывают. Покажите, что благосостояние (измеряемое величиной совокупного излишка) возрастает при росте числа фирм в отрасли.

13.11 Покажите, что если в дуополии Курно предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то в равновесии первый производит меньше, чем второй.

13.12 Рассмотрите модель дуополии Курно. Фирмы имеют постоянные, но, возможно, неодинаковые предельные издержки. Пусть спрос на продукцию дуополистов задается обратной функцией спроса $p(y) = a - by$.

(A) При каких соотношениях предельных издержек выпуски обеих фирм в равновесии будут положительными?

(B) Охарактеризуйте равновесие в данной отрасли (при положительных выпусках обеих фирм).

(C) Как равновесный выпуск одного из производителей зависит от его предельных издержек? от предельных издержек его конкурента?

13.13 Пусть спрос в отрасли задается обратной функцией спроса $p(y) = a - by$ и имеется n фирм, конкурирующих по Курно. Пусть фирмы имеют постоянные, но, возможно, неодинаковые предельные издержки. Охарактеризуйте равновесие в данной отрасли в зависимости от параметров.

13.14 Пусть общие издержки каждой из фирм в модели Курно постоянны $c_j(y_j) = f_j$, а обратная функция спроса равна

$$p(y) = \exp(-y).$$

Покажите, что у каждой фирмы есть доминирующая стратегия, и найдите ее. Как будет изменяться суммарный выпуск отрасли с увеличением числа фирм?

13.15 Пусть верны условия Теоремы 13.6. Докажите, что если постоянные издержки олигополистов, конкурирующих по Курно, равны нулю, а функции переменных издержек одинаковы, то прибыль олигополистов положительна и при росте числа олигополистов стремится к нулю.

13.16 Конкуренция в отрасли описывается моделью Курно со свободным входом. Все фирмы имеют одинаковые функции издержек $c(y) = y^2/2$. Функция полезности репрезентативного потребителя имеет вид $u(x, z) = x - x^2/2 + z$. Постоянные издержки равны $f = 3/32$.

- Найдите число фирм в отрасли.
- Найдите оптимальное с общественной точки зрения число фирм.

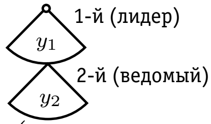
13.2 Модель дуополии Штакельберга

В модели дуополии, предложенной Генрихом фон Штакельбергом[12], первая фирма выбирает объем производства y_1 и является лидером в том смысле, что вторая фирма (ведомый или последователь) рассматривает объем производства, выбранный первой фирмой, как данный. Другими словами, вторая фирма сталкивается с остаточным спросом, который получается вычитанием из исходного спроса величины y_1. Ориентируясь на этот остаточный спрос, вторая фирма выбирает свой объем производства y_2 (или цену, что в данном случае одно и то же). Лидер «просчитывает» действия ведомого, определяет, какая цена устанавливается на рынке при каждом y_1, и исходя из этого максимизирует свою прибыль. Остальные характеристики отрасли (описание поведения потребителей через обратную функцию спроса, технологий фирм — через функции издержек) такие же, как в модели Курно.

Считается, что такая модель хорошо описывает конкуренцию на многих рынках, когда фирма-лидер занимает значительную долю рынка. К тому же ее можно рассматривать как упрощенный (редуцированный) вариант более сложной модели конкуренции. С точки зрения теории игр модель Штакельберга представляет собой динамическую игру с совершенной информацией, в которой лидер делает ход первым. Дерево игры изображено на Рис. 13.2.

Выпуски $(y_1^{\mathsf{S}}, y_2^{\mathsf{S}})$, соответствующие совершенному в подыграх равновесию этой модели, принято называть равновесием Штакельберга. Вектор выпусков не есть собственно совершенное в подыграх равновесие. По определению совершенное в подыграх равновесие — это набор стратегий $(y_1^{\mathsf{S}}, r_2^{\mathsf{S}}(\cdot))$, где $r_2^{\mathsf{S}}(\cdot)$ — равновесная стратегия ведомого игрока. (Стратегия ведомого игрока должна быть функцией $r_2(y_1)$, которая сопоставляет каждому ходу лидера некоторый отклик.)

[12] H. von Stackelberg. *Marktform und Gleichgewicht*, Wien, Berlin: Julius Springer, 1934.



$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 p(y_1 + y_2) - c_1(y_1) \\ y_2 p(y_1 + y_2) - c_2(y_2) \end{pmatrix}$$

Рис. 13.2. *Дуополия Штакельберга*

Определение 13.2:

Вектор выпусков $(y_1^{\mathsf{S}}, y_2^{\mathsf{S}})$ называется равновесием Штакельберга, если существует функция (представляющая равновесную стратегию ведомого)

$$r_2^{\mathsf{S}} \colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+,$$

такая что выполнены два условия:

* выпуск $y_2 = r_2^{\mathsf{S}}(y_1)$ максимизирует прибыль ведомого на $[0, +\infty)$ при любом выпуске лидера $y_1 \geqslant 0$;
* выпуск y_1^{S} является решением следующей задачи максимизации прибыли лидера:

$$\Pi_1 = p(y_1 + r_2^{\mathsf{S}}(y_1))y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1 \geqslant 0}. \qquad \blacktriangleleft$$

Равновесие Штакельберга находят с помощью обратной индукции. Лидер, назначая выпуск, рассчитывает отклик ведомого $R_2(y_1)$. Отклик будет таким же, как в модели Курно. Вообще говоря, отклик может быть неоднозначным. Тогда различные функции $r_2(y_1)$, удовлетворяющие условию

$$r_2(y_1) \in R_2(y_1)\ \forall y_1$$

могут задавать различные равновесия.

Далее будем предполагать, если не оговорено противное, что оптимальный отклик однозначен, т. е. $R_2(y_1)$ — функция[13]. Задача лидера в этом случае имеет вид

$$\Pi_1 = p(y_1 + R_2(y_1))y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Если решением этой задачи является y_1^{S} и $y_2^{\mathsf{S}} = R_2(y_1^{\mathsf{S}})$, то $(y_1^{\mathsf{S}}, y_2^{\mathsf{S}})$ — равновесие Штакельберга.

[13] Однозначность функции отклика можно гарантировать, если функция $p(y' + y)y$ строго вогнута, а $c(y)$ выпукла. (См. также условия Хана в сноске 6.)

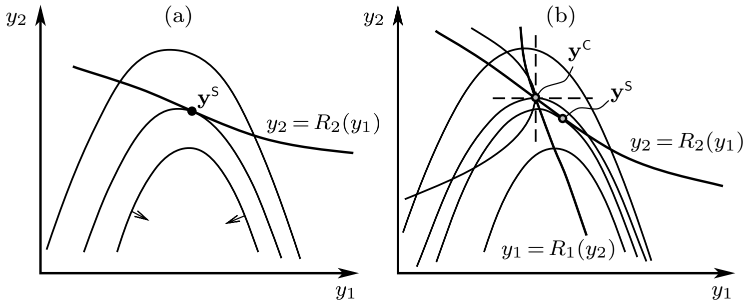


Рис. 13.3. *(a) Равновесие Штакельберга. (b) Сравнение равновесия Штакельберга с равновесием Курно*

Дуополию Штакельберга можно представить графически (см. Рис. 13.3(a)). Разницу между равновесиями в моделях Курно и Штакельберга иллюстрирует Рис. 13.3(b). Лидер выбирает точку на кривой отклика ведомого, которая максимизировала бы его прибыль. В равновесии соответствующая кривая равной прибыли лидера касается кривой отклика.

13.2.1 Существование равновесия Штакельберга

Докажем теперь теорему существования равновесия в модели Штакельберга.

Теорема 13.7:

Предположим, что в модели Штакельберга выполнены следующие условия:

* функции издержек $c_j(y)$ дифференцируемы;
* обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает;
* существуют $\tilde{y}_j > 0$ $(j = 1, 2)$, такие что $p(y_j) < c'_j(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.

Тогда равновесие Штакельберга (y_1^S, y_2^S) существует, причем $0 \leqslant y_j^S < \bar{y}_j$. ⌟

Доказательство: Доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство существования равновесия при монополии.

(1) Докажем, что при любых ожиданиях относительно выпуска лидера ведомому невыгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_2$, в том смысле, что $\Pi_2(y_1, y_2) < \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2)$ для всех

y_1, если $y_2 > \tilde{y}_2$. Рассмотрим разность прибылей:

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) = p(y_1 + y_2)y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\tilde{y}_2 - (c_2(y_2) - c_2(\tilde{y}_2)).$$

Эту разность можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) = p(y_1 + y_2)y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\tilde{y}_2 - \\ - \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} p(y_1 + t)dt + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(y_1 + t) - c_2'(t)]dt.\end{aligned}$$

Поскольку $p(y)$ убывает, то $p(y_1+y_2) < p(y_1+t)$ при $t < y_2$ и $p(y_1+t) \leqslant p(t)$ при $y_1 \geqslant 0$, поэтому

$$\begin{aligned}\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) < p(y_1 + y_2)y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\tilde{y}_2 - \\ - p(y_1 + y_2)(y_2 - \tilde{y}_2) + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c_2'(t)]dt = \\ = (p(y_1 + y_2) - p(y_1 + \tilde{y}_2))\tilde{y}_2 + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c_2'(t)]dt < 0.\end{aligned}$$

Таким образом, прибыль ведомого при $y_2 = \tilde{y}_2$ выше, чем при выпуске любого большего количества продукции. Тем самым исходная задача ведомого (при любом наперед заданном $y_1 \geqslant 0$) эквивалентна задаче выбора на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Другими словами, отображение отклика исходной задачи совпадает с отображением отклика в задаче максимизации прибыли ведомого на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Обозначим множество решений модифицированной задачи при данном y_1 через $\tilde{R}_2(y_1)$. Тем самым определено отображение отклика $\tilde{R}_2 \colon \mathbb{R}_+ \rightrightarrows [0, \tilde{y}_2]$. Мы доказали, что $\tilde{R}_2(y_1) = R_2(y_1)$ $\forall y_1$.

Для любого y множество решений $\tilde{R}_2(y)$ непусто и компактно[14], и, кроме того, отображение $\tilde{R}_2(\cdot)$ полунепрерывно сверху[15]. В силу совпадения $\tilde{R}_2(\cdot)$ и $R_2(\cdot)$ теми же свойствами будет обладать и $R_2(\cdot)$.

(2) Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\begin{aligned}\Pi_1(y_1, y_2) = y_1 p(y_1 + y_2)y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1, y_2 \geqslant 0} \\ y_2 \in R_2(y_1).\end{aligned} \qquad (\bullet)$$

Докажем, что решение этой задачи существует.

Пользуясь теми же рассуждениями, что и для функции прибыли ведомого, можно показать, что при любом наперед заданном $y_2 \geqslant 0$

[14] По Теореме B.55 из Приложения B (с. 1132).

[15] См. Теорему B.61 в Приложении B на с. 1134. Читателю предоставляется проверить самостоятельно, что эта теорема применима в данном случае.

прибыль лидера в точке $y_1 = \tilde{y}_1$ больше, чем во всех точках $y_1 > \tilde{y}_1$. Значит, множество решений задачи ($\bullet$) не изменится, если в нее дополнительно включить ограничение $y_1 \leqslant \tilde{y}_1$.

Таким образом, нам требуется, чтобы существовало решение задачи максимизации прибыли лидера по y_1 и y_2 на множестве

$$\mathcal{R} = \left\{ (y_1, y_2) \mid y_1 \in [0, \tilde{y}_1], y_2 \in R_2(y_1) \subset [0, \tilde{y}_2] \right\}.$$

Из доказанных свойств отображения $R_2(\cdot)$ следует, что множество $\mathcal{R}$ непусто, замкнуто и ограничено. Существование решения такой задачи следует из теоремы Вейерштрасса.

(3) Пусть $(y_1^{\mathsf{S}}, y_2^{\mathsf{S}})$ — некоторое решение задачи ($\bullet$). Теперь, выбрав любую функцию $r_2^{\mathsf{S}}(y_1)$, график которой проходит через точку $(y_1^{\mathsf{S}}, y_2^{\mathsf{S}})$, и такую, что для всех y_1

$$r_2^{\mathsf{S}}(y_1) \in R_2(y_1),$$

получим, что выпуск y_1^{S} является решением задачи лидера

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + r_2^{\mathsf{S}}(y_1))y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Действительно, этот выпуск максимизирует прибыль лидера на всем допустимом множестве задачи ($\bullet$), а значит, и на множестве, суженном дополнительным ограничением $y_2 \in r_2^{\mathsf{S}}(y_1)$. Тем самым пара $y_1^{\mathsf{S}}, r_2^{\mathsf{S}}(\cdot)$ удовлетворяет определению равновесия Штакельберга. ■

13.2.2 Равновесие Штакельберга и равновесие Курно

Представляет интерес сравнение объемов производства в модели Курно и в модели Штакельберга. Результат сравнения для ведомого однозначен: в модели Штакельберга он производит не больший объем блага. Покажем это.

Пусть y_1^{C} и y_2^{C} — объемы производства в модели Курно.

Лидер в модели Штакельберга в предположении однозначности отклика ведомого всегда может обеспечить себе такую же прибыль, как в модели Курно, назначив $y_1 = y_1^{\mathsf{C}}$. Оптимальным откликом ведомого на y_1^{S} будет y_2^{S}, а на y_1^{C} – y_2^{C}. Сравнивая прибыли лидера при выборе им объемов выпуска y_1^{S} и y_1^{C}, получаем неравенство

$$p(y_1^{\mathsf{S}} + y_2^{\mathsf{S}})y_1^{\mathsf{S}} - c_1(y_1^{\mathsf{S}}) \geqslant p(y_1^{\mathsf{C}} + y_2^{\mathsf{C}})y_1^{\mathsf{C}} - c_1(y_1^{\mathsf{C}}).$$

Если фирмы конкурируют по Курно, то y_1^{C} максимизирует прибыль первой фирмы при $y_2 = y_2^{\mathsf{C}}$. Поэтому

$$p(y_1^{\mathsf{C}} + y_2^{\mathsf{C}})y_1^{\mathsf{C}} - c_1(y_1^{\mathsf{C}}) \geqslant p(y_1^{\mathsf{S}} + y_2^{\mathsf{C}})y_1^{\mathsf{S}} - c_1(y_1^{\mathsf{S}}).$$

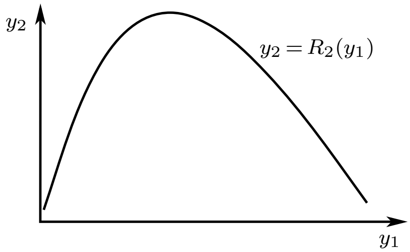


Рис. 13.4. *Пример возрастания функции отклика ведомого*

Доказываемое утверждение очевидно, если $y_1^{\mathsf{s}} = 0$. Если $y_1^{\mathsf{s}} > 0$, то из этих двух неравенств следует, что

$$p(y_1^{\mathsf{s}} + y_2^{\mathsf{s}}) \geqslant p(y_1^{\mathsf{s}} + y_2^{\mathsf{c}}).$$

Из убывания спроса имеем

$$y_2^{\mathsf{c}} \geqslant y_2^{\mathsf{s}}.$$

Результат сравнения объемов производства лидера в двух ситуациях неоднозначен и зависит от наклона кривой отклика. В случае, если $R_2(\cdot)$ убывает (на достаточно большом интервале, который должен заведомо включать как y_2^{c}, так и y_2^{s}), имеем

$$y_1^{\mathsf{c}} \leqslant y_1^{\mathsf{s}}.$$

Если же $R_2(\cdot)$ возрастает, то, наоборот,

$$y_1^{\mathsf{c}} \geqslant y_1^{\mathsf{s}}.$$

Функция $R_2(\cdot)$ убывает, например, в случае линейного спроса и постоянных предельных издержек. Пример возрастающей функции отклика построить достаточно сложно. На Рис. 13.4 показана кривая отклика, соответствующая обратной функции спроса $p(y) = 1/y^2$ при постоянных предельных издержках. При малых объемах производства лидера функция отклика возрастает, а при больших — убывает.

Поведение функции отклика ведомого и совокупного выпуска описывает следующая теорема.

Теорема 13.8:

Предположим, что выполнены следующие условия:

* обратная функция спроса $p(y)$ и функция издержек $c_2(y)$ дважды дифференцируемы;

* обратная функция спроса имеет отрицательную производную, т. е. $p'(y) < 0$ при любом $y \geqslant 0$;
* $p'(y_1 + y_2) - c_2''(y_2) < 0$ при любых y_1 и y_2;
* отклик $R_2(y_1)$ является дифференцируемой функцией[16].

Тогда в тех точках y_1, в которых $R_2(y_1) > 0$, наклон функции отклика $R_2(y_1)$ удовлетворяет условию

$$-1 < R_2'(y_1),$$

и следовательно, суммарный выпуск $R_2(y_1) + y_1$ возрастает.

Дополнительное условие[17], что при всех y_1, y_1

$$p'(y_1 + y_2) + p''(y_1 + y_2)y_2 < 0,$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $R_2'(y_1) < 0$. ⌟

Доказательство: При принятых предположениях докажем, что суммарный выпуск дуополии $y_1 + R_2(y_1)$ как функция y_1 имеет положительную производную. Функция $R_2(y_1)$ при всех y_1, таких что $R_2(y_1) > 0$, удовлетворяет условию первого порядка

$$p(y_1 + R_2(y_1)) + p'(y_1 + R_2(y_1)) \cdot R_2(y_1) = c_2'(R_2(y_1)).$$

Дифференцируя это соотношение по y_1, получим

$$p'(y_1 + R_2(y_1)) \cdot (1 + R_2'(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1))R_2(y_1) \cdot (1 + R_2'(y_1)) + \\ + p'(y_1 + R_2(y_1)) \cdot R_2'(y_1) = c_2''(R_2(y_1)) \cdot R_2'(y_1).$$

Отсюда

$$(1 + R_2'(y_1)) \cdot [2p'(y_1 + R_2(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1))R_2(y_1) - c_2''(R_2(y_1))] = \\ = p'(y_1 + R_2(y_1)) - c_2''(R_2(y_1)).$$

По условию второго порядка

$$2p'(y_1 + R_2(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1)) \cdot R_2(y_1) - c_2''(R_2(y_1)) \leqslant 0.$$

С другой стороны, по предположению,

$$p'(y_1 + R_2(y_1)) - c_2''(R_2(y_1)) < 0.$$

[16] Однозначность и дифференцируемость отклика можно установить на основе Теоремы B.63 из Приложения B. См. задачу 13.21.

[17] Это условие, в частности, следует из строгой выпуклости функции потребительского излишка. Напомним, что это одно упоминавшихся ранее условий Хана.

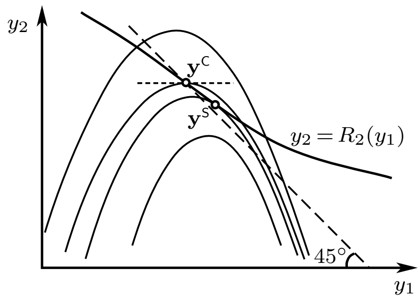


Рис. 13.5. *Случай убывания функции отклика ведомого*

Это гарантирует, что

$$2p'(y_1 + R_2(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1)) \cdot R_2(y_1) - c_2''(R_2(y_1)) \neq 0.$$

Тогда

$$1 + R_2'(y_1) = \frac{p'(y_1 + R_2(y_1)) - c_2''(R_2(y_1))}{2p'(y_1 + R_2(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1)) \cdot R_2(y_1) - c_2''(R_2(y_1))}, \qquad (\triangledown)$$

откуда $1 + R_2'(y_1) > 0$ или $R_2'(y_1) > -1$.

Докажем теперь неубывание функции отклика $R_2(y_1)$. Условие ($\triangledown$) можно переписать в виде

$$R_2'(y_1) = -\frac{p'(y_1 + R_2(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1)) \cdot R_2(y_1)}{2p'(y_1 + R_2(y_1)) + p''(y_1 + R_2(y_1)) \cdot R_2(y_1) - c_2''(R_2(y_1))}.$$

В этой дроби знаменатель отрицателен, поэтому условие $R_2'(y_1) < 0$ эквивалентно отрицательности числителя, что и требовалось. ■

Воспользовавшись полученным ранее результатом, получим, что если $R_2(\cdot)$ убывает, то

$$y_1^{\mathsf{C}} + y_2^{\mathsf{C}} \leqslant y_1^{\mathsf{S}} + y_2^{\mathsf{S}},$$

а если возрастает, то

$$y_1^{\mathsf{C}} + y_2^{\mathsf{C}} \geqslant y_1^{\mathsf{S}} + y_2^{\mathsf{S}}.$$

В первом случае равновесная цена в равновесии Штакельберга не превышает равновесную цену в равновесии Курно, во втором — наоборот.

Иллюстрация полученных соотношений для случая убывающей функции отклика представлена на Рис. 13.5. Из рисунка видно, что поскольку точка равновесия в модели Штакельберга лежит ниже кривой равной прибыли, проходящей через точку равновесия в модели Курно, то объем y_2^{C} должен быть выше y_2^{S}. Из-за убывания функции отклика объем y_1^{C} оказывается ниже y_1^{S}. Штриховая линия, проходящая под углом 45°, показывает расположение точек, в которых суммарный выпуск одинаков. Поскольку кривая отклика более пологая, то $y_1^{\mathsf{C}} + y_2^{\mathsf{C}}$ оказывается меньше $y_1^{\mathsf{S}} + y_2^{\mathsf{S}}$.

Можно сравнить также прибыли фирм в двух ситуациях. Как уже упоминалось ранее, по очевидным причинам прибыль лидера в модели Штакельберга выше. Читателю предлагается доказать самостоятельно простой факт, что прибыль ведомого в модели Штакельберга выше в случае возрастающей функции отклика и ниже в случае убывающей функции отклика.

Пример 13.5

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек дуополистов имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$ $(j = 1, 2)$. Функция отклика второго равна

$$R_2(y_1) = \frac{a - c - by_1}{2b}.$$

Подставив ее в прибыль лидера, получим

$$\Pi_1 = \frac{a - c}{2} y_1 - \frac{b}{2} y_1^2.$$

Максимум достигается при

$$y_1^{\mathsf{S}} = \frac{a - c}{2b}.$$

Кроме того, в равновесии

$$y_2^{\mathsf{S}} = \frac{a - c}{4b}.$$

Суммарный выпуск равен

$$y_1^{\mathsf{S}} + y_2^{\mathsf{S}} = \frac{3}{4} \frac{a - c}{b}.$$

Это больше, чем выпуск в модели Курно, но меньше, чем выпуск при совершенной конкуренции, т. е. имеет место неоптимальность. $\triangle$

Задачи

13.17 Две фирмы, конкурируя на рынке, выбирают объемы производства. Известно, что для этих фирм равновесный объем производства в модели Курно совпадает с равновесным объемом производства в модели Штакельберга. Каков наклон кривых отклика в этой общей точке равновесия? Пояснить графически с использованием кривых отклика и кривых равной прибыли.

13.18 Рассмотрим отрасль с двумя фирмами. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{1}{Y},$$

и пусть обе фирмы имеют постоянные предельные издержки c_j ($0 < c_j < 1$). При каких условиях равновесие в модели Штакельберга совпадает с равновесием в модели Курно? Изобразите эту ситуацию на диаграмме (в том числе поведение функций отклика).

13.19 Рассмотрим дуополию, в которой у первой фирмы предельные издержки нулевые, а функция издержек второй фирмы равна

$$c_2(y) = \alpha y^2,$$

где $\alpha > 0$ — параметр. Обратная функция спроса в отрасли равна

$$P(Y) = 1 - Y.$$

Покажите, что при $\alpha \to \infty$ равновесие Курно сходится к равновесию Штакельберга в том смысле, что

$$\frac{y_1^{\mathsf{S}}(\alpha)}{y_1^{\mathsf{C}}(\alpha)} \to 1, \quad \frac{y_2^{\mathsf{S}}(\alpha)}{y_2^{\mathsf{C}}(\alpha)} \to 1.$$

13.20 Восполните пропущенные части доказательства Теоремы 13.7 (с. 856).

13.21 Сформулируйте и докажите теорему об однозначности и дифференцируемости отклика ведомого в модели Штакельберга.

13.22 Докажите, что прибыль ведомого в модели Штакельберга при прочих равных условиях выше, чем в модели Курно, в случае возрастающей функции отклика и ниже в случае убывающей функции отклика.

13.23 Рассмотрите модель Штакельберга с асимметричной информированностью фирм. Функция спроса линейна: $P(Y) = 1 - Y$. Предельные издержки как лидера, так и ведомого, равны 0,25. Лидер не знает предельных издержек ведомого, но с его точки зрения предельные издержки — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Найдите равновесие в этой модели.

13.24 Два олигополиста продают свою продукцию на рынках близких благ, выбирая объемы производства. Их обратные функции спроса равны $p_1(y_1, y_2) = 2 - y_1 + y_2$ и $p_2(y_2, y_1) = 3 - y_2 + y_1$, а предельные издержки равны 1 и 2 соответственно. Найти равновесие при одновременном и при последовательном выборе объемов производства.

13.25 Рассмотрите отрасль с n производителями, функции издержек которых постоянны и одинаковы (и равны c), а спрос на продукцию — линейная функция цен. Предположите, что один из производителей является лидером, а остальные конкурируют по Курно, считая выпуск лидера фиксированным. Найдите равновесие в этом обобщенном варианте модели Штакельберга. Сравните это равновесие с равновесием Курно и решением при монополии.

13.26 Рассмотрите отрасль с n фирмами, функции издержек которых постоянны и одинаковы (и равны c), а спрос на продукцию — линейная функция цен. Предположите, что фирма i является лидером Штакельберга для фирм $i + 1, \ldots, n$ (эти фирмы считают выпуск лидера фиксированным). Найдите равновесие в этом «иерархическом» варианте модели Штакельберга. (*Указание:* Воспользуйтесь математической индукцией.)

13.3 Картель и сговор

В этом параграфе мы сравним результаты некооперативного поведения фирм в отрасли в соответствии с моделью Курно с результатами кооперативного поведения. Как известно, если число фирм в отрасли мало́, то они могут заключить между собой соглашение с целью увеличения прибыли. Мы начнем с анализа, который показывает, что у фирм, конкурирующих по Курно, есть потенциал для взаимовыгодного соглашения, а затем перейдем рассмотрению двух вариантов таких соглашений.

13.3.1 Неоптимальность равновесия Курно с точки зрения олигополистов

В равновесии Курно объем производства с точки зрения олигополистов неоптимален. Другими словами, если любая из фирм (немного) снизит свой выпуск, то общая прибыль возрастет. Этого факта уже достаточно, чтобы показать неоптимальность объема производства, соответствующего равновесию Курно, ведь полученный в результате этого сокращения выпуска прирост прибыли можно перераспределить между олигополистами так, чтобы в конечном счете ни у кого из них прибыль не уменьшилась бы. Можно, однако, доказать более сильный факт, что если по крайней мере два олигополиста уменьшат свои объемы производства (на достаточно малые величи́ны), то (при естественных предположениях относительно функции спроса)прибыль у всех олигополистов возрастет, т. е. в данном случае не требуется перераспределять прибыли, чтобы улучшить положение всех производителей.

Предположим, что объем производства у фирмы j изменился на (дифференциально малую) величину $dy_j \leqslant 0$, причем хотя бы для двух фирм неравенство здесь строгое. Как при этом изменится прибыль j-й фирмы? Напомним, что прибыль j-й фирмы равна

$$\Pi_j(y_j, \mathbf{y}_{-j}) = p(Y)y_j - c_j(y_j) = p\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot y_j - c_j(y_j).$$

Беря полный дифференциал в точке равновесия Курно, получим

$$\begin{aligned} d\Pi_j &= p'(Y^*) \cdot y_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} dy_i\right) + p(Y^*) \cdot dy_j - c_j'(y_j^*) \cdot dy_j = \\ &= p'(Y^*) \cdot y_j^* \cdot \left(\sum_{i \neq j} dy_i\right) + \left[p'(Y^*) \cdot y_j^* + p(Y^*) - c_j'(y_j^*)\right] \cdot dy_j. \end{aligned}$$

Из условия первого порядка следует, что второе слагаемое равно нулю. Поскольку по крайней мере два олигополиста уменьшили свои объемы производства, то $\sum_{i \neq j} dy_i < 0$. При естественных предположениях, что производная функции спроса отрицательна и у всех фирм объемы производства в равновесии Курно положительны, получим, что $d\Pi_j > 0$[18].

Проиллюстрировать ситуацию и показать, что олигополия Курно выпускает больше оптимального количества продукции (с точки зрения фирм, ее составляющих) для случая дуополии можно графически (Рис. 13.6). Поскольку в точке равновесия Курно касательные к кривым равной прибыли перпендикулярны друг другу, то возмо-

[18] Заметим, что поскольку дифференциалы прибыли всех фирм отрицательны, то прибыль возрастает при достаточно небольшом (конечном) сокращении выпусков. Поэтому приведенное доказательство утверждения можно легко обобщить на случай конечных сокращений выпусков.

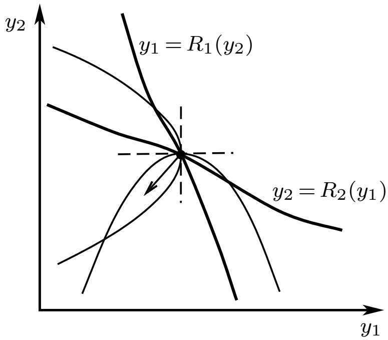


Рис. 13.6. *Неоптимальность равновесия Курно с точки зрения олигополистов*

жен сдвиг, который увеличивает прибыль обоих олигополистов (на рисунке показан стрелкой).

13.3.2 Сговор

Таким образом, существуют возможности взаимовыгодных соглашений между производителями (согласованных действий фирм в отрасли). Мы рассмотрим такого рода соглашения между олигополистами относительно объемов выпуска (квот на производство продукции) и будем различать два случая — картель и сговор.

Если допустимо перераспределение прибыли между олигополистами, то им выгодно выбирать объемы производства, максимизирующие суммарную прибыль. Мы будем называть такой тип соглашений картелем[19]. Если же перераспределение прибылей по каким-то причинам неосуществимо, то фирмы могут достигнуть взаимовыгодного соглашения путем согласования решений относительно объемов производства (квот выпуска). Будем называть такой тип соглашений сговором.

Рассмотрим сначала модель сговора. Пусть $y_1^*, \ldots, y_n^*$ — равновесие Курно, которое осуществится, если фирмы не достигнут соглашения (т. е. точка угрозы). Возможное соглашение предусматривает

[19]Для дуополии в терминах кооперативной теории игр картель соответствует точке ядра в игре с трансферабельностью выигрышей. Имеется в виду ядро в игре, участниками которой являются рассматриваемые фирмы, а их функции выигрыши — прибыли этих фирм.

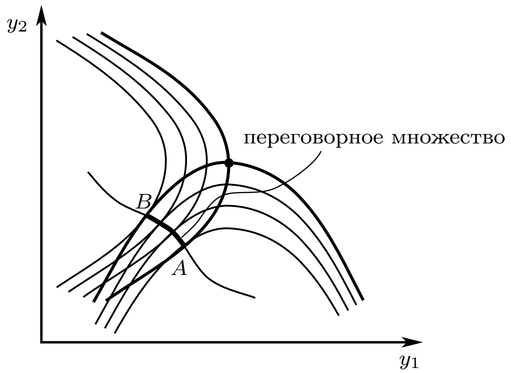


Рис. 13.7. *Сговор*

распределение квот выпуска $\check{y}_1 \geqslant 0, \ldots, \check{y}_n \geqslant 0$, которое удовлетворяет двум условиям:

- каждый участник j при сговоре получает прибыль не меньшую, чем его прибыль в равновесии Курно:

$$\Pi_j(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) \geqslant \Pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*);$$

- сговор приводит к эффективному объему производства (точка сговора лежит на границе Парето[20] игры без перераспределения прибыли), т. е. не существует другой точки $y_1, \ldots, y_n \geqslant 0$, дающей всем фирмам не меньшую прибыль, а по крайней мере одной из фирм — бо́льшую.

Как правило, вариантов сговора может быть много (см. отрезок AB на Рис. 13.7). Соответствующее множество точек границы Парето, представляющих эти варианты, можно назвать переговорным множеством. Какая именно точка будет выбрана, зависит от процедуры переговоров и переговорной силы участников. Процедуру переговоров (торг) можно представлять как некоторую некооперативную игру, но эта игра остается за рамками модели.

Заметим также, что, вообще говоря, равновесий Курно может быть несколько, поэтому переговорное множество зависит от того, какое из равновесий Курно участники считают за исходную точку (точку угрозы).

[20] Имеется в виду Парето-граница олигополии, но не экономики в целом.

Как правило, следствием сговора является уменьшение суммарного выпуска и повышение рыночной цены. Из Рис. 13.7 видно, что суммарный выпуск во всех точках переговорного множества ниже, чем в равновесии Курно: если через точку равновесия Курно провести прямую $y_1 + y_2 = y_1^* + y_2^*$, то переговорное множество будет лежать ниже этой прямой. Следующее утверждение описывает условия, которые гарантируют, что переговорное множество обладает указанным свойством.

Теорема 13.9:

Пусть при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах ($\check{y}_j > 0$ при всех j), и пусть обратная функция спроса убывает. Тогда суммарный выпуск при сговоре не превышает суммарный выпуск в соответствующем равновесии Курно:

$$\check{Y} \leqslant Y^*,$$

а равновесная цена при сговоре не меньше цены в соответствующем равновесии Курно:

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y^*).$$ ⌟

Доказательство: По определению сговора, прибыль каждого участника не ниже, чем в равновесии Курно:

$$p(\check{Y})\check{y}_j - c_j(\check{y}_j) \geqslant p(Y^*)y_j^* - c_j(y_j^*).$$

С другой стороны, при выборе $y_j = y_j^*$ участник j должен получить не меньшую прибыль, чем при выборе $y_j = \check{y}_j$, если суммарный выпуск остальных такой же, как в равновесии Курно (Y_{-j}^*):

$$p(Y^*)y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y}_j)\check{y}_j - c_j(\check{y}_j).$$

Суммируя эти неравенства, получим

$$p(\check{Y})\check{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y}_j)\check{y}_j.$$

Мы предположили, что $\check{y}_j > 0$, поэтому

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y}_j).$$

Из убывания функции спроса следует что $\check{Y}_{-j} \leqslant Y_{-j}^*$. Это неравенство верно для всех j. Суммируя эти неравенства и деля на $n-1$, получаем $\check{Y} \leqslant Y^*$. ■

В случае дифференцируемости функции спроса сговор можно охарактеризовать в терминах его дифференциальной характеристики. Дифференциальная характеристика точки сговора может быть получена из задачи поиска Парето-оптимума без перераспределения прибыли. (Условие, что каждый участник получает прибыль не меньшую, чем в равновесии Курно, при этом не учитывается.) Точка $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n \geqslant 0$ Парето-оптимальна, если для любого j она является решением задачи

$$\begin{gathered}\Pi_j(y_1, \ldots, y_n) \to \max \\ \Pi_i(y_1, \ldots, y_n) \geqslant \Pi_i(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n),\ i \neq j, \\ y_1, \ldots, y_n \geqslant 0.\end{gathered}$$

По теореме Джона существуют множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, не все равные нулю, такие что выполнены условия первого порядка:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \Pi_i(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n)}{\partial y_k} = 0\ \forall k.$$

Дифференциальную характеристику можно переписать в виде:

$$p'(\check{Y}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \check{y}_i + \lambda_k [p(\check{Y}) - c_k'(\check{y}_k)] = 0\ \forall k.$$

Поскольку по крайней мере один из множителей Лагранжа положителен, первое слагаемое не равно нулю, если $p'(\check{Y}) < 0$. Отсюда следует, что при выполнении этого предположения положительны все множители Лагранжа.

В случае двух фирм эта дифференциальная характеристика означает, что кривые равной прибыли касаются друг друга (см. Рис. 13.7).

Используя эти соотношения, докажем, что сговор неустойчив, если нет каких-либо механизмов, принуждающих к выполнению соглашений. А именно, покажем, что если в точке сговора любая фирма немного увеличит свой выпуск, то ее прибыль возрастет.

Теорема 13.10:

Пусть выполнены следующие предположения:

* при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $\check{y}_j > 0$ для всех j;
* обратная функция спроса убывает и дифференцируема, причем $p'(\check{Y}) < 0$;
* функции издержек дифференцируемы.

Тогда в точке сговора

$$\frac{\partial \Pi_k(\check{y}_1, \dots, \check{y}_n)}{\partial y_k} > 0 \ \forall k.$$

┘

Доказательство: Воспользовавшись дифференциальной характеристикой внутренней точки сговора и положительностью всех множителей Лагранжа, получим, что для любой фирмы k выполнено

$$\lambda_k \frac{\partial \Pi_k(\check{y}_1, \dots, \check{y}_n)}{\partial y_k} = -\sum_{i \neq k} \lambda_i \frac{\partial \Pi_i(\check{y}_1, \dots, \check{y}_n)}{\partial y_k} = -p'(\check{Y}) \cdot \sum_{i \neq k} \lambda_i \check{y}_i > 0.$$

■

13.3.3 Картель

Рассмотрим теперь модель картеля. Так как, по предположению, фирмы могут перераспределять прибыль, то в любом Парето-оптимальном состоянии олигополии суммарная прибыль принимает максимально возможное значение (и одинакова). Фактически картель действует как монополия, состоящая из нескольких предприятий (подразделений).

Охарактеризуем равновесие в отрасли, предприятия которой объединены в картель[21].

Суммарная прибыль картеля зависит не только от совокупного объема выпуска, но и от его структуры. Если y_j — выпуски отдельных фирм, $Y = y_1 + \dots + y_n$ — совокупный выпуск, то суммарная прибыль равна

$$\sum_{j=1}^{n} \Pi_j = p(Y)Y - \sum_{j=1}^{n} c_j(y_j).$$

Дифференциальную характеристику равновесия картеля получим, продифференцировав функцию совокупной прибыли по выпускам всех фирм:

$$p(Y^{\text{к}}) + p'(Y^{\text{к}})Y^{\text{к}} \leqslant c_j'(y_j^{\text{к}}).$$

При этом если $y_j^{\text{к}} > 0$, то

$$p(Y^{\text{к}}) + p'(Y^{\text{к}})Y^{\text{к}} = c_j'(y_j^{\text{к}}).$$

[21] Как и в случае сговора, мы рассматриваем только выбор объема и структуры производства. Распределение совокупной прибыли остается за рамками таких моделей. Ограничения участия в задаче определения уровней выпусков фирм в данном случае являются несущественными; они ограничивают только множество вариантов распределения совокупной прибыли, но не ее величину.

Таким образом, картель распределяет совокупный объем производства между предприятиями так, что предельные издержки фирм с положительным выпуском будут одинаковыми[22].

Так, если $c_j'(y_j) = c_j$, то совокупный выпуск отрасли совпадает выпуском монополии, когда ее предельные издержки равны $c = \min_j c_j$. Структура выпуска фирм, для которых $c_j = c$, при этом не определяется однозначно; выпуск же фирм, у которых $c_j > c$, равен нулю.

Пример 13.6

Пусть, как и в Примере 13.3, обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$. Объем производства картеля определяется соотношением

$$p(Y^{\text{к}}) + p'(Y^{\text{к}})Y^{\text{к}} = a - bY^{\text{к}} - bY^{\text{к}} = c = c_j'(y_j^{\text{к}}).$$

Таким образом, он равен

$$Y^{\text{к}} = \frac{a-c}{2b},$$

а прибыль картеля равна

$$(a - bY^{\text{к}})Y^{\text{к}} - cY^{\text{к}} = \frac{(a-c)^2}{4b}.$$

В равновесии Курно, как мы показали в Примере 13.3, суммарный объем производства равен

$$Y^* = \frac{n(a-c)}{(n+1)b},$$

а суммарная прибыль, как несложно рассчитать, равна

$$\frac{n(a-c)^2}{(n+1)^2 b},$$

откуда ясна неоптимальность равновесия Курно с точки зрения производителей. Они могли бы увеличить прибыль, сократив выпуск. △

Для симметричной отрасли, используя ту же логику доказательства, что и в Теоремах 13.5 и 13.6, можно показать, что олигополисты будут производить меньше, если объединятся в картель, чем если

[22] Отметим, что это также распределение выпуска среди участников картеля, которое минимизирует суммарные издержки при условии, что выпуск картеля равен $Y^{\text{к}}$.

они будут конкурировать по Курно. Доказательство соответствующей теоремы оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 13.37). Аналогичное утверждение верно и без требования равенства функций издержек, но с достаточно сильными предположениями относительно функции выручки[23]. Доказательство этого утверждения также оставлено в качестве упражнения (см. задачу 13.38).

Теорема 13.11:

Пусть выполнены следующие предположения:

- равновесия в модели Курно и в модели картеля существуют и все фирмы производят продукцию в положительных количествах ($y_j^{\text{К}} > 0$ для всех j);
- обратная функция спроса дифференцируема и имеет отрицательную производную, функция выручки $p(y)y$ вогнута;
- функции издержек $c_j(\cdot)$ дифференцируемы и выпуклы.

Тогда в точке картеля суммарный выпуск меньше, чем в равновесии Курно:

$$Y^* > Y^{\text{К}}.$$

В общем случае ничего определенного относительно соотношения между объемом выпуска картеля и выпуском в равновесии Курно сказать нельзя. Ниже приводится пример, когда выпуск картеля превышает совокупный выпуск олигополии в одном из (трех) равновесий Курно.

Пример 13.7

Пусть в отрасли обратная функция спроса равна

$$p(y) = 9 - y$$

и есть два производителя с одинаковыми функциями издержек

$$c(y) = \begin{cases} 6y - \dfrac{3}{4}y^2, & y \leqslant 4, \\ 12, & y \geqslant 4. \end{cases}$$

В этой отрасли три равновесия Курно: $(2, 2)$, $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Максимум прибыли картеля достигается в точках $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Как мы видим, симметричному равновесию $(2, 2)$ соответствует меньший объем выпуска, чем у картеля. △

[23] См. E. Wolfstetter. *Topics in Microeconomics: Industrial Organization, Auctions, and Incentives*, Cambridge University Press, 1999 (3.4.4, “What if Suppliers form a Cartel?”, p. 98).

Заметим, что хотя в данном примере функция издержек недифференцируема, ее легко модифицировать, сгладив в окрестности точки $y = 4$. Полученный результат, таким образом, объясняется наличием возрастающей отдачи от масштаба.

Ясно, что, так же как и рассмотренный ранее сговор, картель является неустойчивым, если нет способа гарантировать выполнение соглашения между фирмами.

Теорема 13.12:

Пусть выполнены следующие предположения:

* в картеле все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $y_j^{\text{к}} > 0 \; \forall j$;
* обратная функция спроса дифференцируема и имеет отрицательную производную;
* функции издержек дифференцируемы.

Тогда в точке картеля

$$\frac{\partial \Pi_j(y_1^{\text{к}}, \ldots, y_n^{\text{к}})}{\partial y_j} > 0 \; \forall j,$$

т. е. каждая фирма может повысить свою прибыль, увеличив свой выпуск. ⌋

Доказательство: Производная функции прибыли j-го участника картеля по своему выпуску равна

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j} = p(Y) + p'(Y) y_j - c_j'(y_j).$$

Учитывая дифференциальную характеристику точки $(y_1^{\text{к}}, \ldots, y_n^{\text{к}})$, имеющую вид

$$p(Y^{\text{к}}) + p'(Y^{\text{к}}) Y^{\text{к}} = c_j'(y_j^{\text{к}}),$$

получаем

$$\frac{\partial \Pi_j(y_1^{\text{к}}, \ldots, y_n^{\text{к}})}{\partial y_j} = -p'(Y^{\text{к}})(Y^{\text{к}} - y_j^{\text{к}}) > 0.$$

Таким образом, если достигнуто соглашение о квотах выпуска ($y_j = y_j^{\text{к}}$), максимизирующих суммарную прибыль, то каждой фирме выгодно нарушить такое соглашение, увеличивая выпуск сверх своей квоты. ■

Задачи

13.27 Докажите, что если во внутреннем равновесии Курно один из олигополистов немного уменьшит объем производства, то суммарная прибыль возрастет.

13.28 Пусть отрасль состоит из n одинаковых фирм. При каких условиях на спрос и функцию издержек совокупный объем производства и назначаемая цена этих фирм, объединившихся в картель, совпадет с монопольной?

13.29 Сформулируйте и докажите теорему о существовании равновесия в случае картеля. (*Указание:* Воспользуйтесь аналогичной теоремой из главы о монополии. Пусть существуют $\tilde{y}_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, такие что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$. Докажите, что при любых выбранных выпусках всех производителей, кроме j-го, картелю невыгодно назначать j-му производителю выпуск больше $\tilde{y}_j$, поскольку суммарная прибыль тогда будет строго меньше, чем при выпуске $y_j = \tilde{y}_j$. При этом удобно рассматривать выбор суммарного объема производства Y при фиксированном Y_{-j}, при ограничении $Y \geqslant Y_{-j}$.)

13.30 Покажите, что если в дуополии предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то при объединении в картель первый производит меньше, чем второй.

13.31 Рассмотрите дуопольную отрасль. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{4}{1+Y},$$

а функции издержек у обоих производителей линейны:

$$c_j(y_j) = y_j.$$

Показать, что в равновесии Курно фирмы будут выпускать в сумме больше, чем при объединении в картель, и получать меньшую общую прибыль.

13.32 Пусть в отрасли присутствуют три одинаковые фирмы. Спрос на их продукцию равен $p(Y) = 1 - Y$. Предельные издержки равны нулю. Вычислите равновесие Курно. Выгодно ли двум фирмам объединиться в картель, если они будут конкурировать с третьей фирмой по Курно? Выгодно ли объединиться в картель трем фирмам?

13.33 Два олигополиста имеют постоянные одинаковые предельные издержки, равные 1, и конкурируют как в модели Курно. Спрос в отрасли задается обратной функцией спроса $p(Y) = 5 - 2Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

13.34 Пусть на олигополистическом рынке функционируют три олигополиста с функциями издержек $c_1(y_1) = y_1^2/2, c_2(y_2) = y_1^2/4$ и $c_3(y_3) = y_1^2/6$. Обратная функция спроса на продукцию олигополистов имеет вид $p(Y) = 1 - Y$. Найдите равновесие Курно и покажите, что это равновесие не оптимально, подобрав такие изменения выпусков олигополистов, чтобы прибыль каждого возросла. Покажите, что картельное соглашение между этими фирмами неустойчиво, т. е. каждая фирма, нарушив его, получит бóльшую прибыль.

13.35 Пусть в дуопольной отрасли фирмы имеют предельные издержки 10 и 11 соответственно. Функция спроса на продукцию отрасли имеет вид $p(y) = 13 - y$.

(А) Какие объемы производства выберут фирмы, если объединятся в картель?

(В) Запишите задачу для нахождения точки сговора. Удовлетворяют ли объемы производства из пункта (А) ограничениям этой задачи?

13.36 Рассмотрите в симметричной отрасли по аналогии с моделью Курно сравнительную статику модели картеля в зависимости от числа фирм n (см. Теорему 13.6). Пусть в модели картеля у каждого олигополиста одинаковые выпуклые функции издержек. Верно ли, что совокупный выпуск убывает по n? Определите и докажите правильный факт.

13.37 Сформулируйте и докажите аналог Теоремы 13.11 (в точке картеля суммарный выпуск меньше, чем в равновесии Курно) для симметричной отрасли.

13.38 Докажите Теорему 13.11.

13.4 Модель Бертрана

Хотя модель Курно является самой популярной моделью олигополии, имеются серьезные возражения против тех предположений, которые лежат в ее основе. Основное возражение заключается в том, что на олигополистических рынках производители в основном конкурируют, используя в качестве стратегии цены, по которым они продают свою продукцию, так что естественной для олигополистической отрасли является ценовая конкуренция, а не количественная, как в модели Курно. Если фирмы выбирают количества (объемы производства), то процесс установления цены остается необъясненным. Исходя из этого естественной альтернативой модели Курно для описания конкуренции на олигополистическом рынке должна быть модель ценовой конкуренции. Такая модель была предложена Жозéфом Бертраном; в ней производители принимают (одновременно) решения о ценах продаж[24].

В модели Бертрана предполагается, что олигополисты производят однородную продукцию с постоянными предельными издержками, одинаковыми для всех производителей. Стратегиями фирм являются назначаемые цены p_j. Поскольку при ценах ниже предельных издержек любой производитель несет убытки при любом положительном объеме продаж, естественно предполагать, что выбираемые им цены p_j удовлетворяют ограничению $p_j \geqslant c$.

Когда речь идет о ценовой конкуренции, то удобно бывает рассматривать функцию спроса на продукцию отдельной фирмы, которая в данном случае зависит как от собственной цены p_j ($p_j \geqslant c$), так и от цен $\mathbf{p}_{-j}$, назначенных другими фирмами:

$$y_j = D_j(p_j, \mathbf{p}_{-j}).$$

При этом предполагается (что представляется естественным при анализе рынков однородной продукции), что

- если цена, назначенная фирмой, выше цены любого из конкурентов, то эта фирма столкнется с нулевым спросом и не сможет продать свою продукцию: $y_j = 0$ (происходит полное переключение спроса);
- группа из k фирм, назначившая минимальную цену ($p_{\min}$), обслужит весь спрос и разделит рынок поровну[25]:

$$y_j = \frac{D(p_{\min})}{k},$$

[24] Бертран дал свое описание ценовой конкуренции в статье, посвященной критике исследований О. Курно и Л. Вальраса: J. Bertrand. Théorie des Richesses: revue de 'Théories mathématiques de la richesse sociale' par Léon Walras et 'Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses' par Augustin Cournot, *Journal de Savants* **67** (1883): 499–508. Следует оговориться, что в работе Курно в каком-то виде была рассмотрена и ценовая конкуренция — взаимодействие двух фирм, производящих взаимосвязанные продукты.

[25] Нижеприведенный результат остается справедливым при любой схеме разделения рынка.

где $D(\cdot)$ — функция спроса, причем если такая фирма одна, то $y_j = D(p_{\min})$;

- предельные издержки всех олигополистов одинаковы и не зависят от объема производства:

$$c'_j(y) = c,\ j,\ \forall y \geqslant 0.$$

Как и ранее, считаем постоянные издержки уже сделанными и невозвратимыми. Таким образом, рассматриваются лишь переменные издержки и предполагается, что функция издержек имеет производную и при нулевом объеме выпуска.

Используя приведенные выше предположения, получим характеристики равновесия для олигополистического рынка, описываемого моделью (гипотезами) Бертрана.

Теорема 13.13:

Состояние, в котором по крайней мере два олигополиста установят цены на уровне предельных издержек[26] ($p_j = c$), является равновесием Нэша в чистых стратегиях в модели Бертрана.

Если функция спроса $D(p)$ не возрастает, непрерывна в окрестности c и $D(c) > 0$, то других равновесий нет. ⌟

Доказательство: Заметим сначала, что указанный набор стратегий составляет равновесие, так как любая фирма не может в этой ситуации увеличить свою прибыль, установив другую цену (прибыль любой фирмы равна нулю, так что она, изменив свою стратегию, может только потерять в прибыли).

Остается показать, что равновесием не может быть никакой другой набор стратегий производителей. Рассмотрим набор цен (стратегий фирм), такой что $p_j > c$ для всех j. Тогда если найдется фирма, выпуск которой равен нулю, то, выбрав цену $\hat{p} \in (c, p_{\min})$, при которой спрос положителен, она получит положительную прибыль. Если такой фирмы не существует, значит, все фирмы назначили одну и ту же цену ($p_j = p_{\min}$) и $D(p_{\min}) > 0$. Тогда любая фирма, немного понизив цену, будет обслуживать весь рынок, скачкообразно увеличив объем продаж, а следовательно, (при малом изменении цены) и прибыль. Таким образом, рассмотренный набор стратегий не может быть равновесием, так как существуют фирмы, заинтересованные в пересмотре своего выбора. Следовательно, если набор цен

[26] По существу, это конкурентное равновесие. Выпуск фирм, назначивших бо́льшую цену, равен нулю.

составляет равновесие, хотя бы один из олигополистов установит цену, равную предельным издержкам.

Докажем теперь, что при этом по крайней мере два олигополиста установят цену на уровне предельных издержек. Пусть это не так. Тогда фирма, предложившая цену $p_j = c$, может увеличить свою прибыль, немного повысив цену, так, чтобы ей все еще доставался весь спрос. Итак, иных равновесий, кроме указанных в утверждении, быть не может. ■

Заметим, что модель Бертрана, как и модель Курно, обычно анализируется как статическая игра, где игроками являются производители. Этот прием основан на свертывании (методом обратной индукции) первоначальной двухэтапной динамической игры, игроками в которой являются как производители, так и потребители. В этой двухэтапной игре производители, выбирая свою стратегию на первом этапе, рассчитывают и учитывают реакцию потребителей на свой выбор. Очевидно, что такая свертка не приводит к проблемам в ситуации модели Курно. В традиционной же модели Бертрана в ситуации, когда по крайней мере две фирмы назначают одинаковые цены, такая свертка осуществляется на основе некоторого предположения относительно пропорций, в которых «активные» фирмы делят рынок. Однако в общем случае не все такие предположения совместимы с существованием равновесия в первоначальной (двухэтапной динамической) игре. Так, если предельные издержки производства фирм различны (хотя и постоянны, как в традиционной модели Бертрана), единственное равновесие в динамической игре — ситуация, когда фирма с минимальными издержками назначает цену, равную наименьшим из предельных издержек ее конкурентов, и все потребители покупают только у фирмы с минимальными издержками. Таким образом, равновесие в (свернутой) статической игре не существует при любом априорном предположении относительно структуры продаж, отличном от указанного.

Вернемся к обсуждению полученного решения традиционной модели Бертрана. Мы видим, что в равновесии традиционной модели Бертрана цена, по которой продается продукция, равна предельным издержкам, что соответствует ситуации конкурентного равновесия. Из этого следует, что присутствия по крайней мере двух производителей достаточно для того, чтобы отрасль функционировала так же, как и в режиме совершенной конкуренции, и равновесие было Парето-оптимальным. Таким образом, согласно этой логике рыночная власть — редкий феномен и встречается только в ситуации, когда есть всего один производитель продукции. По-видимому, этот вывод не согласуется с действительностью. Подобная крайне интенсивная ценовая конкуренция представляется не слишком реалистичной, поэтому выводы, следующие из анализа вышеприведенной модели, получили название парадокса Бертрана.

В силу этого парадокса попытку Бертрана переосмыслить концепцию олигополистического равновесия трудно признать полностью удавшейся. Поэтому были предприняты серьезные попытки модифицировать модель Бертрана так, чтобы выводы из нее более соответствовали реальными наблюдениям, чтобы монопольная власть на рынке не исчезала бы при наличии всего двух конкурентов в отрасли.

Заметим, что наиболее существенными недостатками модели Бертрана являются следующие.

❧ В модели Бертрана предполагается, что производится и продается однородная продукция. Поэтому возникает жесткость олигополистической конкуренции.

❧ Второе специфическое свойство модели Бертрана — это предположение об отсутствии ограничений на объемы производства и о независимости предельных издержек любого производителя от объемов производства. Как только мы вводим предположение о зависимости предельных издержек от объемов производства, то изящный результат, что единственное состояние равновесия — это равновесие, при котором цены равны предельным издержкам, перестает быть верным.

❧ Модель Бертрана в классической постановке имеет статический характер. Принятие во внимание стратегических соображений, связанных с конкуренцией в различные периоды времени (точнее, с нетривиальными последовательностями ходов конкурентов), приводит к ослаблению выводов о жесткости конкуренции в модели Бертрана.

❧ В модели Бертрана не учитываются различные трансакционные издержки и асимметричная информированность продавцов и покупателей относительно характера совершаемых сделок.

Для преодоления этих недостатков предложены различные модификации традиционной модели Бертрана. В этом параграфе мы рассмотрим следующие из таких модификаций:

- продуктовую дифференциацию (ослабляющую ценовую конкуренцию);

- нелинейность издержек — монополисту может оказаться невыгодным производить продукцию в объеме, равном величине спроса, с которым он сталкивается;
- модели, принимающие во внимание динамические аспекты олигополистической конкуренции (включая модели молчаливого сговора).

13.4.1 Продуктовая дифференциация и ценовая конкуренция

Мы рассмотрели модели олигополии, в которых фирмы производили один и тот же товар. Теперь рассмотрим более распространенный случай, когда продукция фирм не вполне взаимозаменяема, т. е. случай так называемых неоднородных или дифференцированных благ[27]. Это означает, что производители действуют на взаимосвязанных рынках близких по потребительским свойствам (характеристикам) продуктов, которые, однако, различаются хотя бы по упаковке и потребители готовы покупать их по разным ценам p_j. В этой модели следует ввести отдельную функцию спроса на продукцию каждой фирмы $y_j = D_j(p_j, \mathbf{p}_{-j})$, которая зависит от ее собственной цены p_j и от цен конкурентов $\mathbf{p}_{-j}$. Естественно предположить, что эластичность спроса по собственной цене производителя j отрицательна ($\varepsilon_{jj} < 0$), а по ценам конкурентов положительна ($\varepsilon_{ij} = \frac{dD_i}{dp_j}\frac{p_j}{y_i} > 0$ при $i \neq j$, т. е. блага взаимозаменяемые)[28]. По-прежнему будем предполагать, что каждый производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = cy$.

Доказательство существования равновесия в этой модели в целом схоже с доказательством существования равновесия в модели Курно, и читателю предлагается сформулировать и доказать этот результат самостоятельно в задаче 13.46 (с. 897).

Отличие рассматриваемой модели от классической модели Бертрана заключается в том, что спрос переключается к понижающему цену конкуренту не с бесконечной эластичностью. Поскольку фирмы не учитывают, как их действия влияют на других, то их поведение соответствует модели простой монополии и дифференциальная ха-

---

[27] См. E. H. Chamberlin. *The Theory of Monopolistic Competition*, Harvard University Press, 1933 (рус. пер. Э. Чемберлин. *Теория монополистической конкуренции: Реориентация теории стоимости*, М.: Экономика, 1996).

[28] Эта же модель подходит и в случае, когда фирмы производят не взаимозаменяемые (субституты), а взаимодополняющие (комплементарные) блага.

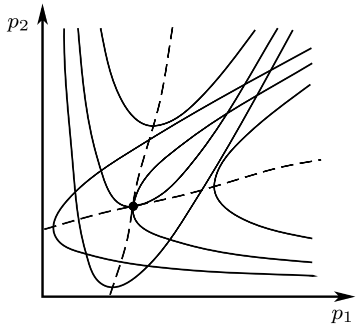


Рис. 13.8. *Одновременный выбор цен в случае продуктовой дифференциации*

рактеристика внутреннего равновесия имеет такой же вид:

$$D_j(p_j, \mathbf{p}_{-j}) + \frac{dD_j(p_j, \mathbf{p}_{-j})}{dp_j} p_j = \frac{dD_j(p_j, \mathbf{p}_{-j})}{dp_j} c$$

или

$$\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right) p_j = c.$$

Из этих условий следует, что в рассматриваемой модели равновесные цены превышают предельные издержки, несмотря на то, что, как и в обычной модели Бертрана, предельные издержки предполагаются равными между собой и постоянными.

С другой стороны, для благ, которые являются очень близкими заменителями, спрос покупателей будет очень чувствителен к разнице цен в разных фирмах. Естественно ожидать, что с ростом эластичности спроса по ценам равновесие в модели ценовой конкуренции с дифференцированными благами приближается к равновесию в модели Бертрана. Таким образом, модель Бертрана можно рассматривать как крайний случай рассмотренной модели.

Дуополию такого вида можно изобразить на диаграмме, аналогичной Рис. 13.1 для дуополии Курно, только по осям должны откладываться не объемы производства, а цены, и кривые равной прибыли будут развернуты в противоположную сторону. Равновесием будет точка пересечения кривых отклика (см. Рис. 13.8). Аналогия с моделью Курно здесь очень близкая; отличие в более сложной, чем в модели Курно, зависимости прибылей от действий конкурентов.

Если бы каждая фирма немного повысила свою цену, то общая прибыль возросла бы. Поэтому равновесие при ценовой конкуренции не оптимально с точки зрения олигополистов. Они могли бы объединиться в картель и проводить ценовую политику, обеспечивающую максимум совокупной прибыли. В отличие от рассмотренного ранее случая дискриминирующей монополии перекрестные эластичности не равны нулю, поэтому максимум прибыли достигается при выполнении условий

$$D_j(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{dD_i(\mathbf{p})}{dp_j}(p_i - c) = 0.$$

или, в терминах эластичностей,

$$p_j\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right) - \sum_{i \neq j}(p_i - c)\frac{\varepsilon_{ij}}{|\varepsilon_{jj}|}\frac{D_i(\mathbf{p})}{D_j(\mathbf{p})} = c.$$

Из сравнения дифференциальных характеристик очевидно, что (при естественных предположениях) некооперативное равновесие и картельное решения не могут совпадать. Установить, выше ли все цены, которые установит картель, тех цен, которые будут наблюдаться при некооперативном поведении, в общем случае представляет собой нетривиальную задачу.

Пример 13.8

В ситуации ценовой конкуренции двух производителей (например, Кока-колы и Пепси-колы) спрос на товар первого равен

$$y_1(p_1, p_2) = \frac{p_2^{\beta}}{p_1^{\alpha+1}},$$

спрос на товар второго равен

$$y_2(p_1, p_2) = \frac{p_1^{\beta}}{p_2^{\alpha+1}},$$

затраты обоих линейны: $c_j(y_j) = cy_j$ $(\alpha, \beta, c > 0,\ \beta < \alpha)$. Эти функции спроса характеризуются постоянными эластичностями:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -(\alpha + 1), \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \beta.$$

Подставив эластичности в условия первого порядка равновесия, получим решение

$$p_1 = p_2 = \frac{(\alpha + 1)c}{\alpha}.$$

Видим, что в данном примере производители имеют доминирующие стратегии — назначать цену на уровне $(\alpha+1)c/\alpha$ вне зависимости от выбора конкурента. При этом равновесные объемы производства будут равны

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{(\alpha+1)c}{\alpha}\right)^{\alpha+1-\beta}.$$

Функции отклика, соответствующие доминирующим стратегиям, на графике будут выглядеть как прямые, параллельные осям.

Если предприятия объединятся в картель, то, учитывая, что $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \beta$, из дифференциальной характеристики равновесия картеля найдем, что этот картель установил бы более высокие цены

$$p_j = \frac{(\alpha+1-\beta)c}{\alpha-\beta}$$

при более низких объемах производства

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+1-\beta)c}\right)^{\alpha+1-\beta}.$$

△

13.4.2 Модель Бертрана при возрастающих предельных издержках

Рассмотрим теперь, что произойдет, если мы откажемся от предположения о постоянстве предельных издержек при анализе ценовой конкуренции. Будем исходить из стандартного предположения об убывающей отдаче от масштаба, т. е. предполагать, что предельные издержки возрастают и положительны. Кроме того, для упрощения будем предполагать, что предельные издержки возрастают неограниченно. Аналог равновесия Бертрана для случая растущих предельных издержек был бы таков: продукция продавалась бы всеми фирмами по одной и той же цене, и цена равнялась бы предельным издержкам. Однако, как мы здесь покажем, при сделанных предположениях о функциях издержек описанное состояние не может соответствовать равновесию в модели ценовой конкуренции.

Обсуждение гипотез модели

Согласно предположениям Бертрана, если некоторая фирма устанавливает самую низкую цену, то все потребители желают покупать у нее. Спрос, с которым она сталкивается, совпадает с совокупным

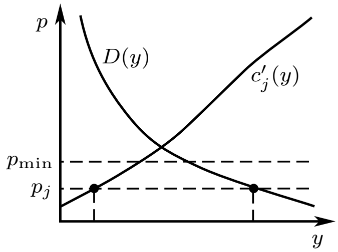


Рис. 13.9. *Фирме, назначившей наименьшую цену, может оказаться невыгодным обслуживать весь спрос*

спросом. В модели Бертрана, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, и выше, чем предельные издержки, то в ее интересах и возможностях *полностью* удовлетворить спрос при данной цене. В случае же растущих предельных издержек фирме с минимальной ценой может оказаться невыгодным удовлетворять весь рыночный спрос.

Как известно, если фирма j с возрастающими предельными издержками сталкивается с фиксированной ценой p_j $(p_j \geqslant c'_j(0))$ за производимую ею продукцию, то ей выгодно выбрать такой объем производства y_j, чтобы предельные издержки были равны цене:

$$c'_j(y_j) = p_j.$$

Таким образом, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, то ей может оказаться невыгодным производить продукцию в количестве, равном емкости рынка при данной цене. Такая ситуация изображена на Рис. 13.9, где через $p_{\min}$ обозначена минимальная из цен конкурентов фирмы j. Если не предполагать, что олигополист, устанавливая цену, обязуется продать по данной цене любое количество блага, на которое будет предъявлен спрос, то помимо решения о выборе *цены* следует также рассмотреть вопрос о выборе производимого *количества* блага. В этом состоит принципиальное отличие от стандартной модели Бертрана, в которой выбор количества не рассматривается, поскольку в рамках этой модели всегда выгодно производить столько, сколько можно продать.

С точки зрения теории игр можно рассматривать модель Бертрана как редуцированную игру. Исходная игра при этом является динамической, и в ней олигополисты сначала выбирают цены, а затем количества, причем фирма с минимальной ценой осуществляет выбор первой, поскольку потребители в первую очередь обращаются к ней. В случае постоянных предельных издержек часто можно ограничится анализом редуцированной игры, в рассматриваемом же случае приходится анализировать полную динамическую игру.

В рассматриваемой нами модели, если фирма, назначившая наименьшую цену, сочтет невыгодным полностью удовлетворять весь предъявляемый при этой цене спрос, то на рынке останется неудовлетворенный (остаточный) спрос. Величина его зависит от того, какие потребители приобретут продукцию производителя, назначившего наименьшую цену, т. е. от выбранной этим производителем схемы рационирования[29]. Данную проблему можно назвать *проблемой рационирования*. Рационирование может осуществляться разными способами. Очевидно, что равновесие в общем случае должно зависеть от схемы рационирования. В то же время на прибыль олигополиста, назначившего наименьшую цену, не влияет то, какую схему он будет использовать, хотя выбранная им схема определяет величину остаточного спроса и тем самым величину прибыли других олигополистов.

В этом параграфе мы не рассматриваем подробно характеристики равновесия в данной ситуации. Наша цель состоит в том, чтобы продемонстрировать, что вне зависимости от схемы рационирования ценообразование по предельным издержкам не может соответствовать равновесию.

Для упрощения будем проводить анализ для случая двух фирм. (При большем количестве фирм выводы не изменятся, но рассуждения станут более сложными.) Предположим, что первая фирма установила более низкую цену ($p_1 < p_2$) и продала y_1 единиц блага. При этом вторая фирма сталкивается с остаточным спросом, который мы обозначим через D_2. Этот остаточный спрос зависит как от количества блага, проданного первой фирмой, так и от назначенных цен: $D_2 = D_2(p_2, y_1, p_1)$. Конкретный вид функции D_2 определяется предполагаемой схемой рационирования.

Будем считать, что функция остаточного спроса $D_2(p_2, y_1, p_1)$ определена при всех неотрицательных значениях p_1, p_2 и y_1 (а не только при $p_1 < p_2$). Естественными требованиями к функции остаточного

[29]Сам термин «рационирование» не очень удачен. Здесь, скорее, имеется в виду структура распределения проданного количества блага между потребителями — какое количество потребит в конечном итоге каждый потребитель.

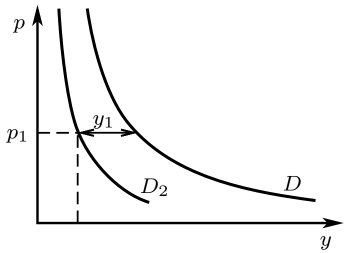


Рис. 13.10. *Пропорциональное рационирование*

спроса являются ее невозрастание[30] по p_2 и условие

$$D_2(p, y_1, p) = D(p) - y_1.$$

Ниже приводится описание двух наиболее простых и естественных вариантов рационирования — пропорционального и эффективного рационирования.

При пропорциональном рационировании остаточный спрос при каждой цене p_2 составляет одну и ту же долю исходного спроса (зависящую от p_1 и y_1):

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = \frac{D(p_1) - y_1}{D(p_1)} D(p_2).$$

Такое рационирование может быть результатом того, что все потребители с одинаковой вероятностью попадают в число тех, кто смог купить товар у первой фирмы. При этом дополнительно предполагается, либо что предпочтения у всех одинаковые, либо что благо неделимое и все потребители потребляют не более единицы. Потребителей должно быть «достаточно много»[31]. Кроме того, следует учитывать, что такая схема рационирования возможна только в том случае, если потребители по каким-либо причинам не перепродают друг другу товары (отсутствует арбитраж)[32].

Рис. 13.10 иллюстрирует случай такого «справедливого» рационирования. График остаточного спроса получается из графика исход-

[30] Это требование довольно естественно, если предположить невозрастание функции спроса $D(p)$ по p.

[31] Строго говоря, спрос должен быть усредненным спросом бесконечного множества (континуума) потребителей.

[32] При наличии арбитража зависимость остаточного спроса от выпуска производителя в общем случае не может описываться вышеприведенной формулой.

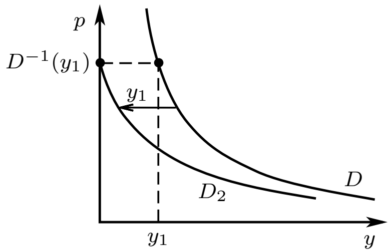


Рис. 13.11. *Эффективное рационирование*

ного спроса пропорциональным сжатием по горизонтали в направлении оси.

При эффективном рационировании продукцию по более низким ценам покупают те, кто более высоко ее ценит. В этом случае остаточный спрос получается параллельным сдвигом кривой спроса на величину y_1. Эту схему легко проиллюстрировать в ситуации, когда каждый потребитель может купить только единицу блага. Тогда, если у нас есть 15 покупателей, а первая фирма производит только 5 единиц, то эти 5 единиц покупают те 5 из них, которые ценят данное благо выше, чем каждый из остальных десяти потребителей.

Хотя описанное ранее пропорциональное рационирование достаточно хорошо представляет многие известные схемы распределения дефицитных благ, эффективное рационирование также может достаточно хорошо описывать те или иные ситуации рационирования. Так, этот способ рационирования хорошо отражает положение дел в случае, когда благо можно перепродать без издержек (возможен арбитраж). Тогда, если благо приобрел потребитель, который ценит его ниже p_2, он перепродаст его тем, кому оно не досталось, но кто готов предложить за него более высокую цену. Таким образом, при наличии арбитража (без дополнительных затрат на сделки) любой другой способ рационирования должен в конечном итоге свестись к эффективному рационированию.

Как несложно понять, при таком способе рационирования остаточный спрос с которым сталкивается вторая фирма, будет равен (при $D(p_2) \geqslant y_1$)

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = D(p_2) - y_1.$$

Из совокупного спроса $D(p_2)$ мы вычитаем то количество, которое продала первая фирма, и получаем остаточный спрос, с которым сталкивается вторая фирма. Эта формула подходит, только если вторая фирма назначит такую цену, что $D(p_2) \geqslant y_1$. Если же $D(p_2) < y_1$, то величина остаточного спроса окажется равной нулю, поскольку, по предположению, те потребители, которые ценят благо выше, чем $D^{-1}(y_1)$, уже приобрели его. Таким образом, в ситуации эффективного рационирования остаточная функция спроса имеет следующий вид:

$$D_2(p_2) = \begin{cases} D(p_2) - y_1, & \text{если } p_2 \leqslant D^{-1}(y_1), \\ 0, & \text{если } p_2 \geqslant D^{-1}(y_1). \end{cases}$$

Нахождение остаточного спроса при эффективном рационировании иллюстрирует Рис. 13.11. Остаточный спрос при ценах, когда он положителен, получается из общего спроса параллельным горизонтальным сдвигом на величину y_1.

С точки зрения благосостояния эффективное рационирование — это такое рационирование, при котором (среди всех возможных вариантов распределения между потребителями блага в количестве y_1 по цене p_1 и в неограниченном количестве по цене p_2) общий потребительский излишек максимален — отсюда и термин[33].

Описание модели

В случае двух производителей, имеющих возрастающие предельные издержки, получаем модель, последовательность ходов в которой можно описать следующим образом:

(1) Фирмы одновременно выбирают цены, p_1 и p_2.

(2) Если одна из фирм, например первая, назначает более низкую цену ($p_1 < p_2$), то эта фирма выбирает объем производства, y_1. Тогда другая фирма сталкивается с остаточным спросом, соответствующим имеющейся схеме рационирования. Учитывая этот остаточный спрос, она выбирает объем производства y_2. Если же выбранные цены совпадают ($p_1 = p_2 = p$), то фирмы одновременно

[33] Предположим, что каждый потребитель может купить только единицу блага, первая фирма продает благо по более низкой цене, чем вторая ($p_1 < p_2$). Пусть потребитель с низкой оценкой v_l, такой что более высокая цена второй фирмы p_2 окажется выше его оценки ($p_2 > v_l$), купит по цене p_1, а другой потребитель, с высокой оценкой v_h, не сможет купить по цене p_1, и купит по цене p_2. Такая ситуация будет неэффективный с точки зрения потребительского излишка. Более эффективно, чтобы потребитель с оценкой v_h купил по цене p_1, а потребитель с оценкой v_l не покупал благо. Действительно, так как $v_l < p_2$, то

$$v_l - p_1 + v_h - p_2 < v_h - p_1.$$

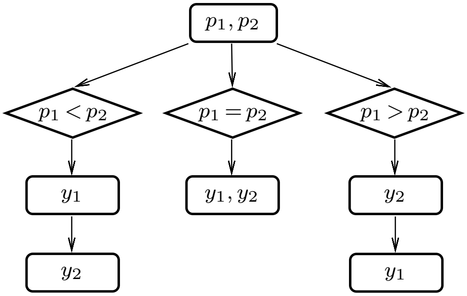


Рис. 13.12. *Последовательность ходов для двух фирм*

выбирают объемы производства y_1 и y_2. При этом если суммарный объем производства превышает величину спроса при данной цене ($y_1 + y_2 > D(p)$), спрос распределяется поровну между фирмами.

Схема игры представлена на Рис. 13.12. Это не полное дерево игры, а только условное описание последовательности ходов.

Стратегией каждой фирмы является описание ее действий в зависимости от предыстории игры. В данном случае стратегией j-й фирмы является набор

$$(p_j, \mathcal{Y}_j^{<}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{=}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{>}(p_j, p_{-j}, y_{-j})),$$

где первая компонента — выбранная цена, а остальные представляют собой функции (не обязательно функции отклика) от предшествующих действий (своих и конкурента). Здесь $\mathcal{Y}_j^{<}$ обозначает объем производства, который выбирает фирма, если ее цена оказывается ниже цены конкурента, $\mathcal{Y}_j^{>}$ — если ниже, $\mathcal{Y}_j^{=}$ — в случае совпадения цен.

Как обычно, в качестве концепции решения мы рассматриваем совершенное в подыграх равновесие, т. е. такую пару стратегий, которая порождает равновесие Нэша в каждой подыгре. Выигрыш фирмы определяется некоторой функцией Π_j, которая зависит от четырех аргументов — цен и объемов, выбранных фирмами в ходе игры. Мы не будем приводить функцию $\Pi_j(p_1, p_2, y_1, y_2)$ в явном виде; ее несложно построить по описанию модели.

С целью упрощения анализа модели ее удобно редуцировать, заменив $\mathcal{Y}_j^{<}(\cdot)$, $\mathcal{Y}_j^{=}(\cdot)$ и $\mathcal{Y}_j^{>}(\cdot)$ на соответствующие функции отклика, которые можно обозначить через $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$. Эти функции показывают объем производства, который производителю выгодно выбрать при данной предыстории игры. Редуцированная модель бу-

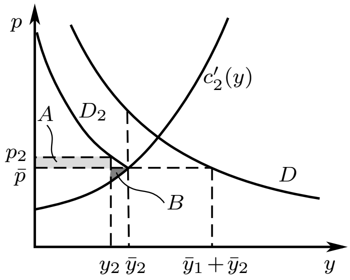


Рис. 13.13. *Аналог равновесия Бертрана не является равновесием при возрастающих предельных издержках*

дет статической игрой, в которой фирмы выбирают только цены p_1 и p_2.

Сравнение с равновесием Бертрана

Рассмотрим вектор цен и выпусков $(\bar{p}, \bar{p}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, такой что предельные издержки у обоих олигополистов равны цене:

$$c_1'(\bar{y}_1) = \bar{p} \quad \text{и} \quad c_2'(\bar{y}_2) = \bar{p},$$

а суммарное производство полностью удовлетворяет спрос при этих ценах:

$$D(\bar{p}) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

Этот исход, соответствующий поведению фирм как *ценополучателей*, естественно считать аналогом равновесия Бертрана.

Мы хотим показать, что набор стратегий $(\bar{p}, \bar{p})$ не может соответствовать равновесию в редуцированной модели. Причина этого заключается в том, что каждый производитель заинтересован увеличить цену, уменьшив объем продаж. Сокращение прибыли от уменьшения объема продаж в первом приближении перекрывается увеличением прибыли как результата увеличения цены.

Графическая иллюстрация этих рассуждений приведена на Рис. 13.13. Прибыль второй фирмы равна площади между кривой ее предельных издержек и ценой (минус постоянные издержки $c_2(0)$). Если вторая фирма немного повысит свою цену с $\bar{p}$ до p_2, то ее прибыль, с одной стороны, возрастет за счет этого на площадь прямоугольника A, а, с другой стороны, упадет за счет сокращения объема продаж на площадь треугольника B. При малом изменении цены первый эффект превышает второй, что и показывает диаграмма.

Теперь докажем более формально, что стратегии $(\bar{p}, \bar{p}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_2 > 0$, не могут соответствовать состоянию равновесия при ценовой конкуренции. Пусть второй производитель ожидает, что первый производитель назначил цену $\bar{p}$. Нам достаточно показать, что в этом случае второму выгодно назначить цену p_2 выше $\bar{p}$.

Обозначим через $\bar{R}_2(p_2)$ тот объем производства, который второй олигополист выберет в том случае, если будут назначены цены $(\bar{p}, p_2)$, где $p_2 \geqslant \bar{p}$, т. е.

$$\bar{R}_2(p_2) = R_2^{>}(\bar{p}, p_2, R_1^{<}(\bar{p}, p_2)) \text{ при } p_2 > \bar{p}$$

и

$$\bar{R}_2(\bar{p}) = R_2^{=}(\bar{p}, \bar{p}).$$

Здесь $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$ — введенные выше функции отклика. Мы не будем полностью анализировать, какой вид имеют функции отклика (читатель может проделать такой анализ самостоятельно). Нам потребуется только несколько фактов относительно этих функций. При данной цене p_j, если нет ограничений на сбыт продукции, j-му производителю выгодно выбрать такой объем производства y_j, чтобы предельные издержки были равны цене:

$$c_j'(y_j) = p_j.$$

Отсюда следует, что $R_1^{<}(\bar{p}, p_2)) = \bar{y}_1$ и $R_2^{=}(\bar{p}, \bar{p}) = \bar{R}_2(\bar{p}) = \bar{y}_2$.

Если первый производитель продает $\bar{y}_1$ по цене $\bar{p}$, то при $p_2 > \bar{p}$ второму производителю не удается продать столько, сколько бы он хотел (количество, максимизирующее его прибыль при данной цене), поэтому ему выгодно выбрать выпуск в точности на уровне остаточного спроса. (Докажите это.) Таким образом, при $p_2 > \bar{p}$ выполнено

$$\bar{R}_2(p_2) = R_2^{>}(\bar{p}, p_2, \bar{y}_1) = D_2(p_2, \bar{y}_1, \bar{p}).$$

Если выполнено естественное предположение о функции остаточного спроса:

$$D_2(\bar{p}, \bar{y}_1, \bar{p}) = D(\bar{p}) - \bar{y}_1,$$

то $D_2(\bar{p}, \bar{y}_1, \bar{p}) = \bar{y}_2 = \bar{R}_2(\bar{p})$.

Таким образом, при всех $p_2 \geqslant \bar{p}$ выполнено

$$\bar{R}_2(p_2) = D_2(p_2, \bar{y}_1, \bar{p}).$$

Предположим для упрощения, что исходная функция остаточного спроса $D_2(\cdot)$ дифференцируема по p_2. Тогда $\bar{R}_2(p_2)$ также дифференцируема.

При $y_2 = \bar{R}_2(p_2)$ прибыль второго производителя будет равна

$$\Pi_2(p_2) = \bar{R}_2(p_2)p_2 - c_2(\bar{R}_2(p_2)), \quad p_2 \geqslant \bar{p}.$$

Для доказательства утверждения о неравновесности такой ситуации достаточно показать, что производная прибыли в точке $p_2 = \bar{p}$ положительна. Действительно, при $p_2 \geqslant \bar{p}$

$$\Pi_2'(p_2) = \bar{R}_2(p_2) + [p_2 - c_2'(\bar{R}_2(p_2))] \cdot \bar{R}_2'(p_2).$$

При $p_2 = \bar{p}$, учитывая, что $\bar{R}_2(\bar{p}) = \bar{y}_2$, получим

$$\Pi_2'(\bar{p}) = \bar{y}_2 + [\bar{p} - c_2'(\bar{y}_2)] \cdot \bar{R}_2'(\bar{p}).$$

Так как по определению $\bar{p} = c_2'(\bar{y}_2)$, то

$$\Pi_2'(\bar{p}) = \bar{y}_2.$$

Таким образом, при $\bar{y}_2 > 0$ имеет место соотношение $\Pi_2'(\bar{p}) > 0$.

Мы не задаемся здесь достаточно сложным вопросом о том, каким будет равновесие в данной отрасли[34] и каковы условия существования равновесия. Однако ясно, что если в ценовой конкуренции и существует равновесие, то продажи не осуществляются по ценам, равным предельным издержкам. Таким образом, анализ показывает, что как только мы отказываемся от предположения об одинаковости и постоянстве предельных издержек, вывод относительно ценовой конкуренции, полученный на основе традиционной модели Бертрана, перестает быть верным.

13.4.3 Динамический вариант дуополии Бертрана (повторяющиеся взаимодействия)

Наиболее простой динамический вариант дуополии Бертрана — две фирмы с постоянными и одинаковыми предельными издержками c, участвующие в ценовой конкуренции в течение бесконечного числа периодов времени. Каждая фирма максимизирует приведенную (дисконтированную) прибыль

$$\Pi_j = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot \Pi_{jt},$$

где Π_{jt} — прибыль фирмы i в периоде t, а $\delta \in (0, 1)$ — дисконтирующий множитель.

[34] Естественно ожидать, что при предположении об однородности продукции фирм равновесие в чистых стратегиях может не существовать.

В этой динамической игре Бертрана стратегия фирмы j определяет цену p_{jt}, по которой она продает свою продукцию в период t, как функцию от всей «предыстории» ценовой конкуренции $H_{t-1} = \{\bar{p}_{1\tau}, \bar{p}_{2\tau}\}_{\tau=1}^{t-1}$.

Особый интерес представляют стратегии следующего вида

$$\bar{p}_{jt} = \begin{cases} p^{\mathsf{M}}, & \text{если } \bar{p}_{i\tau} = \bar{p}^{\mathsf{M}} \text{ для всех } i, \tau,\ 1 \leqslant \tau \leqslant t-1, \\ c & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где p^{M} — монопольная цена. Согласно этой стратегии фирма j в периоде 1 назначает монопольную цену за свою продукцию. Затем в каждый последующий период она назначает цену p^{M}, если во все предыдущие периоды обе фирмы назначали цену p^{M}, и цену, равную ее предельным издержкам, в противном случае. Заметим, что если обе фирмы используют указанные стратегии, то в результате они назначают в каждом периоде монопольно высокие цены p^{M}.

Такую стратегию можно рассматривать как неявное соглашение между олигополистами, так называемый молчаливый сговор, относительно назначения в каждом периоде монопольной цены на производимую ими продукцию. В этих терминах каждая из фирм придерживается соглашения, если в предшествующие периоды обе фирмы не нарушали его, и нарушает соглашение, если другая фирма (или она сама) в прошлом нарушила соглашение.

При некоторых предположениях о дисконтирующем множителе указанные стратегии составляют равновесие описанной бесконечно повторяющейся игры (которое является совершенным в подыграх равновесием). Заметим, что этот результат верен только для бесконечно повторяющейся игры. Если игра повторяется конечное число раз (взаимодействие фирм продолжается в течение конечного и заранее определенного периода времени), то единственным равновесием будет такой набор стратегий, согласно которому каждая фирма в каждом из периодов назначает цену на уровне предельных издержек. Таким образом, в конечной игре описанный Бертраном исход реализуется в каждом из периодов. Действительно, используя обратную индукцию, рассмотрим последний период. Так как выигрыши в нем не зависят от действий игроков в предыдущие периоды, то фактически соответствующая игра представляет собой обычную модель Бертрана. Продолжая эти рассуждения, получим равновесие Бертрана в каждом из периодов.

Теорема 13.14:

Пусть функция спроса является непрерывной и строго убывает.

Тогда указанные выше стратегии составляют совершенное в подыграх равновесие рассматриваемой динамической модели Бертрана если, и только если $\delta \geqslant 1/2$. ┘

Доказательство: Докажем прежде всего, что указанные стратегии составляют равновесие Нэша. Для этого нужно доказать, что ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своей стратегии, если другой игрок придерживается своей стратегии.

Если оба игрока будут придерживаться своих равновесных стратегий, то прибыль каждого из них за один период составит

$$\frac{1}{2}\Pi^{\mathsf{M}} = \frac{1}{2}(p^{\mathsf{M}} - c)D(p^{\mathsf{M}}).$$

Совокупная прибыль за все периоды будет в этом случае равна

$$\Pi_j = \frac{1}{2}\Pi^{\mathsf{M}}\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1} = \frac{1}{2}\frac{\Pi^{\mathsf{M}}}{1-\delta}.$$

Предположим, что один из игроков в первом периоде назначил цену, отличную от монопольной:

$$p < p^{\mathsf{M}}.$$

(Если игрок в первом периоде назначит цену выше монопольной, то его общая прибыль будет равна нулю, поэтому ему невыгодно назначать такую цену.) Этот игрок в первом периоде получит весь спрос целиком, и его прибыль составит

$$(p - c)D(p).$$

Во все последующие периоды его прибыль будет нулевой, поскольку другой игрок, придерживаясь своей стратегии, будет наказывать его за отклонение от соглашения: будет устанавливать цену на уровне предельных издержек. Отклонение от стратегии в первом периоде будет выгодным, если

$$(p - c)D(p) > \frac{1}{2}\frac{\Pi^{\mathsf{M}}}{1-\delta}.$$

При непрерывной кривой спроса игрок может сделать прибыль $(p - c)D(p)$ сколь угодно близкой к монопольной прибыли $\Pi^{\mathsf{M}} = (p^{\mathsf{M}} - c)D(p^{\mathsf{M}})$. Таким образом, чтобы рассматриваемый набор стратегий мог быть равновесным, требуется чтобы

$$1 \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{1-\delta}$$

или

$$\delta \geqslant \frac{1}{2}.$$

Мы доказали, что в первом периоде при $\delta \geqslant 1/2$ игроку нет смысла отклоняться от своей стратегии[35].

Выгодно ли ему делать это в последующие периоды? Нет, поскольку ситуация будет той же — прибыли останутся теми же с точностью до возрастающего линейного преобразования (учитывая дисконтирование и прибыль в периоды до нарушения соглашения).

Тем самым доказано, что рассматриваемый набор стратегий является равновесием Нэша. Нам осталось доказать, что он будет равновесием Нэша в каждой подыгре. Для этого достаточно понять, что каждая подыгра повторяет исходную игру с точностью до возрастающего линейного преобразования выигрышей. Мы предлагаем читателю самостоятельно провести соответствующие рассуждения. ■

Таким образом, в рассмотренной бесконечно повторяющейся игре существует Парето-оптимальное (с точки зрения олигополистов) равновесие. Однако это равновесие не будет единственным. Можно придумать бесконечно много различных пар стратегий, составляющих совершенное в подыграх равновесие, и среди этих равновесий есть не Парето-оптимальные.

Задачи

13.39 Объясните (одним предложением), почему в модели Бертрана невозможно найти равновесие простым взятием производных?

13.40 Напомним, что в традиционной модели олигополии Бертрана предельные издержки производителей постоянны и в случае равенства цен они делят рынок поровну (или, в другой формулировке, объем продаж любого производителя положителен). Покупатели являются ценополучателями и представлены (убывающей) непрерывной функцией спроса, такой что $D(c_{max}) > 0$, где c_{max} — максимальные предельные издержки ($\max_j c_j$).

(A) Покажите, что в (традиционной) дуополии Бертрана с неодинаковыми (но постоянными) предельными издержками равновесия не существует.

(B) Покажите, что равновесие в (традиционной) олигополии Бертрана с тремя и более производителями в случае неодинаковых (но

[35] Соответственно при $\delta < 1/2$ любому игроку выгодно отклониться, т. е. рассматриваемые стратегии не могут составлять равновесие.

постоянных) предельных издержек существует тогда и только тогда, когда по крайней мере у двух производителей предельные издержки одинаковы и не превышают предельных издержек других производителей.

13.41 Рассмотрите модификацию традиционной модели дуополии Бертрана в виде двухэтапной динамической игры, в которой производители на первом этапе одновременно и независимо назначают цены, а на втором этапе потребители определяют объем покупок и контрагента (у кого они будут покупать). При этом каждый потребитель может покупать у нескольких производителей, деля объем покупок между ними в произвольной пропорции.

(A) Покажите, что в ситуации, когда предельные издержки производителей одинаковы, существует несколько равновесий (в чистых стратегиях) такой игры. Опишите все такие равновесия.

(B) Покажите, что в ситуации, когда предельные издержки производителей различаются, равновесие единственно. Охарактеризуйте это равновесие.

13.42 Рассмотрите модифицированный вариант традиционной модели дуополии Бертрана, когда назначаемые производителями цены могут принимать дискретные значения (например, различаться только на фиксированную величину — один рубль, десять копеек и т. д.) Соответственно предельные издержки могут также принимать (те же) дискретные значения.

(A) Покажите, что в данной ситуации в случае, когда предельные издержки производителей одинаковы, могут существовать два равновесия. При каких условиях равновесие единственно?

(B) Предположим теперь, что предельные издержки производителей различаются (достаточно сильно). Покажите, что в этом случае равновесие единственно. Охарактеризуйте данное равновесие.

(C) Пусть, как и ранее, предельные издержки дуополистов различаются. Покажите, что в соответствующей двухэтапной игре (в которой потребители выбирают, у какой фирмы покупать) в этом случае существует несколько равновесий в чистых стратегиях. Охарактеризуйте все эти равновесия.

13.43 Рассмотрите модель Бертрана дуополии с *разными* постоянными предельными (средними) издержками c_1 и c_2 ($c_2 = 1$). Пусть функция спроса отрасли имеет вид $D(p) = 2 - p$. Предположим, что при равенстве цен потребители покупают только у производителя с меньшими издержками. Укажите интервал для предельных издержек первого олигополиста, такой что равновесная цена строго меньше, чем $c_2 = 1$.

13.44 Спрос на продукцию олигополистов равен $1 - p$. На рынке присутствуют n олигополистов, конкурирующих по Бертрану. Средние издержки каждого олигополиста постоянны и равны 0,5. Какую сумму готов заплатить отдельный олигополист за инновацию, снижающую его средние издержки до 0,2?

13.45 Пусть спрос в отрасли имеет вид $D(p) = 100 - 2p$. Две находящиеся в отрасли фирмы ведут ценовую конкуренцию, имея нулевые издержки. Известно, что первая фирма выбрала цену $p_1 = 15$ и выпуск $y_1 = 20$. Какую цену установит вторая фирма при эффективном и случайном рационировании соответственно, если будет выбирать цену, более высокую, чем p_2?

13.46 Сформулируйте и докажите утверждение о существовании равновесия в модели с дифференцированными продуктами. (*Указание:* Предположите, что для каждого из олигополистов вне зависимости от цен остальных олигополистов существует цена, выше которой спрос равен нулю. Остальные условия сходны с условиями, использованными при доказательстве существования равновесия в модели Курно. Воспользуйтесь теоремой Нэша[36].)

13.47 На рынке действуют две одинаковые фирмы. Спрос на продукцию j-й фирмы зависит от ее собственной цены p_j и цены конкурента p_{-j}:

$$y_j = \alpha^2 - \alpha p_j + (\alpha - 1)p_{-j} \ (\alpha > 1).$$

Предельные издержки равны 1. Рассчитать равновесие при ценовой конкуренции фирм. Сравнить с картелем.

13.48 Пусть две фирмы, выпускающие два разных, но связанных в потреблении товара, выбирают цены $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, которые влияют на объемы спроса. Функции спроса заданы уравнениями:

$$y_1(p_1, p_2) = 6 - 2p_1 + p_2,$$

$$y_2(p_1, p_2) = 10 - 3p_2 + p_1.$$

Найти равновесные цены, если издержки у обеих фирм нулевые.

13.49 Две фирмы производят схожие блага и ведут ценовую конкуренцию. Функции спроса имеют вид $D_1(p_1, p_2) = p_2/p_1^2$ и $D_2(p_2, p_1) = p_1/p_2^2$ соответственно. Издержки производства единицы продукции равны 1 у обеих фирм. Объемы производства ограничены размера-

[36] Теорема А.3 на с. 1037.

ми производственных мощностей (Q_1 и Q_2 соответственно). Найдите равновесие в зависимости от мощностей.

13.50 В динамической дуополии Бертрана рассмотрите стратегии следующего вида: $p_{j1} = p^{\text{M}}$ и $p_{jt} = p_{-j,t}$ при $t > 1$. При каком значении дисконтирующего множителя δ эти стратегии составляют совершенное в подыграх равновесие?

13.5 Модель олигополии с ценовым лидерством

В модели олигополии с ценовым лидерством лидер (фирма 1) назначает цену p, а последователи ($j = 2, \ldots, n$) выбирают выпуск, считая цену фиксированной (т. е. ведут себя как ценополучатели). С точки зрения теории игр модель представляет собой двухэтапную динамическую игру с почти совершенной информацией. В определенном смысле модель олигополии с ценовым лидерством находится в том же отношении к модели Бертрана, что и модель Штакельберга к модели Курно. Ее анализ фактически повторяет анализ модели Штакельберга и ниже будет приведен в схематичном виде.

Опишем способ нахождения равновесия с помощью обратной индукции. Сначала следует рассмотреть второй этап игры. На втором этапе последователи одновременно выбирают свои объемы производства. Таким образом формируются отклики $R_j(p)$, которые являются решением соответствующих задач:

$$py_j - c_j(y_j) \to \max_{y_j \geqslant 0}.$$

Мы будем предполагать, что отклики однозначны и $R_j(p)$ являются функциями, определенными при всех неотрицательных ценах. Эти задачи, очевидно, совпадают с задачами фирм при совершенной конкуренции, а функции отклика $R_j(p)$ являются соответствующими функциями предложения. При соответствующих предположениях функции отклика удовлетворяют условиям первого порядка[37]:

$$c_j'(R_j(p)) = p,$$

т. е. функции $R_j(p)$ являются обратными к функциям предельных издержек $c_j'(y_j)$. Обычно предполагают, что функции издержек характеризуются убывающей отдачей, так что функции предельных издержек возрастают и поэтому являются обратимыми.

[37] Предполагается, что уравнение имеет решение при всех $p \geqslant 0$.

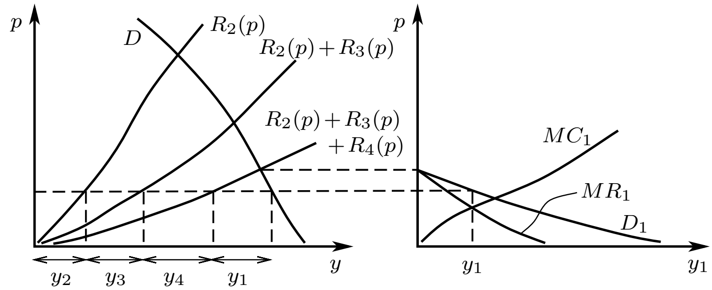


Рис. 13.14. *Олигополия с ценовым лидерством*

В свою очередь, лидер выбирает цену, ориентируясь на функции отклика. Для каждого уровня цены, выбранной лидером, можно определить остаточный спрос

$$D_1(p) = D(p) - \sum_{j=2}^{n} R_j(p).$$

Фактически лидера можно рассматривать как монополиста, сталкивающегося с функцией спроса $D_1(p)$. Таким образом, лидер решает задачу

$$\Pi_1 = D_1(p)p - c_1(D_1(p)) \to \max_p .$$

На Рис. 13.14 иллюстрируется равновесие олигополии с ценовым лидерством для случая $n = 4$.

Задачи

13.51 Сформулируйте и докажите теорему существования равновесия в модели ценового лидерства. (*Указание:* в качестве образца возьмите доказательство существования равновесия в модели Штакельберга.)

13.52 Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства, функции издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = cy_1$ и $c_2(y_2) = y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = a - bp$. Показать, что суммарный выпуск будет больше, чем в равновесии Курно, но меньше, чем Парето-оптимальный. Показать равновесие графически.

13.53 Два олигополиста конкурируют по типу модели ценового лидерства. Лидер имеет нулевые предельные издержки, а ведомый имеет квадратичную функцию издержек: $c_2(y_2) = y_2^2/2$. Спрос в отрасли описывается функцией $D(p) = 8 - p$. Насколько выросла бы суммарная прибыль олигополистов, если бы они сумели объединиться в одну фирму (картель)?

Задачи к главе

13.54 Два олигополиста имеют постоянные одинаковые предельные издержки, равные 2. Предполагается, что они конкурируют как в модели Штакельберга. Спрос в отрасли задан обратной функцией спроса $P(Y) = 16 - 0{,}5Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

Глава 14

Модели найма: монопольное положение нанимателя

Мы уже обсуждали ситуации, когда стороны, вступающие в сделки, неодинаково информированы об их характере, ценности, свойствах обмениваемых благ, последствиях и т. д. Такие ситуации довольно многообразны и не сводятся только к сделкам того типа, анализ которых проведен в гл. 11.

В этой главе мы обсудим взаимодействия (при заключении сделок) между двумя типами экономических субъектов: нанимателем (заказчиком, владельцем, начальником, *Principal*), и нанимаемым работником (подрядчиком, менеджером, подчиненным, *Agent*), известные под названием *Principal—Agent problem.* Наниматель, обладая (монопольной) переговорной силой, предлагает работнику сделку с целью стимулировать его выполнять какие-то действия в интересах данного нанимателя. При этом переговорная сила нанимателя заключается в том, что работник не может обсуждать условия сделки (предлагать какие-то их модификации). Модели таких взаимодействий будем называть моделями найма.

Как правило, мы ограничиваемся контекстом рынка труда, когда наниматель и работник договариваются относительно условий найма — делегирования нанимателем работнику тех или иных полномочий от имени нанимателя, заданий и т. д. и условий вознаграждения работника, однако обсуждаемые методы анализа применимы и в других подобных ситуациях. Это, например, модели нелинейного ценообразования (параграф 12.3), налогообложения (параграф 8.5), страхования (в задачах к данной главе).

Анализ проведем при дополнительных, упрощающих предположениях (заключается однократная сделка, выполнение условий сделки гарантировано и т. д.).

В этой главе рассматривается случай найма с единственным нанимателем. Взаимодействие нанимателя и работника моделируется как игра двух лиц (двусторонняя сделка), хотя фактически модель описывает ситуацию, когда наниматель может заключать сделки с (бесконечно) большим числом работников, но каждая такая сделка не оказывает влияния на условия найма других.

14.1 Модель с полной информацией

Для анализа влияния асимметричной информированности на структуру сделки мы опишем сначала простую модель найма (на основе которой в дальнейшем проводится анализ при различных более сложных предположениях относительно информированности сторон) и охарактеризуем контракт найма в ситуации полной информированности участников сделки относительно всех ее характеристик.

В этой модели наниматель владеет неким «фактором производства», позволяющим получать доход (добавленную стоимость) величиной $y = y(x)$, если уровень усилий работника составляет величину $x \in X$, где X — множество возможных усилий (действий). Обычно предполагается, что функция $y(\cdot)$ является возрастающей и вогнутой, что означает, что доход возрастает с ростом уровня усилий, но с «убывающей отдачей». В предположении дифференцируемости функции $y(\cdot)$ это означает, что $y'(x) > 0$ для всех $x \in X$ и что $y'(\cdot)$ не возрастает.

Для стимулирования усилий работника наниматель выбирает схему оплаты $w(\cdot)$ в зависимости от некоторого наблюдаемого им сигнала о величине таких усилий. Схему оплаты $w(\cdot)$ называют также контрактом. При этом, выбирая контракт, наниматель максимизирует остаточный доход, т. е. разность между создаваемым работником доходом y и вознаграждением w. Будем называть эту величину прибылью нанимателя:

$$\Pi = y(x) - w.$$

Естественно предполагать, что полезность работника в результате работы по найму зависит от уровня усилий и от величины оплаты, т. е. $u = u(x, w)$. Для упрощения анализа будем предполагать, что эта функция является сепарабельной:

$$u(x, w) = v(w) - c(x),$$

где $v(w)$ — полезность от вознаграждения w, а $c(x)$ — тягость усилий x. Будем также предполагать, что $v(\cdot)$ — возрастающая строго вогнутая функция, $c(\cdot)$ — возрастающая выпуклая функция. Если эти функции дифференцируемы, то приведенные условия модифицируются следующим образом: $v'(x) > 0$, $v'(\cdot)$ убывает (убывающая

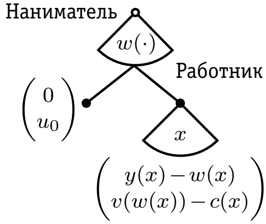


Рис. 14.1. *Представление модели найма в виде дерева*

предельная полезность), $c'(x) > 0$ и $c'(\cdot)$ не убывает (возрастающая предельная тягость усилий).

Предположим сначала, что работник характеризуется резервной полезностью u_0. Это полезность альтернативной занятости, и работник не согласится на работу по контракту, если его полезность окажется меньше u_0. (Мы будем предполагать, что, когда $u = u_0$, работник соглашается на данную работу.)

Предполагается, что наниматель, выбирая схему оплаты (контракт), знает функцию полезности и резервную полезность работника, а работник принимает контракт как данный.

Можно рассматривать данную модель как динамическую игру. В ней стратегия нанимателя — контракт $w(\cdot)$. Мы рассмотрим один из вариантов модели, в которой контракт — это функция от усилий x: $w = w(x)$.

① Наниматель выбирает функцию $w(\cdot)$ — контракт.

② Работник выбирает, работать ему или нет (заключать или не заключать контракт).

③ Работник, если он подписал контракт, выбирает уровень усилий x.

Можно изобразить эту игру в виде дерева (см. Рис. 14.1).

Для полного описания игры необходимо задать множество допустимых выборов нанимателя — множество возможных контрактов $\{w(\cdot)\}$. В случае, если множество усилий не является конечным, решение описанной игры существует не для всех множеств возможных контрактов: задача работника (выбор усилий x) имеет решение далеко не для всех типов контрактов $w(\cdot)$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что наниматель может выбрать любой контракт, при котором задача работника имеет решение.

Это ситуация полной информации — всем все известно (о технологии, предпочтениях и производимых усилиях). Равновесие можно

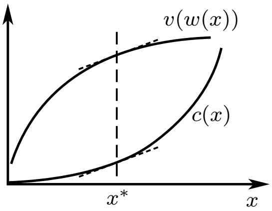


Рис. 14.2. *Выбор работником оптимальных действий*

найти с помощью обратной индукции. При данном контракте $w(\cdot)$ работник решает задачу

$$u = v(w(x)) - c(x) \to \max_{x \in X}$$

и выбирает соответствующие усилия x^*:

$$x^* \in \underset{x \in X}{\operatorname{argmax}}(v(w(x)) - c(x))$$

(ясно, что решение может быть и не единственным). При дифференцируемости функций

$$v'(w(x^*))w'(x^*) = c'(x^*)$$

для внутреннего решения. (См. Рис. 14.2.)

Далее, работник выбирает, подписывать ли ему контракт, зная оптимальное решение. Он сравнивает величины u_0 и $\max_{x \in X}(v(w(x)) - c(x))$. Если $\max_{x \in X}(v(w(x)) - c(x)) < u_0$, работник отказывается подписывать контракт и выигрыш предпринимателя оказывается равным нулю. Если u_0 оказывается выше, то работник не подписывает контракт. Напомним, что если полезность одинакова при обоих вариантах его поведения, то мы предполагаем, что работник принимает решение подписать контракт.

Таким образом, в этой ситуации решение работника зависит от предлагаемого ему контракта $w(\cdot)$. С другой стороны, от решения работника x^* зависит величина прибыли $\Pi = y(x^*) - w(x^*)$. Наниматель предлагает контракт, дающий ему максимальную прибыль с учетом предсказуемого решения работника[1].

Если решение задачи работника x^* не единственно, то будем считать, что работник делает выбор, благоприятный для нанимателя.

[1] Фактически рассматривается совершенное в подыграх равновесие.

Поэтому можно предполагать, что наниматель сам выбирает x^* при тех же ограничениях.

Эти рассуждения позволяют сформулировать следующую задачу выбора функции $w(\cdot)$ и уровня усилий x^*, с помощью которой можно найти решения игры:

$$\Pi = y(x^*) - w(x^*) \to \max_{x^*, w(\cdot)}$$

$$v(w(x^*)) - c(x^*) \geqslant v(w(x)) - c(x) \ \forall x \in X, \tag{PA1}$$

$$v(w(x^*)) - c(x^*) \geqslant u_0. \tag{PA2}$$

Ограничение (PA1) называют ограничением совместимости стимулов. Его можно также записать в виде

$$x^* \in \operatorname*{argmax}_{x \in X}(v(w(x)) - c(x)).$$

Ограничение (PA2) называют ограничением участия. Ограничение участия исключает из анализа случай $v(w(x^*)) - c(x^*) < u_0$, для которого выигрыши известны, упрощая анализ (в противном случае требовалось бы искать максимум, вообще говоря, разрывной функции выигрыша нанимателя). Оптимальный контракт на основе решения данной задачи находится следующим образом. Если в полученном решении прибыль нанимателя отрицательна, то он предложит работнику такой контракт, который тот не подпишет; при этом наниматель получит нулевую прибыль[2]. Если же прибыль нанимателя положительна, то оптимальный контракт есть решение данной задачи.

Решение этой задачи нанимателя включает в себя *максимизацию по функции*, причем обычно решение является не единственным. Для нахождения решения удобно рассмотреть сначала вспомогательную задачу, без ограничения совместимости стимулов:

$$\Pi = y(x^*) - w(x^*) \to \max_{x^*, w(\cdot)}$$

$$v(w(x^*)) - c(x^*) \geqslant u_0.$$

[2] Можно было бы добавить еще один ход нанимателя: предлагать контракт или нет. Тогда в рассматриваемом «невыгодном» случае нанимателю достаточно не предлагать работнику никакого контракта.

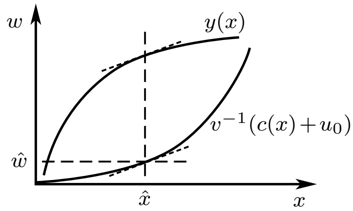


Рис. 14.3. *Идеальная для нанимателя ситуация, выбор $\hat{x}$ и $\hat{w}$*

Вводя обозначения $w = w(x^*)$, $x = x^*$, приходим к следующей задаче:

$$\Pi = y(x) - w \to \max_{x,w}$$
$$v(w) - c(x) \geqslant u_0.$$

В этой задаче выбираются оптимальные для нанимателя значения x и w при учете только ограничения участия. Поэтому уровень прибыли, соответствующий решению этой задачи, не может быть ниже ее уровня, соответствующего оптимальному контракту. В дальнейшем мы покажем, что в действительности они совпадают.

Обозначим решение этой вспомогательной задачи через $(\hat{x}, \hat{w})$.

С учетом ограничения участия (которое в точке решения выполняется как равенство) ее можно свести к следующей задаче безусловной оптимизации по уровню усилий x:

$$\Pi = y(x) - v^{-1}(c(x) + u_0) \to \max_x .$$

Для данного уровня усилий $\hat{x}$, при котором достигается максимум, плата должна быть равна $\hat{w} = v^{-1}(c(\hat{x}) + u_0)$. (См. Рис. 14.3.)

При дифференцируемости функций внутреннее решение характеризуется соотношением

$$y'(\hat{x}) = \frac{c'(\hat{x})}{v'(\hat{w})}.$$

Это будет Парето-оптимум с точки зрения целевых функций Π и u (элемент переговорного множества, наиболее предпочитаемый нанимателем: наниматель получит весь излишек от сделки), см. Рис. 14.4.

Может ли наниматель достичь этой идеальной для себя ситуации? Если нет ограничений на возможные контракты, то да, причем несколькими способами. Действительно, для этого следует выбрать

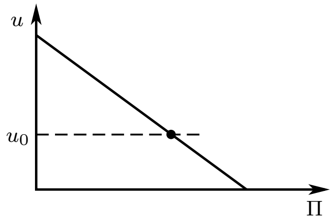


Рис. 14.4. *Идеальная для нанимателя ситуация на Парето-границе*

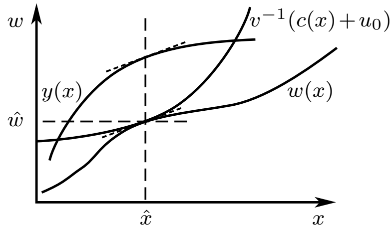


Рис. 14.5. *Подбор схемы оплаты, реализующей идеальную для нанимателя ситуацию*

контракт $w(\cdot)$ таким образом, чтобы решение задачи работника

$$v(w(x)) - c(x) \to \max_{x \in X}$$

достигалось в требуемой точке $\hat{x}$ и работник получал в этой точке требуемую оплату $\hat{w} = w(\hat{x})$. Графически в координатах (x, w) это означает, что кривая $w(x)$ лежит под кривой $v^{-1}(c(x) + u_0)$ и совпадает с ней в точке $(\hat{x}, \hat{w})$ (см. Рис. 14.5).

Если $c(\cdot)$ и $y(\cdot)$ дифференцируемы и ищется дифференцируемая функция $w(\cdot)$, то для внутреннего решения должно быть выполнено

$$w'(\hat{x}) = \frac{c'(\hat{x})}{v'(\hat{w})} (= y'(\hat{x})).$$

Таким образом, если стратегии нанимателя и работника составляют равновесие, причем в равновесии выполнено ограничение участия, то они обладают следующими характеристиками:

- усилия работника в равновесии равны $x = \hat{x}$, а равновесный контракт $w(\cdot)$ удовлетворяет условиям $w(x) \leqslant v^{-1}(c(x) + u_0)$ для всех $x \in X$ и $w(\hat{x}) = \hat{w}$;

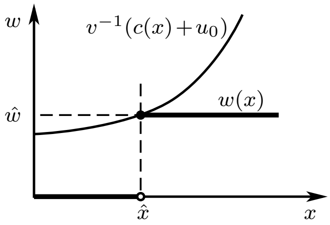


Рис. 14.6. *Оптимальный пакетный контракт*

- если работник сталкивается с произвольным (в том числе неравновесным) контрактом $w(\cdot)$, то он выбирает уровень усилий $x = x^*(w(\cdot))$, который максимизирует полезность работника $v(w(x)) - c(x)$.

Верно и обратное: если существует уровень усилий x, при котором прибыль $y(x) - v^{-1}(c(x) + u_0)$ неотрицательна, то любые стратегии, удовлетворяющие приведенным условиям, составляют равновесие рассматриваемой игры.

Опишем несколько простейших контрактов, при использовании которых достигается идеальная для нанимателя ситуация.

(1) Пакетный контракт («не хочешь — не бери», *take-it-or-leave-it*). Простейший контракт обуславливает приемлемую для работника оплату только для уровня усилий $\hat{x}$, например

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \bar{x}, \\ \bar{w}, & x = \bar{x}. \end{cases}$$

(Мы подразумеваем, что $w = 0$ не обеспечивает работнику резервного уровня полезности.) Контракт

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x < \bar{x}, \\ \bar{w}, & x \geqslant \bar{x} \end{cases}$$

также будем называть пакетным (см. Рис. 14.6).

Очевидно, что для оптимальности пакетного контракта его параметры $\bar{x}$ и $\bar{w}$ следует выбрать следующим образом:

$$\bar{x} = \hat{x} \quad \text{и} \quad \bar{w} = \hat{w}.$$

(2) Линейный по усилиям контракт:

$$w(x) = a + bx.$$

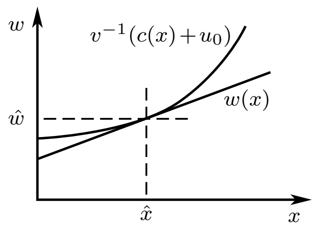


Рис. 14.7. *Оптимальный линейный по усилиям контракт*

Найдем его параметры. Из условия $w'(\hat{x}) = y'(\hat{x})$ получаем, что

$$b = y'(\hat{x}).$$

Из условия $v(w(\hat{x})) = v(\hat{w}) = c(\hat{x}) + u_0$ получаем, что

$$a = \hat{w} - b\hat{x} = v^{-1}(c(\hat{x}) + u_0) - b\hat{x},$$

То есть если $\hat{x}$ — оптимальные усилия, а $\hat{w}$ — соответствующая оплата, то

$$w(x) = \hat{w} + y'(\hat{x})(x - \hat{x})$$

(см. Рис. 14.7).

(3) Линейный по результатам контракт:

$$w(x) = a + by(x).$$

Для того чтобы выполнялось $w'(\hat{x}) = y'(\hat{x})$, требуется, чтобы $b = 1$. Таким образом, это должен быть контракт с полной ответственностью — все прибыли и убытки берет на себя работник. Наниматель же получает фиксированную сумму $A = -a$ ($\Pi = A$). Значит,

$$w(x) = y(x) - A.$$

Для того чтобы этот контракт был оптимальным для нанимателя, следует выбрать

$$A = y(\hat{x}) - \hat{w}$$

(см. Рис. 14.8). Контракт с полной ответственностью, по сути, заставляет работника самому решать задачу нанимателя, которая была сформулирована нами ранее.

Мы рассмотрели модель с полной информацией. Далее рассмотрим модели с неполной, и прежде всего с асимметричной информацией, в которых работник владеет некоторой информацией, а наниматель — нет.

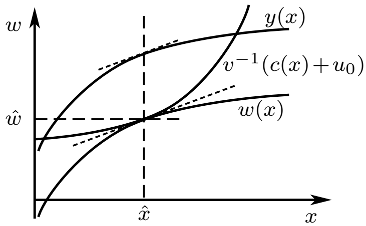


Рис. 14.8. *Оптимальный линейный по результатам контракт*

Задачи

14.1 Барин выбирает, какую долю $\tau \in [0,1]$ стоимости урожая y забирать у крестьянина в виде издольщины. При этом он максимизирует свой ожидаемый доход τy. Крестьянин максимизирует по $y \geqslant 0$ функцию $(1-\tau)y - y^2$, т. е. прибыль при квадратичной функции тягости усилий.

(А) Найти оптимальную для барина долю τ.

(В) Что будет, если дополнительно к издольщине барин может использовать фиксированный оброк A? Какими данными следует дополнить задачу, чтобы она имела решение? Введите соответствующие обозначения, запишите целевые функции и найдите решение.

14.2 ⟦Varian⟧ Профессор P наняла преподавателя-ассистента — мистера A. Профессора интересует, сколько часов мистер A будет преподавать, а также сколько она должна ему заплатить. Профессор P желает максимизировать свою функцию прибыли $x-w$, где x — количество часов, преподаваемых мистером A, а w — заработная плата, которую она ему платит. Если мистер A преподает x часов и получает w, то его полезность равна $w - x^2/2$. Резервная полезность мистера A равна нулю.

(А) Если профессор P выбирает x и w, максимизируя свою полезность при ограничении, что мистер A готов на нее работать, то сколько часов будет преподавать мистер A и сколько ему придется заплатить?

(В) Предположим, что профессор P устанавливает схему заработной платы в форме $w(x) = ax + b$ и позволяет мистеру A выбирать количество часов x. Какие значения a и b следует выбрать профессору P? Удалось бы профессору P достичь более высокого уровня прибыли, если бы она использовала схему $w(x)$ более общей функциональной формы?

14.2 Модель с ненаблюдаемыми действиями

Рассмотрим модель, в которой скрытыми являются действия работника, т. е. наниматель не знает, какие усилия произвел работник, он наблюдает только их результат[3], и в этих условиях наниматель стремится стимулировать работника выбрать уровень усилий, который бы максимизировал ожидаемую прибыль[4].

14.2.1 Формулировка модели и общие свойства

Пусть действия работника x ненаблюдаемы. Результат же действий (доход) $\tilde{y}$ есть (нетривиальная) случайная величина[5], распределение которой зависит от x:

$$\tilde{y} \sim F_x.$$

Здесь $\{F_x\}$ — это семейство распределений с параметром x. Через $F_x(\cdot)$ обозначим соответствующую функцию распределения.

Для упрощения анализа мы в дальнейшем будем предполагать, что носитель этого распределения (область значений[6], принимаемых величиной $\tilde{y}$) не зависит от x. Содержательно это означает, что по наблюдаемым значениям $\tilde{y}$ нельзя однозначно определить, какие действия работник выбрал (или не мог выбрать). Такое предположение позволяет избавиться от многих технических сложностей.

Кроме того, естественно предположить, что чем больше усилия, тем более высоким должен быть результат. Поэтому будем предпо-

[3] Примером подобной ситуации является рынок страховых услуг. Если условия страхования актуарно справедливы, страхователю выгодно заключить контракт на величину, равную потенциальным потерям. Однако, застраховав имущество, многие начинают использовать его менее аккуратно, тем самым увеличивая риск его потери или порчи, т. е. риск наступления страхового случая. Это связано с ненаблюдаемостью усилий по сохранению имущества и невозможностью обусловить плату уровнем этих усилий. Подобные ситуации известны в экономической теории под названием моральный риск. Ясно, что страховой компании выгодно стимулировать своих клиентов относиться к застрахованному имуществу более бережно, однако, как правило, это можно сделать только за счет неполного страхования.

[4] См., напр., S. A. Ross • The Economic Theory of Agency: The Principal's Problem, *American Economic Review* **63** (1973): 134–139, а также S. J. Grossman and O. D. Hart • An Analysis of the Principal-Agent Problem, *Econometrica* **51** (1983): 7–46.

[5] В соответствии с моделью принятия решений при риске можно предположить, что $\tilde{y}$ — это случайная величина, заданная на состояниях мира $s \in S$.

[6] Мы не будем давать здесь точное определение носителя распределения. Скажем только, что если плотность распределения положительна на интервале (a, b), то носителем является соответствующий замкнутый интервал $[a, b]$.

лагать, что распределение $F_x(\cdot)$ «сдвигается вправо» при росте x, т. е.

$$F_{x_1}(y) \geqslant F_{x_2}(y) \text{ при } x_1 < x_2,$$

и хотя бы для одного значения y неравенство строгое. Это означает[7], что F_{x_2} строго *стохастически доминирует* F_{x_1} при $x_1 < x_2$. (Это свойство мы в дальнейшем конкретизируем для случая дискретных распределений.) Из этого предположения следует, что чем больше усилия, тем больше ожидаемый доход:

$$\mathsf{E}_{x_1} \tilde{y} < \mathsf{E}_{x_2} \tilde{y} \text{ при } x_1 < x_2.$$

Математическое ожидание берется по распределению F_x, следовательно, оно зависит от того, какие действия x выбрал работник. Соответственно оператор математического ожидания мы будем записывать в виде E_x. Предполагается, что наниматель нейтрален к риску, т. е. его функция выигрыша — ожидаемая прибыль. Другими словами, наниматель стремиться максимизировать величину

$$\mathsf{E}_x \Pi = \mathsf{E}_x(\tilde{y} - \tilde{w}),$$

где $\tilde{w}$ — оплата по контракту, которая, вообще говоря, является случайной величиной.

Работник максимизирует $U = \mathsf{E}_x u$ — математическое ожидание элементарной функции полезности $u(x, w)$, которая, как и раньше, зависит от объема усилий x и от вознаграждения w.

Условие участия, по аналогии со случаем полной информации, состоит в том, что работник соглашается на работу по контракту только в том случае, если его ожидаемая полезность при этом не меньше, чем его резервная полезность u_0:

$$\mathsf{E}_x u \geqslant u_0.$$

Для упрощения анализа чаще всего рассматривают частные случаи, когда функция $u(x, w)$ имеет простой вид. Две самых популярных спецификации функции полезности работника имеют следующий вид:

$$u(x, w) = v(w - c(x))$$

и

$$u(x, w) = v(w) - c(x),$$

где $v(\cdot)$ — возрастающая вогнутая функция, а $c(\cdot)$ — возрастающая выпуклая функция. Оба типа функции сепарабельны по w и x (пер-

[7] Более точно, речь идет о *стохастическом доминировании первого порядка.*

вая в каком-то смысле еще и квазилинейна по зарплате w) и включают функцию $v(\cdot)$, позволяющую моделировать отношение работника к риску (риск может быть связан с тем, что получаемая им оплата w является случайной величиной). Нейтральный к риску работник будет иметь линейную возрастающую функцию $v(\cdot)$, которую без потери общности можно считать равной $v(z) = z$. Поэтому мы будем называть работника нейтральным к риску, если

$$u(x, w) = w - c(x).$$

Как правило, предполагается, что работник не склонен к риску, т. е. функция $v(\cdot)$ вогнута[8]. Работник является рискофобом, если функция $v(\cdot)$ строго вогнута. При этом если $v(\cdot)$ дифференцируема, то она имеет положительную убывающую производную.

Поскольку действия x ненаблюдаемы, то оплата по контракту не может быть обусловлена предпринимаемыми работником действиями (усилиями) x. В предположении, что наблюдаемыми являются результаты $\tilde{y}$ этих усилий, рассмотрим модель контрактных отношений, при которых оплата по контракту обуславливается полученными результатами (как сигналами относительно уровня усилий). Поэтому в рассматриваемой модели с ненаблюдаемыми действиями контракт — это функция вида $w = w(y)$.

Как и ранее, будем предполагать, что наниматель, выбирая контракт, знает функцию полезности и резервную полезность работника, а работник принимает контракт как данный. Таким образом, модель представляет собой динамическую игру. Последовательность ходов в этой игре следующая.

① Наниматель предлагает контракт $w(\cdot)$.

② Работник выбирает, работать ему или нет.

③ Работник, если он подписал контракт, выбирает уровень усилий x.

④ «Природа» при данном x по распределению F_x случайным образом «генерирует» $\tilde{y}$.

Соответствующее дерево игры изображено на Рис. 14.9. Контракт задает дележ дохода y между нанимателем и работником и тем самым их выигрыши.

Для поиска решения этой модели можно воспользоваться обратной индукцией. При заданном контракте $w(\cdot)$ оптимальный для ра-

[8] Ясно, что функция $v(\cdot)$ моделирует отношение к риску только с точки зрения w, но не с точки зрения x. Но для нас это несущественно, поскольку в данной модели усилия x не являются случайными.

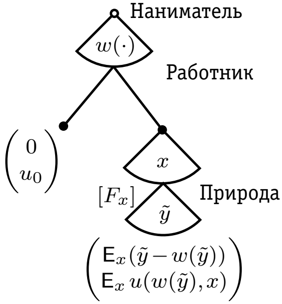


Рис. 14.9. *Представление модели найма с ненаблюдаемыми действиями в виде дерева*

ботника уровень усилий является решением следующей задачи:

$$U = \mathsf{E}_x\, u(w(\tilde{y}), x) \to \max_{x \in X}.$$

С учетом этого задача поиска оптимального для нанимателя контракта имеет следующий вид:

$$\mathsf{E}_{x^*}\, \Pi = \mathsf{E}_{x^*}(\tilde{y} - w(\tilde{y})) \to \max_{x^*, w(\cdot)}$$

$$x^* \in \operatorname*{argmax}_{x \in X} \mathsf{E}_x\, u(w(\tilde{y}), x)$$

(ограничение совместимости стимулов),

$$\mathsf{E}_{x^*}\, u(w(\tilde{y}), x^*) \geqslant u_0$$

(ограничение участия).

Объяснение того, почему задача нанимателя включает выбор усилий x^*, такое же, как для модели с наблюдаемыми действиями: работник предполагается «благожелательным» по отношению к нанимателю в том смысле, что из равновыгодных для себя действий готов выбрать выгодные для нанимателя[9].

Проанализируем сначала *модель с наблюдаемыми действиями*, но *со случайными результатами*. Это даст нам «идеальную» точку отсчета для анализа модели с ненаблюдаемыми действиями. При этом, как и выше (в ситуации, когда результат однозначно определяется

[9] Это предположение базируется на том, что наниматель (при выполнении предположения о стохастическом доминировании) может, доплатив работнику, простимулировать благожелательные действия за счет сколь угодно малых потерь прибыли.

выбором уровня усилий), рассмотрим вспомогательную задачу, в которой определятся оптимальные для нанимателя значения x и w при ограничении участия:

$$\mathsf{E}_x(\tilde{y} - w) \to \max_{x,w}$$
$$\mathsf{E}_x\, u(w, x) \geqslant u_0.$$

Поскольку в рассматриваемой задаче величины w и x не являются случайными, $u(w, x)$ тоже не является случайной. Таким образом, задача сводится к следующей:

$$\mathsf{E}_x\, \tilde{y} - w \to \max_{x,w}$$
$$u(w, x) \geqslant u_0.$$

(Как несложно понять, данная задача характеризует не только контракты, идеальные с точки зрения нанимателя, но и Парето-оптимальные состояния, если u_0 рассматривать в качестве параметра.)

Здесь мы рассматриваем уровень оплаты w как фиксированный (не случайный). Это не приводит к потере общности. Действительно, если от произвольной случайной оплаты $\tilde{w}$ перейти ее безрисковому эквиваленту, то ожидаемая прибыль не уменьшится (поскольку наниматель нейтрален к риску, а работник не склонен к риску), в то время как ожидаемая полезность останется на прежнем уровне. Поэтому достаточно рассматривать только случаи, когда плата не случайная. Если же работник — рискофоб (характеризуется строгим неприятием риска), то безрисковый эквивалент случайной оплаты $\tilde{w}$ меньше $\mathsf{E}_x\, \tilde{w}$, поэтому указанное изменение приводит к росту прибыли.

При

$$u(x, w) = v(w) - c(x),$$

выражая w из ограничения участия, получаем следующую задачу:

$$\mathsf{E}_x\, \tilde{y} - v^{-1}(c(x) + u_0) \to \max_x . \qquad (\Omega)$$

Как и ранее, обозначим соответствующую «идеальную» ситуацию $(\hat{x}, \hat{w})$. Если из задачи (Ω) найден эффективный уровень усилий $\hat{x}$, то соответствующая плата должна быть равна

$$\hat{w} = v^{-1}(c(\hat{x}) + u_0).$$

Фактически анализ здесь повторяет анализ при однозначности результата с заменой $y(x)$ на $\mathsf{E}_x\, \tilde{y}$. Как и при при однозначности результата, указанную идеальную ситуацию можно реализовать бесконечным числом способов в виде контракта $w(\cdot)$, зависящего от усилий x.

(Например, можно использовать пакетный контракт.) Кривая $w(x)$ должна лежать под кривой $v^{-1}(c(x)+u_0)$ и касаться ее в точке $(\hat{x}, \hat{w})$. При этом достигается Парето-оптимум с точки зрения соответствующих целевых функций: ожидаемой прибыли $\mathsf{E}_x(\tilde{y} - \tilde{w})$ и ожидаемой полезности $\mathsf{E}_x\, v(\tilde{w}) - c(x)$.

Предположим теперь, что *усилия ненаблюдаемы*. Поскольку оплату по контракту можно обуславливать только наблюдаемыми величинами, то в данной ситуации приходится обуславливать величину оплаты результатом[10] y. Таким образом, из всех рассмотренных выше контрактов (для модели с наблюдаемыми действиями) можно реализовать только линейный по результатам контракт

$$w(y) = a + by,$$

который, как мы видели, является оптимальным по Парето в случае, если это контракт с полной ответственностью, т. е.

$$w(y) = y - A.$$

Покажем, что наилучший для нанимателя контракт вида $w(y)$ является оптимальным по Парето лишь при ограничительных предположениях относительно отношения к риску работника. Об этом свидетельствуют следующие два утверждения.

Теорема 14.1:

Если работник нейтрален к риску, то наилучший для нанимателя контракт с полной ответственностью является Парето-оптимальным и эквивалентен с точки зрения ожидаемой прибыли и ожидаемой полезности идеальному контракту $(\hat{x}, \hat{w})$. ┘

Доказательство: Ожидаемая прибыль в данной ситуации равна $\mathsf{E}_x(\tilde{y} - \tilde{y} - A) = A$, а ожидаемая полезность равна $\mathsf{E}_x(\tilde{y} - A) - c(x) = \mathsf{E}_x\, \tilde{y} - A - c(x)$.

Задача максимизации ожидаемой полезности по x имеет вид

$$\mathsf{E}_x\, \tilde{y} - A - c(x) \to \max_{x \in X}.$$

Она эквивалентна задаче (Ω), поскольку при нейтральности к риску $v^{-1}(w) = w$. Таким образом, работник выберет эффективные усилия $\hat{x}$. Параметр A наилучшего для нанимателя контракта с полной ответственностью находится из условия участия (полезность равна u_0):

$$A = \mathsf{E}_{\hat{x}}\, \tilde{y} - c(\hat{x}) - u_0.$$

[10] Если, конечно, нет какого-либо другого сигнала, наблюдаемого нанимателем.

При этом ожидаемая прибыль равна $\mathsf{E}_{\hat{x}}\, \tilde{y} - c(x) - u_0$, т. е. она такая же, какая достигается в задаче (Ω). ■

Очевидно, что описанный в теореме контракт[11] является не только оптимальным по Парето, но и оптимальным для нанимателя среди всех возможных контрактов, и невозможность наблюдать усилия в данном случае не играет роли, поскольку этот контракт решает задачу максимизации ожидаемой прибыли при единственном ограничении — ограничении участия. (Это Парето-оптимальное состояние, в котором один из игроков получает минимальный выигрыш. Следовательно, другой игрок получает максимально возможный выигрыш.) Таким образом, при нейтральности работника к риску модель фактически сводится к модели с наблюдаемыми действиями. Но, по существу, это единственная содержательно интересная ситуация, в которой ненаблюдаемость усилий не имеет значения, что и показывает следующее утверждение.

Теорема 14.2:

Если работник — рискофоб, и допустимый контракт $w(\cdot)$ таков, что $\tilde{w} = w(\tilde{y})$ — нетривиальная случайная величина, то соответствующая ситуация не является оптимальной по Парето и идеальной для нанимателя, поскольку можно увеличить ожидаемую прибыль, не уменьшая ожидаемой полезности. ⌟

Доказательство: Действительно, в данной ситуации можно случайную оплату $\tilde{w}$ заменить на ее безрисковый эквивалент. При этом по определению ожидаемая полезность работника не изменится, ожидаемая же прибыль вырастет (у рискофоба безрисковый эквивалент нетривиальной случайной оплаты строго меньше математического ожидания такой оплаты). ■

Из этого утверждения следует, что *контракт с полной ответственностью в случае работника-рискофоба не будет Парето-оптимальным и идеальным для нанимателя*, поскольку $\tilde{w} = \tilde{y} - A$ — нетривиальная случайная величина. Это связано с тем, что нанимателя заинтересован в известной степени застраховать такого работника.

Другое следствие состоит в том, что если при ненаблюдаемости действий работник является рискофобом, то Парето-оптимальность

[11] Ясно, что то же самое верно и для любого другого контракта, который приводит к тем же ожидаемым выигрышам.

достижима только в случае, когда плата $w(\tilde{y})$ фиксирована, не зависит от результата $\tilde{y}$. Ясно, что такой контракт не является стимулирующим, и работник, работая по нему, будет делать наименьшие возможные усилия $x = \min(X)$ (если соответствующий минимум существует). Следовательно, *Парето-оптимальность достижима, только если среди эффективных контрактов есть контракты с минимальными возможными усилиями*, т. е. только в содержательно неинтересном случае, когда нанимателю нет смысла стимулировать работника, достаточно дать ему минимальную плату, обеспечивающую резервную полезность.

Как только что указано, при нестимулирующем контракте работник будет делать наименьшие возможные усилия. Верно и обратное: в том случае, когда наниматель стремится побудить работника-рискофоба делать наименьшие усилия $x = \min(X)$, он заинтересован полностью застраховать работника (т. е. платить ему постоянную сумму, не зависящую от результатов). Рассуждения здесь такие же как в Теореме 14.2. Если бы это было не так, то можно было бы увеличить прибыль, не меняя полезности работника (оставив ее на самом низком, резервном, уровне).

В общем случае оптимальный контракт — это компромисс между двумя противоположными целями, которые преследует наниматель: целью *стимулирования* работника выполнять выгодные для нанимателя действия и целью *страхования* работника от риска.

Заметим, что предположение о том, что носитель распределения $\tilde{y}$ не зависит от величины усилий x является существенным для проводимого здесь анализа. Так, в крайнем случае зависимости носителя распределения $\tilde{y}$ от усилий — когда носители при разных действиях не пересекаются — по результату можно однозначно установить, предпринимал ли работник те или иные усилия. В этом случае усилия оказывается наблюдаемыми косвенным образом, и оптимальный контракт оказывается тем же, что и в случае наблюдаемых усилий.

14.2.2 Дискретный вариант модели со скрытыми действиями

Рассмотрим модель в дискретном случае: конечное число возможных действий (x_a, $a = 1, \ldots, k$) и конечное число возможных результатов (y_s, $s = 1, \ldots, m$). Так как сам по себе уровень x не имеет значения, то вместо x мы будем использовать a и обозначим $c(x_a) = c_a$, предполагая, что усилия x_a растут с ростом индекса a. Каждое значение выбранных работником усилий a приводит к случайному ре-

Таблица 14.1. *Представление дискретного варианта модели со скрытыми действиями в виде таблицы*

	y_1	$\cdots$	y_m	
$a = 1$	μ_{11}	$\cdots$	μ_{1m}	c_1
$\vdots$	$\vdots$	$\{\mu_{as}\}$	$\vdots$	$\vdots$
$a = k$	μ_{k1}	$\cdots$	μ_{km}	c_k

зультату $\tilde{y}$, который описывается следующим дискретным распределением:

y_1	y_2	$\cdots$	y_m
μ_{a1}	μ_{a2}	$\cdots$	μ_{am}

Здесь $\mu_{as} > 0$ — вероятность s-го результата в случае, когда работник выбрал усилия a. По определению вероятностей $\sum_s \mu_{as} = 1$. Мы будем предполагать, что все y_s различны и возрастают по s. По предположению, распределение сдвигается вправо при росте усилий (вероятность более высоких результатов возрастает с ростом усилий), т. е.

$$\sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{as} > \sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{bs} \ \forall \bar{s} = 1, \ldots, m-1, \ \forall a < b.$$

Исходные данные для дискретной модели (возможные уровни усилий, уровни результатов и вероятности) можно представить в виде таблицы (Таблица 14.1).

//?? Заголовок длиннее таблицы

Ниже мы будем предполагать, что элементарная функция полезности имеет вид[12]:

$$u(a, w) = v(w) - c_a.$$

Контракт задается величинами $w_s = w(y_s)$ — каждому возможному результату y_s контракт сопоставляет уровень оплаты w_s. Таким образом, контракт представляет собой вектор $\mathbf{w} = \{w_s\}$. С другой стороны, с учетом вероятностей μ_{as} это дискретная случайная величина $\tilde{w}$.

[12] Функция полезности несколько иного вида (в каком-то смысле более естественная) рассмотрена в задаче 14.28 на с. 941.

Ожидаемая полезность (как функция от a и $\mathbf{w}$) равна

$$U(a,\mathbf{w}) = \mathsf{E}_a[v(\tilde{w}) - c_a] = \sum_{s=1}^{m} \mu_{as} v(w_s) - c_a,$$

а ожидаемая прибыль равна

$$\Pi^e(a,\mathbf{w}) = \mathsf{E}_a\,\Pi = \mathsf{E}_a(\tilde{y} - \tilde{w}) = \sum_{s=1}^{m} \mu_{as}(y_s - w_s).$$

Задача нанимателя имеет следующий вид:

$$\Pi^e(a^*,\mathbf{w}) \to \max_{a^*,\mathbf{w}}$$
$$U(a^*,\mathbf{w}) \geqslant U(a,\mathbf{w}),\ a = 1,\dots,k$$
$$\text{(ограничение совместимости стимулов)},$$
$$U(a^*,\mathbf{w}) \geqslant u_0$$
$$\text{(ограничение участия)}.$$

Поскольку число возможных усилий конечно, то эту задачу, вообще говоря, можно решать перебором. Для этого, задавшись конкретным a^*, следует найти контракт $\mathbf{w} = \mathbf{w}(a^*)$, минимизирующий ожидаемый уровень оплаты при условии, что при данной оплате работник предпочтет (выберет) уровень усилий a^*. Обозначим ожидаемый уровень оплаты

$$w^e(a,\mathbf{w}) = \mathsf{E}_a\,\tilde{w} = \sum_{s=1}^{m} \mu_{as} w_s.$$

Тогда соответствующая вспомогательная задача имеет следующий вид:

$$w^e(a^*,\mathbf{w}) \to \min_{\mathbf{w}}$$
$$U(a^*,\mathbf{w}) \geqslant U(a,\mathbf{w}),\ a = 1,\dots,k,$$
$$U(a^*,\mathbf{w}) \geqslant u_0.$$

В этой задаче искомыми переменными являются только уровни оплаты для различных результатов, т. е. величины $w_s = w_s(a^*)$. Соответствующее максимальное значение ожидаемой прибыли равно $\Pi^e(a^*,\mathbf{w}(a^*))$. Вычислив для каждого возможного уровня усилий $a^* = 1,\dots,k$ соответствующие значения прибыли, можно найти такое усилие, при котором ожидаемая прибыль $\Pi^e(a^*,\mathbf{w}(a^*))$ достигает максимума. Если вспомогательная задача не имеет допустимых решений, то не существует контрактов, обеспечивающих такой уровень усилий, т. е. усилия оказываются нереализуемыми. Поэтому оптимум ищется только по реализуемым усилиям, множество которых всегда не пусто (усилия с минимальными издержками всегда реализуемы).

Здесь элементарная функция полезности имеет специальный вид

$$u(a, w) = v(w) - c_a,$$

поэтому данную задачу можно свести к *задаче выпуклого программирования* (минимизация выпуклой функции на выпуклом многогранном множестве) путем замены переменных $v_s = v(w_s)$. Как ограничение участия, так и ограничение совместимости стимулов будут в новых переменных линейными, а ожидаемая прибыль — вогнутой функцией переменных v_s:

$$\Pi^e(a, \mathbf{v}) = \sum_{s=1}^{m} \mu_{as}(y_s - f(v_s)),$$

где через $f(\cdot)$ мы обозначили $v^{-1}(\cdot)$. (Так как $v(\cdot)$ вогнута, то $f(\cdot)$ выпукла, а $-f(\cdot)$ вогнута.) Область определения переменных v_s совпадает с областью значений функции $v(\cdot)$, и ее описание должно в явном виде присутствовать в формулировке соответствующей задачи. В дальнейшем для упрощения рассуждений мы не будем учитывать такие ограничения.

Заметим, что если работник является рискофобом, то решение одной из задач тривиально, а именно задачи, соответствующей наименьшему уровню усилий ($a^* = 1$; предполагаем, что тягость усилий c_a тем больше, чем больше a). Как уже говорилось, в этом случае (как и при наблюдаемости усилий) следует установить постоянную оплату, не зависящую от усилий. Обозначим ее через $\bar{w}$. Несложно понять, что такая оплата является решением уравнения $v(\bar{w}) - c_1 = u_0$, т. е. $\bar{w} = f(u_0 + c_1)$.

Дискретный вариант модели найма с двумя возможными уровнями усилий

Предположим, что работнику доступны только два действия (два уровня усилий). Обозначим их через H и L (высокий и низкий уровень усилий соответственно). По предположению о том, что распределение сдвигается вправо при росте усилий, имеем:

$$\sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{Ls} > \sum_{s=1}^{\bar{s}} \mu_{Hs} \ \forall \bar{s} = 1, \ldots, m-1.$$

Напомним, что при конструировании оптимального контракта сначала определяются величины $\Pi^e(L, \mathbf{w}(L))$, $\Pi^e(H, \mathbf{w}(H))$, а затем выбирается усилие $a = L$, $a = H$ (и соответствующий ему контракт), при котором величина $\Pi^e(a, \mathbf{w}(a))$ является максимальной.

Охарактеризуем оптимальный при уровне усилий a $(a = L, H)$ контракт $\mathbf{w}(a)$.

Если работник совершает действия a, то ожидаемая прибыль нанимателя равна

$$\sum_{s=1}^{m} \mu_{as}(y_s - w_s).$$

(Как и ранее, предполагаем, что работник является рискофобом, а наниматель нейтрален к риску.)

Ожидаемая полезность работника в случае, когда он выбирает действие a, будет равна

$$\sum_{s=1}^{m} \mu_{as} v(w_s) - c_L,$$

Тогда, в случае, если $a = L$, условие совместимости стимулов имеет следующий вид:

$$\sum_{s=1}^{m} \mu_{Ls} v(w_s) - c_L \geqslant \sum_{s=1}^{m} \mu_{Hs} v(w_s) - c_H,$$

а условие участия

$$\sum_{s=1}^{m} \mu_{Ls} v(w_s) - c_L \geqslant u_0,$$

Соответствующая вспомогательная задача — минимизировать ожидаемую оплату по контракту (максимизировать ожидаемую прибыль)

$$\sum_{s=1}^{m} \mu_{Ls} w_s \to \min_{\mathbf{w}}$$

(соответственно $\sum_{s=1}^{m} \mu_{Ls}(y_s - w_s) \to \max_{\mathbf{w}}$) при указанных условиях совместимости стимулов и участия. Аналогичную задачу можно сформулировать и для уровня усилий H.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда возможны всего два результата (исхода): y_1 и y_2. Условие стохастического доминирования (более высокие усилия способствуют более высокому результату) в данном случае принимает вид неравенства $\mu_{H1} < \mu_{L1}$ или, что эквивалентно, $\mu_{H2} > \mu_{L2}$.

Пусть наниматель хочет побудить работника *выбрать низкие усилия* L. Тогда условие совместимости стимулов имеет вид

$$\mu_{L1}v_1 + \mu_{L2}v_2 - c_L \geqslant \mu_{H1}v_1 + \mu_{H2}v_2 - c_H.$$

Учитывая, что $\mu_{H2} > \mu_{L2}$, это неравенство можно переписать в виде

$$v_2 \leqslant \frac{\mu_{L1} - \mu_{H1}}{\mu_{H2} - \mu_{L2}}v_1 + \frac{c_H - c_L}{\mu_{H2} - \mu_{L2}}.$$

Поскольку сумма вероятностей равна единице ($\mu_{L1} + \mu_{L2} = 1$, $\mu_{H1} + \mu_{H2} = 1$), то

$$v_2 \leqslant v_1 + \frac{c_H - c_L}{\mu_{H2} - \mu_{L2}}.$$

Второе слагаемое здесь положительно при $c_L < c_H$. Таким образом, линия совместимости стимулов в координатах (v_1, v_2) — это прямая, параллельная биссектрисе и проходящая выше нее. Допустимые точки лежат ниже этой линии.

Ограничение участия

$$\mu_{L1}v_1 + \mu_{L2}v_2 - c_L \geqslant u_0$$

можно записать в виде

$$v_2 \geqslant \frac{u_0 + c_L - \mu_{L1}v_1}{\mu_{L2}}.$$

В координатах (v_1, v_2) оно задается прямой, наклон которой равен $-\mu_{L1}/\mu_{L2}$. Допустимые точки лежат выше этой прямой. Это одна из линий безразличия работника. (Все линии безразличия работника имеют одинаковый наклон $-\mu_{L1}/\mu_{L2}$.)

Чтобы записать задачу нанимателя в терминах полезности, обозначим, как и выше, через $f(\cdot)$ функцию, обратную к $v(\cdot)$, т. е. такую функцию, что $f(v_s) = w_s$:

$$\mathsf{E}_L \tilde{\Pi} = \mu_{L1}(y_1 - f(v_1)) + \mu_{L2}(y_2 - f(v_2)).$$

Можно в координатах (v_1, v_2) рассмотреть линии уровня нанимателя (соответствующие постоянной ожидаемой прибыли или, что эквивалентно, постоянной ожидаемой оплате). Эти кривые безразличия

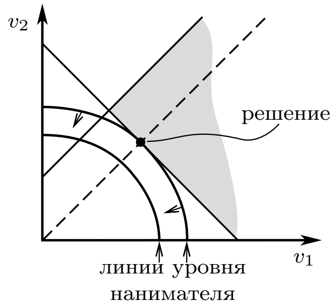


Рис. 14.10. *Стимулирование низких усилий*

выпуклы вправо вверх, множество лучших точек лежит под кривой безразличия.

Наклон кривой безразличия нанимателя равен

$$\frac{\partial(\mathsf{E}_L\,\tilde{\Pi})/\partial v_1}{\partial(\mathsf{E}_L\,\tilde{\Pi})/\partial v_2} = -\frac{\mu_{L1}f'(v_1)}{\mu_{L2}f'(v_2)} = -\frac{\mu_{L1}v'(w_2)}{\mu_{L2}v'(w_1)}.$$

Кривая безразличия нанимателя касается прямой, определяемой условием участия, в точке, в которой

$$-\frac{\mu_{L1}v'(w_2)}{\mu_{L2}v'(w_1)} = -\frac{\mu_{L1}}{\mu_{L2}}.$$

Следовательно, $v'(w_1) = v'(w_2)$, что при убывании $v'(\cdot)$ означает, что точка касания соответствует фиксированной оплате $w_1 = w_2$, т. е. лежит на биссектрисе.

Поскольку в случае, когда $a = L$, на диаграмме в координатах (v_1, v_2) линия, соответствующая ограничению совместимости стимулов, лежит выше биссектрисы, то ограничение совместимости стимулов неактивно, а ограничение участия активно. Таким образом, оптимальное решение лежит на биссектрисе, т. е. $v_1 = v_2$. Оно находится как точка пересечения прямой, задающей ограничение участия, и биссектрисы. В оптимальной точке кривая безразличия нанимателя касается прямой, задающей ограничение участия. (См. Рис. 14.10.)

Таким образом, при $a = L$ оплата по контракту должна быть фиксированной: $w_1 = w_2 = \bar{w}$ (контракт с полным страхованием работника) и должна обеспечивать ему резервный уровень полезности. Это соответствует сделанным ранее выводам.

В своих рассуждениях мы опирались на то, что $c_L < c_H$. Аналогичным образом можно показать, что $w_1 = w_2 = \bar{w}$ и в случае, когда $c_L = c_H$. Обратно, если оплата по контракту не зависит от результатов, из условия совместимости стимулов следует, что

$$\bar{v} - c_L \geqslant \bar{v} - c_H$$

или

$$c_H \geqslant c_L,$$

Из этого можно сделать вывод, что оплата по контракту, принуждающему к действиям L, будет фиксированной в тех и только тех случаях, когда действия типа L требуют от работника не бо́льших затрат, чем действия типа H (т. е. фактически являются для него выгодными сами по себе).

Проанализируем теперь случай, когда наниматель стремится побудить работника *выбрать высокий уровень усилий* H. Условие совместимости стимулов в этом случае записывается в виде

$$\mu_{H1}v_1 + \mu_{H2}v_2 - c_H \geqslant \mu_{L1}v_1 + \mu_{L2}v_2 - c_L.$$

Множество допустимых по этому условию контрактов имеет ту же границу, что и при L (она параллельна биссектрисе и лежит выше ее), но допустимые точки лежат выше границы:

$$v_2 \geqslant v_1 + \frac{c_H - c_L}{\mu_{H2} - \mu_{L2}}.$$

Ограничение участия

$$\mu_{H1}v_1 + \mu_{H2}v_2 - c_H \geqslant u_0$$

задается прямой

$$v_2 = \frac{u_0 + c_H - \mu_{H1}v_1}{\mu_{H2}}.$$

Ее наклон равен $-\mu_{H1}/\mu_{H2}$. Так как точка касания соответствующих кривых безразличия работника и нанимателя лежит на биссектрисе, т. е. она в рассматриваемом случае не принадлежит множеству допустимых контрактов, то ограничение совместимости стимулов оказывается активным.

В предположении, что активным является и ограничение участия, решение представляется точкой пересечения двух соответствующих прямых (см. Рис. 14.11). Линии уровня нанимателя в точке пересечения с биссектрисой имеют тот же наклон $-\mu_{H1}/\mu_{H2}$, что и линия участия (это проверяется так же, как для L).

Если нанимателю выгодно стимулировать высокий уровень усилий, то результат не будет оптимальным по Парето (см. Рис. 14.12).

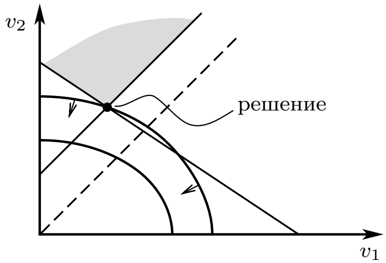


Рис. 14.11. *Стимулирование высоких усилий*

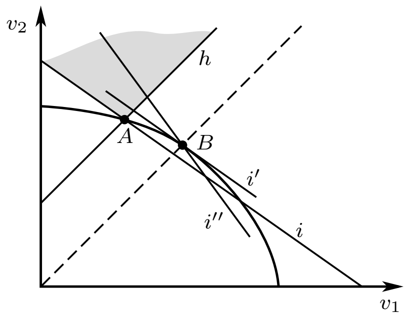


Рис. 14.12. *Неоптимальность контракта, стимулирующего высокие усилия*

Оптимальный для нанимателя контракт задается точкой A, которая лежит на пересечении линии совместимости стимулов h и линии участия i. Это не оптимально по Парето, так как точка B лежит на той же кривой безразличия нанимателя, а для работника она дает более высокую ожидаемую полезность, чем A (лежит на более высокой линии безразличия работника i'). Точка B является Парето-оптимальной (кривые безразличия касаются), но ее нельзя реализовать из-за условия совместимости стимулов. Если наниматель изменит контракт так, что работнику станет доступна точка B, то работнику будет выгодно изменить свои действия с H на L. Действительно, на диагонали выполняется неравенство

$$\mu_{L1}v + \mu_{L2}v - c_L > \mu_{H1}v + \mu_{H2}v - c_H.$$

При переходе от H к L карты кривых безразличия работника и нанимателя в координатах (v_1, v_2) изменяются, так как изменяются веро-

Таблица 14.2. *Данные к Примеру 14.1*

	$A\colon\ y_A = -5$	$B\colon\ y_B = 25$	
$a = L$	$2/3$	$1/3$	$c_L = 1$
$a = H$	$1/3$	$2/3$	$c_H = 2$

ятности. Соответствующей точке B линией безразличия работника будет i'', с более крутым наклоном ($\mu_{L1}/\mu_{L2} > \mu_{H1}/\mu_{H2}$).

Таким образом, при стимулировании высокого уровня усилий наниматель должен ограничивать полезность работника, чтобы тот не выбрал еще бо́льшую в ущерб интересам нанимателя.

Пример 14.1

Предположим, что $v(w) = \sqrt{w+5}$. Резервная полезность равна $u_0 = 2$. При этом возможны два уровня усилий — L (низкий) и H (высокий), и два исхода — A и B. Вероятности, доходы и издержки, заданы Таблицей 14.2. Найдем оптимальный контракт.

Заметим, что ожидаемый доход составляет 5 при низком и 15 при высоком уровне усилий.

Если наниматель стремится обеспечить *низкий уровень усилий*, то, как известно, контракт обуславливает одинаковую оплату вне зависимости от результата. Условие совместимости стимулов при этом выполняется вне зависимости от величины такой оплаты. Поэтому существенным оказывается только условие участия. Действительно, оплата в соответствии с оптимальным контрактом в этом случае определяется как решение следующей задачи:

$$2/3w_A + 1/3w_B \to \min_{w_A, w_B}$$
$$2/3\sqrt{w_A+5} + 1/3\sqrt{w_A+5} - 1 \geqslant u_0 = 2,$$
$$2/3\sqrt{w_A+5} + 1/3\sqrt{w_A+5} - 1 \geqslant 1/3\sqrt{w_A+5} + 2/3\sqrt{w_A+5} - 2,$$

или, с использованием обозначение $v_s = \sqrt{w_s+5}$,

$$2/3(v_A^2 - 5) + 1/3(v_B^2 - 5) \to \min_{v_A, v_B}$$
$$2/3v_A + 1/3v_B - 1 \geqslant 2 \quad (\text{или } v_B \geqslant 9 - 2v_A),$$
$$2/3v_A + 1/3v_B - 1 \geqslant 1/3v_A + 2/3v_B - 2 \quad (\text{или } v_B \leqslant v_A + 3).$$

Заметим, что если решение рассматриваемой задачи с отброшенным ограничением совместимости стимулов будет удовлетворять этому ограничению, то оно будет и решением исходной задачи.

Таким образом, будем решать задачу минимизации ожидаемой оплаты при ограничении участия $v_B \geqslant 9 - 2v_A$. Поскольку целевая функция монотонно возрастает по переменным v_A, v_B, то это единственное ограничение будет активным. Поэтому после подстановки $v_B = 9 - 2v_A$ сведем данную задачу к следующей задаче безусловной оптимизации:

$$2/3(v_A^2 - 5) + 1/3((9 - 2v_A)^2 - 5) \to \min_{v_A}.$$

Решение удовлетворяет условию первого порядка

$$4/3v_A - 4/3(9 - 2v_A) = 0,$$

откуда $v_A = 3$ и $v_B = 3$. Видим, что оплата не зависит от результата и равна $w_A = w_B = 4$. Ограничение совместимости стимулов выполнено всегда, когда оплата не зависит от результата, в том числе и в данном случае.

Соответствующая этому уровню усилий ожидаемая прибыль равна 1, поскольку ожидаемый доход равен 5, а ожидаемая оплата равна 4.

Вычислим теперь ожидаемую прибыль нанимателя, когда он стимулирует *высокий уровень усилий*. Оплата в соответствии с оптимальным контрактом в этом случае определяется как решение следующей задачи:

$$\begin{gathered}
1/3(v_A^2 - 5) + 2/3(v_B^2 - 5) \to \min_{v_A, v_B} \\
1/3v_A + 2/3v_B - 2 \geqslant 2 \quad (\text{или } v_B \geqslant 6 - v_A/2), \\
1/3v_A + 2/3v_B - 2 \geqslant 2/3v_A + 1/3v_B - 1 \quad (\text{или } v_B \geqslant v_A + 3).
\end{gathered}$$

Здесь ограничение совместимости стимулов будет активным. Если бы это было не так, то, как было установлено ранее, оплата по контракту не зависела бы от результатов (т. е. $v_A = v_B$), но тогда ограничение совместимости стимулов $v_B \geqslant v_A + 3$ не могло бы выполняться. Таким образом, $v_B = v_A + 3$, и поэтому задача сводится к следующей:

$$\begin{gathered}
1/3(v_A^2 - 5) + 2/3((v_A + 3)^2 - 5) \to \min_{v_A} \\
v_A + 3 \geqslant 6 - v_A/2 \quad (\text{или } v_A \geqslant 2).
\end{gathered}$$

Целевая функция возрастает по v_A, поэтому $v_A = 2$. Отсюда $v_B = 5$, $w_A = -1$, $w_B = 20$. Ожидаемая оплата равна $1/3 \cdot (-1) + 2/3 \cdot 20 = 13$. Ожидаемая прибыль равна $15 - 13 = 2$.

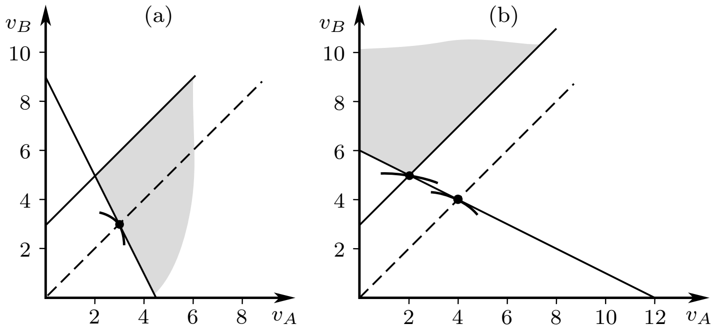


Рис. 14.13. *(a) Низкий уровень усилий: наниматель полностью страхует работника от риска. (b) Высокий уровень усилий: наниматель частично разделяет риск с работником, выплачивая ему низкую зарплату в ситуации A и высокую — в ситуации B*

Таким образом, оптимальный контракт должен стимулировать высокий уровень усилий. Он обеспечивает нанимателю ожидаемую прибыль 2, а работнику оплату -1 в ситуации A и 20 в ситуации B.

Если бы действия были наблюдаемы, то оптимальный контракт также должен был бы стимулировать высокий уровень усилий. В этом случае наниматель полностью застраховал бы работника, так что $v_A = v_B = 4$, $w_A = w_B = 11$. При этом он обеспечил бы себе более высокую ожидаемую прибыль $15 - 11 = 4$, а полезность работника при этом осталась бы на уровне u_0. Этот идеальный для нанимателя контракт недостижим при ненаблюдаемости усилий.

Две диаграммы на Рис. 14.13 иллюстрируют проведенный анализ.

Заметим, что в нашем примере работник в ситуации A выплачивает нанимателю штраф. Если бы существовали ограничения снизу на величину оплаты по контракту (например, законодательные), то следовало бы модифицировать рассуждения, введя в задачи соответствующие ограничения (см. Пример 14.3 ниже). $\triangle$

Проведем теперь анализ задачи в общем случае m исходов при двух уровнях усилий, L и H. Решение вспомогательной задачи минимизации ожидаемой платы при уровне усилий L нам известно (оно такое же, как при наблюдаемых действиях), поэтому проанализируем вспомогательную задачу, соответствующую уровню усилий H: требуется минимизировать ожидаемую оплату при ограничениях участия и совместимости стимулов для уровня усилий H. Лагранжиан этой задачи имеет вид

$$\mathbb{L} = -\sum_{s=1}^{m} \mu_{Hs} w_s + \gamma\left(\sum_{s=1}^{m} \mu_{Hs} v(w_s) - c_H - \sum_{s=1}^{m} \mu_{Ls} v(w_s) + c_L\right) + \\ + \lambda\left(\sum_{s=1}^{m} \mu_{Hs} v(w_s) - c_H - u_0\right).$$

Дифференцируя по плате, соответствующей s-му результату

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial w_s} = -\mu_{Hs} + \gamma(\mu_{Hs} - \mu_{Ls}) v'(w_s) + \lambda \mu_{Hs} v'(w_s),$$

получим следующее условие первого порядка:

$$\frac{1}{v'(w_s)} = \lambda + \gamma\left(1 - \frac{\mu_{Ls}}{\mu_{Hs}}\right).$$

Отсюда следует, что если ограничение совместимости стимулов несущественно, т. е. множитель Лагранжа γ равен нулю, то $v'(w_s) = 1/\lambda$ для всех s, т. е. плата не зависит от результата:

$$w_s = \bar{w} = \text{const} \quad \text{для всех } s.$$

Это может быть только при низком уровне усилий L. Поэтому $\gamma > 0$ и ограничение совместимости стимулов выполняется как равенство.

Покажем, что условие участия также существенно, т. е. множитель Лагранжа λ тоже положителен. Умножим условия первого порядка на соответствующие μ_{Hs}:

$$\frac{\mu_{Hs}}{v'(w_s)} = \lambda \mu_{Hs} + \gamma(\mu_{Hs} - \mu_{Ls}).$$

и сложим для всех значений s:

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\mu_{Hs}}{v'(w_s)} = \lambda \sum_{s=1}^{m} \mu_{Hs} + \gamma \sum_{s=1}^{m} (\mu_{Hs} - \mu_{Ls}) = \lambda.$$

Так как $\mu_{Hs} > 0$ при всех s и $v'(w) > 0$ при всех w, то $\lambda > 0$.

Обозначим через w_0 уровень заработной платы, являющийся решением уравнения

$$\frac{1}{v'(w_0)} = \lambda,$$

где множитель Лагранжа λ соответствует решению вспомогательной задачи. Используя это обозначение, оплату по контракту можно охарактеризовать следующим образом. Если вероятность получения результата s при высоком уровне усилий выше, чем при низком

Таблица 14.3. *Данные к Примеру 14.2*

	$y_1 = 0$	$y_2 = 10$	$y_3 = 20$	
$a = L$	0,2	0,7	0,1	$c_L = 1$
$a = H$	0,1	0,1	0,8	$c_H = 2$

($\mu_{Hs} > \mu_{Ls}$), то работник получает надбавку к базовой плате w_0, т. е. $w_s - w_0 > 0$, причем эта надбавка тем выше, чем выше отношение μ_{Hs}/μ_{Ls}, т. е. чем выше относительная вероятность получения результата s при уровне усилий H. Это отношение в статистике называют отношением правдоподобия.

В том случае, когда вероятность получения результата s при высоком уровне усилий ниже, чем при низком, контракт предусматривает вычет из базовой платы w_0, т. е. $w_s - w_0 < 0$.

Если отношение правдоподобия μ_{Hs}/μ_{Ls} монотонно возрастает, то оплата по контракту оказывается возрастающей функцией результата. В частном случае двух результатов это свойство эквивалентно предположению о стохастическом доминировании: $\mu_{H1} < \mu_{L1}$. В случае трех и более возможных результатов монотонность отношения правдоподобия — более сильное свойство. Хотя из монотонности отношения правдоподобия следует стохастическое доминирование, но обратное, вообще говоря, неверно (см. задачу 14.4 на с. 934).

Приведем пример оптимального контракта с немонотонной оплатой.

Пример 14.2
Пусть $v(w) = \sqrt{w}$, $u_0 = 0$. Возможны два уровня усилий и три результата с вероятностями, доходами и издержками, заданными Таблицей 14.3. Найдем оптимальный контракт.

Если наниматель стремится обеспечить высокий уровень усилий, то условия совместимости стимулов и участия выполняются как равенства, поэтому, используя обозначение $v_s = \sqrt{w_s}$, можно записать

$$0{,}1v_1 + 0{,}1v_2 + 0{,}8v_3 - 2 = 0{,}2v_1 + 0{,}7v_2 + 0{,}1v_3 - 1 = 0.$$

Выражая отсюда v_1 через v_2 и v_3, получим

$$v_2 = \frac{12 - 3v_1}{11}, \quad v_3 = \frac{26 - v_1}{11}.$$

Ожидаемая плата равна

$$\mathsf{E}_H\,\tilde{\mathbf{w}} = 0{,}1v_1^2 + 0{,}1v_2^2 + 0{,}8v_3^2 =$$
$$= \frac{0{,}1}{121}(121v_1^2 + (12 - 3v_1)^2 + 8(23 - v_1)^2).$$

Минимизируя по v_1, получим

$$v_1 = \frac{122}{69},$$

откуда

$$v_2 = \frac{42}{69}, \quad v_3 = \frac{152}{69}.$$

Ожидаемая плата равна примерно 4,23.

Если наниматель стремится обеспечить низкий уровень усилий, то плата не зависит от результата и находится из условия $v(w) - c_L = u_0$. Следовательно, эта фиксированная плата равна 1.

Ожидаемый доход $\mathsf{E}_s\,\tilde{y}$ равен 9 при низких усилиях и 17 при высоких. Таким образом, ожидаемая прибыль выше при стимулировании высоких усилий.

Видим, что плата по оптимальному контракту немонотонна. Это связано с тем, что отношение правдоподобия μ_{Hs}/μ_{Ls} немонотонно $(1/2 > 1/7 < 8)$. △

Рента, связанная с ограниченной ответственностью

Водитель дорогого грузовика обычно получает зарплату заметно бóльшую, чем другие водители той же квалификации, но работающие на менее дорогой технике. Как объяснить этот феномен?

Одно из возможных объяснений состоит в том, что более высокая заработная плата возмещает бóльшую тягость усилий. Альтернативное объяснение состоит в том, что возможные контракты должны удовлетворять дополнительным ограничениям. Так, в описываемом случае хозяин грузовика — наниматель данного водителя — не может в случае поломки грузовика возложить полную материальную ответственность на водителя (условие ограниченной ответственности).

Таким образом, для анализа таких ситуаций следует включить в модель найма дополнительные ограничения.

Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 14.3

Предположим, что работник нейтрален по отношению к риску, т. е.

Таблица 14.4. *Данные к Примеру 14.3*

	y_1	y_2	
$a = L$	$3/4$	$1/4$	$c_L = 0$
$a = H$	$1/4$	$3/4$	$c_H = 10$

$v(w) = w$, и его резервная полезность u_0 равна 1. Остальные параметры модели приводятся в Таблице 14.4.

Контракт должен удовлетворять ограничению участия

$$1/4w_1 + 3/4w_2 - 10 \geqslant 1$$

и совместимости стимулов

$$1/4w_1 + 3/4w_2 - 10 \geqslant 3/4w_1 + 1/4w_2.$$

В оптимуме при стимулировании высоких усилий (читатель может сам подобрать значения y_1 и y_2, при которых соответствующий контракт будет оптимальным для нанимателя) оба ограничения выполняются как равенства. Отсюда, решая систему уравнений, получим

$$w_2 = w_1 + 20,$$

$$1/4w_1 + 3/4(w_1 + 20) - 10 = 1,$$

т. е. $w_1 = -4$ и $w_2 = 16$.

Модифицируем задачу найма, включив в нее дополнительное ограничение положительности выплат (условие ограниченной ответственности), т. е.

$$w_s \geqslant 0 \text{ для всех } s.$$

Решением модифицированной задачи является контракт $w_1 = 0$ и $w_2 = 20$. При этом работник получает ожидаемую полезность

$$\mathsf{E}_H\,\tilde{w} - c_H = 1/4w_1 + 3/4w_2 - 10 = 5,$$

которая выше его резервной полезности. △

Таким образом, здесь можно говорить о ренте, связанной с ограниченной ответственностью, подразумевая под ней превышение ожидаемой полезности работника от контракта над его резервной полезностью.

С формальной точки зрения причина этого эффекта в том, что в рассмотренной выше задаче выбора оптимального контракта ограничение участия не активно. Вместо него (в комбинации с ограничением совместимости стимулов) оказывается активным ограничение

Таблица 14.5. *Данные к задаче 14.5*

ξ	$a = 1$	$a = 2$	Вероятность
1	100	100	1/4
0	α	100	1/2
-1	α	α	1/4

положительности выплат (или, в других постановках, положительности полезности при любом состоянии мира).

Задачи

14.3 Количество производимой работником продукции (y) зависит от его усилий ($x \geqslant 0$) и случайного фактора (ξ), принимающего значения 0 и 100 с равной вероятностью, причем $y = x + \xi$. Произведенная продукция дает предприятию прибыль в размере $2y - w$, где w — плата работнику. Работник имеет элементарную функцию полезности $u(w, x) = w - x^2/100$, а его резервная полезность равна 0. Предприятие назначает плату пропорционально усилиям ($w(x) = \alpha x$), либо пропорционально произведенной продукции ($w(y) = \alpha y$) (если усилия ненаблюдаемы).

(A) Сравните эти два вида контрактов.

(B) Будут ли они Парето-оптимальными?

(C) Каким будет оптимальный контракт в каждой из ситуаций, если на вид функции $w(y)$ нет ограничений?

14.4 Предположим, что число возможных результатов в дискретном варианте модели найма со скрытыми действиями больше двух ($m > 2$), а усилия могут быть низкими (L) либо высокими (H). Покажите, что из монотонности отношения правдоподобия μ_{Hs}/μ_{Ls} следует стохастическое доминирование.

14.5 Предположим, что в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(a, w) = \sqrt{w} - a^2$, где w — плата, a — усилия ($a = 1$ или 2). Доход, приносимый работником, зависит от усилий a и случайного фактора (состояния мира) ξ: $\tilde{y} = y(a, \xi)$. Случайный фактор ξ может принимать три значения (1, 0 и -1), с вероятностями, указанными в Таблице 14.5. В таблице также указан доход в каждом возможном случае. Пусть резервная полезность работника $u_0 = 2{,}5$. Известно, что наниматель установил оплату за доход 100 равной $w(100) = 64$.

(A) Какой уровень усилий стимулирует наниматель?

Таблица 14.6. *Данные к задаче 14.6*

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
	1/3	1/3	1/3
$x = 1$	1	1	120
$x = 4$	1	120	120

Таблица 14.7. *Данные к задаче 14.7*

ξ	$a = 1$	$a = 3$	Вероятность
ξ_1	60	60	1/6
ξ_2	1	60	2/3
ξ_3	1	1	1/6

(в) Какова величина $w(\alpha)$?

14.6 Пусть в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(R, x) = \sqrt{R} - x$, где $R = R(s)$ — плата, зависящая от уровня выручки s. Усилия x могут принимать значения 1 или 4. Функция выручки $s(x, \xi)$ зависит от усилий x и случайного фактора ξ, который может принимать три значения (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с вероятностями $(1/3, 1/3, 1/3)$. Результат действий работника (выручка s) задается Таблицей 14.6. Резервная полезность работника $u_0 = 3$.

(а) Пусть наниматель предлагает работнику плату 9 за выручку 1 и плату 36 за выручку 120. Какой уровень усилий выберет работник? Не находя оптимального контракта в явном виде, определите, является ли данный контракт оптимальным.

(в) Пусть наниматель предлагает работнику одинаковую плату 20 за любую выручку. Ответьте на вопросы предыдущего пункта.

(с) Найдите оптимальный контракт: пару выплат $R_1, R_{120} \geqslant 0$ соответственно за наблюдаемую выручку $s = 1$ или 120.

14.7 Пусть в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(r, a) = \sqrt{r + 4} - a$, где $r = r(h)$ — плата, зависящая от уровня выручки h. Усилия a могут принимать значения 1 или 3. Функция выручки $h(a, \xi)$ зависит от усилий a и случайного фактора ξ, который может принимать три значения (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с вероятностями $(1/6, 2/3, 1/6)$. Результаты действий работника (выручка h) задаются Таблицей 14.7. Резервная полезность работника $u_0 = 4{,}5$.

Таблица 14.8. *Данные к задаче 14.8*

	Событие «не везет»	Событие «как всегда»	Событие «везет»
Вероятность	$1/3$	$1/3$	$1/3$
$x = 1$	60	60	120
$x = 3$	60	120	120

Таблица 14.9. *Данные к задаче 14.9*

	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$
Вероятность	$1/3$	$1/3$	$1/3$
$x = 1$	0	100	200
$x = 2$	100	200	300

(A) Пусть наниматель предлагает работнику плату -4 за выручку 1 и плату 77 за выручку 60. Какой уровень усилий выберет работник? Не находя оптимального контракта в явном виде определите, является ли данный контракт оптимальным.

(B) Пусть наниматель предлагает работнику плату 32 за выручку 1 и плату 77 за выручку 60. Ответьте на вопросы предыдущего пункта.

(C) Найдите оптимальный контракт: пару выплат $r_1, r_{60} \geqslant 0$ соответственно за наблюдаемую выручку $h = 1$ или 60.

14.8 Хозяин нанимает работника. Результат работы (т. е. доход хозяина) зависит от ненаблюдаемой хозяином величины усилий работника x, а также от ненаблюдаемых случайных событий (состояний мира). Эта зависимость описывается Таблицей 14.8.

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x, w) = 3\sqrt{w} - x$. Резервный уровень полезности работника равен $u_0 = 4$. Найдите оптимальный контракт, денежные выплаты w по которому обусловлены величиной дохода, полученного хозяином.

14.9 В модели найма с ненаблюдаемыми усилиями доход, помимо усилий x, зависит также от состояний мира ($\xi = 1, 2, 3$). Вероятности состояний мира и доходы указаны в Таблице 14.9.

Таблица 14.10. *Данные к задаче 14.10*

	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$	$\xi = 4$
Вероятность	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$x = 1$	0	100	100	α
$x = 2$	100	100	100	α
$x = 4$	100	α	α	α

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности

$$u(x, w) = -120/w - x \ (w > 0).$$

Резервная полезность работника равна $u_0 = -4$. Какой вид имеют оптимальные контракты? Покажите, что результат будет таким же, как и при наблюдаемости действий.

14.10 В модели найма с ненаблюдаемыми усилиями доход, помимо усилий x, зависит также от состояний мира ($\xi = 1, 2, 3, 4$). Вероятности состояний мира и доходы указаны в Таблице 14.10.

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности

$$u(x, w) = \sqrt{w} - x.$$

Резервная полезность работника равна $u_0 = 8$.

(A) Найдите оптимальный контракт при $\alpha = 200$.

(B) Найдите оптимальный контракт при $\alpha = 180$.

(C) При каких α оптимальный контракт при ненаблюдаемости усилий будет Парето-оптимальным?

14.11 Рассмотрите дискретную модель найма со скрытыми действиями работника. При усилии a ($a = 1, \dots, k$) вероятность получения результата y_s ($s = 1, \dots, m$) равна μ_{as}. Резервная полезность для работника равна u_0, а его элементарная функция полезности имеет вид $v(w) - c_a$, где w — оплата усилий работника, а c_a — издержки, которые для работника сопряжены с усилиями a.

(A) Покажите, что если оплата, обусловленная контрактом, не зависит от результатов ($w(y) = \text{const}$), то работник выбирает усилие, минимизирующее его издержки.

(B) Предположим, что работник — рискофоб, т. е. $v'(w)$ убывает. Покажите, что если издержки не зависят от усилий ($c_a = \text{const}$), то оплата по (оптимальному) контракту не зависит от результатов.

(C) Предположим, что возможны всего два результата и два уровня усилий, причем $y_2 > y_1$ и $\mu_{b2} > \mu_{a2}$ $\forall a, b$. Опишите оптимальный контракт, если (1) $c_a > c_b$, (2) $c_a < c_b$.

14.12 Страхователь может с вероятностью μ потерять актив ценностью K рублей, и обладает изначально богатством ω (включая актив). Своими действиями (усилиями) a по сбережению актива, где $a = L$ или $a = H$, страхователь может оказать влияние на вероятность страхового случая. Пусть μ_L, μ_H — соответствующие вероятности, причем $\mu_L > \mu_H$, а c_L, c_H — издержки действий для страхователя. Элементарная функция полезности имеет вид $u(x) = \ln x - c_a$, где x — богатство.

На рынке страховых услуг есть только одна нейтральная к риску страховая компания, которая может диктовать страхователю свои условия. Проинтерпретируйте данную ситуацию как модель найма со скрытыми действиями. (Для упрощения анализа можно считать, что контракт непосредственно задает богатство страхователя, а не платежи, т. е. предлагаемый страхователем контракт имеет вид пакета (x_1, x_2), где x_1 — богатство, если страховой случай не наступил, а x_2 — если страховой случай наступил.)

(A) Покажите, что если страховая компания стимулирует низкий уровень усилий L, то она предложит такой страховой контракт, что $x_1 = x_2$, т. е. полностью застрахует клиента. Проиллюстрируйте анализ на графике.

(B) Покажите, что если страховая компания стимулирует высокий уровень усилий H, то она не полностью застрахует клиента $(x_1 > x_2)$. Проиллюстрируйте анализ на графике.

(C) Какой контракт предложит страховая компания?

14.13 Отметьте такие условия, каждое из которых, независимо от прочих, гарантирует, что оптимальный для нанимателя контракт в модели найма со скрытыми действиями Парето-оптимален:

(A) работник — рискофил, а оплата его труда зависит от результата;
(B) работник (как и наниматель) нейтрален к риску;
(C) действия не оказывают влияния на распределение результата;
(D) действия могут быть однозначно вычислены по наблюдаемому результату;
(E) резервная полезность для работника равна нулю;
(F) действия не сопряжены с издержками для работника;

(G) работник — рикофоб, а оплата его труда зависит от результата;
(H) ожидаемый доход не зависит от усилий;
(I) действия, дающие наибольший ожидаемый доход, сопряжены с наименьшими издержками для работника;
(J) действия, дающие наибольшую прибыль (не обязательно наибольший доход), не могут давать доход, равный доходу от прочих действий;
(K) резервная полезность для работника отрицательна и меньше по модулю максимального ожидаемого дохода.

По возможности объясните свой ответ.

14.14 Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Утверждение: если плата работника не зависит от результатов деятельности работника, то работник выберет такие действия (усилия) x, при которых его издержки усилий $c(x)$ минимальны. Сформулируйте модель и гипотезы утверждения, докажите и проиллюстрируйте диаграммой.

14.15 В модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника $u(w, x)$ возрастает и непрерывна по оплате w и задана на всех действительных величинах оплаты. Объясните, почему условие участие для оптимального контракта всегда выполняться как равенство.

14.16 В модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника $u(w, x)$ возрастает, непрерывна и строго вогнута по оплате w и задана на всех действительных величинах оплаты. Объясните, почему, если наниматель стимулирует не самый низкий уровень усилий, то одно из условий совместимости стимулов для оптимального контракта должно выполняться как равенство.

14.17 Модель найма со скрытыми действиями. Утверждение: если работник нейтрален к риску, то выбранный нанимателем контракт окажется Парето-оптимальным. Сформулируйте модель и предположения, докажите и проиллюстрируйте диаграммой.

14.18 Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Верно ли утверждение: если схема выплаты работнику w_s (контракт) *зависит* от результатов ($w_s \neq w_t$ при $s \neq t$), то работник выберет такие действия (усилия) b, что $c(b) > \min_{x \in X} c(x)$? Если верно, то обоснуйте его, если неверно, то приведите соответствующий контрпример.

14.19 Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Верно ли утверждение: пусть издержки работника не зависят от дей-

Таблица 14.11. *Данные к задаче 14.20*

	$y_1 = 0$	$y_2 = 50$	
$a = L$	$3/4$	$1/4$	$c_L = 1$
$a = M$	$1/2$	$1/2$	$c_M = 3$
$a = H$	$1/4$	$3/4$	$c_H = 4$

ствий (усилий), тогда выбранный нанимателем контракт окажется Парето-оптимальным? Если верно, то обоснуйте его, если неверно, то приведите соответствующий контрпример.

14.20 Рассмотрим модель найма с тремя уровнями усилий и двумя результатами. Резервная полезность равна 1. Вероятности результатов, доходы и издержки задаются Таблицей 14.11.

(А) Покажите, что один из уровней усилий нереализуем в случае, когда усилия ненаблюдаемы (не существует контракта, при котором он выгоден работнику).

(В) Найдите оптимальный контракт при наблюдаемых и ненаблюдаемых усилиях.

14.21 Предположим, что в модели найма при наблюдаемых усилиях нанимателю оказывается выгодным минимальный уровень усилий. Может ли при ненаблюдаемых усилиях быть выгоден другой уровень усилий?

14.22 Рассмотрим модель найма с двумя уровнями усилий и двумя результатами. Опишите все возможные оптимальные контракты в предположении, что усилия ненаблюдаемы, и работник нейтрален к риску. Продемонстрируйте, что все они являются оптимальными по Парето и наниматель получает такую же ожидаемую прибыль, как и при наблюдаемых усилиях.

14.23 «Контракт с ограниченной ответственностью». Предположим, что в Примере 14.1 на с. 927 оплата по контракту не может быть отрицательной ($w \geqslant 0$).

(А) Найдите наилучший контракт в предположении, что работодатель стимулирует высокий уровень усилий работника. Покажите, что при таком контракте работник получал бы положительную ренту. Проиллюстрируйте анализ на графике.

(В) Покажите, что в данном случае контракт при высоком уровне усилий перестает быть оптимальным.

14.24 Докажите, что если введение условия ограниченной ответственности $w_s \geqslant \underline{w}$ не приводит к изменению уровня усилий (для оптимального контракта), рента, получаемая работником, положительна тогда и только тогда, когда условие ограниченной ответственности является существенным.

14.25 Рассмотрим модель найма с двумя уровнями усилий и двумя результатами, в которой усилия ненаблюдаемы, работник нейтрален к риску и допустимые контракты ограничены условием ограниченной ответственности $w_s \geqslant \underline{w}$. Покажите, что существует граница w^*, такая что для контракта, обеспечивающего высокий уровень усилий, рента, связанная с ограниченной ответственностью, положительна в том и только том случае, если $\underline{w} > w^*$.

14.26 Рассмотрите в модели найма с ненаблюдаемыми действиями с двумя уровнями усилий и двумя результатами контракты типа издольщины, когда нейтральный к риску работник получает плату в виде фиксированной доли от создаваемого им дохода. Найдите оптимальные контракты и сравните с оптимальными контрактами при наблюдаемых действиях.

14.27 Объясните, почему контракт типа издольщины не может быть эффективным по Парето.

14.28 ⟦Tirole⟧ Работник может выбрать два уровня усилий: высокий (H) и низкий (L). Полезность работника в случае низких усилий равна $v(w)$, а в случае высоких — $v(w - c)$, где w — заработная плата, c — издержки, связанные с высокими усилиями. Функция $v(\cdot)$ возрастающая и строго вогнутая (работник — рискофоб). Резервная заработная плата работника равна w_0 (так что резервная полезность равна $v(w_0)$).

Пусть доход нанимателя может принимать два значения: y_1 и y_2, причем $y_1 < y_2$. Если работник выберет высокий уровень усилий, то доход будет равен y_2 с вероятностью μ_H и y_1 с вероятностью $1 - \mu_H$. Если же он выберет низкий уровень усилий, то доход будет равен y_2 с вероятностью μ_L и y_1 с вероятностью $1 - \mu_L$, причем $\mu_L < \mu_H$.

(A) Рассмотрите сначала случай, когда усилия работника наблюдаемы. Объясните, почему, если наниматель стимулирует работника выбрать низкий уровень усилий, то он должен назначить оплату $w_1 = w_2 = w_0$, а если высокий, то $w_1 = w_2 = w_0 + c$.

(B) Покажите, что в ситуации пункта (A) нанимателю выгодно требовать от работника высокого уровня усилий в том и только том случае, если $(\mu_H - \mu_L)(y_2 - y_1) > c$.

(C) Рассмотрите теперь случай, когда усилия работника ненаблюдаемы и наниматель хочет побудить работника выбрать высокий уровень усилий. Запишите условие совместимости стимулов и условие участия.

(D) Покажите, что из условия совместимости стимулов следует, что $w_2 > w_1$.

(E) Объясните, почему нанимателю выгодно назначить такую оплату, что оба ограничения выходят на равенство.

(F) Учитывая тем, что работник — рискофоб, покажите, что ожидаемая зарплата работника выше, а ожидаемая прибыль нанимателя ниже, чем при наблюдаемости усилий (предполагаем, что в обоих случаях нанимателю выгодно побуждать работника выбрать высокий уровень усилий).

(G) Найдите оплату при нейтральности работника к риску (при том же предположении, что наниматель побуждает работника выбрать высокий уровень усилий).

(H) Найдите оплату в случае, когда нанимателю выгодно побуждать работника выбрать низкий уровень усилий.

14.29 ⟦Tirole⟧ Акционеры решают, какое жалование w назначить менеджеру компании. Прибыль без учета этого жалования y зависит от усилий менеджера x и случайного фактора («возмущения») ξ следующим образом: $y = x + \xi$. Предполагаем, что ξ — случайная величина, распределение которой не зависит от x, с носителем $(-\infty, +\infty)$, имеющая нулевое математическое ожидание: $\mathsf{E}(\xi) = 0$. Акционеры нейтральны к риску и максимизируют ожидаемую прибыль $\mathsf{E}(x + \xi - w)$. Менеджер имеет целевую функцию типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности вида $u(x, w) = v(w - \gamma x^2)$, где γ — постоянный коэффициент, функция $v(\cdot)$ имеет положительную невозрастающую производную. Менеджер может найти себе работу преподавателя в бизнес-школе, где практически без усилий и риска ему гарантирована заработная плата w_0.

(A) Если акционеры наблюдают уровень усилий менеджера, то они могут найти такую схему оплаты, что менеджер выберет именно тот уровень усилий, какой им требуется. Предложите вариант такого контракта. Найдите оптимальный уровень усилий, т. е. такой, который дает максимум ожидаемой прибыли, и при этом менеджер не откажется от контракта.

(B) Пусть акционеры не могут наблюдать уровень усилий, им известна только величина прибыли y. Предположим, что используется линейная схема оплаты $w(y) = a + by$. Покажите, что уровень усилий, который выберет менеджер, не зависит от вида функции $v(\cdot)$. Найдите его как функцию коэффициентов a и b. (Так как носитель распределения ошибки не зависит от усилий менеджера, то производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной.) Покажите, что если менеджеру остается вся прибыль за исключением некоторой постоянной величины, т. е. $b = 1$, то он выберет тот уровень усилий, который оптимален в ситуации (A).

(C) Запишите функцию Лагранжа и найдите условия первого порядка для задачи выбора оптимального линейного контракта. Покажите, что если менеджер нейтрален к риску, то акционеры выберут $b = 1$. Докажите, что если производная функции $v(\cdot)$ убывает (т. е. менеджер является рискофобом), то в оптимальном контракте $0 < b < 1$, т. е. это нечто среднее между ситуацией, когда весь риск берут на себя акционеры ($b = 0$) и ситуацией, когда весь риск берет на себя менеджер ($b = 1$). (*Указание:* Воспользуйтесь тем, что если $f(\cdot)$ — возрастающая функция случайной величины ξ, то ковариация $\mathsf{Cov}(f(\xi), \xi) = \mathsf{E}(f(\xi)\xi)$ неотрицательна, и наоборот, если $f(\cdot)$ — убывающая функция ξ, то эта ковариация неположительна.)

14.3 Модель найма со скрытой информацией при монопольном положении нанимателя

В этом параграфе мы будем исходить из того, что уровень усилий является наблюдаемой величиной, но наниматель не владеет в полной мере информацией о характеристиках работника. Это так называемые модели найма со скрытой информацией. В подобных моделях можно предполагать, что нанимателю неизвестны, например, полезность работника от оплаты по контракту, продуктивность усилий, тягость разных усилий, резервная полезность и т. д. Поскольку усилия наблюдаемы, оплата по контракту $w(\cdot)$ может быть обусловлена уровнем усилий, что и предполагается в дальнейшем в этом параграфе.

Будем предполагать, что на рынке труда представлены работники нескольких типов $\theta \in \Theta$, причем наниматель не может их различить. При этом на множестве Θ задано (тем или иным способом) распределение вероятностей, известное потенциальным нанимателям. В случае, если множество Θ конечно, это распределение можно характеризовать перечислением вероятностей μ_θ встретить работника типа θ. В дальнейшем будем считать, что при этом $\mu_\theta > 0\ \forall \theta$.

Предположим, что результат усилий $x \in X$ работника — это доход $y(x)$, возрастающая вогнутая функция уровня усилий. Наниматель максимизирует свою прибыль

$$y(x) - w(x),$$

где $w(x)$ — оплата уровня усилий x работника. Коль скоро доход $y(x)$ — строго монотонная функция усилий, то можно измерять уровень усилий непосредственно величиной ожидаемого дохода. Таким образом, без ограничения общности будем считать, что уровень усилий измеряется величиной ожидаемого дохода, т. е. $y(x) = x$.

В дальнейшем будем считать (хотя это, возможно, не вполне адекватно описывает реальные условия найма[13]), что то, был ли нанят и на каких условиях один работник, не влияет на то, имеется ли возможность нанять других работников, и какова будет их производительность. Это предположение позволяет рассматривать каждый акт найма обособленно (как самостоятельную игру нанимателя с данным работником).

При таком предположении, если работник типа θ подписывает контракт и осуществляет обусловленные контрактом усилия x_θ, то прибыль нанимателя равна $x_\theta - w(x_\theta)$. Если работник любого типа подписывает контракт с нанимателем, то ожидаемая прибыль нанимателя от контракта с отдельным работником равна

$$\mathsf{E}(x_\theta - w(x_\theta)),$$

где ожидание берется по распределению типов. В частном случае конечного числа (n) типов ожидаемая прибыль рассчитывается по формуле

$$\sum_{\theta=1}^{n} \mu_\theta (x_\theta - w(x_\theta)).$$

В случае, если работникам тех или иных типов оказывается невыгодным подписывать контракт, при расчете ожидаемой прибыли соответствующие слагаемые должны быть равны нулю (в этом случае рассматриваемая игра заканчивается на этом этапе и наниматель не имеет возможности предложить контракт другому работнику).

Будем предполагать, что функция полезности работника любого типа сепарабельна по деньгам и усилиям:

$$u_\theta(x, w) = v_\theta(w) - c_\theta(x),$$

где, как и ранее, $v_\theta(w)$ — полезность оплаты w, а $c_\theta(x)$ — тягость усилий x для работника типа θ. Мы будем предполагать, что $v_\theta(w)$ — возрастающая вогнутая функция, а $c_\theta(x)$ — возрастающая выпуклая функция. Разные типы работников характеризуются разной формой

[13] В частности, обычно количество вакансий ограничено и существует конкуренция среди соискателей этих вакансий.

функций $v_\theta(w)$ и $c_\theta(x)$. Для упрощения анализа предположим более конкретно, что $v_\theta(w) = w$.

Пусть x_θ — усилия, которые, как планирует наниматель, должен осуществлять работник типа θ, а w_θ — соответствующая зарплата. Пары (x_θ, w_θ) будем называть пакетами. Удобно начать изучение модели найма со скрытой информацией с задачи поиска оптимального набора (или, как часто говорят, *меню*) пакетов, по одному на каждый тип работника, а не с анализа нахождения оптимального *контракта* $w(x)$, который бы специфицировал плату при каждом возможном уровне усилий работника. Оказывается, и это будет продемонстрировано в дальнейшем, что при таком упрощении модели мы фактически ничего не теряем.

14.3.1 Модель найма со скрытой информацией: характеристики оптимальных пакетных контрактов

Предположим, что каждый тип работника характеризуется уровнем резервной полезности $u_{0\theta}$, заданной экзогенно. (Если предложенный ему контракт обеспечивает полезность ниже величины $u_{0\theta}$, работник отказывается его подписывать.) Без ограничения общности можем считать, что все $u_{0\theta}$ равны нулю. (Этого можно добиться, нормируя функции издержек — добавляя к «первоначальным» функциям вели́чины $u_{0\theta}$.)

Модель найма со скрытой информацией можно представить как динамическую игру с неполной информацией. Опишем последовательность ходов в этой игре:

⓪ «Природа» выбирает тип работника $\theta \in \Theta$.

① Наниматель, не зная типа, предлагает работнику меню контрактов — пакеты (x_θ, w_θ), $\theta \in \Theta$.

② Работник (зная свой тип) выбирает одну из возможных альтернатив: либо не подписывать контракт, либо подписать контракт, выбрав какой-то из предложенных пакетов.

Выигрыши нанимателя и работника в случае подписания контракта вычисляются в соответствии с условиями контракта.

Мы, как обычно, будем предполагать благожелательное поведение работника по отношению к хозяину. Будем предполагать также, что пакеты правильно маркированы, т. е. (x_θ, w_θ) — пакет, который добровольно выбирает работник типа θ. Это позволяет описать выбор оптимальных пакетов задачей максимизации ожидаемой прибыли нанимателя при ограничениях двух типов, следующих из предположения о рациональном поведении работников:

- работнику каждого из типов должно быть выгодно подписать контракт (условия участия);
- работнику типа θ должно быть выгодно выбрать предназначенный для него пакет (условия совместимости стимулов).

Условия совместимости стимулов, называют в данном случае также условиями самовыявления, поскольку они фактически требуют, чтобы пакеты были выбраны так, чтобы происходило добровольное выявление типа работника.

Таким образом, следует рассмотреть следующую задачу:

$$\mathsf{E}\,\Pi = \mathsf{E}(x_\theta - w_\theta) \to \max_{w_\theta, x_\theta}$$
$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_\varphi - c_\theta(x_\varphi)\ \forall \theta, \varphi \in \Theta,$$
$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0\ \forall \theta \in \Theta.$$

Поскольку в оптимальном решении некоторые из типов работников могут не подписать контракт, то работников таких типов следует исключить из рассмотрения, дополнив указанную задачу ограничениями неучастия. Следует провести перебор по подмножествам множества типов работников, разделяя их на тех, кто подписывает контракт, и тех, кто его не подписывает, и выбрать тот вариант, который дает наибольшую ожидаемую прибыль.

Модель найма со скрытой информацией при двух типах работников

Прежде чем анализировать более общие случаи, проведем анализ простого частного случая, когда встречаются только работники двух типов: $\theta = 1, 2$. Вероятность появления работника типа 1 на рынке труда равна μ_1, а работника типа $2 - \mu_2$ ($\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_2 = 1 - \mu_1$). Будем предполагать, что работник первого типа более способный, т. е. один и тот же объем работ он выполняет с меньшими усилиями[14] и, кроме того, производство дополнительной единицы продукции требует от него меньших издержек. Таким образом, для всех усилий x выполнено

$$c_2(x) \geqslant c_1(x)$$

и

$$c_2'(x) > c_1'(x).$$

[14]Заметим, что мы добавили к издержкам резервные полезности, поэтому данное предположение неявно накладывает условия и на уровни резервных полезностей.

Последнее неравенство означает, что разность $d(x) = c_2(x) - c_1(x)$ возрастает по x. Заметим, что для справедливости почти всех приведенных ниже результатов достаточно выполнения этого условия (а не условия на производные этих функций).

Для каждой из категорий работников $\theta = 1, 2$ предназначается своя пара усилия — зарплата, т. е. пакет (x_θ, w_θ).

Если бы наниматель мог различать работников, тогда он выбрал бы «идеальные» пакеты $(\hat{x}_\theta, \hat{w}_\theta)$, которые рассматривались выше для случая полной информации.

«Идеальные» уровни усилий $\hat{x}_\theta$ находились бы из условия максимизации прибыли, соответствующей сделке с работником каждого типа. При этом единственным ограничением для нанимателя было бы условие участия. В оптимуме это ограничение должно выполняться как равенство: $w_\theta = c_\theta(x_\theta)$. Подставим это равенство в функцию прибыли:

$$x - c_\theta(x) \to \max_{x \in X}$$

Сделанные выше предположения относительно функций издержек гарантируют, что $\hat{x}_1 \geqslant \hat{x}_2$. Покажем это. Из того, что $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ являются решениями соответствующих задач, следует, что

$$\hat{x}_1 - c_1(\hat{x}_1) \geqslant \hat{x}_2 - c_1(\hat{x}_2)$$

и

$$\hat{x}_2 - c_2(\hat{x}_2) \geqslant \hat{x}_1 - c_2(\hat{x}_1).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$c_2(\hat{x}_1) - c_1(\hat{x}_1) \geqslant c_2(\hat{x}_2) - c_1(\hat{x}_2)$$

и

$$d(\hat{x}_1) \geqslant d(\hat{x}_2).$$

Неравенство $\hat{x}_1 \geqslant \hat{x}_2$ следует из возрастания функции $d(x)$. Выполнение строгого неравенства можно гарантировать при дифференцируемости функций издержек в предположении, что $c_2'(x) > c_1'(x)\ \forall x$.

Если функции издержек дифференцируемы, то условие первого порядка внутреннего максимума выглядит следующим образом:

$$c_\theta'(\hat{x}_\theta) = 1.$$

Оплата $\hat{w}_i$ выбирается так, чтобы в точности компенсировать работнику издержки его усилий, т. е.

$$\hat{w}_\theta = c_\theta(\hat{x}_\theta).$$

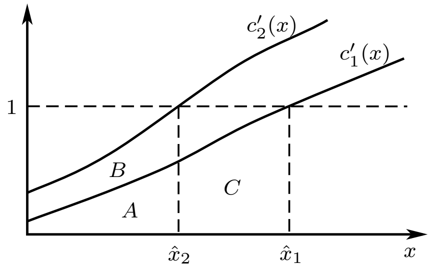


Рис. 14.14. *Идеальные пакеты при полной информации*

Сказанное иллюстрирует Рис. 14.14. Уровни усилий $\hat{x}_\theta$ характеризуются тем, что предельные тягости усилий равны единице. Оплата $\hat{w}_1$ работника типа 1 равна сумме площадей фигур A и B и величины $c_1(0)$, а оплата $\hat{w}_2$ работника типа $2 — A + C + c_2(0)$.

Поскольку наниматель не может определить тип работника, то требуется, чтобы произошло их самовыявление, т. е., чтобы работник каждого типа выбрал именно тот пакет, который для него предназначен. Таким образом, задача нанимателя имеет следующий вид:

$$\mathsf{E}\,\Pi = \mathsf{E}(x_\theta - w_\theta) = \mu_1(x_1 - w_1) + \mu_2(x_2 - w_2) \to \max_{w_1, x_1, w_2, x_2}$$

$$w_1 - c_1(x_1) \geqslant w_2 - c_1(x_2)$$

(условие самовыявления работника типа 1),

$$w_2 - c_2(x_2) \geqslant w_1 - c_2(x_1)$$

(условие самовыявления работника типа 2),

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0 \ \forall \theta = 1, 2$$

(условия участия).

Заметим, что для любых допустимых в этой задаче пакетов (а значит, и для оптимальных) выполнены условия монотонности (упорядоченности) усилий и соответствующих уровней оплаты. Действительно, сложив два условия самовыявления, получим

$$c_2(x_1) - c_1(x_1) \geqslant c_2(x_2) - c_1(x_2)$$

или

$$d(x_1) \geqslant d(x_2),$$

откуда при возрастании функции $d(x)$ следует, что $x_1 \geqslant x_2$. Из условия самовыявления работника типа 1 при возрастании функции $c_1(x)$

следует, что
$$w_1 - w_2 \geqslant c_1(x_1) - c_1(x_2) \geqslant 0,$$
т. е. $w_1 \geqslant w_2$.

Рассматриваемую задачу можно существенно упростить, используя сделанные выше предположения относительно функций издержек.

Покажем, что два из четырех условий выполняются в решении задачи как равенство. Анализ проведем в несколько шагов.

1. Покажем сначала, что условие участия для работника первого типа является следствием указанных двух условий, т. е. избыточно. Действительно, из условия самовыявления работника типа 1 и условия участия работника типа 2, учитывая, что при вех уровнях усилий x выполнено $c_2(x) \geqslant c_1(x)$, получим, что выполняется и условие участия для работника первого типа:
$$w_1 - c_1(x_1) \geqslant w_2 - c_1(x_2) \geqslant w_2 - c_2(x_2) \geqslant 0.$$

2. Далее, условие самовыявления для работника типа 1 в решении обращается в равенство (для него оба пакета должны оказаться эквивалентными). Действительно, если это не так, то возможно уменьшить величину w_1, не нарушая ограничения задачи, что противоречит оптимальности рассматриваемых пакетов. (Ограничение участия для работника типа 1 не нарушается, коль скоро не нарушается ограничение самовыявления работника типа 1, а ограничение участия для работника типа 2 остается без изменений.)

3. Наконец, ограничение участия для работника второго типа в решении обращается в равенство. Действительно, если это не так, то оба ограничения участия выполняются как строгие неравенства. Но тогда можно уменьшить оплату работников обоих типов на одну и ту же величину, не нарушив эти ограничения. При этом по-прежнему выполняются ограничения самовыявления, а прибыль нанимателя увеличивается (на величину уменьшения оплаты), что противоречит предположению об оптимальности пакетов.

Мы показали, что в оптимальном решении $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ выполнены равенства
$$\bar{w}_1 - c_1(\bar{x}_1) = \bar{w}_2 - c_1(\bar{x}_2),$$
$$\bar{w}_2 - c_2(\bar{x}_2) = 0,$$
откуда $\bar{w}_2 = c_2(\bar{x}_2)$, $\bar{w}_1 = c_1(\bar{x}_1) + c_2(\bar{x}_2) - c_1(\bar{x}_2)$,

Подставляя эти значения в ограничение участия для работника второго типа, получим
$$c_2(\bar{x}_2) - c_2(\bar{x}_2) \geqslant c_2(\bar{x}_2) - c_1(\bar{x}_2) + c_1(\bar{x}_1) - c_2(\bar{x}_1)$$

или

$$d(\bar{x}_1) \geqslant d(\bar{x}_2).$$

Выполнение последнего неравенства гарантируют предположения относительно функций издержек ($d(x)$ — возрастающая функция) и установленное выше соотношение $x_1 \geqslant x_2$. Таким образом, в оптимальном решении задачи выполнение условия участия работников типа 2 является следствием двух полученных выше равенств.

Подставив $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ в целевую функцию задачи, получим следующую задачу для выбора $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$:

$$\mu_1(x_1 - c_2(x_2) + c_1(x_2) - c_1(x_1)) + \mu_2(x_2 - c_2(x_2)) \to \max_{x_1, x_2 \in X}$$

$$x_1 \geqslant x_2.$$

Сначала найдем решение соответствующей задачи безусловной оптимизации (не учитывая ограничения $x_1 \geqslant x_2$), а затем покажем, что это ограничение выполняется в полученном решении и поэтому несущественно.

Так как $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, то без ограничения монотонности уровней усилий $x_1 \geqslant x_2$, задача фактически распадается на две задачи, одна — для выбора $\bar{x}_1$, другая — для выбора $\bar{x}_2$

$$x_1 - c_1(x_1) \to \max_{x_1 \in X},$$

$$x_2 - c_2(x_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(x_2) - c_1(x_2)) \to \max_{x_2 \in X}.$$

Первая задача имеет тот же вид, что и задача определения оптимального уровня усилий ($\hat{x}_1$) в условиях, когда типы работников наблюдаемы. Следовательно, множества решений этих двух задач совпадают. Для работника типа 2 задача отличается от задачи поиска $\hat{x}_2$ тем, что к функции издержек добавляется неотрицательная возрастающая функция $\frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(x_2) - c_1(x_2))$. Поэтому решения двух задач, вообще говоря, различны, причем если $\hat{x}_2$ и $\bar{x}_2$ — решения этих задач, то $\hat{x}_2 \geqslant \bar{x}_2$. Действительно, по определению $\hat{x}_2$

$$\hat{x}_2 - c_2(\hat{x}_2) \geqslant \bar{x}_2 - c_2(\bar{x}_2),$$

а по определению $\bar{x}_2$

$$\bar{x}_2 - c_2(\bar{x}_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(\bar{x}_2) - c_1(\bar{x}_2)) \geqslant \hat{x}_2 - c_2(\hat{x}_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}(c_2(\hat{x}_2) - c_1(\hat{x}_2)).$$

Сложив эти неравенства, получим

$$c_2(\hat{x}_2) - c_1(\hat{x}_2) \geqslant c_2(\bar{x}_2) - c_1(\bar{x}_2)$$

или

$$d(\hat{x}_2) \geqslant d(\bar{x}_2),$$

откуда следует требуемое неравенство.

Таким образом, если $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\hat{x}_2$ — решения соответствующих задач, то имеет место неравенство $\bar{x}_1 \geqslant \hat{x}_2 \geqslant \bar{x}_2$. Таким образом, ограничение $x_1 \geqslant x_2$ выполняется для любого решения задачи и поэтому несущественно.

Заметим, что при дифференцируемости функций для любой пары внутренних оптимальных пакетов выполнено строгое неравенство $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ при условии, что $c_2'(x) > c_1'(x)$ для всех x. Мы покажем это ниже.

Условия первого порядка для внутренних решений $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ при дифференцируемости функций издержек имеют вид

$$c_1'(\bar{x}_1) = 1 \quad \text{и} \quad c_2'(\bar{x}_2) = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}[c_2'(\bar{x}_2) - c_1'(\bar{x}_2)].$$

Так как $c_2'(x) > c_1'(x)$, то $c_2'(\bar{x}_2) < 1$. Следовательно, $\bar{x}_2 \neq \hat{x}_2$, где $\hat{x}_2$ — оптимальный уровень усилий для работника типа 2. Поскольку $\bar{x}_2 \leqslant \hat{x}_2$, то это означает, что усилия, осуществляемые работником типа 2, неоптимально низки ($\bar{x}_2 < \hat{x}_2$).

??Поскольку $\bar{x}_1$ — оптимальный уровень усилий для работника типа 1, то $\bar{x}_1 > \hat{x}_2$, где $\hat{x}_2$ — оптимальный уровень усилий для работника типа 2. Получаем цепочку неравенств $\bar{x}_1 > \hat{x}_2 > \bar{x}_2$.

Строгая выпуклость функций издержек $c_\theta(\cdot)$ гарантирует единственность решений задач определения оптимальных уровней усилий $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ в ситуации симметричной информированности и достаточность условий первого порядка. То же самое справедливо и для задачи определения величины оптимального уровня усилий $\bar{x}_1$ для случая асимметричной информированности. Аналогичные свойства задачи определения уровня усилий $\bar{x}_2$ можно гарантировать лишь при дополнительных условиях, например при выпуклости функции $c_2(x) - c_1(x)$(монотонности функции $c_2'(x) - c_1'(x)$). При этом

$$\hat{x}_1 = \bar{x}_1 > \hat{x}_2 > \bar{x}_2.$$

Таким образом, для работника типа 2 приходится планировать меньшую величину усилий, чтобы понизить оплату работника типа 1.

Рис. 14.15 иллюстрирует сделанные нами выводы.

Мы предполагаем, что решение внутреннее, поэтому $c_2(\bar{x}_2) > c_1(\bar{x}_2)$ и

$$\bar{w}_1 - c_1(\bar{x}_1) = \bar{w}_2 - c_1(\bar{x}_2) > \bar{w}_2 - c_2(\bar{x}_2) = 0$$

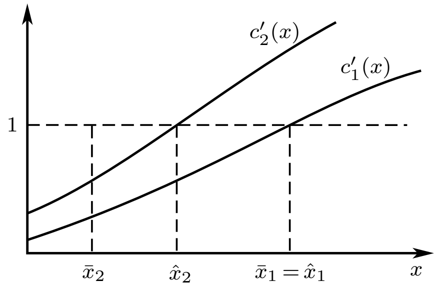


***Рис. 14.15.** Сравнение оптимальных пакетов при полной и асимметричной информации*

Таким образом, работник типа 2 при этом всегда получает лишь резервную полезность (его излишек равен нулю), а первый — несколько больше своей резервной полезности. То есть наличие на рынке менее производительных работников и невозможность их различить приводит к тому, что более производительный работник при условии, что выгодно нанимать менее производительных работников, получает так называемую информационную ренту.

Проиллюстрируем это графически (Рис. 14.16). На этом рисунке OA — прибыль от контракта с работником типа 2, OB — прибыль от идеального контракта с работником типа 2, OC — прибыль от контракта с работником типа 1, OD — прибыль от идеального контракта с работником типа 1.

Закрашенная область соответствует пакетам (x_2, w_2), обеспечивающим Парето-улучшение. Пакеты в этой области не могут быть реализованы из-за необходимости обеспечить выполнение условия самовыявления для работников типа 1.

Пример 14.4
Для функций издержек

$$c_1(x) = 0{,}5x^2, \quad c_2(x) = x^2$$

и множества возможных усилий $X = \mathbb{R}_+$, решая задачу

$$\mu_1(x_1 - x_2^2 + 0{,}5x_2^2 - 0{,}5x_1^2) + \mu_2(x_2 - x_2^2) \to \max_{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0}.$$

получим

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2 + \mu_1/\mu_2}.$$

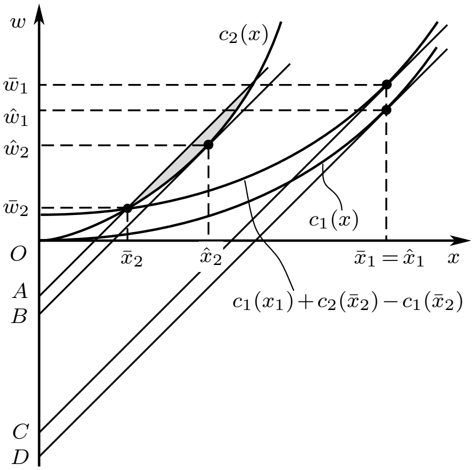


Рис. 14.16. *Оптимальные пакеты при двух типах работников*

При этом уровни оплаты будут равны

$$\bar{w}_1 = 0{,}5\bar{x}_2^2 + 0{,}5\bar{x}_1^2 = \frac{1}{2(2+\mu_1/\mu_2)^2} + 0{,}5,$$

$$\bar{w}_2 = \bar{x}_2^2 = \frac{1}{(2+\mu_1/\mu_2)^2}.$$

Работник второго типа будет производить меньше эффективного уровня $\hat{x}_2 = 0{,}5$. Совпадение возможно, только если $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$.

Информационная рента работника типа 1 равна

$$\bar{w}_1 - 0{,}5\bar{x}_1^2 = \frac{1}{2(2+\mu_1/\mu_2)^2} > 0. \qquad \triangle$$

Проведенный анализ характеризует оптимальные с точки зрения нанимателя условия найма работников обоих типов. Как было указано выше, это решение следует сравнить с решением, полученным при условии, что нанимаются только работники первого типа. Напоминаем, что, как и прежде, мы предполагаем, что если два варианта поведения приносят работнику одинаковую полезность, то он выбирает поведение, выгодное нанимателю. Поэтому условия неучастия запишем в виде нестрогого неравенства. Выбор оптимального пакета для случая, когда нанимаются только работники типа 1, характеризуется следующей задачей:

$$
\begin{aligned}
& x - w \to \max_{w,x} \\
& w - c_1(x) \geqslant 0 \\
& \quad \text{(условие участия работника типа 1)}, \\
& w - c_2(x) \leqslant 0 \\
& \text{(условие неучастия работника типа 2)}.
\end{aligned}
$$

Для решения $(\bar{x}, \bar{w})$ этой задачи выполнено $\bar{w} = c_1(\bar{x})$, т. е. ограничение участия работника типа 1 выходит на равенство. При этом ограничение неучастия работника типа 2 является несущественным, поскольку $c_1(x) \leqslant c_2(x)$. Таким образом, задача совпадает с задачей выбора оптимального пакета $(\hat{x}_1, \hat{w}_1)$ для работника типа 1 в условиях полной информации.

В этом простом случае, разрабатывая стратегию найма, наниматель сравнивает минимальное значение ожидаемой информационной ренты с максимальным значением ожидаемого дохода от занятости работника второго типа. В случае, когда первая величина превышает вторую, предлагаются пакеты для работников обоих типов. В случае, когда доход от занятости работников второго типа относительно низкий, предлагается только один пакет $(\hat{x}_1, \hat{w}_1)$.

Заметим, что проведенный анализ основывался на неявной предпосылке о том, что на предконтрактной стадии у работников существует полная уверенность, что заключенные контракты не могут быть (а значит, и не будут) пересмотрены.

Поясним это. Поскольку после выбора соответствующего контракта работник каждого типа фактически выявляет свой тип, наниматель оказывается уже в ситуации полной информированности и ему нет нужды платить работнику первого типа информационную ренту. Поэтому он может попытаться перезаключить контракт с работником этого типа, предложив ему идеальный контракт $(\hat{x}_1, \hat{w}_1)$, (или контракт, чуть более привлекательный, чем идеальный, от которого тому невыгодно отказываться). Принимая во внимание такую возможность провести ревизию контракта, работник первого типа «откажется выявлять свой тип», выбрав контракт, предназначенный для работника второго типа, что связано с потерями для нанимателя, превышающими, как нетрудно видеть, информационную ренту работника первого типа в соответствии с контрактом $(\bar{x}_1, \bar{w}_1)$, на который этот работник согласится, будучи уверенным в том, что заключенные контракты не будут пересматриваться. Таким образом, наниматель заинтересован в том, чтобы у работника такая уверенность была, взяв на себя обязательства не пересматривать заключенные контракты. Однако в связи с заинтересованностью нанимателя нарушить это обязательство после заключения контракта должен существовать механизм, гарантирующий выполнение таких обязательств, т. е. механизм, делающий такие обязательства *заслуживающими доверия*[15]. Таким образом, приведенный анализ контрактных отношений является корректным лишь в предположении о существовании механизмов (институтов), гарантирующих выполнение принятых на себя нанимателем обязательств не пересматривать заключенные ранее контракты, и при применении к каждой конкретной ситуации рассмотренной схемы анализа необходимо выявить, существуют ли в этой ситуации такие механизмы.

Проблему не решает наличие механизмов, при которых работник имеет право отказаться от такого пересмотра контракта (настояв на выполнении условий первоначального контракта), поскольку существуют варианты пересмотра контракта с работником второго типа, которые выгодны как нанимателю, так и работнику (т. е. являются Парето-улучшающими)[16]. Возможность такого пересмотра опять же приведет к тому, что работник первого типа будет имитировать работника второго типа, поскольку это позволит ему увеличить свою информационную ренту.

Модель найма со скрытой информацией при конечном количестве типов работников. Цепное правило

Пусть теперь на рынке труда присутствуют n различных типов работников, т. е. $\Theta = \{1, \ldots, n\}$. Предположим относительно функций издержек, что при $\theta > \varphi$ для всех $x \in X$ выполнено условие

$$c_\theta(x) \geqslant c_\varphi(x)$$

и разности $c_\theta(x) - c_\varphi(x)$ возрастают по x при $\theta > \varphi$. Эти условия упорядоченности функций издержек $c_\theta(\cdot)$ иллюстрирует Рис. 14.17[17].

---

[15] Англ. *credible commitment* — заслуживающее доверия обязательство.

[16] Парето-улучшения, о которых идет речь, — это предложение (после выявления типа работника) работнику второго типа контракта $(\hat{x}_1, w_1)$, где $w_1 = \hat{w}_1 + \varepsilon$, а ε — достаточно малое число.

[17] Их называют условиями единственности точки пересечения (кривые безразличия работников двух разных типов не могут пересечься более, чем в одной точке) или условиями Спенса—Миррлиса.

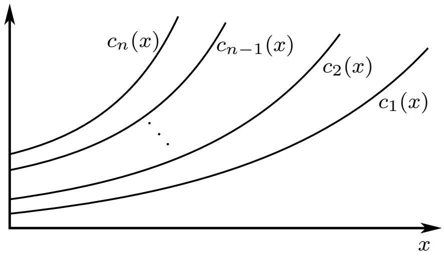


Рис. 14.17. *Упорядоченность функций* $c_\theta(\cdot)$

Напомним, что составление оптимального контракта сводится к решению следующей задачи:

$$\begin{gathered}\sum_{\theta\in\Theta}\mu_\theta(x_\theta - w_\theta) \to \max_{w_\theta, x_\theta}\\ w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_\varphi - c_\theta(x_\varphi)\ \forall\theta,\varphi\in\Theta,\\ w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0\ \forall\theta\in\Theta.\end{gathered} \tag{♉}$$

Если указанные условия упорядоченности издержек выполнены, то можно доказать важный результат — цепное правило. Он состоит в том, что можно заменить задачу (♉) следующей эквивалентной задачей:

$$\begin{gathered}\sum_{\theta\in\Theta}\mu_\theta(x_\theta - w_\theta) \to \max_{w_\theta, x_\theta}\\ w_\theta - c_\theta(x_\theta) = w_{\theta+1} - c_\theta(x_{\theta+1})\ \forall\theta < n,\\ w_n - c_n(x_n) = 0,\\ x_\theta \geqslant x_{\theta+1}\ \forall\theta < n.\end{gathered} \tag{♋}$$

Это означает, что наниматель выберет контракт, обладающий следующими свойствами.

(1) Чем большей производительностью отличается работник (чем меньше его тип), тем бóльшие он осуществляет усилия (условие монотонности уровней усилий x_θ).

(2) Не требуется следить, чтобы работник типа θ ($\theta < n$) не выбирал пакет, предназначенный для работника типа $\theta + k$ при $k > 1$, достаточно гарантировать, чтобы это было выполнено для $k = 1$. Ограничение участия достаточно обеспечить для работника типа $\theta = n$.

(3) При максимизации прибыли указанные ограничения следует вывести на равенство. А именно: работник типа θ ($\theta < n$) должен

быть безразличен при выборе между пакетом (w_θ, x_θ) и пакетом $(w_{\theta+1}, x_{\theta+1})$, а работник типа $\theta = n$ должен быть безразличен при решении о подписании контракта.

В следующей теореме мы последовательно покажем, что оптимальные пакеты характеризуются этими свойствами и тем самым убедимся в эквивалентности двух задач.

Теорема 14.3:

Если выполнено условие упорядоченности издержек, то задача (♉) эквивалентна задаче (♋). ⌟

Доказательство: (i) Пусть пакеты $\{(w_\theta, x_\theta)\}$ удовлетворяют ограничениям задачи (♉). Покажем, что уровни усилий упорядочены.

Рассмотрим два произвольных типа $\theta, \varphi \in \Theta$, таких что $\theta > \varphi$. Для этих типов выполнены условия самовыявления:

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_\varphi - c_\theta(x_\varphi),$$

$$w_\varphi - c_\varphi(x_\varphi) \geqslant w_\theta - c_\varphi(x_\theta).$$

Сложив два неравенства, получим

$$c_\theta(x_\varphi) - c_\varphi(x_\varphi) \geqslant c_\theta(x_\theta) - c_\varphi(x_\theta).$$

Так как $c_\theta(x) - c_\varphi(x)$ возрастает, то отсюда следует, что $x_\varphi \geqslant x_\theta$.

(ii) Докажем, что если для работника любого типа $\theta \leqslant n - 1$ пакет (w_θ, x_θ) не хуже, чем пакет $(w_{\theta+1}, x_{\theta+1})$, то, как следствие, для работника любого типа $\theta \leqslant n - k$ пакет (w_θ, x_θ) не хуже, чем пакет $(w_{\theta+k}, x_{\theta+k})$ при $k \geqslant 1$.

Докажем это утверждение по индукции. При $k = 1$ оно верно по предположению. Предположим теперь, что оно верно для некоторого фиксированного k и покажем, что оно также верно и для $k + 1$.

Действительно, если

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_{\theta+k} - c_\theta(x_{\theta+k})$$

и

$$w_{\theta+k} - c_{\theta+k}(x_{\theta+k}) \geqslant w_{\theta+k+1} - c_{\theta+k}(x_{\theta+k+1}),$$

то

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_{\theta+k+1} - c_\theta(x_{\theta+k}) + c_{\theta+k}(x_{\theta+k}) - c_{\theta+k}(x_{\theta+k+1}).$$

Поскольку, как мы только что доказали, $x_{\theta+k} \geqslant x_{\theta+k+1}$, а функция $c_{\theta+k}(x) - c_\theta(x)$ возрастает, то

$$c_{\theta+k}(x_{\theta+k}) - c_\theta(x_{\theta+k}) \geqslant c_{\theta+k}(x_{\theta+k+1}) - c_\theta(x_{\theta+k+1}),$$

и, следовательно,

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_{\theta+k+1} - c_\theta(x_{\theta+k+1})$$

Мы показали, что часть ограничений самовыявления избыточна. Покажем теперь, что из ограничения самовыявления — что θ не выберет $\theta+1$, и ограничения участия для $\theta = n$ следуют ограничения участия для $\theta \leqslant n-1$, поэтому они также избыточны. Действительно, из

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_{\theta+1} - c_\theta(x_{\theta+1})$$

и

$$w_{\theta+1} - c_{\theta+1}(x_{\theta+1}) \geqslant 0$$

при выполнении предположения об упорядоченности издержек следует

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0.$$

(iii) В решении задачи (♉) строгое неравенство

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) > w_{\theta+1} - c_\theta(x_{\theta+1})$$

при $\theta \leqslant n-1$ невозможно. Если бы выполнялось такое неравенство, то, как следует из только что доказанного, мы могли бы уменьшить все w_φ, $\varphi \geqslant \theta$, на величину соответствующей невязки, не нарушая ни одного ограничения задачи (все ограничения, которые могли бы быть нарушены при таком сдвиге, являются избыточными, то есть выполняются автоматически). Но тем самым мы увеличили бы прибыль, что невозможно.

Аналогично, если бы

$$w_n - c_n(x_n) > 0,$$

то возможно было бы уменьшить w_n до $c_n(x_n)$, не нарушая ни одного ограничения задачи.

Таким образом, оптимальное решение задачи (♉) удовлетворяет всем ограничениям задачи (♋).

(iv) Для доказательства теоремы осталось показать, что если пакеты $\{(w_\theta, x_\theta)\}$ удовлетворяют ограничениям задачи (♋), то они удовлетворяют всем ограничениям задачи (♉).

Достаточно проверить ограничения самовыявления для θ, φ при $\theta > \varphi$ и ограничение участия для n, поскольку, как мы уже показали, остальные ограничения избыточны. Ограничение участия для работника типа n в задаче (♋) выполнено.

Докажем выполнение указанных ограничений самовыявления по индукции. Зафиксируем θ. При $\theta = \varphi$ ограничение выполнено. Пусть оно выполнено при некотором заданном φ ($\theta > \varphi$)). Докажем, что оно выполнено и при $\varphi - 1$.

Из предположения индукции

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_\varphi - c_\theta(x_\varphi)$$

и ограничения задачи (♋)

$$w_{\varphi-1} - c_{\varphi-1}(x_{\varphi-1}) = w_\varphi - c_{\varphi-1}(x_\varphi)$$

следует, что

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_{\varphi-1} - c_{\varphi-1}(x_{\varphi-1}) + c_{\varphi-1}(x_\varphi) - c_\theta(x_\varphi).$$

Поскольку из ограничения задачи (♋) $x_{\varphi-1} \geqslant x_\varphi$, а функция $c_\theta(x) - c_{\varphi-1}(x)$ возрастает, то

$$c_\theta(x_{\varphi-1}) - c_{\varphi-1}(x_{\varphi-1}) \geqslant c_\theta(x_\varphi) - c_{\varphi-1}(x_\varphi),$$

откуда

$$w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_{\varphi-1} - c_\theta(x_{\varphi-1}). \qquad \blacksquare$$

Данная теорема (цепное правило) позволяет получить ряд свойств системы оптимальных пакетов. В частности, из ограничений задачи (♋)

$$\bar{w}_\theta - c_\theta(\bar{x}_\theta) = \bar{w}_{\theta+1} - c_\theta(\bar{x}_{\theta+1})$$

и монотонности усилий

$$\bar{x}_\theta \geqslant \bar{x}_{\theta+1}$$

следует, что $\bar{w}_\theta \geqslant \bar{w}_{\theta+1}$, т. е. плата монотонна (не возрастает по типу).

Напомним, что излишек, получаемый работником, называют *информационной рентой*. Для работника типа θ она равна

$$\bar{w}_\theta - c_\theta(\bar{x}_\theta) \ (\geqslant 0).$$

Эта рента не возрастает по θ, поскольку

$$\bar{w}_\theta - c_\theta(\bar{x}_\theta) = \bar{w}_{\theta+1} - c_\theta(\bar{x}_{\theta+1}) \geqslant \bar{w}_{\theta+1} - c_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}).$$

Если для какого-то из типов информационная рента положительна, то для всех предыдущих типов она тоже положительна. Для работника типа n информационная рента равна нулю. Рента нужна, чтобы работник не стал «притворяться», что его тип более высокий, чем на самом деле (в обратную сторону притворяться не имеет смысла).

Можем выразить $\{\bar{w}_\theta\}$ через $\{\bar{x}_\theta\}$ следующим образом:

$$\bar{w}_n = c_n(\bar{x}_n),$$

$$\bar{w}_{n-1} = \bar{w}_n - c_{n-1}(\bar{x}_n) + c_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) = c_n(\bar{x}_n) - c_{n-1}(\bar{x}_n) + c_{n-1}(\bar{x}_{n-1}),$$

и т. д. Получим зависимость $\bar{w}_\theta = \bar{w}_\theta(\bar{x}_\theta, \ldots, \bar{x}_n)$. Общая формула имеет вид

$$\bar{w}_\theta(x_\theta, \ldots, x_n) = \sum_{k=\theta+1}^{n} (c_k(x_k) - c_{k-1}(x_k)) + c_\theta(x_\theta).$$

Таким образом, задача (♋) сводится к следующей:

$$\sum_{\theta\in\Theta} \mu_\theta(x_\theta - \bar{w}_\theta(x_\theta, \ldots, x_n)) \to \max_{x_\theta}$$

$$x_\theta \geqslant x_{\theta+1} \ \forall \theta < n.$$

Объединяя слагаемые, являющиеся функциями от x_θ, получим эквивалентную запись этой задачи:

$$\sum_{\theta\in\Theta} [\mu_\theta(x_\theta - c_\theta(x_\theta)) - \mathrm{M}_{\theta-1}(c_\theta(x_\theta) - c_{\theta-1}(x_\theta))] \to \max_{x_\theta}$$

$$x_\theta \geqslant x_{\theta+1} \ \forall \theta < n,$$

где мы ввели обозначение

$$\mathrm{M}_\theta = \mu_1 + \cdots + \mu_\theta.$$

Целевая функция задачи сепарабельна по $\{x_\theta\}$, поэтому в ситуации, когда ограничения монотонности усилий по типу $x_\theta \geqslant x_{\theta+1}$ несущественны, ее решение распадается на n независимых друг от друга задач:

$$x - c_\theta(x) - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}(c_\theta(x) - c_{\theta-1}(x)) \to \max_{x\in X}.$$

Как мы видели, для случая двух типов решения соответствующих задач $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ всегда удовлетворяют условию $\bar{x}_1 \geqslant \bar{x}_2$. Однако в общем случае такого распадения задачи может не быть. Следующий пример показывает, что в случае трех типов работников ограничение $x_\theta \geqslant x_{\theta+1}$ может стать активным.

Пример 14.5

Пусть на рынке труда в дополнение к двум типам работников, рассмотренным в Примере 14.4, с функциями издержек

$$c_1(x) = 0{,}5x^2, \quad c_2(x) = x^2$$

имеются также работники типа 3 с функцией издержек

$$c_3(x) = 1{,}5x^2.$$

Решение задачи

$$x - c_3(x) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_3}(c_3(x) - c_2(x)) \to \max$$

имеет вид

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{3 + (\mu_1 + \mu_2)/\mu_3}.$$

Если доля работников типа 2, μ_2, мала, то решение аналогичной задачи для работника типа 2 может оказаться ниже:

$$\frac{1}{2 + \mu_1/\mu_2} < \frac{1}{3 + (\mu_1 + \mu_2)/\mu_3},$$

т. е. разделяющий контракт не будет оптимальным. Это происходит при $\mu_2 < \mu_1\mu_3$. Например, при $\mu_1 = 3/8$, $\mu_2 = 1/8$, $\mu_3 = 1/2$ получим $\bar{x}_2 = 1/5$ и $\bar{x}_3 = 1/4$.

Чтобы получить уровни усилий, которые определяют оптимальный контракт в этом случае, следует решить задачу

$$\mu_2(x - c_2(x)) - \mu_1(c_2(x) - c_1(x)) + \\ + \mu_3(x - c_3(x)) - (\mu_1 + \mu_2)(c_3(x) - c_2(x)) \to \max$$

или

$$(\mu_2 + \mu_3)x - (2 + \mu_2 + \mu_3)\frac{x^2}{2} \to \max,$$

откуда получаем следующие параметры объединяющего контракта:

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2 + \mu_2 + \mu_3},$$

$$\bar{w}_2 = \bar{w}_3 = c_3(\bar{x}_3) = 1{,}5\left(\frac{\mu_2 + \mu_3}{2 + \mu_2 + \mu_3}\right)^2.$$

Как и в Примере 14.4, $\bar{x}_1 = 1$, однако оплата будет другая:

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2 + c_1(\bar{x}_1) - c_1(\bar{x}_2) = 0{,}5 + \left(\frac{\mu_2 + \mu_3}{2 + \mu_2 + \mu_3}\right)^2.$$

При $\mu_1 = 3/8$, $\mu_2 = 1/8$, $\mu_3 = 1/2$ получим $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 5/21$.

Записав для полной задачи, включающей ограничение $x_2 \geqslant x_3$, функцию Лагранжа и приравняв к нулю ее производные в найден-

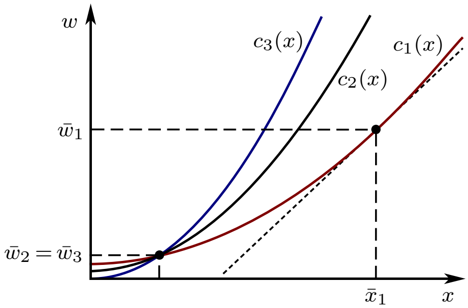


Рис. 14.18. *Пакеты, соответствующие частично объединяющему контракту для трех типов работников*

ном решении, можно убедиться, что множитель Лагранжа для данного ограничения равен

$$\frac{\mu_3\mu_1 - \mu_2}{2 + \mu_2 + \mu_3}.$$

Таким образом, ограничение активно при $\mu_2 < \mu_1\mu_3$. △

Рис. 14.18 иллюстрирует ситуацию «слияния» контрактов для второго и третьего типа работников, рассмотренную в последнем примере.

В общем случае оптимальные контракты можно разделить на два класса.

Разделяющие контракты, для которых $\bar{x}_\theta > \bar{x}_{\theta+1}$ при всех $\theta \leqslant n-1$, т. е. все типы себя выявляют.

(Частично) объединяющие контракты, для которых $\bar{x}_\theta = \bar{x}_{\theta+1}$, $\bar{w}_\theta = \bar{w}_{\theta+1}$ при некотором θ, т. е. существуют кластеры (эффект группирования типов, англ. *bunching*). Работники нескольких разных типов осуществляют одинаковые усилия и получают одинаковую зарплату. Таким образом, рассмотренный пример описывает случай группирования второго и третьего типов, т. е. случай (частично) объединяющего контракта.

При дополнительных предположениях о поведении функций издержек в зависимости от типа и усилий работника, а также формы функции распределения типов можно гарантировать, что оптимальный контракт является разделяющим.

Введем обозначение

$$d_\theta(x) = c_{\theta+1}(x) - c_\theta(x).$$

Мы предположили, что $d_\theta(x)$ — возрастающие функции. Предположим дополнительно, что $d_{\theta+1}(x) - d_\theta(x)$ — тоже возрастающие функции.

В этом случае задача (♋) эквивалентна следующей (получаемой из нее удалением ограничений монотонности усилий $x_\theta \geqslant x_{\theta+1}$):

$$\begin{gathered}\sum_{\theta\in\Theta} \mu_\theta(x_\theta - w_\theta) \to \max_{w_\theta, x_\theta}\\ w_\theta - c_\theta(x_\theta) = w_{\theta+1} - c_\theta(x_{\theta+1}) \text{ для всех } \theta < n,\\ w_n - c_n(x_n) = 0.\end{gathered} \qquad (♊)$$

Как следствие, в этом случае задача составления оптимальных пакетов сводится к решению последовательности n независимых задач.

Теорема 14.4:

Предположим, что $d_\theta(x)$ и $d_{\theta+1}(x) - d_\theta(x)$ возрастают по x для всех θ и $\frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}$ возрастает по θ. Тогда задачи (♊) и (♋) эквивалентны. ┘

Доказательство: Для доказательства утверждения достаточно показать, что решения $(\bar{x}_\theta)$ задач

$$\Pi_\theta(x) = x - c_\theta(x) - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta} d_{\theta-1}(x) \to \max_{x\in X}$$

удовлетворяют опущенным ограничениям (монотонности).

Поскольку $\bar{x}_\theta$ максимизирует $\Pi_\theta(x)$, а $\bar{x}_{\theta+1}$ максимизирует $\Pi_{\theta+1}(x)$, то выполняются неравенства

$$\Pi_\theta(\bar{x}_\theta) \geqslant \Pi_\theta(\bar{x}_{\theta+1})$$

и

$$\Pi_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}) \geqslant \Pi_{\theta+1}(\bar{x}_\theta).$$

Сложив эти неравенства, после преобразований получим

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}[d_\theta(\bar{x}_\theta) - d_{\theta-1}(\bar{x}_\theta)] + \left(1 + \frac{\mathrm{M}_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d_\theta(\bar{x}_\theta) \geqslant\\ \geqslant \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}[d_\theta(\bar{x}_{\theta+1}) - d_{\theta-1}(\bar{x}_{\theta+1})] + \left(1 + \frac{\mathrm{M}_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d_\theta(\bar{x}_{\theta+1}).\end{gathered}$$

Так как в предположениях теоремы функция

$$\frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}[d_\theta(x) - d_{\theta-1}(x)] + \left(1 + \frac{\mathrm{M}_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d_\theta(x)$$

является возрастающей, то $\bar{x}_\theta \geqslant \bar{x}_{\theta+1}$. ■

Если к сделанным предположениям добавить предположение о дифференцируемости функций, то можно доказать, что $\bar{x}_\theta > \bar{x}_{\theta+1}$ для внутренних решений. По условиям первого порядка

$$\Pi'_\theta(\bar{x}_\theta) = 1 - c'_\theta(\bar{x}_\theta) - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta} d'_{\theta-1}(\bar{x}_\theta) = 0,$$

$$\Pi'_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}) = 1 - c'_{\theta+1}(\bar{x}_{\theta+1}) - \frac{\mathrm{M}_\theta}{\mu_{\theta+1}} d'_\theta(\bar{x}_{\theta+1}) = 0.$$

Пусть $\bar{x}_\theta = \bar{x}_{\theta+1} = \bar{x}$. Тогда

$$\Pi'_{\theta+1}(\bar{x}) - \Pi'_\theta(\bar{x}) = c'_{\theta+1}(\bar{x}) - c'_\theta(\bar{x}) + \frac{\mathrm{M}_\theta}{\mu_{\theta+1}} d'_\theta(\bar{x}) - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta} d'_{\theta-1}(\bar{x}) = 0$$

или

$$\left(1 + \frac{\mathrm{M}_\theta}{\mu_{\theta+1}} - \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}\right) d'_\theta(\bar{x}) + \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}\Big(d'_\theta(\bar{x}) - d'_{\theta-1}(\bar{x})\Big) = 0.$$

Так как $\frac{\mathrm{M}_\theta}{\mu_{\theta+1}} > \frac{\mathrm{M}_{\theta-1}}{\mu_\theta}$, $d'_\theta(\bar{x}) > 0$, и $d'_\theta(\bar{x}) - d'_{\theta-1}(\bar{x}) \geqslant 0$, то левая часть положительна. Получили противоречие, т. е. $\bar{x}_\theta \neq \bar{x}_{\theta+1}$.

14.3.2 Модель найма с асимметричной информацией при монопольном положении нанимателя: общий случай

Предположим, что результат усилий $x \in X$ работника — доход $\tilde{y}(x)$, представляющий собой случайную величину, распределение которой (F_x) зависит от x, но не зависит от типа ($F_{x\theta} = F_x$). Будем считать, что ожидаемый доход $y(x) = \mathsf{E}_x \, \tilde{y}(x)$ — монотонно возрастающая вогнутая функция уровня усилий, причем $y(0) = 0$.

Предположение о независимости распределения дохода от типа существенно упрощает анализ, поскольку в этом случае величина дохода не дает нанимателю информации о типе работника. При этом предположении естественно считать, что контракт — это функция только от усилий, но не от $\tilde{y}$: $w = w(x)$.

Наниматель имеет право претендовать на весь доход (за вычетом оплаты по контракту). Поэтому при данном уровне усилий x нейтральный к риску наниматель максимизирует ожидаемую прибыль

$$\mathsf{E}_x(\tilde{y}(x) - w(x)) = y(x) - w(x),$$

где $w(x)$ — оплата уровня усилий x работника.

Пусть задано распределение вероятностей для типов работников. Например, в дискретном случае, описанном выше, оно определяется указанием вероятности μ_θ для работника каждого типа θ. Если работник типа θ осуществляет усилия x_θ, то с точки зрения нанимателя усилия — это случайная величина. (В дискретном случае — это дискретная случайная величина, принимающая значение x_θ с вероятностью μ_θ.) Таким образом, выигрыш нанимателя равен

$$\mathsf{E}_\theta[\mathsf{E}_{x_\theta}(\tilde{y}(x_\theta) - w(x_\theta))]$$

или, с учетом предположения о независимости функции распределения дохода от типа работника,

$$\mathsf{E}_\theta[y(x_\theta) - w(x_\theta)].$$

Предполагаем, что функция полезности работника любого типа сепарабельна по деньгам и усилиям:

$$u_\theta(x, w) = v_\theta(w) - c_\theta(x),$$

где, как и выше, $v_\theta(w)$ — полезность оплаты w, а $c_\theta(x)$ — тягость усилий x для работника типа θ. Мы будем предполагать, что $v_\theta(w)$ — возрастающая вогнутая функция, а $c_\theta(x)$ — возрастающая выпуклая функция.

Разные типы работников характеризуются разной формой функций $v_\theta(w)$ и $c_\theta(x)$. Каждый тип работников характеризуется уровнем резервной полезности $u_{0\theta}$, заданной экзогенно.

Модель найма со скрытой информацией можно представить как динамическую игру с неполной информацией. Последовательность ходов в этой игре следующая (см. также Рис. 14.19).

⓪ «Природа» выбирает тип работника.

① Наниматель, не зная типа, предлагает контракт $w(\cdot)$.

② Работник (зная свой тип) решает, подписывать контракт или нет.

③ Если работник подписывает контракт, то он (зная свой тип) выбирает уровень усилий x.

④ «Природа» при данном x по распределению F_x случайным образом «генерирует» $\tilde{y}(x)$.

Будем анализировать эту игру, используя обратную индукцию.

Уровень усилий x_θ^*, выбираемый работником типа θ, является решением задачи

$$v_\theta(w(x)) - c_\theta(x) \to \max_{x \in X}$$

(см. Рис. 14.20). В дальнейшем будем предполагать, что наниматель может выбирать только такие контракты, для которых эта задача имеет решение.

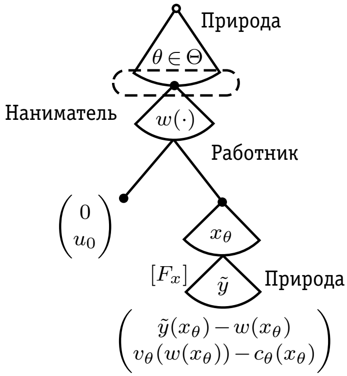


Рис. 14.19. *Представление модели найма со скрытой информацией в виде дерева*

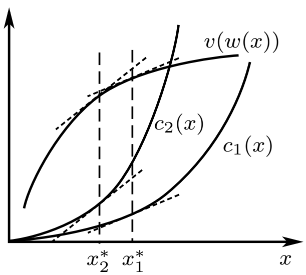


Рис. 14.20. *Выбор оптимальных действий работниками двух разных типов*

Далее, работник типа θ сравнивает значение этой задачи — уровень полезности, которую ему обеспечивает данный контракт, со своей резервной полезностью и решает, подписывать ли ему контракт. Работник подписывает контракт, если

$$\max_{x \in X} v_\theta(w(x)) - c_\theta(x) \geqslant u_{0\theta}.$$

В дальнейшем мы будем предполагать[18], что $v_\theta(w) = w$.

[18]Анализ в общем случае мы предлагаем читателю проделать самостоятельно. Его можно провести двумя способами: несколько модифицировать анализ, проведенный в тексте, или произвести соответствующую замену переменных.

Учитывая сказанное, запишем задачу работника в следующем виде:

$$w(x) - c_\theta(x) \to \max_{x \in X},$$

где $c_\theta(x)$ теперь обозначает величину $c_\theta(x) + u_{0\theta}$.

Поскольку ожидаемый доход $y(x)$ — монотонная функция усилий, то можно измерять уровень усилий непосредственно величиной ожидаемого дохода. Таким образом, без ограничения общности будем считать, что уровень усилий измеряется величиной ожидаемого дохода, т. е. $y(x) = x$.

Обозначим через $I(\cdot)$ индикаторную функцию, которая принимает значение 1, если условие в скобках выполнено, и 0 в противном случае.

В этих обозначениях задача нанимателя по выбору оптимального контракта имеет следующий вид:

$$\mathsf{E}\,\Pi = \mathsf{E}[I(w(x) - c_\theta(x) \geqslant 0)(x_\theta^* - w(x_\theta^*))] \to \max_{w(\cdot)}$$
$$w(x_\theta^*) - c_\theta(x_\theta^*) \geqslant w(x) - c_\theta(x)\ \forall x \in X\ \forall \theta \in \Theta,$$

В случае, если существует конечное число типов работников, можно решать эту задачу перебором. При этом выделяется подмножество типов работников, для которых выполнено ограничение участия. Для каждого такого подмножества решается эта задача, дополненная соответствующими ограничениями участия/неучастия и находится значение ожидаемой прибыли в максимуме. Затем находится то подмножество, для которого такая ожидаемая прибыль максимальна.

Если для рассматриваемых работников выполнено условие возрастания издержек по θ

$$c_\theta(x) \geqslant c_\varphi(x) \ \Leftrightarrow\ \theta \geqslant \varphi,$$

то перебор можно сократить, поскольку условия найма, выгодные для работников типа θ, окажутся таковыми и для работника типа φ при $\varphi < \theta$, т. е.

$$w(x) - c_\theta(x) \geqslant 0 \ \Rightarrow\ w(x) - c_\varphi(x) \geqslant 0.$$

Кроме того, из того, что работнику типа θ безразлично, подписывать контракт или нет, следует, что выполняется ограничение неучастия для работника типа φ при $\varphi > \theta$, т. е.

$$w(x) - c_\theta(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi > \theta \Rightarrow w(x) - c_\varphi(x) \leqslant 0.$$

Из этих рассуждений следует, что можно рассматривать задачи, в которых подписывают контракт только работники типа θ, где θ меньше некоторого порогового значения, причем ограничения неучастия для остальных типов работников можно не учитывать. Это позволяет без потери общности ограничиться анализом случая, когда наниматель предлагает контракт, который выгодно подписать работнику любого типа, т. е. когда подмножество типов работников, для которых выполнено ограничение участия, совпадает со всем множеством Θ.

Проанализируем такой случай. Ему соответствует следующая задача:

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}\,\Pi = \mathsf{E}(x^*_\theta - w(x^*_\theta)) \to \max_{w(\cdot)} \\
w(x^*_\theta) - c_\theta(x^*_\theta) \geqslant w(x) - c_\theta(x)\ \forall x \in X,\ \forall \theta \in \Theta, \\
w(x^*_\theta) - c_\theta(x^*_\theta) \geqslant 0\ \forall \theta \in \Theta.
\end{gathered}$$

Как и в модели с наблюдаемыми действиями, мы предполагаем, что работник выбирает те действия, которые выгодны нанимателю, поэтому можно считать, что наниматель сам выбирает усилия x^*_θ:

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}\,\Pi = \mathsf{E}(x^*_\theta - w(x^*_\theta)) \to \max_{w(\cdot), x^*_\theta \in X} \\
w(x^*_\theta) - c_\theta(x^*_\theta) \geqslant w(x) - c_\theta(x)\ \forall x \in X,\ \forall \theta \in \Theta, \\
w(x^*_\theta) - c_\theta(x^*_\theta) \geqslant 0\ \forall \theta \in \Theta.
\end{gathered} \tag{)-(}$$

Эта задача имеет бесконечно много решений. Для того чтобы охарактеризовать все ее решения, мы воспользуемся вспомогательной задачей, в которой рассматриваются только точки $\{x^*_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ и значения функции $w(\cdot)$ в этих точках. При этом в ограничении совместимости стимулов множество всех возможных действий X заменяется на множество $\{x^*_\theta\}_{\theta\in\Theta}$. Упростим обозначения: пусть x_θ — усилия, которые, как планирует наниматель, должен осуществлять работник типа θ, а w_θ — соответствующая оплата. Пары (x_θ, w_θ) будем называть, как и выше, пакетами. Получаем следующую вспомогательную задачу поиска оптимальных пакетов:

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}\,\Pi = \mathsf{E}(x_\theta - w_\theta) \to \max_{w_\theta, x_\theta \in X} \\
w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant w_\varphi - c_\theta(x_\varphi)\ \forall \theta, \varphi \in \Theta, \\
w_\theta - c_\theta(x_\theta) \geqslant 0\ \forall \theta \in \Theta.
\end{gathered}$$

Выше мы проанализировали данную задачу.

Если издержки от усилий $c_\theta(\cdot)$ ведут себя неким регулярным образом в зависимости от θ, то, рассматривая эту упрощенную задачу, мы не теряем существенную информацию относительно оптимальных контрактов. На основе любого ее решение можно построить функцию $w(\cdot)$ так, что $w_\theta = w(x_\theta)$ $\forall\theta \in \Theta$, причем $w(\cdot), \{x_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ составляют оптимальный контракт (обеспечивают максимум в задаче ($\rtimes$)). И наоборот, если $w(\cdot), \{x_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ — оптимальный контракт (решение задачи ($\rtimes$)), то соответствующие пары $(w(x_\theta), x_\theta)$ являются решениями вспомогательной задачи.

Покажем, что любой набор оптимальных пакетов $\{(\bar{w}_\theta, \bar{x}_\theta)\}$ можно реализовать как контракт (обуславливающий выбор работниками всех типов уровней усилий, соответствующих предназначенным им пакетам). Существует простой способ сделать это — реализовать данный набор пакетов как пакетный контракт, т. е. контракт следующего «ступенчатого» вида:

$$w(x) = \begin{cases} \underline{w}, & x < \bar{x}_n, \\ \bar{w}_\theta, & x \in [\bar{x}_\theta, \bar{x}_{\theta-1}),\ \theta > 1, \\ \bar{w}_1, & x \geq \bar{x}_1, \end{cases}$$

где $\underline{w}$ — достаточно малое число. (Можно также платить $\bar{w}_\theta$ при $x = \bar{x}_\theta$ и некоторую достаточно малую величину $\underline{w}$ при любых других уровнях усилий, либо в условиях контракта в принципе запретить усилия, отличные от $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$.)

Заметим, что работнику типа θ при таком контракте выгодно выбрать усилия $\bar{x}_\theta$, гарантирующие оплату $\bar{w}_\theta$: любому $x \in (\bar{x}_\varphi, \bar{x}_{\varphi-1})$ он предпочитает $x = \bar{x}_\varphi$, а $\bar{x}_\theta$ для него не хуже $\bar{x}_\varphi$ (см. Рис. 14.21).

Покажем, что этот контракт оптимален. Пусть это не так, т. е. существует другой допустимый контракт $\breve{w}(\cdot)$, который обеспечивает нанимателю более высокую прибыль. Пусть при этом контракте работник типа θ выбирает усилия $\breve{x}_\theta$. Тогда пакеты $\{(\breve{w}_\theta, \breve{x}_\theta)\}$, где $\breve{w}_\theta = \breve{w}(\breve{x}_\theta)$, являются допустимыми в задаче нахождения оптимальных пакетов ($\Taurus$). Это противоречит оптимальности пакетов $\{(\bar{w}_\theta, \bar{x}_\theta)\}$.

Наоборот, любой оптимальный контракт $w(\cdot)$ и соответствующие ему уровни усилий

$$x^*_\theta \in \operatorname{argmax}\{w(x) - c_\theta(x)\}$$

определяют набор оптимальных пакетов $\{(w(x^*_\theta), x^*_\theta)\}$. Действительно, если эти пакеты неоптимальны, то существуют другие допустимые в задаче ($\Taurus$) пакеты, обеспечивающие нанимателю более высо-

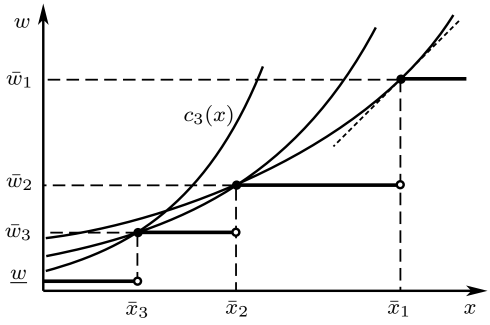


Рис. 14.21. *Оптимальный пакетный контракт для трех типов работников*

кую прибыль. Однако эти альтернативные пакеты можно реализовать как пакетный контракт.

Вообще говоря, по данному набору оптимальных пакетов оптимальный контракт $w(\cdot)$ можно построить бесконечным числом способов. Требуется, чтобы функция $w(\cdot)$ проходила через точки (x_θ, w_θ), но не пересекала бы соответствующие кривые безразличия работников (лежала выше их).

Заметим, что функция $w(\cdot)$ будет иметь достаточно сложный вид. Например, если функции издержек дифференцируемы, то оптимальные пакеты нельзя реализовать в виде линейного контракта $w(x) = a + bx$: точки (x_θ, w_θ) могут не лежать на одной прямой, кроме того, при строгой выпуклости функций издержек кривые безразличия будут пересекать прямую, проходящую через эти точки даже в том случае, если они лежат на одной прямой. Более того, как правило, оптимальный контракт не может быть гладкой функцией.

Задачи

14.30 Рассматривается стандартная задача выбора оптимального контракта с двумя неизвестными типами работников (производная издержек одного всюду выше производной другого); предлагается два объема работы и два соответствующих уровня оплаты.

(A) Работник какого из типов выбирает более низкий уровень усилий, чем в случае, когда типы наблюдаемы?

(B) Работник какого из типов получит излишек полезности по сравнению с резервной полезностью?

(c) Работник какого из типов выбирает такой же уровень усилий, как и в случае, когда типы наблюдаемы?

14.31 В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника типа 1 равны $c_1(x) = x^2$, работника типа 2 — $c_1(x) = \alpha x^2$, причем доли работников обоих типов одинаковы. Определите характеристики оптимального контракта.

14.32 В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника типа 1 равны $c_1(x) = x^2$, работника типа 2 — $c_1(x) = 2x^2$. Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от доли работников первого типа.

14.33 В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника типа 1 равны $c_1(x) = x^2$, работника типа 2 — $c_1(x) = 2x^2$, причем доли работников обоих типов одинаковы. Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от резервной полезности работников типа 1 в предположении, что резервная полезность работников типа 2 равна нулю.

14.34 Заказчик нанимает подрядчика для производства некоторого блага. Ценность каждой единицы этого блага для заказчика равна 8. Подрядчик с вероятностью $1/3$ может оказаться имеющим функцию полезности $u_1 = \sqrt{12 + w} - Q$ и с вероятностью $2/3$ — имеющим функцию полезности $u_2 = \sqrt{5 + w} - Q$, где w — величина денежного дохода подрядчика, а Q — стоимость произведенных благ. Резервный уровень полезности подрядчика любого типа равен $u_0 = 1$. Найдите оптимальный контракт вида $\{(Q_1, w_1), (Q_2, w_2)\}$ в условиях асимметричной информации (заказчик не различает подрядчиков).

14.35 Рассмотрите модель найма со скрытыми типами работников. Имеется два типа работников (A и B), которые встречаются с равной вероятностью. Работники могут делать либо низкие усилия (L), принося нанимателю доход 10, либо высокие (H), принося нанимателю доход 20. Резервная полезность работника любого типа равна нулю. Тягость усилий для работника типа A равна 7 при уровне L и 15 при уровне H. Тягость усилий для работника типа B равна 8 при уровне L и 18 при уровне H.

(a) Предположим, что наниматель хочет, чтобы работник типа A делал усилия H, а работник типа B делал усилия L. Запишите ограничения, которым должны удовлетворять уровни оплаты. Найдите оптимальные уровни оплаты.

(B) Докажите, что вычисленный вами контракт будет оптимальным для нанимателя (любой другой вариант либо нельзя реализовать, либо он дает меньшую прибыль: ◆ когда работники одного из типов не работают; ◆ когда работники обоих типов делают одинаковые усилия; ◆ когда работники типа A делают усилия L, а работники типа B — H).

14.36 В модели найма со скрытой информацией с n типами работников ($\theta = 1, \ldots, n$) покажите, что если $\mu_\theta = \frac{1}{n}$ и $c_\theta(x) = \theta c(x)$, где $c(x)$ — возрастающая выпуклая функция, то ограничение монотонности усилий несущественно, т. е. задача определения оптимального контракта распадается на n независимых задач.

14.37 Пусть в модели найма со скрытой информацией $c_\theta(x) = \theta x$ и функция дохода $y(x)$ такова, что предельный доход положителен и убывает. Предположим, что решение задачи поиска оптимальных пакетов $(\bar{x}_\theta, \bar{w}_\theta)$ является внутренним, причем все типы работников подписывают контракт.

(A) Покажите, что если имеется два типа работников (θ_1 и θ_2), причем $\theta_1 < \theta_2$, то уровни усилий удовлетворяют соотношениям

$$y'(\bar{x}_2) = \theta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2}(\theta_1 - \theta_2),$$

а

$$y'(\bar{x}_2) = \theta_1.$$

(B) Покажите, что если имеется три типа работников (θ_1, θ_2 и θ_3), причем $\theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2 > 0$, то ограничение монотонности усилий является существенным тогда и только тогда, когда $\mu_2 < \mu_1\mu_3$. Вычислите оптимальные пакеты в случае, если $\mu_2 < \mu_1\mu_3$ и если $\mu_2 \geqslant \mu_1\mu_3$.

(C) Покажите, что если имеются n типов работников, причем

$$\theta_i - \theta_{i-1} = \theta_{i+1} - \theta_i > 0,$$

то достаточным условием несущественности ограничения монотонности усилий является неубывание отношения

$$\frac{\mu_1 + \cdots + \mu_{i-1}}{\mu_i}.$$

(D) Покажите, что достаточное условие в пункте (C), вообще говоря, не является необходимым.

14.38 Пусть в модели найма со скрытой информацией допустимые усилия задаются условием $x \geqslant 0$, функция дохода $y(x)$ обладает следующими свойствами:

(i) $y'(x) \to \infty$ при $x \to 0$;

(ii) $y'(x)x \to 0$ при $x \to 0$

и существуют работники двух типов, издержки усилий которых имеют вид $c_\theta(x) = \theta x$. Докажите, что наниматель наймет работников обоих типов, т. е. $\bar{x}_1 > 0$ и $\bar{x}_2 > 0$.

14.39 Рассмотрим ситуацию ценовой дискриминации следующего вида. Единственный производитель и продавец частного блага, производство которого характеризуется постоянными предельными издержками, сталкивается с двумя типами покупателей этого блага ($\theta = 1, 2$), оценки которых имеют вид $v_\theta(x) = \theta\sqrt{x}$. Покупатели двух типов встречаются с вероятностями μ и $1 - \mu$ соответственно.

(A) Проинтерпретируйте эту модель как модель найма и найдите оптимальный контракт.

(B) Проделайте то же самое для трех типов покупателей.

14.40 В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника типа 1 равны $c_1(x) = 0{,}5x^2$, работника типа 2 — $c_1(x) = x^2$. Пусть контракт ищется среди линейных по усилиям схем (базовая оплата плюс премия за усилия, пропорциональная величине усилий). Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от доли работников первого типа. Сравните с оптимальным пакетным контрактом.

14.41 На рынке страховых услуг[19] имеется два типа страхователей — с низкой μ_L и высокой μ_H вероятностью наступления страхового случая. Страховой случай заключается в потере актива ценностью K рублей. Во всех других аспектах они одинаковы — каждый исходно обладает богатством ω (включая рассматриваемый актив) и его предпочтения характеризуются функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией $u(x) = \ln(x)$, где x — богатство.

На рынке страховых услуг имеется только одна нейтральная к риску страховая компания, предлагающая контракт в виде набора пакетов. (Для упрощения анализа можно считать, что контракт непосредственно задает богатство страхователя, а не платежи, т. е. пакет имеет вид (x_1, x_2), где x_1 — богатство, если страховой случай не наступил, а x_2 — если страховой случай наступил).

(A) Сформулируйте задачу страховой компании и проинтерпретируйте ее как задачу нанимателя в модели найма.

(B) Каким окажется выбранный страховой контракт в случае полной симметричной информации, т. е. в условиях, когда страховая

---

[19] См. J. E. Stiglitz · Monopoly, Non-Linear Pricing and Imperfect Information: The Insurance Market, *Review of Economic Studies* **44** (1977): 407–430.

компания знает тип страхователя? Проиллюстрируйте анализ на графике.

(c) Каким окажется выбранный страховой контракт в случае асимметричной информации, т. е. в условиях, когда страховая компания знает только распределение вероятностей типов страхователя? Проиллюстрируйте анализ на графике.

Глава

Модель найма: конкуренция между нанимателями

15

В этой главе мы продолжим анализ моделей найма со скрытыми действиями, отказавшись от сделанного ранее предположения о монопольном положении нанимателя, и будем считать, что существует по крайней мере два нанимателя, предлагающие контракты работникам, тип которых они не наблюдают.

Здесь мы обсудим две модели взамодействия нанимателей и работников, различающиеся последовательностью ходов. В первой, как и в моделях найма, рассмотренных в гл. 14, первый ход делает наниматель, предлагая контракт найма. Это так называемая модель скрининга. Во второй первый ход делает работник, осуществляя действия, позволяющие нанимателю судить о типе работника. Это так называемая модели сигнализирования. В обеих моделях предполагается, что исходно наниматели не обладают информацией о типе работника, т. е. это модификации модели найма со скрытой информацией, рассмотренной ранее (см. параграф 14.3).

15.1 Конкуренция между нанимателями: конкурентный скрининг

В этом параграфе мы будем считать, что другие характеристики ситуации найма, описанные в параграфе 14.3, остаются без изменения. В частности, как и раньше, будем предполагать, что результат усилий работника не зависит от его типа. Это предположение позволяет рассматривать контракты, обуславливаемые только уровнем усилий (но не результата).

В этом случае игра имеет следующий вид.

⓪ «Природа» выбирает тип работника.

① Наниматель j, не зная типа работника, предлагает ему контракт $w_j(\cdot)$, причем все наниматели выбирают контракт одновременно.

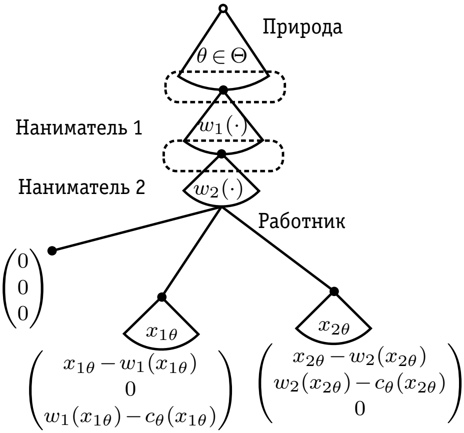


Рис. 15.1. *Дерево для модели найма со скрытой информацией при конкуренции нанимателей*

② Работник (зная свой тип) решает, подписывать ли ему контракт или нет, и если подписывать, то какой из двух.

③ Если работник подписывает j-й контракт, то он (зная свой тип) выбирает уровень усилий x.

На Рис. 15.1 изображено дерево этой игры.

Охарактеризуем возможные равновесия данной игры, т. е. равновесные контракты модели найма при конкуренции нанимателей, ограничившись характеристикой соответствующих равновесных пакетов. Полную игру для целей анализа заменим следующей упрощенной игрой.

⓪ «Природа» выбирает тип работника.

① Наниматели одновременно предлагают работнику свои меню пакетов $\{(w_{j\theta}, x_{j\theta})\}_{\theta\in\Theta}$.

② Работник решает, подписывать ли ему контракт или нет, и если подписывать, то какой из пакетов выбрать.

Мы опускаем формальное доказательство того, что описанные игры в определенном смысле эквивалентны. Такое доказательство можно построить, пользуясь идеями параграфа 14.3.

Будем предполагать в дальнейшем, что равновесие в игре таково, что в нем работник обязательно подписывает один из предложенных контрактов (ограничение участия выполнено).

Анализируя такую игру с использованием обратной индукции, получим, что равновесные пакеты $(\bar{x}_{j\theta}, \bar{w}_{j\theta})$ характеризуются следующими свойствами.

◆ Работник выбирает (из всех пакетов всех нанимателей) пакет $(w_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$, дающий ему максимальную полезность:

$$\bar{w}_{j\theta} - c_\theta(\bar{x}_{j\theta}) \geqslant \bar{w}_{i\varphi} - c_\theta(\bar{x}_{i\varphi}) \text{ для всех } \theta, \varphi \in \Theta \text{ и } i = 1, 2.$$

При использовании обратной индукции здесь возникает неоднозначность в случае, когда работнику безразлично, пакет какого нанимателя выбрать. Сделаем предположение (аналогичное предположению модели Бертрана), что в этом случае работник использует смешанную стратегию, выбирая нанимателей с одинаковой вероятностью.

◆ Наниматель j предлагает меню пакетов $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$, дающий ему максимальную ожидаемую прибыль при данном меню пакетов конкурента.

Для того чтобы упростить анализ, будем предполагать, что функции издержек $c_\theta(\cdot)$ строго выпуклы.

Прежде чем рассмотреть модель с ненаблюдаемыми типами, проанализируем ситуацию, когда тип работника известен нанимателю. Покажем, что в этом случае решение игры (равновесные пакеты $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$) имеет вид

$$\bar{x}_{j\theta} = \bar{x}_\theta = \hat{x}_\theta, \quad \bar{w}_{j\theta} = \bar{w}_\theta = \bar{x}_\theta,$$

где

$$\hat{x}_\theta = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\{x - c_\theta(x)\}$$

(при строгой выпуклости издержек аргмаксимум здесь состоит из единственной точки). Доказательство этого факта проведем в два этапа.

Во-первых, покажем, что прибыль каждого нанимателя от найма работника любого типа равна нулю. Прибыль не может быть отрицательной, поскольку всегда есть возможность предложить пакет, который никто не выберет и получать нулевую прибыль. Прибыль также не может быть положительной. Действительно, пусть это не так и существуют наниматель (например, $j = 1$) и тип работника, такие что от сделки с этим работником этот наниматель получает положительную прибыль ($\Pi_1 > 0$). Здесь может быть два случая: (1) второй наниматель предлагает невыгодный работнику контракт и, следовательно, получает нулевую прибыль и (2) работник безразличен в выборе между двумя предлагаемыми контрактами. Во втором случае оба нанимателя получают одинаковую положительную прибыль ($\Pi_1 = \Pi_2 > 0$). В обоих случаях второй наниматель мог бы предложить этому работнику пакет с тем же уровнем усилий, но с несколько более высокой оплатой. Работник тогда выбрал бы новый пакет, и второй наниматель получил бы при этом прирост прибыли. В случае (1) в первом приближении прибыль станет равной Π_1, а в случае (2) она почти удвоится (увеличится в первом приближении до $2\Pi_1 = 2\Pi_2$).

Таким образом, в исследуемом равновесии прибыль каждого нанимателя от найма работника любого типа равна нулю, и, следовательно, оплата усилий равна производимому работником доходу:

$$\bar{w}_{j\theta} = \bar{x}_{j\theta}.$$

Во-вторых, покажем, что наниматели предлагают работнику типа θ пакет, обуславливающий уровень усилий

$$\bar{x}_{j\theta} = \bar{x}_{\theta} = \hat{x}_{\theta}.$$

Действительно, пусть это не так и наниматель j предлагает для работников типа θ пакет $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$, такой что $\bar{x}_{j\theta}$ не совпадает с $\hat{x}_{\theta}$. Величина

$$\Delta = \hat{x}_{\theta} - c_{\theta}(\hat{x}_{\theta}) - (\bar{x}_{j\theta} - c_{\theta}(\bar{x}_{j\theta}))$$

при этом будет положительной ($\Delta > 0$), поскольку $\hat{x}_{\theta}$ — единственный максимум функции $x - c_{\theta}(x)$. Но тогда пакет $(\hat{x}_{\theta} - \Delta/2, \hat{x}_{\theta})$ предпочитается работником типа θ, поскольку

$$\hat{x}_{\theta} - \Delta/2 - c_{\theta}(\hat{x}_{\theta}) = \Delta/2 + \bar{x}_{j\theta} - c_{\theta}(\bar{x}_{j\theta}) > \bar{x}_{j\theta} - c_{\theta}(\bar{x}_{j\theta}),$$

и дает предложившему ему нанимателю более высокую прибыль $\Delta/2 > 0$, чем $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta}) = (\bar{x}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$. Такая ситуация не может возникнуть в равновесии.

Поскольку каждая из рассматриваемых задач имеет единственное решение при строгой выпуклости издержек, то в равновесии все фирмы j предлагают работнику каждого из типов θ одинаковые контракты: $\bar{x}_{j\theta} = \hat{x}_{\theta}$ (см. Рис. 15.2).

Сравнивая этот результат с тем, который имеет место при монопольном положении нанимателя, отметим, что равновесные пакеты в данном случае характеризуются тем же объемом усилий, но более высокими уровнями оплаты. (Мы предполагаем здесь, что рассматривается случай, когда оптимальный «монопольный» пакет дает нанимателю положительную прибыль.)

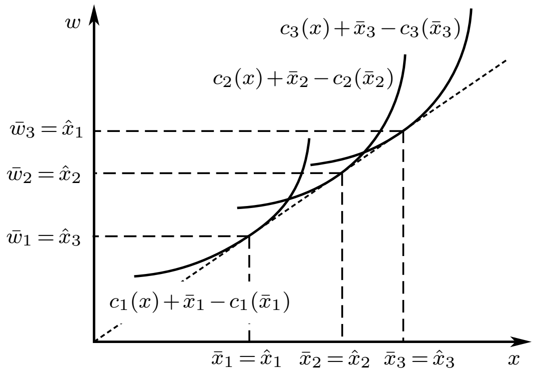


Рис. 15.2. *Равновесные пакеты при наблюдаемости типов, три типа работников*

Описанное равновесие оказывается оптимальным по Парето, поскольку индикатор благосостояния

$$W = \sum_{\theta\in\Theta} \mu_\theta(x_\theta - c_\theta(x_\theta))$$

в нем достигает максимума.

Покажем, что эти же пакеты $(\hat{x}_\theta, \hat{x}_\theta)$ составляют единственное равновесие при ненаблюдаемости типов. Сначала докажем, что это равновесие. Во-первых, для этих контрактов выполнены условия совместимости стимулов, т. е.

$$\bar{w}_\theta - c_\theta(\bar{x}_\theta) \geqslant \bar{w}_\varphi - c_\theta(\bar{x}_\varphi)\ \forall\theta, \varphi \in \Theta,$$

поскольку в данном случае они имеют вид

$$\hat{x}_\theta - c_\theta(\hat{x}_\theta) \geqslant \hat{x}_\varphi - c_\theta(\hat{x}_\varphi)\ \forall\theta, \varphi \in \Theta.$$

Справедливость неравенства следует из определения $\hat{x}_\theta$.

Во-вторых, ни одна из фирм не может предложить систему пакетов, которая дала бы ей положительную ожидаемую прибыль. Пусть это не так. Тогда эта альтернативная система пакетов содержит пакет, для которого прибыль положительна, и работник одного из типов, например θ, получает от этого пакета более высокую полезность, чем от пакета $(\hat{x}_\theta, \hat{x}_\theta)$. Этого быть не может, поскольку сумма прибыли фирмы и полезности работника этого типа от любого пакета (w, x) составляет величину $x - c_\theta(x)$, не превышающую $\hat{x}_\theta - c_\theta(\hat{x}_\theta)$ по определению $\hat{x}_\theta$.

Осталось показать, что других равновесий нет. Ограничимся анализом ситуации с двумя типами работников и двумя нанимателями.

Как и в ситуации с единственным нанимателем, мыслимы два типа равновесий: разделяющие равновесия и объединяющие равновесия. Таким образом, мы должны показать, что в данной ситуации объединяющих равновесий не существует, а любое разделяющее равновесие совпадает с описанным равновесием (равновесием при наблюдаемости типов).

Установим сначала ряд свойств равновесий в ситуации с ненаблюдаемыми типами.

◆ Если пакеты $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$ являются равновесными, то ожидаемая прибыль каждого нанимателя равна нулю.

Во-первых, в равновесии ожидаемая прибыль каждого нанимателя неотрицательна, поскольку он всегда может предложить непривлекательные пакеты и получить по крайней мере нулевую прибыль.

Во-вторых, все выбираемые любым типом работника θ пакеты равнопривлекательны как для этого работника, так и для предложивших их нанимателей. То, что они равнопривлекательны для работника, очевидно. Равнопривлекательность для нанимателей следует из того, что если один из нанимателей получает более низкую прибыль от сделок с работниками типа θ, чем другой, то он мог бы предложить работникам этого типа пакеты своего конкурента. При этом условия самовыявления не нарушаются, поскольку для работников других типов предпочтительны другие пакеты.

В-третьих, в равновесии ни один из нанимателей не будет получать положительную прибыль. Пусть это не так и один из нанимателей, например первый, получает положительную прибыль ($\Pi_1 > 0$), причем $\Pi_1 \geqslant \Pi_2$. При этом будет выполнено строгое неравенство $\Pi_1 + \Pi_2 > \Pi_2$. Для каждого θ обозначим через $(\bar{w}_\theta, \bar{x}_\theta)$ пакет (один из пакетов, если их несколько), который выбирают работники типа θ. Второй наниматель может отказаться от своего меню пакетов и предложить вместо него меню, состоящее из пакетов вида $(\bar{w}_\theta + \varepsilon, \bar{x}_\theta)$, где $\varepsilon > 0$. Каждый из этих пакетов более привлекателен для работника соответствующего типа θ, чем $(\bar{w}_\theta, \bar{x}_\theta)$, причем ограничения самовыявления не нарушаются, поскольку оплата для работников всех типов повышается на одну и ту же величину $\varepsilon > 0$. Следовательно, это меню пакетов привлечет каждого работника и при достаточно малом ε даст второму нанимателю более высокую прибыль (близкую к $\Pi_1 + \Pi_2$). Такое невозможно в равновесии.

◆ В равновесии прибыль каждого нанимателя от сделки с каждым работником равна нулю, т. е. для любого пакета, который выбирается работниками, выполнено $\bar{w}_{j\theta} = \bar{x}_{j\theta}$. Предположим, что это не выполнено для одного из нанимателей. Тогда существует хотя бы один пакет, дающий этому нанимателю положительную прибыль. Тогда данный наниматель мог бы заменить все пакеты подобным пакетом и получить положительную прибыль.

Используя полученные свойства равновесия, докажем сформулированное выше утверждение о единственности равновесия. Пусть существует еще одно равновесие, такое что для одной из фирм (j) и для работников одного из типов (θ) выполнено

$$\bar{x}_{j\theta} \neq \hat{x}_\theta,$$

где, как и в случае наблюдаемости типов,

$$\hat{x}_\theta = \operatorname{argmax}\{x - c_\theta(x)\}.$$

Обозначим

$$\Delta = \hat{x}_\theta - c_\theta(\hat{x}_\theta) - (\bar{x}_{j\theta} - c_\theta(\bar{x}_{j\theta})).$$

При строгой выпуклости функции издержек, это положительная величина ($\Delta > 0$).

Пакет $(\hat{x}_\theta - \Delta/2, \hat{x}_\theta)$ более предпочтителен для работника типа θ, чем пакет $(\bar{w}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta}) = (\bar{x}_{j\theta}, \bar{x}_{j\theta})$, и дает нанимателю j положительную прибыль. (Рассуждения здесь в точности такие же, как выше для случая наблюдаемых типов.) При этом прибыль от сделок с любыми другими работниками не может уменьшиться, поскольку в равновесии прибыль от любого пакета равна нулю.

Таким образом, равновесные пакеты имеют вид $(\hat{x}_\theta, \hat{x}_\theta)$, ненаблюдаемость типов в этом простом случае не влияет на структуру равновесия. Это равновесие будет Парето-оптимальным. Фактически наниматели в данном случае используют линейный контракт вида $w(x) = x$, т. е. работник получает полностью доход, который он производит.

Следует отметить близкую аналогию данной модели и свойств равновесия с моделью олигополистической конкуренции Бертрана.

Задачи

15.1 Пусть в модели найма со скрытой информацией имеются два нанимателя и n типов работников с функциями издержек $c_\theta(x) = \theta x^2$. Вычислите равновесные пакеты.

15.2 Пусть в модели найма со скрытой информацией имеется более двух нанимателей. Охарактеризуйте все равновесия.

15.3 Пусть в модели найма со скрытой информацией имеются два нанимателя и два типа работников с функциями издержек $c_\theta(x) = \theta x^2$ и производительностями $y(x) = x/\theta$.

(A) Покажите, что в равновесии любого типа прибыль от сделки любого нанимателя с работником любого типа равна нулю.

(B) Покажите, что не существует объединяющих равновесий.

(C) Покажите, что если существует разделяющее равновесие, то пакет для работников $\theta = 2$ совпадает с его пакетом при наблюдаемости типов, а для $\theta = 1$ определяется условием самовыявления и равенством нулю прибыли от сделки с ними.

(D) При каких условиях на доли работников разных типов равновесие существует? Вычислите равновесные пакеты, когда эти условия выполнены.

(E) При каких условиях равновесие будет Парето-оптимальным?

15.4 (Модель Ротшильда—Стиглица[1]). Измените условия задачи 14.41 на с. 973, предположив, что на рынке существует несколько страховых компаний.

(A) Переформулируйте эту ситуацию в духе модели найма, опишите соответствующую игру и концепцию решения в этой игре (равновесия Ротшильда—Стиглица на рынке страховых услуг).

(B) Покажите, что в условиях полной информации в равновесии Ротшильда—Стиглица фирмы получают нулевую прибыль. Найдите это равновесие.

(C) Покажите, что в условиях неполной информации в равновесии Ротшильда—Стиглица фирмы также получают нулевую прибыль.

(D) Покажите, что если равновесие существует, то оно является разделяющим. Вычислите это равновесие.

(E) Приведите пример, в котором равновесие Ротшильда—Стиглица не существует.

(F) Проиллюстрируйте анализ на графике в случае двух состояний мира и двух типов работников.

15.5 Рассмотрите ситуацию ценовой дискриминации, когда несколько фирм, производят (и продают) некоторое благо. Производство характеризуется постоянными предельными издержками, одинаковыми у всех фирм. Фирмы сталкиваются с покупателями разных типов ($\theta \in \Theta$), оценки которых (готовности платить) равны $v_\theta(x)$,

---

[1] См. M. Rothschild and J. E. Stiglitz. Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information, *Quarterly Journal of Economics* **90** (1976): 630–649.

где $v_\theta(\cdot)$ — возрастающая строго вогнутая функция. Количество покупателей типа $\theta(x)$ равно m_θ.

(А) Проинтерпретируйте эту модель как модель найма и найдите оптимальный контракт.

(В) Что будет, если предельные издержки постоянные, но разные у разных фирм?

15.2 Модель сигнализирования на рынке труда (модель Спенса)

В этом параграфе мы рассмотрим еще один тип моделей с конкуренцией между нанимателями — модели рынка труда, которые основываются на следующих предположениях.

- Имеется два нейтральных к риску и конкурирующих между собой нанимателя. Они обладают одной и той же технологией с постоянной отдачей от масштаба и единственным фактором производства — трудом[2].
- Существуют работники двух типов: L (низкопроизводительные) и H (высокопроизводительные). Работник типа L создает доход (добавленную стоимость) y_L, а работник типа H — доход y_H, причем $y_L < y_H$. (Для упрощения анализа мы рассмотрим вариант модели, в котором усилия работника могут принимать только одно значение, т. е. выбор усилий является тривиальным.)
- Наниматели при подписании контракта не различают типы работников, но располагают информацией о доле работников разных типов на рынке. Доля работников типа L равна $\mu_L > 0$, а доля работников типа H — $\mu_H > 0$.
- По тем или иным причинам оплата по контракту не может зависеть от дохода, произведенного работником[3].

В этих предположениях естественно считать, что взаимодействие экономических субъектов описывается игрой со следующей последовательностью ходов:

⓪ «Природа» выбирает тип работника $\theta = L$ или $\theta = H$ (с вероятностями μ_L и μ_H).

[2] Другими словами, если у нанимателя работают N_L работников типа L и N_H работников типа H, то общий созданный работниками продукт будет равен $Y = y_L N_L + y_H N_H$.

[3] Например, в фирмах работает большое количество работников, и наниматели наблюдают только совокупный результат их работы, но не вклад отдельного работника.

① Наниматели $j = 1, 2$, не зная типа работника, одновременно предлагают ему оплату w_1 и w_2.

② Работник (зная свой тип) решает, подписывать ему контракт или нет, и если подписывать, то какой из двух.

Выигрыш нанимателя j в этой игре равен его ожидаемой прибыли $\mu_L y_L + y_H \mu_H - w_j$ или нулю, если работник не подписывает контракт. Выигрыш работника типа θ равен w_j, если он соглашается на предложение нанимателя j, и резервному уровню оплаты $w_{\theta 0}$, если он отказывается от обоих предложений. (При квазилинейности функции полезности работника по оплате, т. е. когда она имеет вид $u_\theta(w) = w - c_\theta$, без ограничения общности можно считать, что издержки усилий c_θ равны нулю, поскольку их можно добавить к $w_{\theta 0}$).

Предположим[4], что ожидаемый доход $\bar{y} = \mu_L y_L + \mu_H y_H$ заведомо превышает w_{L0} и w_{H0}. Тогда в равновесии оба нанимателя предложат оплату $\bar{y}$, а работники (обоих типов) согласятся с одним из этих предложений[5].

Заметим, что при этом высокопроизводительные работники оказываются в невыгодном положении: существует потенциальная возможность получить более высокую полезность, но она не реализуется, поскольку наниматель в момент найма не может отличить их от низкопроизводительных работников. Поэтому высокопроизводительному работнику было бы выгодно каким-то образом сообщить нанимателю о том, какого он типа.

Предположим, что работники (до найма) могут совершать какие-то действия, связанные для них с издержками, которые могут сигнализировать нанимателю о том, какого они типа. Конечно, такие сигналы могут быть информативными только при определенных обстоятельствах, что мы и обсудим ниже.

[4]Если условия участия могут быть активными, то модель усложняется за счет эффекта неблагоприятного отбора, который был проанализирован в главе о рынках с асимметричной информацией на примере модели Акерлова. Действительно, у высокопроизводительных работников резервный уровень оплаты может быть более высоким, и они могут вообще не обращаться к рассматриваемым нанимателям. Тогда наниматели будут иметь дело только с низкопродуктивными работниками.

Нас интересуют здесь другие явления, и поэтому мы делаем предположение, исключающее этот случай.

[5]При доказательстве этого рассуждения могут быть примерно такими же, как в модели олигополии Бертрана.

Дополнив рассматриваемую модель еще одним, предварительным, ходом — подачей сигнала, получим модель Спенса сигнализирования на рынке труда[6].

Формально будем предполагать, что работник до того, как ему будут предложены условия занятости (контракт), осуществляет некоторые действия[7] $a \in A \subset \mathbb{R}$. Суть модели сигнализирования состоит в том, что высокопроизводительному работнику легче осуществлять такие действия, в том смысле, что для него увеличение уровня a связано с меньшим приростом издержек, чем для низкопроизводительного работника. Это может объясняться тем, что высокопроизводительные работники в принципе более способные. При таком предположении более высокий уровень действий a может служить сигналом нанимателям. Поэтому будем в дальнейшем называть переменную a сигналом. Множество сигналов A должно быть «достаточно богатым», чтобы сигнализирование было возможным, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что множество A содержит не менее чем два элемента.

Мы будем предполагать, что функция полезности работника типа θ следующим образом зависит от заработной платы w и уровня сигнала $a \in A$:

$$u_\theta(w, a) = w - c_\theta(a),$$

причем $c_\theta(a)$ — возрастающая (издержки работника растут с ростом a) и строго выпуклая функция (при дифференцируемости функций это означает, что предельная тягость действий a растет с ростом a).

Будем считать также, что функция $c_L(a) - c_H(a)$ неотрицательна и возрастает. Содержательно это и означает, что работник типа H является более производительным, чем работник типа L. При дифференцируемости функций издержек можно ввести более сильное требование, что предельная тягость действий выше для работника типа L: $c'_L(a) > c'_H(a)\ \forall a \in A$.

Доход, производимый работником, тоже может зависеть от сигнала[8]:

$$y = y_\theta(a),$$

---

[6] M. Spence. Job Market Signalling, *Quarterly Journal of Economics* **87** (1973): 355–374; M. Spence. Competitive and Optimal Responses to Signals: An Analysis of Efficiency and Distribution, *Journal of Economic Theory* **7** (1974): 296–332.

[7] У Спенса это образование.

[8] В статье 1973 года Спенс предполагал, что сигнал (полученное образование) не влияет на производительность работника. В следующей статье он расширил анализ и на случай, когда более высокий уровень образования обеспечивает более высокую производительность.

причем доход не убывает по этой переменной и является вогнутой функцией (предельная производительность действий a не возрастает). Доход от высокопроизводительного работника всегда выше, чем от низкопроизводительного: $y_H(a) > y_L(a)\ \forall a \in A$.

Модель сигнализирования Спенса предполагает следующую последовательность ходов.

⓪ «Природа» выбирает тип работника.

① Работник выбирает уровень сигнала a.

② Наниматель j, не зная типа, но наблюдая сигнал, предлагает ему оплату w_j, причем все наниматели выбирают контракт одновременно.

③ Работник (зная свой тип) решает, подписывать ему контракт или нет, и если подписывать, то какой из двух.

Проанализируем равновесия в этой байесовской динамической игре. При этом будем пользоваться концепцией совершенного байесовского равновесия.

В равновесии стратегия нанимателя предусматривает определенный контракт для каждого возможного уровня сигнала, поэтому такая стратегия задает оплату как функцию от сигнала:

$$w_j = w_j(a).$$

Таким образом, с точки зрения теории игр *ход* нанимателя в игре состоит в выборе числа w_j, а его *стратегия* — это функция $w_j(a)$.

Дерево этой игры представлено на Рис. 15.3. Заметьте, что рисунок (из-за сложности изображения) не отражает тот факт, что наниматели не знают типа работника, когда предлагают уровни заработной платы w_1 и w_2.

Для упрощения анализа будем предполагать в дальнейшем, что резервные полезности работников w_{L0} и w_{H0} ниже уровня $y_L(a) - c_L(a)$ для всех действий $a \in A$. Это предположение гарантирует, что оба нанимателя предложат такую оплату, что работники любого типа согласятся подписать контракт с одним из нанимателей.

В этой байесовской динамической игре ожидания и стратегии взаимосвязаны нетривиальным образом, поэтому для ее анализа недостаточно использовать обратную индукцию (см. обсуждение таких игр в Приложении A).

Обратная индукция может быть использована здесь только для анализа выбора контракта работником. При данном выборе уровня сигнала a и данных предложениях оплаты w_1, w_2 работник типа θ получит полезность $w_1 - c_\theta(a)$, если выберет первого нанимателя, и $w_2 - c_\theta(a)$, если выберет второго нанимателя. Работник выберет ва-

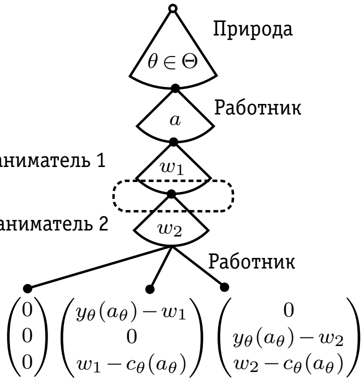


Рис. 15.3. *Представление модели сигнализирования в виде дерева*

риант, который дает ему наибольшую полезность, т. е. нанимателя, предлагающего самую высокую оплату. В случае, когда $w_1 = w_2$, работник может, вообще говоря, использовать смешанную стратегию, выбирая нанимателей случайно с некоторой вероятностью.

Рассмотрим теперь выбор нанимателей. Наниматели наблюдают уровень сигнала a, выбранный работником, и на его основе формируют некоторые ожидания относительно возможного распределения типов работников. Обозначим эти ожидаемые вероятности через $\bar{\mu}_\theta = \bar{\mu}_\theta(a)$. Формально ожидания — это функции $\bar{\mu}_\theta(\cdot)$, заданные на всех a из A и принимающие значения из $[0, 1]$, причем $\bar{\mu}_L(a)+\bar{\mu}_H(a) = 1$. Мы будем рассматривать только такие равновесия, в которых ожидания у обоих нанимателей одни и те же (на равновесной траектории они не могут различаться, поскольку должны соответствовать равновесным стратегиям работников разных типов, так что это предположение относится только к ситуациям выбора вне равновесной траектории). С точки зрения этих ожиданий доход представляет собой случайную величину, принимающую значение $y_\theta(a)$ с вероятностью $\bar{\mu}_\theta(a)$. Обозначим ожидаемый доход через $\bar{y} = \bar{y}(a)$:

$$\bar{y}(a) = \bar{\mu}_L(a)y_L(a) + \bar{\mu}_H(a)y_H(a).$$

Выбор w_1 и w_2 происходит одновременно, поэтому при данных a и $\{\bar{\mu}_\theta\}$, учитывая уже проанализированный выбор работником нанимателя, мы фактически имеем дело со статической игрой (точнее, с набором статических игр, различающихся только выигрышами, зависящими от параметров). Таким образом, здесь следует искать равновесие Нэша. Ожидаемые прибыли нанимателей равны $\bar{y} - w_1$ и 0 соответственно при $w_1 > w_2$ и 0 и $\bar{y} - w_2$ соответственно при $w_1 < w_2$. При $w_1 = w_2 = w$ наниматели делят общую прибыль $\bar{y} - w$ в некоторой пропорции, зависящей от того, каковы смешанные стратегии работников. В равновесии (аналогично модели без сигналов, рассмотренной выше) $w_1 = w_2 = \bar{y}$, а ожидаемые прибыли равны нулю. Этот результат получается при любых ожиданиях, от ожиданий зависит только величина $\bar{y}$.

Таким образом, если $\bar{\mu}_\theta(a)$ — ожидания нанимателей после наблюдения сигнала a, то наниматели предлагают контракты

$$w_1(a) = w_2(a) = \bar{y}(a) = \bar{\mu}_L y_L(a) + \bar{\mu}_H y_H(a).$$

Обозначим эту общую для нанимателей стратегию через $w(a)$.

Как обычно для нетривиальных динамических байесовских игр (прежде всего игр с сигнализированием), в данной игре, вообще говоря, существует бесконечно много равновесий. Логически возможны три класса равновесий:

- разделяющие равновесия (работники разных типов подают разные сигналы);
- объединяющие равновесия (работники разных типов подают одинаковые сигналы);
- частично объединяющие или гибридные равновесия (часть работников одного типа подает один сигнал, другая часть — тот же сигнал, что и (все) работники другого типа).

Охарактеризуем эти равновесия и условия существования таких равновесий. Начнем с самого интересного, первого случая — разделяющих равновесий.

Предположим, что такое равновесие существует. Тогда работники типов H и L подают различающиеся сигналы a_L и a_H. Обозначим соответствующие им уровни оплаты $w_L = w(a_L)$, $w_H = w(a_H)$. В разделяющем равновесии наниматели по сигналу однозначно определяют тип работника. Поэтому если наблюдается a_θ, то ожидаемый доход равен $y_\theta(a_\theta)$. Поскольку, как уже говорилось, конкуренция нанимателей сводит ожидаемую прибыль к нулю, то $w_L = y_L(a_L)$ и $w_H = y_H(a_H)$.

Чтобы такая ситуация соответствовала равновесию, нужно, чтобы работник типа L предпочел подавать сигнал a_L, а не a_H, а работник типа H — сигнал a_H, а не a_L. Другими словами, выполняются соотношения

$$w_H - c_H(a_H) \geqslant w_L - c_H(a_L)$$

и

$$w_L - c_L(a_L) \geqslant w_H - c_L(a_H).$$

Подставив $w_\theta = y_\theta(a_\theta)$, получим следующую характеристику сигналов a_L и a_H в разделяющем равновесии

$$y_H(a_H) - c_H(a_H) \geqslant y_L(a_L) - c_H(a_L)$$

и

$$y_L(a_L) - c_L(a_L) \geqslant y_H(a_H) - c_L(a_H).$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$c_L(a_H) - c_L(a_L) \geqslant c_H(a_H) - c_H(a_L),$$

что можно интерпретировать следующим образом: прирост издержек при переходе от a_L к a_H выше для L, чем для H. (Это неравенство согласуется со сделанным ранее предположением о возрастании разности $c_L(a) - c_H(a)$.)

Приведенные необходимые условия равновесия не являются достаточными, поскольку не гарантируют, что работникам невыгодно выбирать другие уровни сигналов, отличные от a_L и a_H (если таковые существуют).

Чтобы работник типа θ добровольно выбрал сигнал a_θ, требуется, чтобы его полезность от любого другого уровня сигнала не превышала полезность от a_θ:

$$y_\theta(a_\theta) - c_\theta(a_\theta) \geqslant \bar{y}(a) - c_\theta(a) \ \forall a \in A.$$

Здесь для расчета $\bar{y}(a)$ нам требуется специфицировать ожидания нанимателей — вероятности $\bar{\mu}_\theta(a)$. Если существуют a_L, a_H и $\bar{\mu}_\theta(\cdot)$, удовлетворяющие этим условиям, то они задают равновесие в рассматриваемой игре.

Далее в этом параграфе мы будем анализировать только случай, когда *результат* $y_\theta(a)$ *не зависит от* a[9], а множество A имеет вид $[a_{\min}, +\infty)$. Анализ модели с множеством A другого вида читатель может провести самостоятельно (см. задачи к параграфу).

Если равновесие разделяющее, то оно обладает следующими свойствами.

Во-первых, $a_L = a_{\min}$, где $a_{\min} = \min_{a\in A} a$. Действительно, если бы работник типа L выбрал $a_L \neq a_{\min}$, то его выигрыш был бы равен $y_L - c_L(a_L)$, а эта величина меньше, чем $y_L - c_L(a_{\min})$, поскольку

[9] Случай, рассмотренный Спенсом в первой из статей.

$c_L(a)$ — возрастающая функция. Вне зависимости от ожиданий нанимателей оплата работника L при сигнале $a_{\min}$ была бы не ниже, чем y_L, откуда

$$w(a_L) - c_L(a_L) < y_L - c_L(a_{\min}) \leqslant w(a_{\min}) - c_L(a_{\min}),$$

т. е. работник типа L предпочтет выбрать $a_{\min}$.

Во-вторых, $a_H \leqslant a'_H$, где a'_H представляет собой уровень сигнала, при котором работник типа H при оплате y_H получает тот же уровень полезности, что и при оплате y_L, выбрав уровень сигнала $a_{\min}$, т. е.

$$y_H - c_H(a'_H) = y_L - c_H(a_{\min}).$$

Предположим, что $a_H > a'_H$ и поэтому $c_H(a_H) > c_H(a'_H)$. При уровне сигнала a_H оплата равна y_H, а при уровне сигнала $a_{\min}$ оплата равна y_L, но при этом

$$y_H - c_H(a_H) < y_H - c_H(a'_H) = y_L - c_H(a_{\min}),$$

т. е. работник типа H предпочел бы тогда выбрать $a_{\min}$. Значит, данное предположение неверно.

В-третьих, $a_H \geqslant a'_L$, где a'_L представляет собой уровень сигнала, при котором работник типа L при оплате y_H получает тот же уровень полезности, что и при оплате y_L, выбрав уровень сигнала $a_{\min}$, т. е.

$$y_H - c_L(a'_L) = y_L - c_L(a_{\min}).$$

Предположим, что $a_H < a'_L$. Тогда

$$y_L - c_L(a_{\min}) = y_H - c_L(a'_L) < y_H - c_L(a_H).$$

т. е. работник типа L предпочел бы тогда выбрать a_H. Значит, и это предположение неверно.

Таким образом, в любом разделяющем равновесии $a_L = a_{\min}$ и $a_H \in [a'_L, a'_H]$. Поскольку, как мы предполагаем, функция $c_H(a) - c_L(a)$ возрастает, то $a'_L < a'_H$ и указанное множество не пусто.

Покажем теперь, что для любой пары a_L, a_H, удовлетворяющей этим условиям, существуют ожидания нанимателей $\bar{\mu}_\theta(\cdot)$, при которых эта пара соответствует разделяющему равновесию. В частности, подходят ожидания следующего вида:

$$\bar{\mu}_L(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < a_H, \\ 0, & \text{если } a \geqslant a_H. \end{cases}$$

Проверим это.

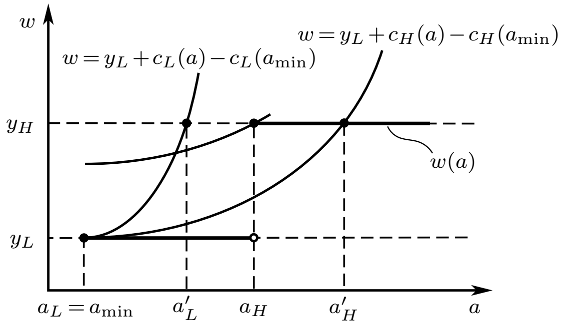


Рис. 15.4. *Иллюстрация разделяющего равновесия в модели Спенса с ожиданиями $\bar{\mu}_L(a) = 1$ при $a < a_H$ и $\bar{\mu}_L(a) = 0$ при $a \geqslant a_H$*

При таких ожиданиях оплата при уровне сигнала не ниже, чем a_H, равна y_H; в противном случае оплата равна y_L. Так как издержки $c_\theta(a)$ возрастают, то при фиксированном уровне оплаты работнику любого типа выгодно выбрать наименьший уровень сигнала, при котором можно получить такую оплату. При рассматриваемых ожиданиях из усилий $a < a_H$, при которых оплата равна y_L, работник выберет $a_{\min}$, а из усилий $a \geqslant a_H$, при которых оплата равна y_H,— a_H. Таким образом, решение работника сводится к выбору из двух вариантов — $(a_{\min}, y_L)$ и (a_H, y_L). Следовательно, работник типа L выберет a_L $(= a_{\min})$, если

$$y_L - c_L(a_{\min}) \geqslant y_H - c_L(a_H),$$

а работник типа H выберет a_H, если

$$y_L - c_H(a_{\min}) \leqslant y_H - c_H(a_H).$$

Первое из этих неравенств выполняется, поскольку $a_H \geqslant a'_L$, а второе — поскольку $a_H \leqslant a'_H$.

Проведенный анализ иллюстрирует Рис. 15.4. Граничные уровни сигнала, a'_L и a'_H, задаются кривыми безразличия работников типа L и H соответственно, проходящими через точку $(y_L, a_{\min})$: a'_L и a'_H соответствуют уровню оплаты $w = y_H$.

Заметим, что существует много других подходящих ожиданий, которые могут поддерживать разделяющее равновесие с $a_L = a_{\min}$ и данным a_H из промежутка $[a'_L, a'_H]$. Удобно характеризовать равновесия с разными ожиданиями функцией $w(a)$, выражающей зависимость оплаты от сигналов. Она однозначно связана с ожиданиями

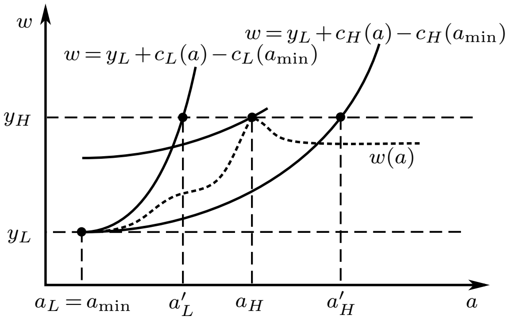


Рис. 15.5. *Иллюстрация разделяющего равновесия в модели Спенса с ожиданиями общего вида*

нанимателей $\bar{\mu}_\theta(a)$. Так как вероятности $\bar{\mu}_\theta(a)$ всегда принадлежат отрезку $[0, 1]$, то $w(a)$ всегда лежит в промежутке между y_L и y_H. Кроме того, чтобы работник каждого типа выбрал именно «свой» сигнал, требуется выполнение условий

$$y_H - c_H(a_H) \geqslant w(a) - c_H(a) \ \forall a \in A,$$
$$y_L - c_L(a_{\min}) \geqslant w(a) - c_L(a) \ \forall a \in A.$$

Заметим, что структура ожиданий нанимателей при $a > a_H$ не влияет на выбор работников.

Следующая диаграмма (Рис. 15.5) иллюстрирует зависимость оплаты от сигналов в типичном разделяющем равновесии. В равновесии кривая $w = w(a)$ должна лежать под кривой безразличия работника типа L, проходящей через точки $(a_{\min}, y_L)$ и (a'_L, y_H), а также под кривой безразличия работника типа H, проходящей через точку (a_H, y_H), и должна проходить через точки $(a_{\min}, y_L)$ и (a_H, y_H).

Рассмотрим вопрос об эффективности равновесий. Могут иметь место разделяющие равновесия с любым уровнем сигнала a_H работников типа H — от a'_L до a'_H. По мере того как уровень сигнала a_H уменьшается, полезность работников типа H, равная $y_H - c_H(a_H)$, возрастает, а полезность работников типа L остается без изменений — на уровне $y_L - c_L(a_{\min})$. Наниматели во всех равновесиях получают нулевую ожидаемую прибыль. Таким образом, одни разделяющие равновесия доминируют по Парето другие. «Наилучшее» подобное равновесие достигается при $a_H = a'_L$, когда от работника типа H требуется меньше всего усилий.

Сравним теперь разделяющие равновесия с равновесием в модели без сигналов. В первом случае низкопроизводительные работники получают y_L при $a = a_{\min}$, в то время как без сигнала они получают оплату, равную средней производительности $\bar{w} = \mu_L y_L + \mu_H y_H$ при том же уровне сигнала $a = a_{\min}$, т. е. их положение при сигнализировании ухудшается. Полезность высокопроизводительных работников составляет $y_H - c_H(a_H)$ и $\bar{w} - c_H(a_{\min})$ соответственно, где $a_H \geqslant a'_L > a_{\min}$. Если доля низкопроизводительных работников мала, то $\bar{w}$ близко к y_H, поэтому при сигнализировании положение высокопроизводительных работников тоже может ухудшиться.

Поскольку мы рассматриваем квазилинейную экономику, то можно сравнить общие уровни благосостояния в двух случаях. Сравнение уровней благосостояния эквивалентно в данных моделях сравнению средней полезности работников. В разделяющем равновесии средняя полезность равна

$$\mu_L(y_L - c_L(a_{\min})) + \mu_H(y_H - c_H(a_H)) = \bar{w} - \mu_L c_L(a_{\min}) - \mu_H c_H(a_H),$$

а в равновесии без сигнализирования она равна

$$\mu_L(\bar{w} - c_L(a_{\min})) + \mu_H(\bar{w} - c_H(a_{\min})) = \bar{w} - \mu_L c_L(a_{\min}) - \mu_H c_H(a_{\min}).$$

Таким образом, сигнализирование не приводит к росту общественного благосостояния (при любом уровне сигнала a_H).

Рассмотренный случай, когда сигнал не влияет на результат, конечно, не очень реалистичен, но зато он показывает в чистом виде феномен непродуктивного сигнализирования, который может возникать в условиях асимметричной информации. Если, вслед за М. Спенсом, интерпретировать a как уровень образования, тогда то, что мы наблюдаем в разделяющем равновесии, можно интерпретировать как чистый «эффект диплома»: высокопроизводительные работники приобретают диплом об образовании с единственной целью — продемонстрировать, что их продуктивность выше, и получать в результате более высокую оплату. При этом издержки таких усилий представляют собой чистые потери для общества. Такое ви́дение функции образования является альтернативой концепции образования как инвестиций в человеческий капитал и представляет систему образования в карикатурном виде: функция образования заключается только в том, чтобы выяснить, какими потенциальными способностями обладает от природы человек, но не в том, чтобы научить чему-нибудь полезному в его будущей профессиональной жизни.

Охарактеризуем теперь объединяющие равновесия. Предположим, что в равновесии работники обоих типов выбирают одинаковые действия $\bar{a}$, что не позволяет нанимателям различать работников. В таком равновесии работники обоих типов получают одинаковую оплату:

$$\bar{w} = \mu_L y_L + \mu_H y_H.$$

Определим сигнал a' как решение уравнения

$$\bar{w} - c_L(a') = y_L - c_L(a_{\min}).$$

При этом a' представляет собой уровень сигнала, при котором работник типа L при оплате $\bar{w}$ получает тот же уровень полезности, что и при оплате y_L, выбрав уровень сигнала $a_{\min}$.

Тогда (необходимое) условие существования подобного разделяющего равновесия состоит в том, что $\bar{a} \leqslant a'$.

Действительно, если $\bar{a} \leqslant a'$, то при любых ожиданиях нанимателей

$$w(a_{\min}) - c_L(a_{\min}) \geqslant y_L - c_L(a_{\min}) = \bar{w} - c_L(a'_L) > \bar{w} - c_L(\bar{a}).$$

Это неравенство противоречит тому факту, что работник типа L выбрал сигнал $\bar{a}$.

Покажем теперь, что для всякого $\bar{a} \leqslant a'$ существуют ожидания, которые поддерживают объединяющее равновесие с данным сигналом.

В частности, подходят ожидания следующего вида:

$$\bar{\mu}_L(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < \bar{a}, \\ \mu_L, & \text{если } a \geqslant \bar{a}. \end{cases}$$

Покажем, что это так (исходя при этом из предположения $a_{\min} < \bar{a}$).

Если наниматели наблюдают сигнал $a < \bar{a}$, то они установят оплату y_L, если же сигнал $a \geqslant \bar{a}$, то оплату $\bar{w}$. Выбирая из допустимых $a < \bar{a}$, любой работник выберет $a = a_{\min}$. Из $a \geqslant \bar{a}$ любой работник выберет $a = \bar{a}$. Опять, как и в объединяющем равновесии, решение работника сводится к выбору из двух вариантов. В данном случае это $(y_L, a_{\min})$ и $(\bar{w}, \bar{a})$. В равновесии работники обоих типов должны предпочесть второй вариант:

$$\bar{w} - c_H(\bar{a}) \geqslant y_L - c_H(a_{\min})$$

и

$$\bar{w} - c_L(\bar{a}) \geqslant y_L - c_L(a_{\min}).$$

Первое из неравенств следует из второго (тягость одних и тех же действий для высокопроизводительного работника всегда ниже), поэтому оно излишне. Таким образом, поскольку при $\bar{a} \leqslant a'$ второе

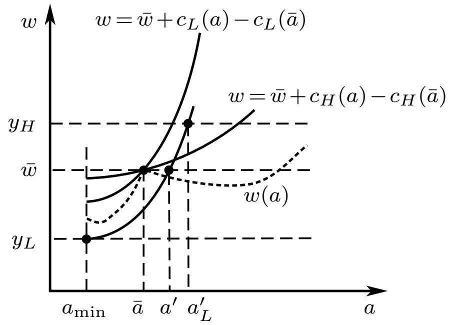


Рис. 15.6. *Иллюстрация объединяющего равновесия в модели Спенса с ожиданиями общего вида*

неравенство выполнено, то оба типа работников выберут $a = \bar{a}$. При этом ожидания нанимателей оправдываются: в равновесии работники выбирают только $\bar{a}$, так что вероятности остаются на априорном уровне $\bar{\mu}_L(\bar{a}) = \mu_L$.

Существует бесконечно много других ожиданий, поддерживающих объединяющее равновесие при любом фиксированном уровне сигнала $\bar{a} \leqslant a'$. Типичное такое равновесие представлено на Рис. 15.6. Кривая $w(a)$ должна лежать под кривыми безразличия работников обоих типов, проходящими через точку $(\bar{a}, \bar{w})$.

Как соотносится a' с a'_L и a'_H? По определению

$$c_L(a') - c_L(a_{\min}) = \mu_H(y_H - y_L),$$
$$c_L(a'_L) - c_L(a_{\min}) = y_H - y_L.$$

Поскольку $\mu_H < 1$, то

$$c_L(a') - c_L(a_{\min}) = \mu_H(y_H - y_L) < y_H - y_L = c_L(a'_L) - c_L(a_{\min}),$$

откуда $c_L(a') < c_L(a'_L)$ и $a' < a'_L$. Тем более $a' < a'_H$.

Самое простое объединяющее равновесие соответствует уровню сигнала $\bar{a} = a_{\min}$. Это равновесие доминирует по Парето все другие объединяющие равновесия, поскольку от работников обоих типов требуются наименьшие усилия. Работники типа H получают в этом равновесии полезность $\bar{w} - c_H(a_{\min})$, а работники типа L — полезность $\bar{w} - c_L(a_{\min})$. Такое равновесие в точности воспроизводит равновесие в модели без сигналов.

До сих пор мы предполагали, что рассматриваемое равновесие модели Спенса является полностью разделяющим или же полностью объединяющим. Можно представить себе и равновесия, в которых работники одного из типов используют смешанную стратегию, причем один из «смешиваемых» сигналов совпадает с сигналом, который используется другим типом работников. Такие равновесия называются гибридными.

Например, можно представить себе равновесие, в котором работники типа H подают сигнал $\bar{a}$, часть работников типа L подают сигнал a_L, а другие работники этого типа — сигнал $\bar{a}$, «пытаясь выдать себя» за высокопроизводительных работников. Охарактеризуем сначала гибридные равновесия указанного типа (будем называть их гибридными равновесиями первого типа).

Заметим, что, рассуждая как и ранее, можно показать, что в любом подобном гибридном равновесии $a_L = a_{\min}$ и $w(a_L) = y_L$. С другой стороны, из-за конкуренции нанимателей оплата $w(\bar{a})$ должна совпадать с ожидаемой производительностью работников, подающих сигнал $\bar{a}$, т. е.

$$w(\bar{a}) = \frac{\mu_L \nu y_L + \mu_H y_H}{\mu_L \nu + \mu_H},$$

где ν — доля работников типа L, подающих сигнал $\bar{a}$.

В равновесии любой из двух сигналов не может оказаться для работника типа L более предпочтительным, чем другой, поэтому оба состояния $(\bar{a}, w(\bar{a}))$ и $(a_{\min}, y_L)$ для него должны быть эквивалентны. Значит, если такое равновесие существует, то величина $\bar{a}$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\mu_L \nu y_L + \mu_H y_H}{\mu_L \nu + \mu_H} - c_L(\bar{a}) = y_L - c_L(a_{\min})$$

или

$$c_L(\bar{a}) = c_L(a_{\min}) + \frac{\mu_H (y_H - y_L)}{\mu_L \nu + \mu_H}.$$

Таким образом, величина ν однозначно определяет уровень сигнала $\bar{a}$, причем $\bar{a}$ убывает как функция ν.

Покажем теперь, что для каждого $\nu \in (0, 1)$, существует гибридное равновесие данного типа. Для этого достаточно найти ожидания, поддерживающие данное равновесие.

Как и ранее, мы укажем одни из наиболее просто устроенных ожиданий:

$$\bar{\mu}_L(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < \bar{a}, \\ \mu_L \nu / (\mu_L \nu + \mu_H), & \text{если } a \geqslant \bar{a}. \end{cases}$$

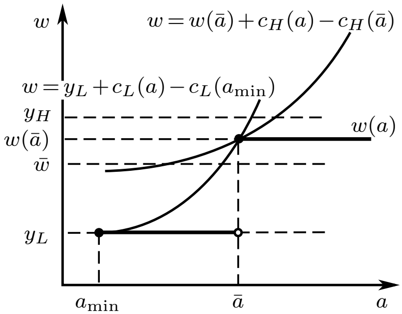


Рис. 15.7. *Иллюстрация гибридного равновесия первого типа в модели Спенса с $\bar{\mu}_L(a) = 1$ при $a < \bar{a}$ и $\bar{\mu}_L(a) = \mu_L\nu/(\mu_L\nu + \mu_H)$ при $a \geqslant \bar{a}$*

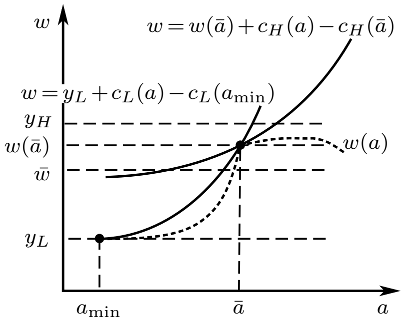


Рис. 15.8. *Иллюстрация гибридного равновесия первого типа в модели Спенса с ожиданиями общего вида*

По построению ожиданий работник типа L не выберет никакой другой уровень сигнала, кроме $\bar{a}$ и $a_{\min}$. С другой стороны, поскольку $c_L(a) - c_H(a)$ возрастает, то работник типа H не выберет никакой другой уровень сигнала, кроме $\bar{a}$. (Докажите это формально.)

Рис. 15.7 иллюстрирует такое равновесие.

Хотя в этом типе гибридного равновесия сигнал $\bar{a}$ единствен, но различных ожиданий, поддерживающих такое равновесие, бесконечно много. Рис. 15.8 демонстрирует типичный случай.

Охарактеризуем теперь равновесия, в которых работники типа L подают сигнал $\bar{a}$, часть работников типа H подают сигнал a_H, а другие работники этого типа — сигнал $\bar{a}$. (Будем называть их гибридными равновесиями второго типа.)

Предположим, что подобное равновесие существует. В любом таком равновесии $w(a_H) = y_H$. Кроме того, оплата $w(\bar{a})$ должна совпадать с ожидаемой производительностью работников, подающих сигнал $\bar{a}$, т. е.

$$w(\bar{a}) = \frac{\mu_L y_L + \mu_H \nu y_H}{\mu_L + \mu_H \nu},$$

где ν — доля работников типа H, подающих сигнал $\bar{a}$.

Кроме того, работники типа L не должны предпочесть вариант $(a_{\min}, w(a_{\min}))$ варианту $(\bar{a}, w(\bar{a}))$, поэтому, учитывая $w(a_{\min}) \geqslant y_L$, получаем неравенство, характеризующее $\bar{a}$:

$$y_L - c_L(a_{\min}) \leqslant w(a_{\min}) - c_L(a_{\min}) \leqslant \frac{\mu_L y_L + \mu_H \nu y_H}{\mu_L + \mu_H \nu} - c_L(\bar{a})$$

или

$$c_L(\bar{a}) \leqslant c_L(a_{\min}) + \frac{\mu_H \nu (y_H - y_L)}{\mu_L + \mu_H \nu}.$$

Таким образом, $\bar{a} \leqslant a''$, где a'' — решение уравнения

$$c_L(a'') = c_L(a_{\min}) + \frac{\mu_H \nu (y_H - y_L)}{\mu_L + \mu_H \nu}.$$

В равновесии работники типа H должны получать одинаковую полезность от вариантов $(\bar{a}, w(\bar{a}))$ и (a_H, y_H), т. е.

$$\frac{\mu_L y_L + \mu_H \nu y_H}{\mu_L + \mu_H \nu} - c_H(\bar{a}) = y_H - c_H(a_H).$$

При данном $\bar{a}$ это соотношение однозначно определяет величину a_H.

Покажем теперь, что $\bar{a}$ в равновесии такого типа может принимать любые значения из интервала $(a_{\min}, a'']$, т. е. можно подобрать ожидания нанимателя, которые поддерживают такое равновесие.

Пусть $\bar{a}$ — любой такой сигнал ($\bar{a} \in (a_{\min}, a'']$). Покажем, что ожидания

$$\bar{\mu}_L(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < \bar{a}, \\ \mu_L/(\mu_L + \mu_H \nu), & \text{если } a \in [\bar{a}, a_H), \\ 0, & \text{если } a \geqslant a_H, \end{cases}$$

поддерживают равновесие с этим сигналом.

При таких ожиданиях работник любого типа не выберет никакой другой уровень сигнала, кроме $a_{\min}$, $\bar{a}$ или a_H.

Так как $\bar{a} \leqslant a''$ и при данных ожиданиях $w(a_{\min}) = y_L$, то по определению a'' для работников типа L вариант $(\bar{a}, w(\bar{a}))$ не хуже варианта $(a_{\min}, w(a_{\min}))$.

Поскольку $c_L(a) - c_H(a)$ возрастает, то

$$c_L(a_H) - c_H(a_H) > c_L(\bar{a}) - c_H(\bar{a}).$$

Работник типа H получает одинаковую полезность при $\bar{a}$ и a_H:

$$w(\bar{a}) - c_H(\bar{a}) = y_H - c_H(a_H).$$

Сложив эти два соотношения, получим, что работник типа L предпочтет сигнал $\bar{a}$ сигналу a_H:

$$w(\bar{a}) - c_L(\bar{a}) > y_H - c_L(a_H).$$

С другой стороны, из возрастания $c_L(a) - c_H(a)$ следует, что

$$c_L(a_{\min}) - c_H(a_{\min}) < c_L(\bar{a}) - c_H(\bar{a}).$$

Для работников типа L вариант $(\bar{a}, w(\bar{a}))$ не хуже варианта $(a_{\min}, w(a_{\min}))$, т. е.

$$y_L - c_L(a_{\min}) = w(a_{\min}) - c_L(a_{\min}) \leqslant w(\bar{a}) - c_L(\bar{a}).$$

Сложив эти два соотношения, получим, что работник типа H предпочтет сигнал $\bar{a}$ сигналу $a_{\min}$:

$$y_L - c_H(a_{\min}) = w(a_{\min}) - c_H(a_{\min}) < w(\bar{a}) - c_H(\bar{a}).$$

Таким образом, указанные ожидания действительно поддерживают равновесие с такими сигналами.

Рис. 15.9 иллюстрирует построенное равновесие. Интервал $(a_{\min}, a'']$ соответствует точкам прямой $w(a) = w(\bar{a})$ до ее пересечения с кривой безразличия работника типа L, проходящей через точку $(a_{\min}, y_L)$.

Как и в других случаях, мы должны отметить, что существует бесконечно много различных ожиданий, поддерживающих гибридное равновесие данного типа для любой пары сигналов $\bar{a}$ и a_H, удовлетворяющих указанным выше соотношениям. Рис. 15.10 иллюстрирует типичное гибридное равновесие второго типа.

Многообразие различных равновесий снижает прогнозную ценность данной модели. Естественный вопрос о том, какие из этих равновесий более «вероятны», породил исследования по уточнению концепции равновесия в данной модели. Мы рассмотрим неформально (и применительно только к этой модели) один из способов уточнения равновесия, известный как «интуитивный критерий».

Эти уточнения относятся к ожиданиям нанимателей для уровней сигналов, которые не могут наблюдаться в равновесии. Поскольку концепция совершенного байесовского равновесия, которую мы используем, не накладывает никаких ограничений на ожидания при

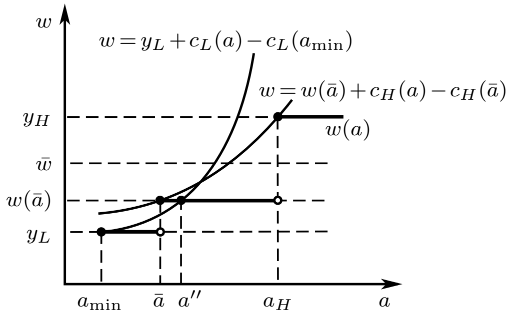


Рис. 15.9. *Иллюстрация гибридного равновесия второго типа в модели Спенса с простыми «ступенчатыми» ожиданиями*

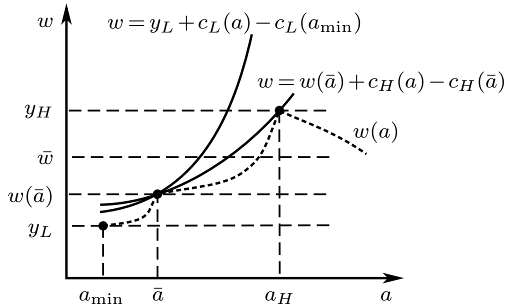


Рис. 15.10. *Иллюстрация гибридного равновесия второго типа в модели Спенса с ожиданиями общего вида*

неравновесных значениях сигналов, то не удивительно, что эти ожидания могут быть довольно причудливыми. Многие из этих ожиданий не вполне согласуются с имеющейся у нанимателей информацией о структуре игры.

Рассмотрим, например, сигнал $a > a'_L$. По определению a'_L работнику типа L невыгодно подавать такой сигнал при любой оплате, не превышающей y_H (т. е. при любых ожиданиях нанимателей), поскольку его полезность при этом будет ниже, чем если он подает сигнал $a_{\min}$. В то же время существуют ожидания, при которых работник типа H выберет a. Поэтому естественно предположить, что наниматели, учитывая доступную информацию о структуре игры, априорно будут с наблюдаемым сигналом $a > a'_L$ связывать ожидания $\bar{\mu}_H(a) = 1$.

Но с такими априорными ожиданиями несовместимы многие из рассмотренных выше равновесий.

Во-первых, с ними несовместимы все разделяющие равновесия с $a_H > a'_L$, поскольку, если ожидания удовлетворяют таким требованиям, то работник типа H не выберет $a > a'_L$.

Во-вторых, с ними несовместимы все гибридные равновесия первого типа, поскольку, если ожидания удовлетворяют таким требованиям, полезность работника типа H в точке (a'_L, y_H) (а значит, и во всех точках с достаточно близким сигналом) выше, чем в точке $(\bar{a}, w(\bar{a}))$, соответствующей любому такому равновесию.

В-третьих, с ними несовместимы гибридные равновесия второго типа и объединяющие равновесия, при условии, что работников типа H «достаточно много», т. е. когда ожидаемый доход $\bar{w}$ при любом сигнале дает работнику типа H полезность ниже полезности в точке (a'_L, y_H).

Покажем теперь, что все равновесия второго типа и объединяющие равновесия не удовлетворяют более сильному критерию уточнения равновесий (более сильным требованиям к ожиданиям нанимателей). Этот критерий (так называемый «интуитивный критерий») состоит в следующем. Пусть некоторый неравновесный сигнал при любых (а не только равновесных) ожиданиях дает, например, работнику типа L меньшую полезность, чем его полезность в равновесии; в то же время, работник типа H при каких-то ожиданиях может улучшить свое положение по сравнению с равновесием, подав данный сигнал. Тогда наниматели при таком сигнале должны приписывать вероятность 0 работникам типа L. (Видно, что это усиление предыдущего условия.)

Покажем, что ожидания, поддерживающие объединяющие равновесия, не удовлетворяют этому критерию. Обозначим через $\dot{a}_\theta$ такой уровень сигнала, что набор $(\dot{a}_\theta, y_H)$ дает работнику типа θ ту же полезность, которую он получает в равновесии (см. Рис. 15.11). Поскольку $\bar{w} < y_H$, а $c_L(a) - c_H(a)$ убывает, то $\dot{a}_L < \dot{a}_H$. Любой сигнал $a \in (\dot{a}_L, \dot{a}_H)$ вне зависимости от ожиданий дает работнику типа L меньшую полезность, чем в равновесии, поскольку $w(a) \leqslant y_H$. С другой стороны, существуют ожидания нанимателей, при которых $w(a)$ достаточно близко к y_H, так что работник типа H получает более высокую полезность, чем в равновесии. «Интуитивный критерий» требует, чтобы для таких a ожидания нанимателей имели вид $\bar{\mu}_H(a) = 1$. Однако такие ожидания не поддерживают данное равновесие, поскольку при этих ожиданиях $w(a) = y_H$ для $a \in (\dot{a}_L, \dot{a}_H)$

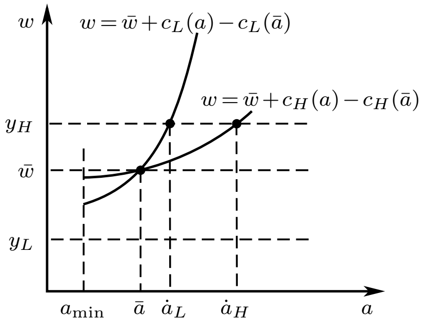


Рис. 15.11. *Иллюстрация применения интуитивного критерия к объединяющему равновесию в модели Спенса*

и работник типа H предпочтет такой сигнал a равновесному сигналу $\bar{a}$.

Те же рассуждения с точностью до замены $\bar{w}$ на $w(\bar{a})$ показывают, что любое гибридное равновесие второго типа не удовлетворяет интуитивному критерию.

Задачи

15.6 Покажите, что существуют равновесия в модели Спенса всех четырех рассмотренных типов с непрерывными функциями оплаты $w(a)$. Покажите, что эти функции не могут быть дифференцируемыми.

15.7 Рассмотрите вариант модели Спенса, когда результат не зависит от сигнала.

(A) Охарактеризуйте все разделяющие равновесия.

(B) Охарактеризуйте все объединяющие равновесия.

(C) Охарактеризуйте все гибридные равновесия первого типа.

(D) Охарактеризуйте все гибридные равновесия второго типа.

15.8 Пусть в ситуации, описанной в модели Спенса, $y_L = 1$ и $y_H = 2$.

(A) Охарактеризуйте равновесие в модели с полной информацией (наниматели наблюдают результаты y_θ).

(B) Пусть μ — доля работников типа L. Охарактеризуйте равновесие в модели без сигналов.

(C) Пусть множество возможных сигналов имеет вид $A = \mathbb{R}_+$, а издержки работников равны $c_L(a) = a$ и $c_H(a) = a/2$. Охарактеризуйте разделяющие равновесия в модели Спенса. Покажите, что $a_L = 0$ и $a_H \in [1,2]$.

(D) Пусть $a_H \in [1,2]$. Обозначим через $\bar{\mu}(a) = \bar{\mu}_L(a)$ ожидаемую нанимателями вероятность того, что сигнал a подан работником типа L. Покажите, что следующие ожидания поддерживают данный сигнал в объединяющем равновесии:

$$\bar{\mu}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \neq a_H, \\ 0, & \text{если } a = a_H. \end{cases}$$

(E) Сравните разделяющие равновесия в модели Спенса с равновесиями в модели без сигналов с точки зрения полезности работников. При каких значениях μ работники типа H окажутся в лучшем положении в равновесии без сигналов?

(F) Охарактеризуйте объединяющие равновесия в модели Спенса. Покажите, что $\bar{a} \leqslant 1 - \mu$.

(G) Пусть $\bar{a} \leqslant 1 - \mu$. Покажите, что следующие ожидания поддерживают данный сигнал в объединяющем равновесии:

$$\bar{\mu}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \neq \bar{a}, \\ \mu, & \text{если } a = \bar{a}. \end{cases}$$

(H) Охарактеризуйте все гибридные равновесия первого типа в модели Спенса. Покажите, что

$$\bar{a} = \frac{1 - \mu}{1 - \mu + \mu\nu}.$$

(I) Охарактеризуйте все гибридные равновесия второго типа в модели Спенса. Покажите, что

$$\bar{a} < \frac{1 - \mu}{1 - \mu + \mu/\nu}.$$

15.9 Рассмотрите модель Спенса с $y_L = 1$, $y_H = 2$, $c_L(a) = a$, $c_H(a) = a/2$ и $A = \{0, 3\}$.

(A) Покажите, что в данной модели существуют только объединяющие равновесия с уровнем сигнала, равным 0.

(B) Покажите, что любые ожидания, которые поддерживают такое равновесие, не противоречат интуитивному критерию.

15.10 Пусть множество A содержит только два элемента — a_1 и a_2, таких что $a_1 < a_2$. Покажите, что условия

$$y_H - c_H(a_2) \geqslant y_L - c_H(a_1)$$

и

$$y_L - c_L(a_1) \geqslant y_H - c_L(a_2)$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы существовало разделяющее равновесие. Приведите ожидания, поддерживающие такое состояние как равновесие.

15.11 Пусть множество A содержит только два элемента, результат не зависит от сигнала и $y_H = \gamma y_L$ $(\gamma > 1)$. Пусть также $c_L(a) = \beta_L a$ и $c_H(a) = \beta_H a$.

(A) При каких параметрах γ, β_L, β_H существует разделяющее равновесие?

(B) Покажите, что в этой модели всегда существует хотя бы одно объединяющее равновесие, если $\beta_H > \beta_L$.

(C) При каких параметрах γ, β_L, β_H объединяющее равновесие единственно?

15.12 Пусть множество A содержит только два элемента — 0 и γ, результат не зависит от сигнала, причем $y_L = 1$, $y_H = 2$, доля работников типа L равна $1/2$. Пусть также $c_L(a) = a$ и $c_H(a) = a/2$.

(A) При каких γ существует объединяющее равновесие с сигналом $\bar{a} = \gamma$?

(B) При каких γ существует гибридное равновесие первого типа?

(C) При каких γ существует гибридное равновесие второго типа?

15.13 Пусть $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$, результат не зависит от сигнала, причем $y_L = 1$, $y_H = \gamma$, доля работников типа L равна $1/2$. Пусть также $c_L(a) = a$ и $c_H(a) = a/2$.

(A) При каких γ существует гибридное равновесие первого типа?

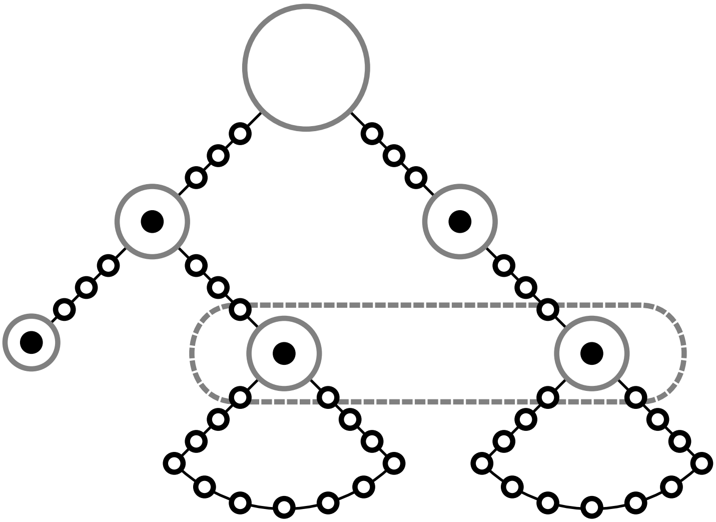
(B) При каких γ существует гибридное равновесие второго типа?

15.14 Проанализируйте модель Спенса, изложенную в данном параграфе, в предположении, что резервные оплаты таковы, что $w_{L0} > y_L$, $w_{H0} \in (\bar{w}, y_H)$.

(A) Охарактеризуйте равновесия всех четырех возможных типов.

(B) Покажите, что разделяющее равновесие в данной модели всегда является Парето-улучшением по сравнению с равновесием без сигналов.

Приложения



Приложение

Элементы теории некооперативных игр

A

А.1 Введение

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами (называемыми, в соответствии с установившейся традицией, игроками) в ситуациях, когда на результат этих решений оказывают влияние действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть играми.

В настоящее время теория игр проникла практически во все области экономической теории — в экономику общественного сектора, экономику труда, теорию отраслевых рынков, международную экономику, макроэкономику и т. д. Как оказалось, исследователи, занимавшиеся моделированием экономических и социальных явлений, предлагали решения, которые совпадают с теми или иными концепциями равновесия современной теории игр, еще до того, как эти концепции были сформулированы в явном виде и вошли в инструментарий теории игр. Приведем лишь несколько примеров: модели олигополии (А. Курно, Ж. Бертран, Г. Штакельберг), модель рынка «лимонов» (Дж. Акерлов), модель сигнализирования на рынке труда (М. Спенс), анализ аукционов в условиях неполной информации (У. Викри). Это совпадение не является чем-то случайным. Фактически предложенные ими решения оказывались естественным обобщением лежащих в основе современной неоклассической теории понятия *рационального поведения*.

Неоклассическая экономическая теория опирается на логику, которой руководствуются люди, осуществляя выбор в самых разных ситуациях повседневной жизни. Покупая те или иные товары, поступая учиться в университет, голосуя за ту или иную партию, решая вступить в брак и даже совершая преступления люди выбирают из двух или более альтернатив исходя из своих предпочтений. Другими словами, в основе неоклассической экономической теории лежит убеждение[1], что любой феномен общественной жизни следует рассматривать как итог взаимодействия рациональных индивидуумов, выбирающих наилучшие (с их точки зрения) альтернативы из тех, которые им доступны в данной ситуации.

Предположений о рациональности в общем случае оказывается недостаточно для того, чтобы предсказать, какие действия будут выбраны. Как правило, последствия решений, принимаемых одним экономическим субъектом, зависят от того, какие решения приняли, принимают или будут принимать другие. В ситуациях, когда эти решения (влияющие на его положение) данному экономическому субъекту неизвестны[2], естественно считать, что он делает предположения (формирует ожидания) относительно того, какими эти решения могут быть. Тогда естественное обобщение рационального поведения — это оптимальные выборы экономических субъектов при данных ожиданиях.

Необходимо, таким образом, сделать какие-то предположения относительно ожиданий. Следуя сложившейся в экономической теории практике, мы будем здесь анализировать *равновесные* ситуации — ситуации, при которых ожидания экономических субъектов оказываются оправдавшимися, т. е. ожидаемые ими действия других экономических субъектов совпадают с фактически выбранными. Такой подход позволяет существенным образом сузить область возможных решений.

Мы не стремились представить здесь сколько-нибудь развернутое изложение теории игр, какой она сложилась к настоящему моменту[3]. Назначение этого приложения, скорее, в том, чтобы ввести в круг понятий теории игр и продемонстрировать ее возможности в моделировании ситуаций, включающих стратегическое взаимодействие экономических субъектов.

А.2 Статические игры с полной информацией

Под статической игрой понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения, не зная, какие именно решения принимают другие. Обычно в этом случае говорят, что участники принимают решения *одновременно*, хотя сама по себе одновременность принятия решений в данном случае не важна. Под играми с полной

---

[1] Так называемый методологический индивидуализм.

[2] Например, решения остальных олигополистов в моделях Курно и Бертрана.

[3] В частности, мы не касаемся тем, относящихся к кооперативной теории игр.

информацией понимаются такие игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков[4].

А.2.1 Нормальная форма игры

Альтернативные действия, которые может предпринять игрок, в контексте статических игр с полной информацией совпадают с тем, что в теории игр называется стратегиями, по причинам, которые станут ясны из дальнейшего.

Приведем пример статической игры с полной информацией.

Игра 1 («Выбор компьютера»[5]):
Двое знакомых одновременно выбирают, компьютеры какого типа им купить. Первый предпочитает IBM PC, второй — Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в a $(a > 0)$ некоторых условных единиц, а второй — в b $(b > 0)$ условных единиц. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду $(c > 0)$, если они выберут одинаковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым.

В этом примере каждый из игроков (мы будем их называть «Игрок 1» и «Игрок 2») имеет две стратегии, которые можно условно назвать «IBM» и «Mac». Описанную игру удобно представить в виде таблицы (матрицы) 2×2. В игре имеется четыре исхода: (IBM, IBM), (IBM, Mac), (Mac, IBM) и (Mac, Mac). Каждому исходу соответствует своя клетка таблицы; в этой клетке помещаются соответствующие выигрыши игроков[6]. Игры такого рода, то есть игры с двумя участниками, каждый из которых имеет конечное число стратегий, принято называть биматричными[7].

В рассмотренном примере можно выделить три элемента:

[4]Точный смысл терминов *статическая игра* и *игра с полной информацией* станет ясен из дальнейшего, когда мы рассмотрим динамические игры и игры с неполной информацией (байесовские игры) соответственно.

[5]Игра представляет собой вариант известной игры «Battle of sexes» — «Борьба полов».

[6]Мы будем использовать следующее соглашение при изображении биматричных игр двух лиц. Игрок, чье имя стоит *слева*, выбирает *строки* таблицы, и его выигрыши записываются *в левом нижнем углу* каждой клетки таблицы. Игрок, чье имя стоит *сверху*, выбирает *столбцы* таблицы, и его выигрыши записываются *в правом верхнем углу*. При таком расположении проще понять, где чья стратегия и где чей выигрыш. Свой выигрыш всегда расположен ближе к игроку, чем выигрыш партнера.

[7]Это название связано с историей теории игр. Игру двух лиц с нулевой суммой (выигрыш одного игрока равен проигрышу другого) с конечным числом страте-

Таблица А.1. *Матрица для Игры 1*

		Игрок 1	
		IBM	Mac
Игрок 2	IBM	c $a+c$	b a
	Mac	0 0	$b+c$ c

- множество игроков;
- множество стратегий, которые могут выбрать игроки;
- выигрыши игроков.

И в общем случае, чтобы задать статическую игру с полной информацией, требуется указать перечисленные элементы. Описание игры в виде такого набора называется нормальной формой игры[8]. Можно сказать, предваряя дальнейшее, что это тот минимум, который необходим для описания *любой* игры. В более сложных типах игр становятся важными и другие аспекты анализируемой ситуации, такие как очередность ходов, информированность игроков, и т. д.

В дальнейшем, описывая общую статическую игру m лиц с полной информацией, будем использовать следующие формальные обозначения для указанных элементов.

Множество игроков (множество участников игры) будем обозначать I:

$$I = \{1, \ldots, m\}.$$

Множество возможных стратегий i-го игрока — или просто множество стратегий i-го игрока — будем обозначать через X_i. Отдельную стратегию i-го игрока будем, как правило, обозначать через x_i. Совокупность стратегий всех игроков будем называть исходом игры. То есть

гий можно задать в виде матрицы, поэтому такие игры назвали матричными. Для игр с ненулевой суммой нужна, соответственно, «сдвоенная» матрица. Приставка «би» означает «два».

[8]Ее также называют стратегической формой игры. Впервые в явном виде нормальная форма игры описана в основополагающей статье Джона фон Неймана: J. von Neumann · Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* **100** (1928): 295–320 (рус. пер. Дж. фон Нейман · К теории стратегических игр, в кн. *Матричные игры*, Н. Н. Воробьев (ред.), М.: Физматгиз, 1961: 173–204). См. также J. von Neumann and O. Morgenstern · *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944 (рус. пер. Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн · *Теория игр и экономическое поведение*, М.: Наука, 1970).

исход игры — это набор

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \text{ где } \mathbf{x} \in X_1 \times \cdots \times X_m = X.$$

Будем предполагать, что у каждого из игроков есть своя целевая функция (в экономической теории ее называют функцией полезности). Обозначим целевую функцию i-го игрока через $u_i(\cdot)$. Каждому исходу игры она сопоставляет некоторое действительное число — выигрыш. Таким образом, в описании игры следует задать для каждого игрока $i \in I$ функцию вида

$$u_i \colon X \mapsto \mathbb{R}.$$

Нормальная форма игры, в соответствии со сказанным выше, представляет собой набор

$$G = \langle I, (X_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I} \rangle.$$

В правилах некоторых игр заложен элемент случайности. Если в игре есть такие случайные события, то принято говорить о случайных ходах природы. Рассмотрим в качестве примера следующую игру.

Игра 2:
В игре участвуют пешеход и автомобилист. Каждый из игроков имеет две стратегии: проявлять осторожность (A) и не проявлять осторожности (B). От выбранных стратегий зависит вероятность дорожно-транспортного происшествия (автомобилист собьет пешехода). Если оба ведут себя неосторожно, то вероятность происшествия равна $1/2$, если только один ведет себя неосторожно, то вероятность равна $1/10$, а если оба осторожны, то вероятность равна $1/100$.

В случае, если произойдет столкновение, то ущерб пешехода в неких условных единицах составит 1000, а ущерб автомобилиста — 200. Кроме того, осторожное поведение на дороге связано для обоих игроков с издержками, равными 100. ⇦

На примере Игры 2 рассмотрим, каким образом представить в нормальной форме игру, включающую случайность. Для этого нам необходимо задать способ вычисления выигрышей (все остальные элементы нормальной формы здесь уже указаны).

Стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший ожидаемый выигрыш[9]. Предполагается, что в описании игры случайные выигрыши даны в таком

[9]Здесь, как это обычно делается в экономической теории, предполагается, что определенные на лотереях предпочтения каждого игрока удовлетворяют услови-

Таблица А.2. *Матрица для Игры 2*

		Автомобилист: A	Автомобилист: B
Пешеход	A	-110; -102	-200; -20
	B	-100; -120	-500; -100

виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах (вовсе не обязательно денежных) и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегий.

Пусть оба участника игры проявляют осторожность, т. е. реализовался исход (A, A). Если произойдет столкновение, то выигрыш пешехода составит (-1100), а выигрыш водителя — (-300). В противном случае выигрыш пешехода составит (-100), а выигрыш водителя — (-100). Ожидаемые выигрыши равны в этом случае:

$$\frac{1}{100}\cdot(-1100)+\frac{99}{100}\cdot(-100)=-110 \text{ — для пешехода,}$$

$$\frac{1}{100}\cdot(-300)+\frac{99}{100}\cdot(-100)=-102 \text{ — для автомобилиста.}$$

Аналогичные вычисления нужно провести для трех других исходов. Рассчитанные выигрыши представлены в Таблице А.2.

Заметьте, что полученная нормальная форма игры не содержит информации о случайных ходах природы, их вероятностях и соответствующих случайных выигрышах.

А.2.2 Концепция доминирования

Задача теории игр — по данному описанию игры предсказать, какие стратегии выберут игроки и каким при этом будет исход игры, или, по крайней мере, сузить множество прогнозируемых исходов. В некоторых случаях предсказать исход игры можно однозначно, если исходить из предположения о том, что каждый игрок рационален.

ям, которые гарантируют существование представляющей их линейной функции полезности (имеется в виду линейность по вероятностям). О линейной функции полезности (функции Неймана—Моргенштерна) см. гл. 6. Исторически соответствующая теория была разработана для нужд теории игр; см. работу Неймана и Моргенштерна, упомянутую в сноске 8.

Таблица А.3.

		Игрок 1	
		IBM	Mac
Игрок 2	IBM	$\underline{3}$ / 1	$\underline{2}$ / $\underline{3}$
	Mac	0 / 0	1 / $\underline{4}$

Пусть в Игре 1 (с. 1009) выгода от совместимости программного обеспечения сравнительно мала, например $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ (Таблица А.3). Тогда вне зависимости от того, какой компьютер выберет второй игрок, первому игроку выгодно выбрать компьютер IBM PC, поскольку $3 > 0$ и $2 > 1$. Аналогично второй игрок предпочтет Макинтош, поскольку $3 > 1$ и $4 > 0$. В обоих случаях имеет место так называемое строгое доминирование двух указанных стратегий: если стратегия A при любых действиях других игроков дает больший выигрыш, чем стратегия B, то принято говорить, что стратегия A строго доминирует стратегию B.

Дадим формальное определение строгого доминирования. Здесь и в дальнейшем мы будем применять обозначение $\mathbf{x}_{-i}$, что означает «все элементы вектора $\mathbf{x}$, кроме i-го», т. е.

$$\mathbf{x}_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n).$$

При этом будем считать, что $(x_i, \mathbf{x}_{-i})$ — это то же самое, что $\mathbf{x}$. Все такие наборы стратегий $\mathbf{x}_{-i}$ являются элементами множества $X_{-i} = \bigtimes_{j \neq i} X_j$.

Определение А.1:

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i строго доминирует стратегию $y_i \in X_i$, если при любых стратегиях $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$, выбранных остальными игроками, выполнено

$$u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) > u_i(y_i, \mathbf{x}_{-i}). \quad \blacktriangleleft$$

Определение строгого доминирования можно наглядно проиллюстрировать в случае двух игроков, множество стратегий одного из которых — действительная прямая (см. Рис. А.1). На рисунке стратегия x_1 первого игрока строго доминирует стратегию y_1. Это выражается в том, что график функции полезности этого игрока по стратегии x_2 второго, соответствующий x_1, лежит ниже графика, соответствующего y_1.

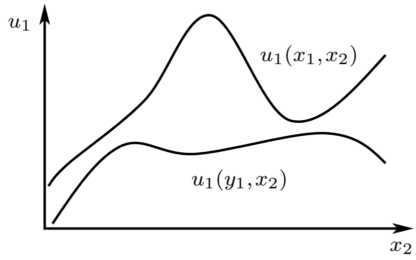


Рис. А.1. *Стратегия x_1 строго доминирует стратегию y_1*

Стратегия называется строго доминирующей, если она строго доминирует любую другую стратегию.

Определение А.2:

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i является его строго доминирующей стратегией, если при любых стратегиях $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$, выбранных остальными игроками, она дает игроку i больший выигрыш, чем любая другая его стратегия $y_i \in X_i$, т. е.

$$u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) > u_i(y_i, \mathbf{x}_{-i})$$

для всех $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$ и всех $y_i \in X_i$, таких что $y_i \neq x_i$. ◀

Здесь удобно ввести определение функции (отображения) отклика, задающей оптимальный отклик игрока на стратегии остальных игроков.

Определение А.3:

Отображение отклика i-го игрока $R_i \colon X_{-i} \rightrightarrows X_i$ сопоставляет каждому набору стратегий других игроков $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$ множество стратегий i-го игрока, каждая из которых является наилучшим откликом на $\mathbf{x}_{-i}$. Другими словами, каждая стратегия $y_i \in R_i(\mathbf{x}_{-i})$ (где $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$) такова, что

$$u_i(y_i, \mathbf{x}_{-i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}).$$ ◀

Если для данного игрока отображение отклика непусто и однозначно (является функцией), то это означает, что можно по стратегиям остальных игроков $\mathbf{x}_{-i}$ однозначно установить, какую стратегию выгодно выбрать i-му игроку. Если такая функция отклика является константой, не зависящей от $\mathbf{x}_{-i}$, то это означает, что у игрока есть строго доминирующая стратегия.

В Таблице A.3 оптимальные отклики игроков показаны подчеркиванием соответствующих максимальных выигрышей. У каждого игрока отклик однозначен, поскольку в каждом столбце (столбцы соответствуют стратегиям второго игрока) подчеркнут только один выигрыш первого игрока, а в каждой строке (строки соответствуют стратегиям первого игрока) — только один выигрыш второго игрока. Подчеркнутые выигрыши первого игрока соответствуют одной и той же стратегии IBM, а подчеркнутые выигрыши второго игрока — одной и той же стратегии Mac. Таким образом, у каждого из игроков есть строго доминирующая стратегия.

В соответствии с определением строгого доминирования у игрока не может существовать более одной строго доминирующей стратегии. Естественно ожидать, что рациональный игрок выберет именно такую стратегию. Поэтому при наличии у каждого игрока строго доминирующей стратегии исход игры может быть предсказан однозначно.

Предсказание исхода игры не столь однозначно, когда у каждого игрока имеется лишь так называемая (слабо) доминирующая стратегия, обеспечивающая этому игроку не меньший выигрыш, чем любая другая его стратегия при любых стратегиях других игроков. Приведем определения (слабого) доминирования.

Определение A.4:

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i (слабо) доминирует стратегию $y_i \in X_i$ (или, другими словами, стратегия y_i доминируется стратегией x_i), если при любых стратегиях $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$, выбранных остальными игроками, выполнено

$$u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \mathbf{x}_{-i})$$

и существует хотя бы один набор стратегий других игроков, $\mathbf{x}'_{-i} \in X_{-i}$, такой что

$$u_i(x_i, \mathbf{x}'_{-i}) > u_i(y_i, \mathbf{x}'_{-i}).$$ ◀

Слабое доминирование можно проиллюстрировать на графике, аналогичном тому, который мы использовали для иллюстрации строгого доминирования. Стратегия x_1 первого игрока слабо, но не строго доминирует его стратегию y_1 (см. Рис. A.2), поскольку график функции полезности для x_1 не везде строго выше, чем для y_1.

Определение A.5:

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i является его (слабо) доминирующей стратегией, если при любых стратегиях $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$, выбранных

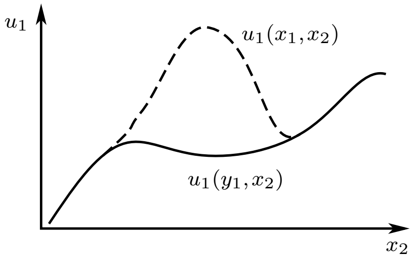


Рис. А.2. *Стратегия x_1 (слабо) доминирует стратегию y_1*

остальными игроками, она доминирует любую другую его стратегию $y_i \in X_i$ либо эквивалентна ей, т. е.

$$u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \mathbf{x}_{-i})$$

для всех $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$ и всех $y_i \in X_i$. ◀

В терминах отображения отклика стратегия $x_i \in X_i$ является доминирующей, если она принадлежит оптимальному отклику при любых стратегиях других игроков:

$$x_i \in R_i(\mathbf{x}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}.$$

Из определения следует, что если стратегия x_i *строго доминирует* стратегию y_i, то стратегия x_i *доминирует* стратегию y_i. Кроме того, если стратегия является *строго доминирующей*, то она является *доминирующей*.

Определение А.6:

Исход игры $\mathbf{x}^* \in X$ является равновесием в доминирующих стратегиях, если стратегия каждого игрока в этом исходе является его доминирующей стратегией. ◀

Естественно ожидать, что если в игре существуют равновесия в доминирующих стратегиях, то одно из них будет реализовавшимся исходом игры.

Следующая игра иллюстрирует равновесие в доминирующих стратегиях.

Игра 3 («Парламентское голосование»):

Парламент разделен на 3 фракции: «белые», «зеленые» и «красные».

Таблица A.4. *Выигрыши в Игре 3*

(a) Белые: за

		Красные: за	Красные: против
Зеленые	за	-1 1 1	-1 1 1
	против	-1 1 1	0 0 0

(b) Белые: против

		Красные: за	Красные: против
Зеленые	за	-1 1 1	0 0 0
	против	0 0 0	0 0 0

В каждой фракции одинаковое количество членов. Проходит голосование по некоторому законопроекту. Каждая из фракций может проголосовать «за» или «против». Решение принимается большинством голосов. Зеленым и красным нравится законопроект, белым — нет. Если законопроект пройдет, то зеленые и красные получат выигрыш 1, а белые — -1, в противном случае все получат 0. ⇦

Удобно представить исходы игры в виде двух таблиц, (a) и (b) (см. Таблицу A.4). Белые выбирают между таблицей (a) и таблицей (b). Их выигрыши записаны в левом верхнем углу этих таблиц.

Если зеленые проголосуют «за», то вектор их выигрышей будет

$$(1\ (\text{за, за}), 1\ (\text{за, против}), 1\ (\text{против, за}), 0\ (\text{против, против})).$$

В скобках указано, как голосуют другие фракции. Если же они проголосуют «против», то вектор выигрышей будет

$$(1\ (\text{за, за}), 0\ (\text{за, против}), 0\ (\text{против, за}), 0\ (\text{против, против})).$$

Очевидно, что голосовать за законопроект является доминирующей стратегией зеленых. То же самое можно сказать и о красных.

Белые имеют следующие выигрыши (при аналогичных предположениях о том, как голосуют другие фракции):

$$\begin{array}{ll} \text{за:} & (-1,\ -1,\ -1,\ 0), \\ \text{против:} & (-1,\quad 0,\quad 0,\ 0). \end{array}$$

Видно, что голосовать против законопроекта является доминирующей стратегией белых (хотя, заметим, эта стратегия не сможет им помочь выиграть).

Тем самым в этой игре существует равновесие в доминирующих стратегиях. В нем зеленые и красные голосуют «за», а белые — «против».

Приведем теперь пример игры с непрерывными стратегиями, в которой есть равновесие в доминирующих стратегиях.

Игра 4 («Аукцион Ви́кри»):
Некий предмет продается с аукциона по следующим правилам. Каждый из участников аукциона ($i = 1, \ldots, n$) подает в тайне от других свою заявку — предлагаемую им цену p_i. Побеждает участник, предложивший самую высокую цену, но платит он следующую по порядку убывания цену. Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием (с равными вероятностями). Если i-й участник окажется победителем, то его выигрыш составит $v_i - p$, где v_i — ценность для него данного предмета, p — цена, которую он должен заплатить; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. Описанную процедуру называют аукционом второй цены или аукционом Викри[10]. ⇦

Особенность аукциона Викри состоит в том, что «правдивая» стратегия является доминирующей стратегией для каждого участника. Под «правдивой» стратегией понимается стратегия, заключающаяся в том, что участник называет цену, совпадающую с ценностью для него данного предмета ($p_i = v_i$). Проверим это. Поскольку участники входят в данную игру симметрично, то достаточно рассмотреть мотивацию только одного из них.

Вычислим сначала выигрыши i-го игрока в разных ситуациях. Пусть максимальная из цен, которые назвали остальные, равна $p_{\max}$ ($p_{\max} = \max_{j \neq i} p_j$), и k из остальных игроков назвали $p_{\max}$. Если i-й участник назовет более высокую цену, чем $p_{\max}$ ($p_i > p_{\max}$), то он выиграет аукцион и заплатит $p_{\max}$. При этом его выигрыш составит $v_i - p_{\max}$. Если i-й участник назовет более низкую цену, чем $p_{\max}$ ($p_i < p_{\max}$), то он проиграет аукцион и получит выигрыш 0. Если цены совпадут ($p_i = p_{\max}$), то с вероятностью $1/(k+1)$ i-й участник выиграет и получит выигрыш $v_i - p_{\max}$, а с вероятностью $k/(k+1)$ он проиграет и получит выигрыш 0. При этом его ожидаемый выигрыш составит $(v_i - p_{\max})/(k+1)$. Окончательно запишем функцию

[10] W. Vickrey. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, *Journal of Finance* **16** (1961): 8–37. Уильям Викри стал Нобелевским лауреатом по экономике за 1996 г.

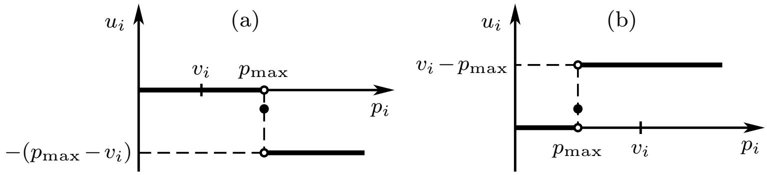


Рис. А.3. *Полезность i-го участника в аукционе Викри: (a) $p_{\max} > v_i$, (b) $p_{\max} < v_i$*

выигрыша i-го участника:

$$u_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \begin{cases} v_i - p_{\max}, & \text{если } p_i > p_{\max}, \\ (v_i - p_{\max})/(k+1), & \text{если } p_i = p_{\max}, \\ 0, & \text{если } p_i < p_{\max}. \end{cases}$$

Чтобы показать, что «правдивая» стратегия $p_i = v_i$ является доминирующей, нужно показать, что она дает не меньший выигрыш, чем любая другая стратегия. Следует рассмотреть три случая: $p_{\max} > v_i$, $p_{\max} = v_i$ и $p_{\max} < v_i$.

$[p_{\max} > v_i]$ Если максимальная из цен, названных остальными, превышает v_i, то i-му участнику невыгодно выигрывать аукцион, назвав $p_i > p_{\max}$; его выигрыш (полезность) в этом случае был бы отрицательным $(-(p_{\max} - v_i))$. При $p_i = p_{\max}$ выигрыш тоже был бы отрицательным $(-(p_{\max} - v_i)/(k+1))$. В случае же проигрыша он получит 0. Таким образом, следует назвать цену, меньшую, чем $p_{\max}$ (см. Рис. А.3а). Поскольку в рассматриваемом случае при выборе «правдивой» стратегии i-й участник проиграет аукцион, то «правдивая» стратегия является одной из оптимальных.

$[p_{\max} = v_i]$ Если максимальная из цен, названных остальными, совпадает с v_i, то i-й участник при любом выборе получит 0. Значит, «правдивая» стратегия даст ему выигрыш, не меньший, чем любая другая.

$[p_{\max} < v_i]$ Если максимальная из цен, названных остальными, окажется меньше v_i, то для i-го участника выгодно выиграть аукцион, поскольку в этом случае его выигрыш будет положительным $(v_i - p_{\max})$. При $p_i = p_{\max}$ выигрыш будет тоже положительным, но меньшим $((v_i - p_{\max})/(k+1))$. Таким образом, следует выбрать $p_i > p_{\max}$ (см. Рис. А.3b). «Правдивая» стратегия обеспечивает ему победу на аукционе и является одной из оптимальных в такой ситуации.

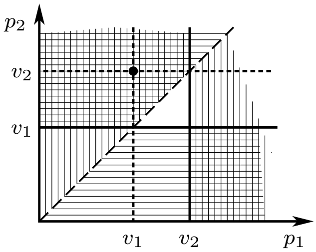


Рис. А.4. *Аукцион Викри с двумя участниками*

Оптимальный отклик i-го участника на данные цены остальных имеет, таким образом, следующий вид:

$$R_i(\mathbf{p}_{-i}) = \begin{cases} [0, p_{\max}), & \text{если } p_{\max} > v_i, \\ [0, +\infty), & \text{если } p_{\max} = v_i, \\ (p_{\max}, +\infty), & \text{если } p_{\max} < v_i, \end{cases}$$

и $p_i = v_i$ при любых ценах остальных принадлежит оптимальному отклику ($v_i \in R_i(\mathbf{p}_{-i})$).

Мы видим, что «правдивая» стратегия в самом деле является доминирующей для i-го участника. Более того, как несложно видеть, это единственная доминирующая стратегия. Если i-й участник назовет цену ниже или выше своей оценки v_i, то можно подобрать такую цену $p_{\max}$, что i-й участник потеряет по сравнению с $p_i = v_i$. Следовательно, в этой игре существует (единственное) равновесие в доминирующих стратегиях:

$$p_i = v_i \ \text{ для всех } i.$$

Рис. А.4 иллюстрирует данную игру при $n = 2$. Отображение отклика первого игрока показано горизонтальной штриховкой, а второго — вертикальной. Две пунктирные прямые соответствуют доминирующим стратегиям. Точка их пересечения соответствует равновесию в доминирующих стратегиях.

А.2.3 Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий

К сожалению, довольно часто бывает, что по крайней мере у одного из игроков нет строго доминирующей стратегии или даже просто

Таблица А.5. *Игра 1 «Выбор компьютера» при $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$*

		Игрок 1	
		IBM	Mac
Игрок 2	IBM	$\underline{3}$ | 2	1 | 3
	Mac	0 | 0	$\underline{2}$ | 5

доминирующей стратегии. Иногда в таких играх исход можно предсказать однозначно, если дополнительно к рациональности предположить, что каждый игрок знает цели партнеров и способен достаточно глубоко «просчитать» их умозаключения.

Рассмотрим в Игре 1 случай, когда $a < c < b$. Пусть, к примеру, $a = 1$, $c = 2$, $b = 3$.

Если второй игрок выберет IBM, то первому игроку тоже выгодно выбрать IBM. Если же второй игрок выберет Макинтош, то первому игроку будет выгодно выбрать Макинтош. Эти оптимальные решения выделены в Таблице А.5 подчеркиванием соответствующих выигрышей. Здесь оптимальное для первого игрока решение будет зависеть от того, какое решение примет второй игрок.

В этом и ему подобных случаях нельзя рассматривать мотивацию одного игрока, не рассматривая мотивацию других игроков. Игрок, у которого нет доминирующей стратегии, должен делать какие-то предположения о том, какие стратегии могут выбрать другие игроки. Не специфицируя механизм формирования ожиданий, мы можем исходить из того, что все такие механизмы не противоречат рациональности игроков. Наиболее очевидное требование можно сформулировать следующим образом:

> *Рациональный игрок не станет выбирать строго доминируемую стратегию.*

Определение А.7:

Стратегия $y_i \in X_i$ игрока i называется строго доминируемой, если существует стратегия $x_i \in X_i$, которая ее строго доминирует, т. е.

$$u_i(y_i, \mathbf{x}_{-i}) < u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}. \quad \blacktriangleleft$$

Проанализируем ситуацию, в которой структура игры (множества стратегий и функции выигрышей), а также то, что все игроки рациональны, известно каждому игроку. Более того, мы рассмотрим

Таблица А.6. *Стратегия III строго доминируется стратегией II*

	A	B	C
I	2, 3	3, 0	2, 1
II	1, 4	2, 6	4, 2
III	0, 7	1, 2	3, 8

ситуацию, в которой все это *общеизвестно*[11], т. е. не только каждый игрок знает это, но он знает, что все другие игроки знают это, и так далее до бесконечности.

В этом случае игрок должен не только сам исходить из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию, но и учитывать, что другие игроки исходят из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию. Эту цепочку предположений следует продолжить до бесконечности.

На этой основе строится метод получения решения игры путем отбрасывания строго доминируемых стратегий. Если в результате последовательности шагов, состоящих в вычеркивании строго доминируемых стратегий, получился «остаток», в котором у каждого игрока только одна стратегия, то при сделанных нами предположениях о рациональности представляется естественным, что игроки должны выбрать именно эти не отброшенные стратегии.

Можно отметить, что в данном случае предполагается не только рациональность игроков, но и их способность провести соответствующие рассуждения, ведь цепочка рассуждений может быть достаточно длинной (я знаю, что он знает, что я знаю. . .).

В Таблицах А.6 и А.7 показан пример процесса отбрасывания строго доминируемых стратегий. В исходной игре 3×3 (Таблица А.6) стратегия II строго доминирует стратегию III, поэтому стратегию III следует вычеркнуть (игрок, выбирающий строки, не станет выбирать эту стратегию). Отбрасываемая стратегия обведена двойной рамкой. Остается игра 2×3 (Таблица А.7a), в которой стратегия A строго доминирует стратегию C. Стратегию C вычеркиваем (поскольку игрок, выбирающий столбцы, прогнозируя действия игрока, выбирающего строки, не станет ее выбирать). В получившейся игре 2×2 (Таблица А.7b) стратегия I строго доминирует стратегию

[11] Англ. *common knowledge.*

Таблица А.7. *Отбрасывание строго доминируемых стратегий*

(a)

	A	B	C
I	2, 3	3, 0	2, 1
II	1, 4	2, 6	4, 2

(b)

	A	B
I	2, 3	3, 0
II	1, 4	2, 6

(c)

	A	B
I	2, 3	3, 0

(d)

	A
I	2, 3

II. В получившейся после отбрасывания стратегии II игре (Таблица А.7c) у игрока, выбирающего строки, осталась только одна стратегия. Для игрока, выбирающего столбцы, стратегия A строго лучше стратегии B, поэтому стратегия B вычеркивается. Остается игра (Таблица А.7d), в которой каждый игрок имеет только по одной стратегии: (I, A). На основе этого можно сделать вывод, что в исходной игре 3×3 должен реализоваться исход (I, A).

Если общеизвестно, что игроки рациональны, и после последовательного вычеркивания строго доминируемых стратегий у каждого игрока останется единственная стратегия (как в приведенной выше игре), то, как и в случае существования строго доминирующих стратегий у каждого игрока, исход игры может быть предсказан однозначно[12].

Даже если рассматриваемая процедура даст неоднозначный результат, то, по крайней мере, можно быть уверенным, что решение должно принадлежать полученному «остатку».

Ситуации, когда в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, достаточно редки. И далеко не во всех играх можно найти решение, отбрасывая строго доминируемые стратегии. Соответствующий пример игры представлен в Таблице А.8.

[12]Остаток при последовательном отбрасывании *строго* доминируемых стратегий всегда один и тот же, вне зависимости от того, в каком порядке происходит отбрасывание стратегий. Можно рассмотреть также процедуру последовательного отбрасывания (слабо) доминируемых стратегий (правда, она кажется менее обоснованной с точки зрения рациональности). В этой последней процедуре порядок уже существен.

Таблица А.8. *В этой игре нет строго доминируемых стратегий*

	A	B	C
X	2, $\underline{3}$	2, 0	$\underline{3}$, 1
Y	1, 4	$\underline{4}$, $\underline{6}$	2, 2
Z	$\underline{3}$, 7	1, 2	1, $\underline{8}$

Второй игрок выберет стратегию A, если предполагает, что первый выберет стратегию Z; в то же время стратегия B для него предпочтительнее в случае, если первый выберет Y.

Естественно предположить, что при отсутствии у всех игроков доминирующих стратегий, выбор каждого игрока зависит от *ожиданий* того, какими будут выборы других. Далее мы рассмотрим концепцию решения, основанную на этой идее.

А.2.4 Равновесие по Нэшу

Бывают ситуации[13], которые естественно моделировать, исходя из следующих предположений:

- игроки при принятии решений ориентируются на предполагаемые действия партнеров;
- ожидания являются равновесными (совпадают с фактически выбранными партнерами действиями).

Если считать, что все игроки рациональны, так что каждый выбирает стратегию, дающую ему наибольший выигрыш при данных ожиданиях, то эти предположения приводят к концепции решения, называемой равновесием Нэша. В равновесии у каждого игрока нет оснований пересматривать свои ожидания.

Можно дать следующее формальное определение.

Набор стратегий $\mathbf{x}^* \in X$ и ожидания $\mathbf{x}^e_{-i}$, $i = 1, \ldots, n$, составляют равновесие Нэша, если

[13]Можно представить себе популяцию игроков типа A (скажем, кошки) и игроков типа B (скажем, мышки). Игрок типа A при встрече с игроком типа B имеет оправданные своим или чужим опытом ожидания относительно поведения партнера типа B, и заранее на них ориентируется (и наоборот). Однако это не единственный тип ситуаций, в которых рассматриваемый подход является адекватным.

- стратегия x_i^* каждого игрока $i = 1, \ldots, n$ является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков $\mathbf{x}_{-i}^e$:

$$u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}^e) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}^e);$$

- ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\mathbf{x}_{-i}^e = \mathbf{x}_{-i}^*, \ i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что при использовании равновесия Нэша для моделирования игровых ситуаций вопросы о том, знают ли игроки цели партнеров, знают ли они о рациональности партнеров, умеют ли их просчитывать и т. д., отходят на второй план. Способ формирования ожиданий выносится за рамки анализа; здесь важно только то, что ожидания по каким-то причинам оправдываются.

Но если при анализе равновесия Нэша неважно, знает ли игрок цели других игроков, то может возникнуть сомнение в правомерности рассмотрения концепции Нэша в контексте игр с *полной информацией*. Все дело в том, что термин «полная информация» в теории игр имеет довольно узкое значение. Он фактически подразумевает только полноту сведений о типах партнеров (термин «тип игрока», разъясняется в параграфе, посвященном байесовским играм).

Очевидно, что из данного выше определения равновесия можно исключить ожидания, поскольку они совпадают со стратегиями. Поэтому обычно используют следующее более простое определение.

Определение А.8:

Набор стратегий $\mathbf{x}^* \in X$ является равновесием Нэша[14], если стратегия x_i^* каждого игрока $i = 1, \ldots, n$ является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков $\mathbf{x}_{-i}^*$:

$$u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}^*).$$ ◀

[14] Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике в 1994 г. вместе с Дж. Харшаньи и Р. Зельтеном «за новаторский анализ равновесий в теории некооперативных игр». Концепция равновесия была предложена в следующих статьях: J. F. Nash • Equilibrium Points in N-Person Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **36** (1950): 48–49; J. F. Nash • Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics* **54** (1951): 286–295 (рус. пер. Дж. Нэш • Бескоалиционные игры, в кн. *Матричные игры*, Н. Н. Воробьев (ред.), М.: Физматгиз, 1961: 205–221).

Это определение равновесия Нэша можно записать более компактно в терминах введенных ранее функций (отображений) отклика: набор стратегий $\mathbf{x}^* \in X$ является равновесием Нэша, если

$$x_i^* \in R_i(\mathbf{x}_{-i}^*),\ i = 1, \ldots, n.$$

Если отклик каждого игрока однозначен (является *функцией*), то множество равновесий Нэша совпадает с множеством решений системы уравнений

$$x_i^* = R_i(\mathbf{x}_{-i}^*),\ i = 1, \ldots, n.$$

В Таблице A.8 отображения отклика игроков показаны подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям. Равновесие Нэша в данной игре — клетка (B, Y), поскольку выигрыши обоих игроков в ней подчеркнуты.

Игра 5 («Дискретный аукцион первой цены»):
Так же как в Игре 4, продается некий предмет. Имеется n участников, каждый из которых называет цену. В аукционе первой цены предмет также достается участнику, назвавшему наивысшую цену, но (в отличие от аукциона Викри) платит он ту цену, которую назвал. При равенстве цен победителя определяет жребий. Как и раньше, v_i — ценность для i-го участника данного предмета. Аукцион дискретный, т. е. как оценки v_i, так и называемые цены могут быть только целочисленными $(0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$[15]. ⇦

Рассмотрим мотивацию i-го игрока. Пусть, как и ранее, $p_{\max}$ — максимальная из цен, которые назвали остальные игроки, а k — количество остальных игроков, которые назвали $p_{\max}$. Функция выигрыша i-го игрока имеет вид

$$u_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \begin{cases} v_i - p_i, & \text{если } p_i > p_{\max}, \\ (v_i - p_i)/(k+1), & \text{если } p_i = p_{\max}, \\ 0, & \text{если } p_i < p_{\max}. \end{cases}$$

При $p_{\max} > v_i$ i-му игроку невыгодно побеждать на аукционе, т. е. выгодно выбрать $p_i < p_{\max}$. При $p_{\max} = v_i$ выгодно выбрать любую цену, не превышающую $p_{\max}$. При $p_{\max} > v_i$ следует выбирать между

[15] В непрерывном случае равновесия не существует; см. задачу A.20.

$p_i = p_{\max}$ и $p_i = p_{\max} + 1$, сравнивая выигрыши $(v_i - p_{\max})/(k+1)$ и $v_i - p_{\max} - 1$. Отображение отклика имеет следующий вид:

$$R_i(\mathbf{p}_{-i}) = \begin{cases} \{0, \ldots, p_{\max} - 1\}, & \text{если } p_{\max} > v_i, \\ \{0, \ldots, p_{\max}\}, & \text{если } p_{\max} = v_i, \\ p_{\max}, & \text{если } v_i - (k+1)/k < p_{\max} < v_i, \\ \{p_{\max}, p_{\max} + 1\}, & \text{если } p_{\max} = v_i - (k+1)/k, \\ p_{\max} + 1, & \text{если } p_{\max} > v_i - (k+1)/k. \end{cases}$$

В общем случае найти все равновесия Нэша в этой игре затруднительно. Рассмотрим только пример двух игроков с оценками $v_1 = 4$ и $v_2 = 8$. Будем предполагать, что цены не могут превышать 10. Отображения отклика двух игроков приобретают следующий вид:

$$R_1(p_2) = \begin{cases} \{0, \ldots, p_2 - 1\}, & \text{если } p_2 = 5, \ldots, 10, \\ \{0, \ldots, 4\}, & \text{если } p_2 = 4, \\ 3, & \text{если } p_2 = 3, \\ \{2, 3\}, & \text{если } p_2 = 2, \\ p_2 + 1, & \text{если } p_2 = 0, 1 \end{cases}$$

и

$$R_2(p_1) = \begin{cases} \{0, \ldots, p_1 - 1\}, & \text{если } p_1 = 9, 10, \\ \{0, \ldots, 8\}, & \text{если } p_1 = 8, \\ 7, & \text{если } p_2 = 7, \\ \{6, 7\}, & \text{если } p_2 = 6, \\ p_1 + 1, & \text{если } p_1 = 0, \ldots, 5. \end{cases}$$

На Рис. А.5 оптимальный отклик первого участника показан крестиками, а второго — кружками. Видно, что в игре имеется четыре равновесия Нэша (в них крестики накладываются на кружки).

Проиллюстрируем теперь использование функций отклика на примере игры, в которой игроки имеют континуум стратегий.

Игра 6 («Международная торговля»):
Две страны одновременно выбирают уровень таможенных пошлин, τ_i. Объем торговли между странами[16] x зависит от установленных пошлин как

$$x = 1 - \tau_1 - \tau_2.$$

[16] В этой игре мы для упрощения не делаем различия между экспортом и импортом.

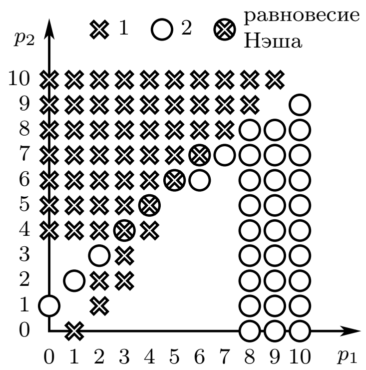


Рис. А.5. *Дискретный аукцион первой цены*

Цель каждой страны — максимизировать доходы

$$u_i = \tau_i x.$$

Максимизируем выигрыш первой страны

$$\tau_1(1 - \tau_1 - \tau_2)$$

по τ_1, считая фиксированным уровень пошлины, установленный второй страной. Условие первого порядка имеет вид

$$1 - 2\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

Так как максимизируемая функция строго вогнута, то условие первого порядка соответствует единственному глобальному максимуму.

Условие первого порядка для задачи максимизации выигрыша второй страны находится аналогично:

$$1 - \tau_1 - 2\tau_2 = 0.$$

Решив систему из двух линейных уравнений, найдем равновесие Нэша:

$$\tau_1^* = \tau_2^* = 1/3.$$

Оптимальный отклик первой страны на уровень таможенной пошлины, установленной второй страной, описывается функцией

$$\tau_1(\tau_2) = \frac{1 - \tau_2}{2}.$$

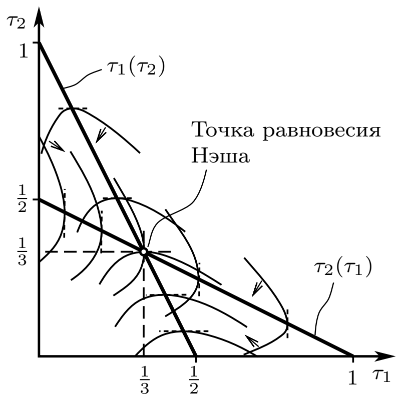


Рис. А.6. *Равновесие Нэша в игре «Международная торговля»*

Аналогично функция отклика второй страны имеет вид

$$\tau_2(\tau_1) = \frac{1 - \tau_1}{2}.$$

Чтобы найти равновесие Нэша, требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tau_1(\tau_2^*) = \tau_1^*, \\ \tau_2(\tau_1^*) = \tau_2^*. \end{cases}$$

Графически поиск равновесия Нэша показан не Рис. А.6. Точки, лежащие на кривых оптимального отклика $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$, характеризуются тем, что в них касательные к кривым безразличия игроков параллельны соответствующей оси координат. Напомним, что кривой безразличия называют множество точек, в которых полезность рассматриваемого индивидуума одна и та же ($u_i(\mathbf{x}) = \text{const}$). Равновесие находится как точка пересечения кривых отклика.

Преимущество использования концепции равновесия Нэша состоит в том, что можно найти решение и в тех играх, в которых отбрасывание строго доминируемых стратегий не позволяет этого сделать. Однако сама концепция может показаться в определенном смысле более спорной.

Связь между введенными концепциями решений описывается следующими утверждениями.

Теорема А.1:

Если $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из составляющих его стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий. ⌋

Обратная теорема верна в случае единственности.

Теорема А.2:

Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия x_i^*, то $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в этой игре. ⌋

Доказательства этих двух утверждений даны в приложении к данному пункту. Нам важно здесь, что концепция Нэша не входит в противоречие с идеей рациональности, заложенной в процедуре отбрасывания строго доминируемых стратегий.

По-видимому, естественно считать, что разумно определенное равновесие не может быть отброшено при последовательном отбрасывании строго доминируемых стратегий. Первую из теорем можно рассматривать как подтверждение того, что концепция Нэша достаточно разумна. Отметим, что данный результат относится только к строгому доминированию. Можно привести пример равновесия Нэша с одной или несколькими слабо доминируемыми стратегиями (см., напр., Таблицу А.11 на с. 1054).

Приложение. Доказательство теорем о связи между равновесием Нэша и процедурой последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий

В этом приложении мы формально докажем утверждения о связи между равновесием Нэша и процедурой последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Сначала определим формально процедуру последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий. Пусть исходная игра задана как

$$G = \langle I, (X_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle.$$

Определим последовательность игр $\{G^{[t]}\}_{t=0,1,2,\ldots}$, каждая из которых получается из последующей игры отбрасыванием строго доминируемых стратегий. Игры отличаются друг от друга множествами допустимых стратегий:

$$G^{[t]} = \left\langle I, \left(X_i^{[t]}\right)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I} \right\rangle.$$

Процедура начинается с $G^{[0]} = G$. (Вообще говоря, функции u_i для разных шагов отличаются областью определения, но мы не станем отражать этот факт, чтобы не загромождать запись.)

Множество допустимых стратегий i-го игрока на шаге $t+1$ рассматриваемой процедуры берется равным множеству не доминируемых строго стратегий i-го игрока в игре t-го шага. Множества не доминируемых строго стратегий будем обозначать через ND_i (см. определение строго доминируемых стратегий — Определение A.7 на с. 1021). Формально

$$ND_i = \left\{ x_i \in X_i \;\middle|\; \nexists y_i \in X_i\colon u_i(y_i, \mathbf{x}_{-i}) > u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) \; \forall \mathbf{x}_{-i} \in X_{-i} \right\}.$$

Таким образом, можно записать шаг рассматриваемой процедуры следующим образом:

$$X_i^{[t+1]} = ND_i^{[t]},$$

где $ND_i^{[t]}$ — множество не доминируемых строго стратегий в игре $G^{[t]}$.

Приведем теперь доказательства Теорем A.1 и A.2 (с. 1029). Теорема A.1 утверждает следующее.

> Если $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из составляющих его стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Если использовать только что введенные обозначения, то Теорема A.1 утверждает, что если $\mathbf{x}^*$ — равновесие Нэша в исходной игре G, то на любом шаге $t = 1, 2, \ldots$ выполнено

$$x_i^* \in X_i^{[t]} \; \forall i \in I$$

или $\mathbf{x}^* \in X^{[t]}$.

Доказательство Теоремы A.1. Пусть есть такой шаг τ, что на нем впервые должна быть отброшена стратегия x_i^* некоторого игрока $i \in I$. Предполагается, что на предыдущих шагах ни одна из стратегий не была отброшена:

$$\mathbf{x}^* \in X^{[t]}, \; t = 1, \ldots, \tau.$$

По определению строгого доминирования существует $x_i' \in X_i^{[\tau]}$ — другая стратегия игрока i, которая дает этому игроку в игре $G^{[\tau]}$

более высокий выигрыш при любых выборах других игроков:

$$u_i(x'_i, \mathbf{x}_{-i}) > u_i(x^*_i, \mathbf{x}_{-i}) \ \forall \mathbf{x}_{-i} \in X^{[\tau]}_{-i}.$$

В том числе это соотношение должно быть выполнено для $\mathbf{x}^*_{-i}$, поскольку мы предположили, что стратегии $\mathbf{x}^*_{-i}$ не были отброшены на предыдущих шагах процедуры ($\mathbf{x}^*_{-i} \in X^{[\tau]}_{-i}$). Значит,

$$u_i(x'_i, \mathbf{x}^*_{-i}) > u_i(x^*_i, \mathbf{x}^*_{-i}).$$

Однако это неравенство противоречит тому, что $\mathbf{x}^*$ — равновесие Нэша. ■

Докажем теперь Теорему A.2. Напомним ее формулировку.

> Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия x^*_i, то $\mathbf{x}^* = (x^*_1, \ldots, x^*_m)$ — равновесие Нэша в этой игре.

Данная теорема относится к случаю, когда в процессе отбрасывания строго доминируемых стратегий, начиная с некоторого шага $\bar{t}$ остается единственный набор стратегий $\mathbf{x}^*$, т. е.

$$X^{[t]}_i = \{x^*_i\} \ \forall i \in I, \ t = \bar{t} + 1, \ldots, \infty.$$

Теорема утверждает, что $\mathbf{x}^*$ является единственным равновесием Нэша исходной игры.

Доказательство Теоремы A.2. Поскольку согласно доказанной только что теореме ни одно из равновесий Нэша не может быть отброшено, нам остается только доказать, что указанный набор стратегий $\mathbf{x}^*$ является равновесием Нэша. Предположим, что это не так. Это означает, что существует стратегия $\tilde{x}_i$ некоторого игрока i, такая что

$$u_i(x^*_i, \mathbf{x}^*_{-i}) < u_i(\tilde{x}_i, \mathbf{x}^*_{-i}).$$

По предположению, стратегия $\tilde{x}_i$ была отброшена на некотором шаге τ, поскольку она не совпадает с x^*_i. Таким образом, существует некоторая строго доминирующая ее стратегия $x'_i \in X^{[\tau]}_i$, так что

$$u_i(x'_i, \mathbf{x}_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i, \mathbf{x}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{x}_{-i} \in X^{[\tau]}_{-i}.$$

В том числе это неравенство выполнено при $\mathbf{x}_{-i} = \mathbf{x}^*_{-i}$:

$$u_i(x'_i, \mathbf{x}^*_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i, \mathbf{x}^*_{-i}).$$

Стратегия x_i' не может совпадать со стратегией x_i^*, поскольку в этом случае вышеприведенные неравенства противоречат друг другу. В свою очередь, из этого следует, что должна существовать стратегия x_i'', которая доминирует стратегию x_i' на некотором шаге $\tau' > \tau$, т. е.

$$u_i(x_i'', \mathbf{x}_{-i}) > u_i(x_i', \mathbf{x}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}^{[\tau']}.$$

В том числе

$$u_i(x_i'', \mathbf{x}_{-i}^*) > u_i(x_i', \mathbf{x}_{-i}^*).$$

Можно опять утверждать, что стратегия x_i'' не может совпадать со стратегией x_i^*, иначе вышеприведенные неравенства противоречили бы друг другу.

Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность шагов $\tau < \tau' < \tau'' < \ldots$ и соответствующих допустимых стратегий $x_i', x_i'', x_i''', \ldots$, не совпадающих с x_i^*. Это противоречит существованию шага $\bar{t}$, начиная с которого множества допустимых стратегий состоят только из x_i^*. ■

А.2.5 Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Нетрудно построить примеры игр, в которых равновесие Нэша отсутствует. Следующая игра представляет пример такой ситуации.

Игра 7 («Инспекция»):
В этой игре первый игрок (проверяемый) поставлен перед выбором: платить или не платить подоходный налог. Второй — налоговой инспектор — решает, проверять или не проверять именно этого налогоплательщика. Если инспектор «ловит» недобросовестного налогоплательщика, то взимает с него штраф и получает поощрение по службе, более чем компенсирующее его издержки; в случае же проверки исправного налогоплательщика инспектор, не получая поощрения, тем не менее несет издержки, связанные с проверкой. Матрица выигрышей представлена в Таблице А.9. ⇦

Если инспектор уверен, что налогоплательщик выберет не платить налог, то инспектору выгодно его проверить. С другой стороны, если налогоплательщик уверен, что его проверят, то ему лучше заплатить налог. Аналогично если инспектор уверен, что налогоплательщик заплатит налог, то инспектору невыгодно его проверять, а если налогоплательщик уверен, что инспектор не станет его проверять, то он предпочтет не платить налог. Оптимальные отклики показаны в таблице подчеркиванием соответствующих выигрышей.

Таблица А.9. *Матрица для Игры 7*

		Инспектор	
		проверять	не проверять
Проверяемый	нарушать	-1, $\underline{1}$	$\underline{1}$, 0
	не нарушать	$\underline{0}$, -1	0, $\underline{0}$

Очевидно, что ни одна из клеток не может быть равновесием Нэша, поскольку ни в одной из клеток не подчеркнуты одновременно оба выигрыша.

В подобной игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы его партнер не смог угадать, какую именно стратегию он выбрал. Этого можно достичь, внеся в выбор стратегии элемент неопределенности.

Те стратегии, которые мы рассматривали ранее, принято называть чистыми стратегиями. Чистые стратегии в статических играх, по сути, совпадают с действиями игроков. Но в некоторых играх естественно ввести в рассмотрение также смешанные стратегии. Под смешанной стратегией понимают распределение вероятностей на чистых стратегиях. В частном случае, когда множество чистых стратегий каждого игрока конечно,

$$X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{n_i}\}$$

(соответствующая игра называется конечной), смешанная стратегия представляется вектором вероятностей соответствующих чистых стратегий:

$$\mu_i = (\mu_i^1, \ldots, \mu_i^{n_i}).$$

Обозначим множество смешанных стратегий i-го игрока через M_i:

$$\mathrm{M}_i = \left\{ \mu_i \;\middle|\; \mu_i^k \geqslant 0, k = 1, \ldots, n_i; \mu_i^1 + \cdots + \mu_i^{n_i} = 1 \right\}.$$

Как мы уже отмечали, стандартное предположение теории игр (как и экономической теории) состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший ожидаемый выигрыш. Ожидаемый выигрыш i-го игрока, соответствующий набору смешанных стратегий всех игроков $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, вычисляется по формуле

$$U(\mu_i, \mu_{-i}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \mu_1^{k_i} \cdots \mu_m^{k_m} u_i(x_1^{k_i}, \ldots, x_m^{k_m}).$$

Ожидание рассчитывается в предположении, что игроки выбирают стратегии независимо (в статистическом смысле).

Заметим, что поскольку игрок максимизирует ожидаемый выигрыш, то *он будет смешивать несколько разных стратегий, только если они дают ему одинаковый выигрыш (при данных стратегиях других игроков)*.

Смешанные стратегии можно представить как результат рандомизации игроком своих действий, т. е. как результат их случайного выбора. Например, чтобы выбирать каждую из двух возможных стратегий с одинаковой вероятностью, игрок может подбрасывать монету. Эта интерпретация подразумевает, что выбор стратегии зависит от некоторого *сигнала*, который сам игрок может наблюдать, а его партнеры — нет[17]. Например, игрок может выбирать стратегию в зависимости от своего настроения, если ему известно распределение вероятностей его настроений, или от того, с какой ноги он в этот день встал[18].

Определение A.9:

Набор смешанных стратегий $\mu^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*)$ является равновесием Нэша в смешанных стратегиях, если стратегия μ_i^* каждого игрока $i = 1, \ldots, n$ является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков μ_{-i}^*:

$$U(\mu_i^*, \mu_{-i}^*) = \max_{\mu_i \in \mathrm{M}_i} U(\mu_i, \mu_{-i}^*).$$ ◀

Как и для равновесия Нэша в чистых стратегиях, мы можем здесь ввести ожидания и дать определение через них. Следует потребовать, чтобы выполнялось следующее:

- стратегия μ_i^* каждого игрока $i = 1, \ldots, n$ является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков μ_{-i}^e:

$$U(\mu_i^*, \mu_{-i}^e) = \max_{\mu_i \in \mathrm{M}_i} U(\mu_i, \mu_{-i}^e);$$

- ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\mu_{-i}^e = \mu_{-i}^*, \; i = 1, \ldots, n.$$

[17] Если сигналы, наблюдаемые игроками, статистически зависимы, то это может помочь игрокам скоординировать свои действия. Это приводит к концепции *коррелированного равновесия*.

[18] Впоследствии мы рассмотрим, как можно достигнуть эффекта рандомизации в рамках байесовского равновесия.

Заметим, что *равновесие Нэша в смешанных стратегиях является обычным равновесием Нэша в так называемом смешанном расширении игры*, т. е. в игре, чистые стратегии которой являются смешанными стратегиями исходной игры.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях в Игре 7.

Обозначим через μ вероятность того, что налогоплательщик не платит подоходный налог, а через ν — вероятность того, что налоговой инспектор проверяет налогоплательщика.

В этих обозначениях ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен

$$U_1(\mu, \nu) = \mu[\nu \cdot (-1) + (1-\nu) \cdot 1] + (1-\mu)[\nu \cdot 0 + (1-\nu) \cdot 0] = \\ = \mu(1-2\nu),$$

а ожидаемый выигрыш инспектора равен

$$U_2(\mu, \nu) = \nu[\mu \cdot 1 + (1-\mu) \cdot (-1)] + (1-\mu)[\mu \cdot 0 + (1-\mu) \cdot 0] = \\ = \nu(2\mu - 1).$$

Если вероятность проверки мала ($\nu < 1/2$), то налогоплательщику выгодно не платить налог, т. е. выбрать $\mu = 1$. Если вероятность проверки велика, то налогоплательщику выгодно заплатить налог, т. е. выбрать $\mu = 0$. Если же $\nu = 1/2$, то налогоплательщику все равно, платить налог или нет, он может выбрать любую вероятность μ из интервала $[0, 1]$. Таким образом, отображение отклика налогоплательщика имеет вид:

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu < 1/2, \\ [0,1], & \text{если } \nu = 1/2, \\ 0, & \text{если } \nu > 1/2. \end{cases}$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем отклик налогового инспектора:

$$\nu(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 1/2, \\ [0,1], & \text{если } \mu = 1/2, \\ 1, & \text{если } \mu > 1/2. \end{cases}$$

Графики отображений отклика обоих игроков представлены на Рис. A.7. По осям на этой диаграмме откладываются вероятности (ν и μ соответственно). Они имеют единственную общую точку $(1/2, 1/2)$. Эта точка соответствует равновесию Нэша в смешанных стратегиях.

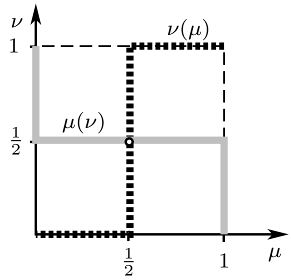


Рис. А.7. *Отображения отклика в Игре 7 «Инспекция»*

В этом равновесии, как это всегда бывает в равновесиях с *невырожденными* смешанными стратегиями (т. е. в таких равновесиях, в которых ни одна из стратегий не выбирается с вероятностью 1), каждый игрок рандомизирует стратегии, которые обеспечивают ему одинаковую ожидаемую полезность. Вероятности использования соответствующих чистых стратегий, выбранные игроком, определяются не структурой выигрышей данного игрока, а структурой выигрышей другого игрока (что может вызвать определенные трудности с интерпретацией данного решения).

В отличие от равновесия в чистых стратегиях, равновесие в смешанных стратегиях в конечных играх существует всегда[19], что является следствием следующего общего утверждения. (Доказательство данного утверждения см. в приложении к данному пункту.)

Теорема А.3:

Предположим, что в игре $G = \langle I, (X_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle$ у любого игрока $i \in I$ множество стратегий X_i непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ квазивогнута по x_i и непрерывна. Тогда в игре G существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.⌋

Существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях в играх с конечным числом чистых стратегий является следствием того, что равновесие в смешанных стратегиях является равновесием в чистых стратегиях в смешанном расширении игры. (Читателю предлагается самостоятельно проверить выполнение условий Теоремы А.3.)

[19]Этот результат был доказан Нэшем в статье 1950 года, упоминавшейся в сноске 14.

Теорема А.4 (Нэш):

Равновесие Нэша в смешанных стратегиях существует в любой конечной игре.

Заметим, что существование в игре равновесия в чистых стратегиях не исключает существования равновесия в невырожденных смешанных стратегиях.

Рассмотрим в Игре 1 «Выбор компьютера» случай, когда выгоды от совместимости значительны, т. е. $a < c$ и $b < c$. В этом варианте игры два равновесия в чистых стратегиях: (IBM, IBM) и (Mac, Mac). Обозначим μ и ν вероятности выбора компьютера IBM PC первым и вторым игроком соответственно. Ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$U_1(\mu, \nu) = \mu[\nu \cdot (a + c) + (1 - \nu) \cdot a] + (1 - \mu)[\nu \cdot 0 + (1 - \nu) \cdot c] = \\ = \mu[\nu \cdot 2c - (c - a)] + (1 - \nu)c,$$

а его отклик имеет вид

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu < (c - a)/2c, \\ [0, 1], & \text{если } \nu = (c - a)/2c, \\ 1, & \text{если } \nu > (c - a)/2c. \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш второго игрока равен

$$U_2(\mu, \nu) = \nu[\mu \cdot c + (1 - \mu) \cdot 0] + (1 - \nu)[\mu \cdot b + (1 - \mu) \cdot (b + c)] = \\ = \nu[\mu \cdot 2c - (b + c)] + b + (1 - \mu)c,$$

а его отклик имеет вид

$$\nu(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < (b + c)/2c, \\ [0, 1], & \text{если } \mu = (b + c)/2c, \\ 1, & \text{если } \mu > (b + c)/2c. \end{cases}$$

Графики отображений отклика и точки, соответствующие трем равновесиям, изображены на Рис. А.8. Видно, что в рассматриваемой игре кроме двух равновесий в чистых стратегиях имеется одно равновесие в невырожденных смешанных стратегиях. Соответствующие вероятности равны

$$\mu = \frac{b + c}{2c} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{c - a}{2c}.$$

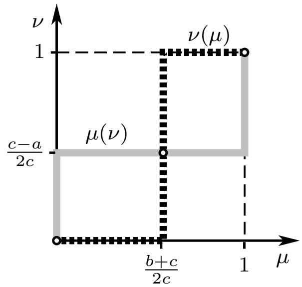


Рис. А.8. *Случай, когда в игре «Выбор компьютера» существует три равновесия, одно из которых — равновесие в невырожденных смешанных стратегиях*

Если в игре у игроков множества стратегий представляют собой континуум, то для доказательства существования равновесия в смешанных стратегиях можно применить следующее усиление теоремы Нэша, которое мы даем без доказательства.

Теорема А.5 (Гликсберг[20]):
Пусть $G = \langle I, (X_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle$ — игра m лиц в нормальной форме, для каждого игрока i множество стратегий X_i — компактное выпуклое подмножество метрического пространства, а u_i — непрерывная функция. Тогда в игре G существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях. ┘

Приложение. Доказательство Теоремы А.3 о существовании равновесия Нэша в чистых стратегиях

В этом приложении мы докажем Теорему А.3. Теорема утверждает следующее:

> Предположим, что в игре $G = \langle I, (X_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle$ у любого игрока $i \in I$ множество стратегий X_i непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ квазивогнута по x_i и непрерывна. Тогда в игре G существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

[20] См. I. L. Glicksberg · A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points, *Proceedings of the American Mathematical Society* **3** (1952): 170–174, рус. пер. И. Л. Гликсберг · Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша, в кн. *Бесконечные антагонистические игры*, Н. Н. Воробьев (ред.), М.: Физматгиз, 1963: 493–503.

Доказательство Теоремы А.3. Значение отображения отклика $R_i(\cdot)$ каждого игрока при каждом $\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}$ непусто по теореме Вейерштрасса (Теорема B.55 в Приложении B, с. 1132) и выпукло по Теореме B.53 (Приложение B, с. 1131). Далее, по теореме Бержа (Теорема B.61 в Приложении B, с. 1134) $R_i(\cdot)$ является полунепрерывным сверху для каждого игрока.

Опираясь на указанные свойства отображения $R_i(\cdot)$ и на теорему Какутани о неподвижной точке, докажем существование равновесия по Нэшу, т. е. такого набора стратегий $\mathbf{x}^* \in X$, для которого выполнено

$$x_i^* \in R_i(\mathbf{x}_{-i}^*),\ i = 1, \ldots, n.$$

Определим отображение $R(\cdot)$ из X в X следующим образом:

$$R(\mathbf{x}) = R_1(\mathbf{x}_{-1}) \times \cdots \times R_n(\mathbf{x}_{-n}).$$

Отметим, что это отображение удовлетворяет тем же свойствам (указанным выше), что и каждое из отображений $R_i(\cdot)$, так как является их декартовым произведением.

Множество X непусто, компактно и выпукло как декартово произведение непустых, компактных и выпуклых множеств X_i.

Отображение $R(\cdot)$ и множество X удовлетворяют свойствам, которые необходимы для выполнения теоремы Какутани (Теорема B.48 в Приложении B, с. 1129). Таким образом, существует неподвижная точка отображения $R(\cdot)$:

$$\mathbf{x}^* \in R(\mathbf{x}^*).$$

Очевидно, что точка $\mathbf{x}^*$ есть равновесие по Нэшу. ■

Задачи

А.1 Два игрока размещают некоторый объект на плоскости, т. е. выбирают его координаты $(x,\ y)$. Игрок 1 находится в точке $(x_1,\ y_1)$, а игрок 2 — в точке $(x_2,\ y_2)$. Игрок 1 выбирает координату x, а игрок 2 — координату y. Каждый стремится, чтобы объект находился как можно ближе к нему. Покажите, что в этой игре у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия.

А.2 Рассмотрите Игру 6.

(А) Покажите, что в этой игре множество строго доминируемых стратегий у каждой из стран имеет вид $(1/2, 1]$.

(В) Пусть множества допустимых стратегий стран имеют вид $[a, b]$, где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Найдите множества строго доминируемых стратегий.

(c) Пользуясь результатом предыдущего пункта, проанализируйте процедуру последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий для Игры 6. Покажите, что у каждой из стран в пределе останется по одной стратегии (какой?).

А.3 Докажите, что если в некоторой игре у каждого из игроков существует строго доминирующая стратегия, то эти стратегии составляют единственное равновесие Нэша.

А.4 Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием в смысле Нэша. Приведите пример игры, в которой существует равновесие в доминирующих стратегиях и, кроме того, существуют равновесия Нэша, не совпадающие с равновесием в доминирующих стратегиях.

Найдите в играх, описанных в задачах с А.5 по А.14, все равновесия Нэша.

А.5 Игра 2 (с. 1011), выигрыши которой представлены в Таблице А.2.

А.6 Два игрока делят между собой 4 ореха. Каждый делает свою заявку на орехи: $x_i = 1, 2$ или 3. Если $x_1 + x_2 \leqslant 4$, то каждый получает сколько просил, в противном случае оба не получают ничего.

А.7 Два преподавателя экономического факультета пишут учебник. Качество учебника (q) зависит от их усилий (e_1 и e_2 соответственно) в соответствии с функцией

$$q = 2(e_1 + e_2).$$

Целевая функция каждого имеет вид

$$u_i = q - e_i,$$

т. е. качество минус усилия. Можно выбрать усилия на уровне 1, 2 или 3.

А.8 Каждый из трех игроков выбирает одну из сторон монеты: «орел» или «решка». Если выборы игроков совпали, то каждому выдается по 1 рублю. Если выбор одного из игроков отличается от выбора двух других, то он выплачивает им по 1 рублю.

А.9 Три игрока выбирают одну из трех альтернатив: A, B или C. Альтернатива выбирается голосованием по правилу простого большинства. Каждый из игроков голосует за одну и только за одну альтернативу. Если ни одна из альтернатив не наберет большинства, то будет выбрана альтернатива A. Выигрыши игроков в зависимости от выбранной альтернативы следующие:

$$\begin{aligned} &u_1(A) = 2, \quad u_1(B) = 1, \quad u_1(C) = 0,\\ &u_2(A) = 0, \quad u_2(B) = 2, \quad u_2(C) = 1,\\ &u_3(A) = 1, \quad u_3(B) = 0, \quad u_3(C) = 2. \end{aligned}$$

А.10 Формируются два избирательных блока, которые будут претендовать на места в законодательном собрании города N-ска. Каждый из блоков может выбрать одну из трех ориентаций: «левую» (L), «правую» (R) или «экологическую» (E). Каждая из ориентаций может привлечь 50, 30 и 20% избирателей соответственно. Известно, что если интересующая их ориентация не представлена на выборах, то избиратели из соответствующей группы не будут голосовать. Если блоки выберут разные ориентации, то каждый получит соответствующую долю голосов. Если блоки выберут одну и ту же ориентацию, то голоса соответствующей группы избирателей разделятся поровну между ними. Цель каждого блока — получить наибольшее количество голосов.

А.11 Два игрока размещают точку на плоскости. Один игрок выбирает абсциссу, другой — ординату. Их выигрыши заданы функциями:

(A) $u_x(x, y) = -x^2 + x(y+a) + y^2, \quad u_y(x, y) = -y^2 + y(x+b) + x^2,$

(B) $u_x(x, y) = -x^2-2ax(y+1)+y^2, \quad u_y(x, y) = -y^2+2by(x+1)+x^2,$

(C) $u_x(x, y) = -x - y/x + 1/2y^2, \quad u_y(x, y) = -y - x/y + 1/2x^2$

(a, b — коэффициенты).

А.12 «Мороженщики на пляже»

Два мороженщика в жаркий день продают на пляже мороженое. Пляж можно представить как единичный отрезок. Мороженщики выбирают, в каком месте пляжа им находиться, т. е. выбирают координату $x_i \in [0, 1]$. Покупатели равномерно рассредоточены по пляжу и покупают мороженое у ближайшего к ним продавца. Если $x_1 < x_2$, то первый обслуживает $(x_1 + x_2)/2$ долю пляжа, а второй — $1 - (x_1 + x_2)/2$. Если мороженщики расположатся в одной и той же точке ($x_1 = x_2$), покупатели поровну распределятся между ними. Каждый мороженщик стремится обслуживать как можно бóльшую долю пляжа (цену мороженого они менять не могут).

А.13 Игра 3.

А.14 Игра 4 при $n = 2$.

А.15 Докажите теорему Нэша (Теорему А.4), используя Теорему А.3.

А.16 Проанализируйте Игру 1 «Выбор компьютера» (с. 1009) и найдите ответы на следующие вопросы:

(А) При каких условиях на параметры a, b и c будет существовать равновесие в доминирующих стратегиях? Каким будет это равновесие?

(В) При каких условиях на параметры будет равновесием Нэша исход, когда оба выбирают IBM? Когда это равновесие единственно? Может ли оно являться также равновесием в доминирующих стратегиях?

А.17 Каждый из двух соседей по подъезду выбирает, будет он подметать подъезд раз в неделю или нет. Пусть каждый оценивает выгоду для себя от двойной чистоты в $a > 0$ денежных единиц, выгоду от одинарной чистоты — в $b > 0$ единиц, от неубранного подъезда — в 0, а свои затраты на личное участие в уборке — в $c > 0$. При каких соотношениях между a, b и c в игре сложатся равновесия вида: (0) никто не убирает, (1) один убирает, (2) оба убирают?

А.18 Предположим, что в некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет две стратегии, существует единственное равновесие Нэша. Покажите, что в этой игре хотя бы у одного из игроков есть доминирующая стратегия.

А.19 Проанализируйте аукцион второй цены (см. Игру 4), предполагая, что оценки v_i и цены p_i могут принимать только целочисленные значения $(0, 1, 2, \ldots)$. Найдите отображения отклика. Для случая двух игроков с $v_1 = 4$ и $v_2 = 8$ найдите все равновесия Нэша. Подкрепите анализ графиком, подобным Рис. А.5.

А.20 Проанализируйте аукцион первой цены (см. Игру 5), предполагая, что оценки v_i и цены p_i могут принимать значения из $[0, +\infty)$. Найдите отображения отклика. Покажите, что в такой игре не существует равновесия Нэша в чистых стратегиях, если оценки участников различны. Для случая двух игроков подкрепите анализ графиками, подобными Рис. А.3 и А.4.

А.21 Каждый из двух игроков $(i = 1, 2)$ имеет по три стратегии: a, b, c и x, y, z соответственно. Взяв свое имя как бесконечную последовательность символов типа *иваниваниван*..., задайте выигрыши первого игрока так: $u_1(a, x) =$ «и», $u_1(a, y) =$ «в», $u_1(a, z) =$ «а», $u_1(b, x) =$ «н», $u_1(b, y) =$ «и», $u_1(b, z) =$ «в», $u_1(c, x) =$ «а», $u_1(c, y) =$ «н», $u_1(c, z) =$ «и». Подставьте вместо каждой буквы имени ее порядковый номер в алфавите, для чего воспользуйтесь Таблицей А.10. Аналогично используя фамилию, задайте выигрыши второго игрока, $u_2(\cdot)$.

Таблица А.10. *Номера букв русского алфавита*

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0		а	б	в	г	д	е	ё	ж	з
1	и	й	к	л	м	н	о	п	р	с
2	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы
3	ь	э	ю	я						

(A) Есть ли в вашей игре доминирующие и строго доминирующие стратегии? Если есть, то образуют ли они равновесие в доминирующих стратегиях?

(B) Каким будет результат последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий?

(C) Найдите равновесия Нэша этой игры.

А.22 Составьте по имени, фамилии и отчеству игру трех игроков, у каждого из которых по две стратегии, по тому же принципу, как и в задаче А.21. Ответьте на те же вопросы.

А.23 Заполните пропущенные выигрыши в следующей таблице так, чтобы в получившейся игре

(0) не было ни одного равновесия Нэша,

(1) было одно равновесие Нэша,

(2) было два равновесия Нэша,

(3) было три равновесия Нэша,

(4) было четыре равновесия Нэша.

? / 1	2 / ?
4 / ?	? / 0

А.24 (A) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш i-го игрока не может быть меньше, чем

$$\min_{\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}} \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}).$$

(B) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш i-го игрока не может быть меньше, чем

$$\max_{x_i \in X_i} \min_{\mathbf{x}_{-i} \in X_{-i}} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}).$$

А.25 Задача относится к свойствам антагонистических игр двух лиц. Антагонистической игрой двух лиц называется игра, в которой сумма выигрышей обоих игроков постоянна:

$$u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = C.$$

(В частном случае, когда $C = 0$, такая игра называется игрой с нулевой суммой.)

Объясните, почему множество седловых точек функции $u_1(x_1, x_2)$ в антагонистической игре двух лиц совпадает с множеством равновесий Нэша.

(Напомним, что седловой точкой функции $u_1(x_1, x_2)$, называют такую точку $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$, что для любых $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ выполнено
$$u_1(x_1, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2).)$$

A.26 Докажите, основываясь на результатах двух предыдущих задач, что в антагонистической игре двух лиц равновесие Нэша (в чистых стратегиях) существует тогда и только тогда, когда
$$\min_{\mathbf{x}_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{\mathbf{x}_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2).$$

Проверьте, что в играх, описанных в задачах с A.27 по A.29, нет равновесия Нэша в чистых стратегиях. Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

A.27 Первый из двух игроков прячет монетку, положив ее по своему выбору вверх орлом или решкой. Второй игрок должен угадать, как лежит монетка. Если второй игрок угадает, то первый должен отдать ему рубль, в противном случае он должен отдать первому рубль.

A.28 Два игрока играют в следующую игру. Каждый называет один из трех предметов: «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок, назвавший камень, побеждает игрока, назвавшего ножницы (ножницы тупятся о камень), игрок, назвавший ножницы, побеждает игрока, назвавшего бумагу (ножницы режут бумагу), а игрок, назвавший бумагу, побеждает игрока, назвавшего камень (камень можно завернуть в бумагу). Выигравший игрок получает 1, проигравший получает -1. Если названные предметы совпали, то каждый игрок получает 0.

A.29 Идет война между синими и красными. Генерал синих хочет занять город красных, имея две роты. К городу можно подойти по одной из двух дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из дорог. Генерал красных располагает тремя ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получат выигрыш 1, а красные — -2. Если синие не займут город, то выигрыши составят -1 и 1 соответственно.

A.30 В некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет две стратегии, у каждого из игроков все выигрыши различны, и существует ровно два равновесия Нэша. Покажите, что в этой игре есть еще равновесие в невырожденных смешанных стратегиях.

А.3 Динамические игры с совершенной информацией

Многие ситуации, включающие взаимодействие индивидуумов, являются по своему смыслу динамическими. Люди взаимодействуют друг с другом во времени и действуют, реагируя на те решения, которые ранее приняли другие. Другими словами, принимая решения, каждый игрок может располагать информацией о решениях, которые уже приняты другими игроками, что предполагает очередность принятия решений (очередность ходов).

Динамической будем называть такую игру, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам). В этой ситуации он стоит перед *свершившимися фактами* (уже сделанными ранее и известными ему ходами) и должен учитывать их при выборе своих действий.

Приведем пример динамической игры.

Игра 8 («Террорист»):
В самолет, который должен лететь из Майами в Нью-Йорк, сел террорист. Террорист требует, чтобы пилот летел на Кубу, угрожая в противном случае взорвать самолет. Предположим, что террорист не может определить, куда действительно летит самолет. Первый ход в этой игре тогда делает пилот. Он может лететь либо на Кубу, либо в Нью-Йорк. Если пилот посадит самолет на Кубе, то его выигрыш составит -1, а выигрыш террориста составит 1. Если же самолет сядет в Нью-Йорке, то делает свой ход террорист. Он может либо взорвать бомбу, либо не взрывать. Если бомба взорвется, то выигрыши обоих игроков составят -100, в противном случае выигрыш пилота составит 1, а выигрыш террориста составит -1.

Данную игру удобно представить в виде диаграммы, изображающей дерево игры (см. Рис. А.9)[21].

Решение игры можно найти в предположении, что игроки рациональны и что рациональность и структура игры являются общеиз-

[21]Нам удобнее изображать дерево «кроной вниз». Сам термин *дерево* взят из теории графов.

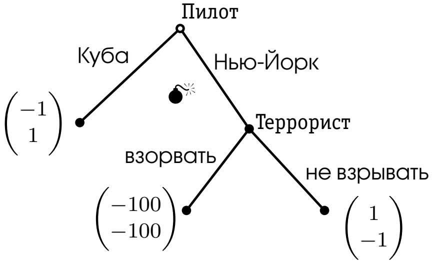


Рис. A.9. *Игра «Террорист»*

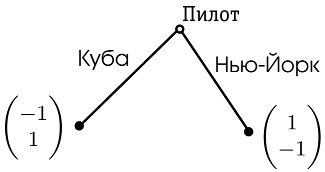


Рис. A.10. *Ситуация выбора пилота*

вестными фактами. При этом естественно воспользоваться методом обратной индукции.

В соответствии с этим методом игру «разматывают» с конца. Рассмотрим последнюю вершину игры, в которой один из игроков делает выбор. В данном случае нам надо спрогнозировать, как поступит террорист, оказавшись в Нью-Йорке. От решения террориста в этой ситуации (вершине) зависит исход игры, поскольку пилот уже сделал свой ход и не может «взять обратно». Если террорист рационален, то он примет решение не взрывать бомбу, поскольку -1 больше -100. Таким образом, действия террориста можно однозначно предсказать.

Поскольку, как мы предположили, рациональность террориста является общим знанием, то пилот может «просчитать» действия террориста и тем самым будет знать, что случится, если он прилетит в Нью-Йорк.

Чтобы было более понятно, какой выбор стоит перед пилотом, удобно частично «свернуть» дерево игры, учитывая, что действия террориста в Нью-Йорке известны. Полученная усеченная (редуцированная) игра показана на Рис. A.10.

В этой игре действия пилота несложно предсказать — он полетит в Нью-Йорк, поскольку предпочитает выигрыш 1 выигрышу -1. Та-

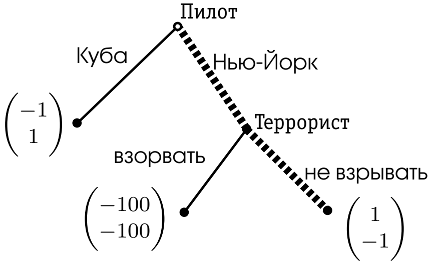


Рис. А.11. *Решение игры «Террорист»*

ким образом, исход игры однозначен: пилот посадит самолет в Нью-Йорке, а террорист не станет взрывать бомбу.

Изобразим полученное решение на дереве (см. Рис. А.11). Те действия, которые были выбраны соответствующим игроком в каждой из вершин, изобразим жирными пунктирными линиями. Исход игры определяется траекторией, состоящей из выбранных действий, и идущей из начальной вершины в одну из конечных вершин[22].

В данном случае мы рассмотрели игру с совершенной информацией, т. е. такую игру, в которой каждый игрок, делая выбор, знает всю предыдущую историю игры, или, если говорить с точки зрения представления игры в виде дерева, каждый игрок знает, в какой из возможных ситуаций (вершин дерева) он находится.

Представление игры в виде дерева соответствует развернутой форме игры[23]. В дальнейшем мы увидим, как можно представить динамическую игру в нормальной форме. А сейчас перечислим, что должно включать описание динамической игры (с совершенной информацией) в развернутой форме:

[22]Предсказанный исход игры кажется довольно странным. Ведь вполне естественно, что пилот будет опасаться, что террорист все-таки взорвет самолет. Данный исход, однако, полностью соответствует описанию игры, а также сделанным предположениям. Можно сделать игру более реалистичной, если добавить возможность того, что может встретиться террорист, которому в соответствии с его целевой функцией будет выгодно взорвать бомбу. Такую игру мы рассмотрим в дальнейшем, в параграфе, посвященном так называемым *байесовским* динамическим играм.

[23]Как и нормальная форма игры, развернутая форма была впервые в явном виде описана Дж. фон Нейманом (см. ссылки в сноске 8). См. также H. W. Kuhn. Extensive Games and the Problem of Information, in *Contributions to the Theory of Games*, vol. II, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (ed.), Princeton University Press, 1953: 193–216.

- множество вершин дерева игры, в том числе одну начальную вершину;
- для каждой вершины, кроме начальной,— единственную вершину, которая непосредственно ей предшествует; при этом цепь предшествующих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (что предполагает, в том числе, отсутствие циклов);
- множество игроков;
- для каждой вершины, кроме конечных,— единственного игрока, которому принадлежит ход в данной вершине;
- для каждой конечной вершины, т. е. такой, которая не предшествует ни одной другой вершине,— вектор выигрышей всех игроков.

(Если в игре есть случайные ходы природы, то следует также задать распределение вероятностей на множестве всех возможных ходов природы.)

Первые два пункта здесь соответствуют описанию игры как дерева.

Действие в этой конструкции однозначно задается парой непосредственно следующих одна за другой вершин. Для каждой вершины можно определить множество действий, которые можно осуществить, находясь в данной вершине. Множество возможных действий связано однозначным соответствием с множеством вершин, которые непосредственно следуют за данной вершиной (т. е. которым непосредственно предшествует данная вершина), т. е. каждое выбранное действие приводит в одну и только в одну вершину.

Каждой вершине в игре с совершенной информацией соответствует единственная предыстория — т. е. последовательность действий, которая приводит из начальной вершины в данную вершину.

В случае, когда в динамической игре участвуют два игрока и игра происходит в два этапа, обратную индукцию удобно провести на основе функции отклика второго игрока на действия первого. Следующая игра иллюстрирует использование этого приема.

Игра 9 («Рэкет»[24]):

Рэкетиры выбирают, какую долю α ($\alpha \in [0,1]$) выручки отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют $\alpha p y$, где p — цена, y — выпуск фирмы. Фирма имеет квадратичную функцию издержек, так

[24] Можно интерпретировать игру несколько иначе: вместо рэкетиров рассматривать государство, устанавливающее ставку налога.

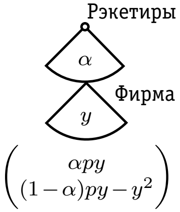


Рис. А.12. *Игра «Рэкет»*

что ее прибыль (выигрыш) равна

$$(1-\alpha)py - y^2.$$

Фирма максимизирует прибыль при ограничении $y \geqslant 0$. Рэкетиры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска.

На Рис. А.12 изображена структура описанной игры. Поскольку множества возможных действий игроков в рассматриваемой игре не конечны (например, у рэкетиров — интервал $[0, 1] \in \mathbb{R}$), то на рисунке они изображены в виде секторов. При этом из каждой точки верхнего сектора, соответствующего выбору α, начинается некий сектор, соответствующий выбору y. На рисунке представлен лишь один из таких нижних секторов. Поскольку в данной игре имеется бесконечное множество (континуум) действий и исходов, на диаграмме уместно представить способы вычисления выигрышей для выбранных действий игроков как функции от действий игроков.

Рэкетиры, зная функцию выигрыша фирмы, могут определить, как скажется на ее выпуске выбор ими экспроприируемой доли выручки этой фирмы. Для того чтобы предсказать объем выпуска, им необходимо решить задачу фирмы: максимизировать прибыли по y при заданном α. Условия первого порядка такой задачи имеют вид:

$$(1-\alpha)p - 2y = 0.$$

Если $\alpha < 1$, то $y > 0$. Так как функция прибыли вогнута, то условие первого порядка является достаточным, т. е. определяемый на его основе объем выпуска фирмы является оптимальным. При $\alpha = 1$ получаем решение $y = 0$. Таким образом, рэкетиры могут вывести уравнение оптимального выпуска фирмы как функции доли α:

$$y(\alpha) = \frac{(1-\alpha)p}{2}.$$

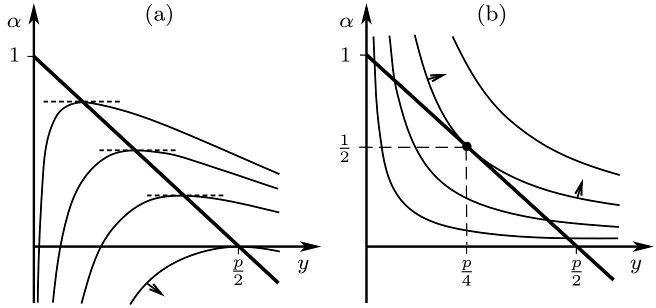


Рис. А.13. *(a) Получение функции отклика фирмы; (b) выбор рэкетирами оптимальной отбираемой доли.*

Зная эту функцию отклика, рэкетиры максимизируют свою целевую функцию[25], т. е. решают следующую задачу

$$\alpha p y(\alpha) \to \max_{\alpha \in [0,1]}$$

или, после подстановки $y(\alpha)$,

$$\frac{p^2}{2} \cdot (1-\alpha)\alpha \to \max_{\alpha \in [0,1]} .$$

Максимум достигается при $\alpha = 1/2$, т. е. рэкетиры будут отбирать у фирмы половину выручки. При этом выпуск фирмы составит $p/4$. Графически поиск решения представлен на Рис. А.13.

Мы рассмотрели здесь примеры игр, в которых каждый раз при использовании обратной индукции оптимальный выбор единствен. Если это не так, процесс поиска решения разветвляется — решение будет зависеть от того, какую именно альтернативу из тех, которые дают игроку одинаковый выигрыш, выберет этот игрок. На Рис. А.14 показано использование обратной индукции в такой игре. В этой игре обратная индукция дает два решения: (L_1, R_2) и (L_2, R_1).

Если выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то неоднозначность при использовании обратной индукции не возникает, поэтому решение должно быть единственным.

Теорема А.6:

В конечной игре с совершенной информацией алгоритм обратной индукции дает хотя бы одно решение.

[25] В моделях налогообложения аналог функции $\alpha p y(\alpha)$ известен как кривая Лаффера.

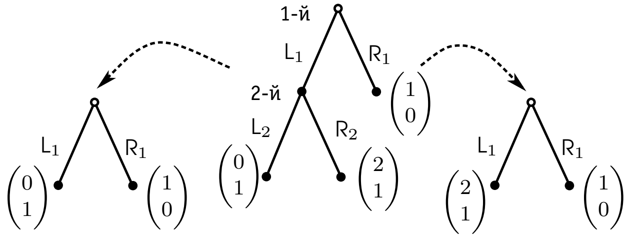


Рис. А.14. *Разветвление решения при использовании обратной индукции*

Если, кроме того, выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то такое решение единственно. ┘

Идея доказательства теоремы состоит в том, что задача оптимизации на конечном множестве альтернатив всегда имеет хотя бы одно решение; если же целевая функция принимает различные значения на множестве альтернатив, то решение этой задачи единственно. Кроме того, каждая из редуцированных игр, получаемых с помощью обратной индукции, будет конечной и с различными выигрышами, если выигрыши были различными в исходной игре.

Мы рассмотрели, как находить решение динамической игры с совершенной информацией с помощью обратной индукции. Другой подход состоит в том, чтобы применить к динамической игре концепцию равновесия Нэша, так же как мы применяли ее к статическим играм.

Для того чтобы это сделать, следует записать динамическую игру в нормальной форме. Как мы помним, описание игры в нормальной форме состоит из задания (1) множества игроков, (2) множества стратегий каждого игрока и (3) функции выигрыша каждого игрока на множестве исходов.

Множество игроков, конечно, должно быть одним и тем же в нормальной форме и в развернутой форме игры. Прежде всего уточним понятие стратегии для игр такого типа.

В игре в развернутой форме (чистая) стратегия — это полный план действий игрока: что он будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему. Это должен быть действительно *полный* план, т. е. в нем должно быть определено, что игрок выберет в *любой* своей вершине, даже если из каких-либо соображений ясно, что процесс игры вряд ли может привести в эту вершину. То есть это должен быть настолько полный план, что доверенное ли-

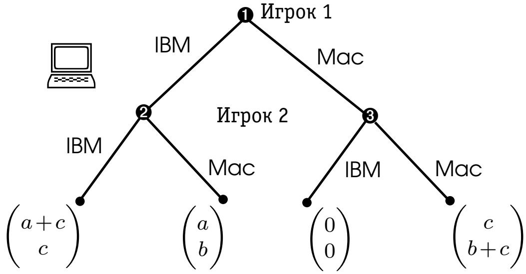


Рис. А.15. *Динамический вариант игры «Выбор компьютера»*

цо игрока может использовать его в качестве инструкции, будучи уверенным, что его поведение будет совпадать с поведением самого игрока.

Процесс игры для динамической игры в нормальной форме можно условно представить следующим образом. Каждый игрок до начала игры сообщает выбранную им стратегию организатору игры. Организатор, руководствуясь этими стратегиями, осуществляет за игроков их ходы. Когда последовательность ходов приведет организатора в конечную вершину, он раздает всем игрокам выигрыши, соответствующие этой конечной вершине. При такой интерпретации мы, по сути, имеем *статическую* игру в которой выигрыши определяются с помощью только что описанного алгоритма.

Проиллюстрируем, как на основе развернутой формы динамической игры получить ее нормальную форму, на примере динамического варианта Игры 1 «Выбор компьютера» (с. 1009). Предположим, что первый игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево такой игры представлено на Рис. А.15.

Вершины дерева пронумерованы для удобства обозначения альтернатив в разных вершинах. Игрок 1 имеет в этой игре две стратегии, совпадающие с альтернативами в вершине ❶. Игрок 2 имеет 4 стратегии. Каждая его стратегия определяет действия в двух вершинах: ❷ и ❸. Таким образом, второй игрок имеет следующие стратегии: (❷ IBM, ❸ IBM), (❷ IBM, ❸ Mac), (❷ Mac, ❸ IBM), (❷ Mac, ❸ Mac). В Таблице А.11 представлена та же игра в нормальной форме.

План, соответствующий, например, второй из указанных стратегий, второй игрок формулирует следующим образом: «я выберу IBM,

Таблица А.11. *Нормальная форма динамического варианта игры «Выбор компьютера»*

		Игрок 2			
		❷ IBM ❸ IBM	❷ IBM ❸ Mac	❷ Mac ❸ IBM	❷ Mac ❸ Mac
Игрок 1	❶ IBM	$\underline{a+c}$, $\underline{c}$	$\underline{a+c}$, $\underline{c}$	$\underline{a}$, b	a, b
	❶ Mac	0, 0	c, $\underline{b+c}$	0, 0	$\underline{c}$, $\underline{b+c}$

если первый игрок выберет IBM, и Mac, если первый игрок выберет Mac».

Можно заметить, что нормальная форма динамического варианта игры более сложна, чем нормальная форма статического варианта игры (см. Таблицу А.1). В игре с тремя типами компьютеров у второго игрока было бы уже 9 стратегий. Еще более сложна нормальная форма динамической игры, в которой у игроков бесконечное множество стратегий.

Для нормальной формы игры естественным решением, как мы уже видели, является равновесие Нэша. Сравним равновесия Нэша с результатом применения метода обратной индукции. По-видимому, содержательно наиболее интересен случай, когда $a < c$ и $b < c$.

Сначала разберем, что предсказывает обратная индукция. При сделанных предположениях о параметрах игры можно предсказать, что второй игрок в вершине ❷ выберет IBM, поскольку $c < b$ (совместимость он ценит больше, чем использование компьютера любимого типа), а в вершине ❸ выберет Макинтош, поскольку $b + c > 0$. В редуцированной игре первый игрок должен сделать выбор между выигрышами $a + c$ (IBM) и c (Макинтош). Он выберет IBM. Таким образом, обратная индукция предсказывает, что игроки выберут следующие стратегии:

первый — ❶ IBM,

второй — (❷ IBM, ❸ Mac).

В Таблице А.11 подчеркнуты оптимальные отклики игроков на стратегии, выбранные партнером. Из таблицы видно, что в рассматриваемой игре есть три равновесия Нэша. Только одно из этих равновесий совпадает с решением, полученным обратной индукцией. Указанная ситуация является типичной, т. е. решение, полученное методом обратной индукции, всегда является равновесием по Нэшу, что показывает следующая теорема.

Теорема А.7:

В игре с совершенной информацией (и конечным числом ходов) любое решение, полученное методом обратной индукции, является равновесием по Нэшу. ⌟

Доказательство: Опишем идею доказательства данной теоремы. В доказательстве мы используем следующий очевидный факт.

> Пусть дан некоторый набор стратегий. Если делать ходы на основе этих стратегий, то каждой вершине соответствует одна и только одна траектория (цепь ходов), соединяющая ее с одной из конечных вершин. Можно сопоставить любой вершине единственный набор выигрышей, взяв его из той конечной вершины, в которой заканчивается соответствующая ей траектория.

Предположим, что набор стратегий $(s_1, \ldots, s_m)$, полученный обратной индукцией, не является равновесием Нэша. Это означает, что у некоторого игрока i существует стратегия $\tilde{s}_i \neq s_i$, которая может дать ему более высокий выигрыш при тех же стратегиях других игроков s_{-i}. Набору стратегий $(\tilde{s}_i, s_{-i})$ соответствует некоторая альтернативная траектория игры, идущая из начальной вершины. Можно рассмотреть эту траекторию, начиная с конечной вершины. В какой-то из вершин на данной траектории выигрыш i-го игрока, соответствующий стратегиям (s_i, s_{-i}), должен оказаться ниже выигрыша, соответствующего стратегиям $(\tilde{s}_i, s_{-i})$. Это не может случиться впервые в вершине, где ход принадлежит какому-либо другому игроку, поскольку стратегии остальных игроков не меняются. Но если ход в такой вершине принадлежит i-му игроку, то он должен был в этой вершине сделать выбор, соответствующий стратегии $\tilde{s}_i$, а не выбор, соответствующий стратегии s_i, поскольку это ему более выгодно. Это противоречит рациональности, заложенной в алгоритме обратной индукции. ■

Вообще говоря, не любое равновесие по Нэшу можно получить методом обратной индукции, что видно из рассматриваемого примера. Важно понять, почему это так.

Рассмотрим, например, равновесие ❶ Mac и (❷ Mac, ❸ Mac) (Рис. А.15, с. 1053). Содержательно его можно интерпретировать следующим образом: второй игрок угрожает первому игроку тем, что он выберет Макинтош в случае, если тот выберет IBM; под влиянием этой угрозы первый игрок выбирает Макинтош. Но такая ситуация противоречит предположению о рациональности, на которое опирается метод обратной индукции. Действительно, если второй игрок окажется в точке ❷, то предпочтет выбрать IBM. Поскольку первый игрок знает о том, что второй игрок рационален, он не поверит этой (пустой) угрозе. Таким образом, рассматриваемый набор стратегий вряд ли является естественным решением игры. Другое «добавочное» равновесие — ❶ IBM и (❷ IBM, ❸ IBM) — не имеет столь же интересной интерпретации, но вызывает аналогичные подозрения по поводу своей обоснованности.

Таким образом, можно сказать, что равновесия по Нэшу, которые не могут быть получены методом обратной индукции, несовместимы в данном случае с гипотезой рациональности и оказываются «лишними». Как уже было сказано, это типичная ситуация в динамических играх. Как ее можно объяснить? Сделаем по этому поводу два замечания.

- При представлении динамической игры в нормальной форме теряется информация о последовательности ходов и об информации, ??доступной игрокам на каждом ходе[26].
- Сам способ записи динамической игры в нормальной форме, как он описан выше, заключает в себе предположение, что игроки выбирают свои стратегии до начала игры *раз и навсегда* и уже не меняют их в дальнейшем в ходе игры.

Напрашивается вывод, что концепция равновесия по Нэшу в случае динамических игр, вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры и поэтому ее требуется каким-то образом усилить. Укажем способ такого усиления[27].

Предположим, что несколько ходов в игре уже сделано. Можно рассматривать оставшуюся часть игры как самостоятельную игру. Выбранные игроками стратегии предписывают, что в этой оставшейся части игры игроки будут действовать строго определенным образом. Однако такое поведение может оказаться невыгодным игрокам — они могут предпочесть изменить свои выборы. С этой точки

[26] В дальнейшем мы увидим, как из нормальной формы получить развернутую форму. При двойном преобразовании получается, что полученная развернутая форма не совпадает с исходной развернутой формой.

[27] По-английски процесс избавления от «лишних» равновесий называют *refinement* — усовершенствование, уточнение. Особенно много способов уточнения равновесий предложено для динамических игр с несовершенной и/или неполной информацией, о которых пойдет речь ниже.

зрения естественным представляется следующее требование динамической согласованности:

> *Равновесные стратегии должны быть такими, чтобы ни у одного из игроков не было стимула менять их в процессе игры.*

Часть игры, начинающаяся в некоторой вершине и включающая в себя все, что следует за этой вершиной, в теории игр называют подыгрой.

Определение А.10:

Подыгра игры G, где G — игра с совершенной информацией в развернутой форме,— это игра, построенная на основе исходной игры. Начальной вершиной подыгры служит любая вершина исходной игры, кроме конечных. В подыгру входят все вершины, следующие за ее начальной вершиной. Выигрыши в подыгре совпадают с выигрышами в соответствующих конечных вершинах полной игры.

Собственная подыгра — это подыгра, начальная вершина которой не совпадает с начальной вершиной полной игры. ◀

В рассматриваемой игре есть три подыгры, одна из них — сама игра и две собственных подыгры, начинающиеся в вершинах ❷ и ❸.

Основываясь на требовании динамической согласованности, можно ввести концепцию равновесия, которая усилила бы концепцию Нэша.

Определение А.11:

Совершенным в подыграх равновесием[28] называется набор стратегий, такой что он является равновесием Нэша в полной игре, а соответствующие части этого набора стратегий являются равновесиями по Нэшу во всех собственных подыграх этой игры. ◀

Приложим данное определение к динамической игре «Выбор компьютера» (Рис. А.15 на с. 1053). Представим подыгру, начинающуюся в вершине ❷ в нормальной форме. Игрок 1 не осуществляет в этой подыгре выбора. Игрок 2 имеет две стратегии: ❷ IBM и ❷ Mac. Матрица игры представлена в Таблице А.12.

---

[28] Концепцию совершенного в подыграх равновесия предложил Рейнхард Зельтен в статье, посвященной моделям олигополий (R. Selten · Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit, *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft* **12** (1965): 301–324, 667–689).

Таблица А.12. *Одна из подыгр в динамической игре «Выбор компьютера»*

	Игрок 2: ❷ IBM	Игрок 2: ❷ Mac
Игрок 1	$\underline{a+c}$, $\underline{c}$	$\underline{a}$, b

В данной игре есть единственное равновесие Нэша. В нем второй игрок выбирает IBM. Таким образом, чтобы равновесие Нэша в исходной игре было совершенным, требуется, чтобы оно предписывало в вершине ❷ выбор IBM. Набор стратегий ❶ Mac и (❷ Mac, ❸ Mac) не удовлетворяет этому требованию, поэтому он не может быть совершенным в подыграх равновесием.

Во второй собственной подыгре, которая начинается в вершине ❸, в равновесии Нэша второй игрок выбирает Макинтош. Поэтому набор стратегий ❶ IBM и (❷ IBM, ❸ IBM) не является совершенным в подыграх равновесием.

С другой стороны, набор ❶ IBM и (❷ IBM, ❸ Mac) является равновесием по Нэшу в полной игре и соответствует равновесиям по Нэшу в каждой из собственных подыгр. Поэтому данный набор стратегий является совершенным в подыграх равновесием. Видим, что он совпал с тем решением, которое мы раньше получили, применив обратную индукцию. Это совпадение не является случайным, как показывает следующая теорема.

Теорема А.8:

В игре с совершенной информацией и конечным числом ходов множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий. ⌟

Доказательство: Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве предыдущей теоремы (Теоремы А.7), позволяют показать, что решение, полученное обратной индукцией, составляет равновесие Нэша в каждой подыгре, т. е. оно является совершенным в подыграх равновесием.

Докажем обратное: любое совершенное в подыграх равновесие может быть получено обратной индукцией. Предположим, что это не так. Рассматривая игру, начиная с конечных вершин, мы в таком случае найдем некоторую вершину, в которой впервые выбор одного из игроков не соответствует алгоритму обратной индукции. Это означало бы, что выбор, соответствующий равновесной стратегии этого игрока, не является оптимальным. Значит, заменив его на выбор, соответствующий обратной индукции, этот игрок мог бы получить в данной подыгре более высокий выигрыш. Другими словами, если бы сделанное предположение было верным, то у игрока нашлась бы в данной подыгре альтернативная стратегия, которая гарантирует ему более высокий выигрыш при неизменных стратегиях других игроков, что противоречит предположению о том, что стратегия является оптимальным откликом игрока. ■

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование приведенной только что теоремы позволяет сильно упростить поиск совершенных в подыграх равновесий, поскольку не требуется записывать игры в нормальной форме и находить в них равновесия Нэша.

Например в игре «Рэкет», рассмотренной выше, стратегия фирмы должна указывать, как именно фирма будет реагировать на каждый из возможных уровней α, т. е. функцию $y(\alpha)$. Поэтому процесс поиска равновесия по Нэшу, по существу, включает максимизацию в функциональном пространстве. Использование обратной индукции позволяет упростить эту задачу.

Следует отметить, что многие игры являются довольно сложными, и, даже применяя обратную индукцию, равновесие в них найти сложно. Характерным примером является игра в шахматы. Поскольку это конечная игра с совершенной информацией, то в ней должно существовать по крайней мере одно решение, получаемое обратной индукцией, и, соответственно, совершенное в подыграх равновесие. Тот факт, что в шахматах существует некоторое определенное решение, известен уже давно[29], однако найти такое решение в настоящее время не представляется возможным даже с использованием компьютера. Понятно, что если игроки обладают ограниченными способностями, то совершенное в подыграх равновесие может быть не очень реалистичным предсказанием результата игры, если игра достаточно сложна.

[29] См. E. Zermelo • Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, in *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, vol. 2, Cambridge University Press, 1913: 501–504 (рус. пер. Э. Цермело • О применении теории множеств к теории шахматной игры, в кн. *Матричные игры*, Н. Н. Воробьев (ред.), М.: Физматгиз, 1961: 167–172). Цермело доказал, что либо белые могут обеспечить себе выигрыш (как бы ни играли черные), либо они не могут обеспечить себе выигрыш, но могут обеспечить ничью, либо черные могут обеспечить себе выигрыш.

В сочетании с Теоремой А.6 Теоремы А.7 и А.8 гарантируют существование совершенного в подыграх равновесия в конечных играх с совершенной информацией. Если выигрыши различны, то имеет место и единственность совершенного в подыграх равновесия.

Задачи

В играх, описанных в задачах с А.31 по А.35, найдите решение, используя обратную индукцию.

А.31 Два школьника играют в следующую игру. Каждый из кучки, состоящей из N камней, берет по очереди один или два камня. Проигрывает тот, кто взял последний камень. (Изобразите дерево игры при $N = 5$.)

А.32 Два игрока по очереди называют числа от 1 до 10. Каждый раз все названные с начала игры числа складываются. Выигрывает тот, кто получит в сумме 100.

А.33 Барин выбирает, какую долю τ стоимости y урожая забирать у крестьянина в виде издольщины. При этом он максимизирует функцию вида

$$\tau y - \tau^2,$$

т. е. желает побольше получить, но не желает прослыть жадным, что возможно при слишком большом τ ($\tau \in [0, 1]$). Выигрыш крестьянина равен $(1 - \tau)y - y^2$, т. е. он максимизирует прибыль по y ($y \geqslant 0$) при квадратичной функции затрат.

А.34 Предположите, что в играх, представленных в задаче А.11 предыдущего параграфа (с. 1042), игрок, выбирающий абсциссу, ходит первым.

А.35 Профсоюз заключает с фирмой контракт на несколько лет, в котором оговаривается уровень заработной платы ($w \geqslant 0$). Предполагается, что профсоюз достаточно мощный, чтобы навязать фирме любой уровень заработной платы. Фирма в течение срока действия контракта не может изменить уровень заработной платы, но может выбирать количество нанимаемых работников ($L \geqslant 0$, в тыс. чел.). Профсоюз максимизирует следующую целевую функцию:

$$u(w, L) = wL - 2L^2,$$

где $2L^2$ — издержки работы для членов профсоюза. Фирма максимизирует свою прибыль

$$\pi(w, L) = 2\sqrt{L} - wL.$$

Таблица А.13. *Данные к задаче А.36*

		муж	
		дома	у друзей
жена	дома	a, b	0, c
	у друзей	d, 0	d, c

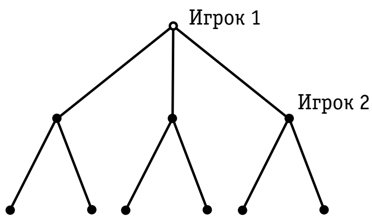


Рис. А.16. *Дерево игры для задачи А.38*

А.36 Муж и жена выбирают, провести вечер дома или у друзей, причем друзья у них разные. Выигрыши заданы в Таблице А.13, где $a, b, c, d > 0$ — параметры. Жена делает свой выбор первой. При каких условиях на параметры супруги проведут вечер дома вместе?

А.37 В игре участвуют n игроков. Нужно разделить пирог между игроками, т. е. выбрать вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Предлагается следующая процедура дележа. Игрок с номером 1 режет пирог. Остальные игроки по порядку номеров берут любой из кусков по выбору. Последний кусок достается 1-му игроку.

(А) Нарисуйте дерево игры при $n = 3$. Опишите множество стратегий каждого из игроков.

(В) Найдите совершенное в подыграх равновесие. Докажите, что справедливый дележ $\alpha_i = 1/n$ будет единственным равновесием.

А.38 Дополните дерево, изображенное на Рис. А.16, выигрышами игроков, используя номера букв своего имени и фамилии (см. задачу А.21 на с. 1043). Найдите все совершенные в подыграх равновесия в получившейся игре.

А.39 Рассмотрите динамическую игру, сконструированную на основе статической антагонистической игры двух лиц (см. определение в задаче А.25 предыдущего параграфа, с. 1044) в предположении, что игроки делают ходы по очереди (например, сначала первый, потом второй), и тот, кто ходит вторым, знает, какое решение принял тот, кто ходит первым. Пусть (x_1^*, x_2^*) — седловая точка функции полезности первого игрока $u_1(x_1, x_2)$. Докажите, что набор стратегий (x_1^*, x_2^*) является совершенным в подыграх равновесием в этой игре вне зависимости от порядка ходов.

А.40 Пусть, как и в предыдущей задаче, на основе статической антагонистической игры двух лиц строится динамическая игра. Докажите, что делать ход вторым в общем случае (при отсутствии седловой точки) более выгодно. Предполагается, что соответствующие совершенные в подыграх равновесия существуют.

А.4 Динамические игры с несовершенной информацией

Особенностью рассматриваемых в предыдущем параграфе игр является то, что каждый игрок перед тем, как сделать ход, полностью знает предысторию игры — выборы, сделанные ранее им и другими игроками. Другими словами, игрок знает, в какой вершине дерева он оказался. В этом параграфе мы рассмотрим класс игр, называемых играми с несовершенной информацией[30], в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры. То есть осуществляя очередной ход, они знают, что находятся в одной из вершин некоторого подмножества множества всех вершин дерева игры (так называемого информационного множества).

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно «динамизировать», задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества, как это сделано ниже для Игры 1 (с. 1009) «Выбор компьютера» (см. Рис. А.17).

Предположим, что первый игрок ходит первым, второй — вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит второму игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

Как видим, развернутая форма игр с несовершенной информацией несколько более сложна, чем развернутая форма игр с совер-

[30] Мы используем кальку с английского термина *games of imperfect information*. В русскоязычной литературе использовался термин «игры с неполной информацией», но его предпочтительнее использовать для обозначения игр, которые по-английски называются *games of incomplete information*.

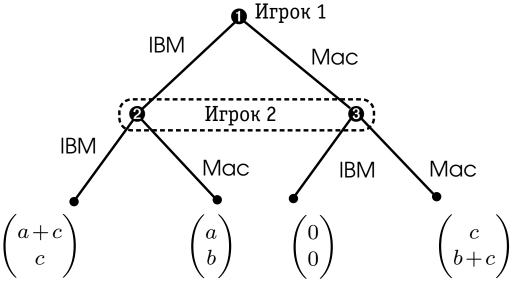


Рис. А.17. *Представление статической игры «Выбор компьютера» в виде дерева*

шенной информацией. Дополнительно к тем составляющим, которые были указаны в прежнем определении, требуется также перечислить информационные множества, которые задают разбиение множества вершин (кроме конечных). Информационные множества должны быть заданы так, чтобы каждая вершина, кроме конечных, принадлежала одному и только одному из них. Кроме того, по смыслу определения информационного множества во всех его вершинах ход должен принадлежать одному и тому же игроку.

Дополнительно следует потребовать, чтобы множества возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества были одинаковыми. В противном случае игрок мог бы по тому, какие альтернативы ему доступны, определить, в какой именно вершине он находится. Дерево игры, представленное на Рис. А.17, удовлетворяет этому требованию — и в вершине ❷, и в вершине ❸ второй игрок выбирает между IBM и Mac.

Используя понятие информационного множества, мы можем дать формальное определение игр с совершенной информацией: в играх с совершенной информацией в каждом информационном множестве находится только одна вершина[31].

В приложениях теории игр чаще всего рассматривают так называемые игры с идеальной памятью, т. е. такие игры, в которых игроки не забывают ту информацию, которой они обладали на предыдущих ходах. Мы не будем давать формального определения таких игр. Приведем только примеры игр, в которых предположение об идеальной памяти не выполняется (см. Рис. А.18).

[31] Это определение, по-видимому, не годится в контексте игр с неполной информацией (но это зависит от способа интерпретации).

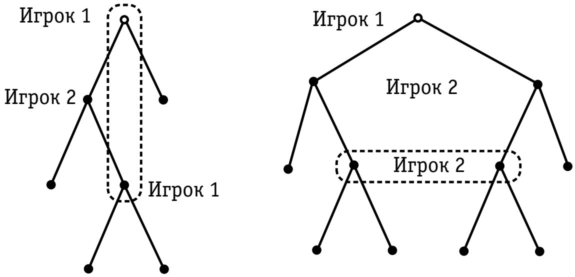


Рис. А.18. *Примеры игр, не являющихся играми с идеальной памятью*

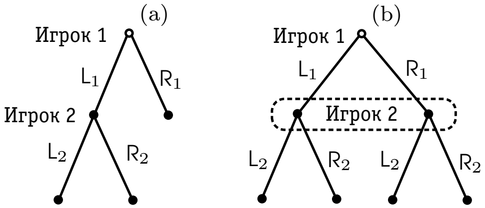


Рис. А.19. (a) *Исходная игра.* (b) *Игра после «двойного перевода»*

Таким образом, существуют два представления любой игры — в нормальной и развернутой форме. Выше мы показали, как динамическую игру с совершенной информацией представить в нормальной форме, а статическую игру — в развернутой форме. Таким образом, любую динамическую игру с совершенной информацией можно представить в нормальной форме, а затем на основе этой нормальной формы построить развернутую форму соответствующей игры. Приведем пример такого построения (см. Рис. А.19).

Если мы представим игру на Рис. А.19a в нормальной форме, то получим Таблицу А.14 (для упрощения выигрыши не указаны). Этой нормальной форме соответствует дерево игры, представленное на Рис. А.19b. Как видим, при таком «двойном переводе» частично потеряна информация о структуре игры и мы получили другую игру в развернутой форме. Очевидно, что принципиально разным играм может соответствовать одна и та же нормальная форма.

Таким образом, нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С ее помощью можно представлять корректно только статические игры. Если операцию

Таблица А.14. *Нормальная форма для игры на Рис. А.19а*

		Игрок 2	
		L_2	R_2
Игрок 1	L_1		
	R_1		

«двойного перевода» из развернутой формы в нормальную и обратно осуществить со статической игрой, представленной на Рис. А.17, то дерево игры не изменится (с точностью до выбора порядка ходов, что в данном случае несущественно).

Использование нормальной формы для представления статических игр вполне допустимо и даже предпочтительно, так как она более компактна.

Уточним понятие стратегии для рассматриваемого класса игр. Стратегия игрока в играх с несовершенной информацией должна указывать, какие действия выберет этот игрок, если окажется в данном информационном множестве. Поскольку в играх с совершенной информацией в каждом из информационных множеств находится только одна вершина, такая модификация определения стратегии полностью согласуется с данным ранее определением.

Пользуясь понятием стратегии, мы можем распространить концепцию равновесия Нэша на динамические игры с несовершенной информацией. Определение ничем не будет отличаться от данного ранее.

Определение совершенного в подыграх равновесия в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Однако в играх с несовершенной информацией следует дать несколько иное определение подыгры. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Следует потребовать, чтобы если некоторая вершина содержалась в подыгре, то в этой же подыгре содержалось и все информационное множество, содержащее данную вершину. Например в игре, дерево которой показано на Рис. А.20, вершины ❷, ❸ и ❹ не являются начальными вершинами подыгр. Таким образом, в этой игре нет *собственных* подыгр.

Заметим, что не к любой игре с несовершенной информацией можно применить алгоритм обратной индукции. Игра на Рис. А.20 представляет собой как раз такую игру, в которой невозможно найти решение с помощью обратной индукции. Игрок 3 в этой игре не знает, в какой именно из двух вершин информационного множества

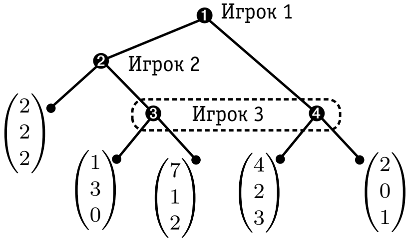


Рис. А.20. *Игра, в которой нет собственных подыгр*

он находится, поэтому он не может без каких-либо дополнительных предположений выбрать между двумя имеющимися альтернативами. Мы рассмотрим концепцию решения подобных игр позже, в параграфе, посвященном совершенному байесовскому равновесию.

Здесь мы рассмотрим лишь класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать играми с почти совершенной информацией. Другое название — многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями. Такие игры можно разбить на несколько этапов $t = 1, \ldots, T$, каждый из которых представляет собой одну или несколько статических игр. В рамках t-го этапа игроки одновременно выбирают действия, причем каждый игрок знает всю предысторию, т. е. какие действия выбрали другие игроки на предыдущих этапах $(1, \ldots, t-1)$; более того, предыстория игры является *общеизвестной*. Пример такой игры — повторяющаяся конечное число раз статическая игра. Заметим, что множества стратегий некоторых игроков в этих статических играх могут быть пустыми (как, например, на первом этапе игры, представленной ниже на Рис. А.22).

Сначала при использовании обратной индукции на последнем, T-м этапе находятся равновесия по Нэшу всех игр этого этапа. Затем каждая их этих игр заменяется конечной вершиной. Ей сопоставляются выигрыши, соответствующие равновесию по Нэшу (одному из равновесий, если их несколько). Тем самым мы получаем игру с $T - 1$ этапом, и т. д.

Игры с почти полной информацией удобны для анализа, поскольку каждая статическая игра (соответствующего этапа) начинает одну из подыгр. Этапы можно рассматривать последовательно, а это фактически и означает, что в них не возникает трудностей с использованием обратной индукции.

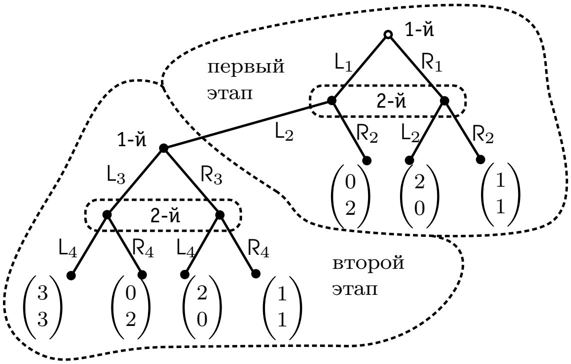


Рис. А.21. *Дерево игры «Набеги на банки»*

Рассмотрим пример игры с почти полной информацией и использования обратной индукции для поиска решения в таких играх.

Игра 10 («Набеги на банки»):
Два инвестора вложили в банк одинаковые денежные суммы (например, по 2 рубля). Банк обещает им вернуть через 3 месяца по 3 рубля. Они могут взять деньги из банка через 1, 2 или 3 месяца, однако банк сможет вернуть только половину общей суммы сделанных инвестиций, если вкладчики потребуют деньги раньше срока (через 1 или 2 месяца). При этом если оба вкладчика потребуют деньги, то получат по 1 рублю, а если деньги потребует только один, то он получит 2 рубля, а другой вкладчик не сможет получить ничего. ⟲

Дерево игры показано на Рис. А.21. R обозначает «забрать деньги», L — «не забирать». Игра происходит в два этапа, на каждом из которых вкладчики одновременно решают, забирать ли деньги. Первый этап происходит по прошествии одного месяца после вложения денег, второй — по прошествии двух месяцев.

В Таблице А.15a изображена статическая игра, соответствующая второму этапу. В игре имеется два равновесия по Нэшу. Применяя обратную индукцию, мы используем выигрыши, соответствующие этим равновесиям, чтобы сформулировать статическую игру, соответствующую первому этапу. Получающаяся редуцированная игра представлена в Таблице А.15b. В ней выигрыши второго этапа обозначены через v_1 и v_2 соответственно.

Множество равновесий Нэша в редуцированной игре первого этапа зависит от того, какое из двух равновесий может реализоваться

Таблица А.15. *(a) Игра «Набеги на банки» на втором этапе. (b) Редуцированная игра «Набеги на банки» на первом этапе*

(a) Игрок 2

Игрок 1	L_4	R_4
L_3	$\underline{3}$, $\underline{3}$	0, 2
R_3	2, 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

(b) Игрок 2

Игрок 1	L_2	R_2
L_1	v_1, v_2	0, 2
R_1	2, 0	1, 1

на втором этапе. Если игроки считают, что на втором этапе они оба заберут деньги, то им выгоднее забрать деньги на первом этапе, поскольку $v_1 = v_2 = 1 < 2$. Если же игроки считают, что на втором этапе они оба оставят деньги в банке, то, поскольку $v_1 = v_2 = 3 > 2$, на первом этапе может реализоваться одно из двух равновесий Нэша: либо оба игрока забирают деньги, либо оба оставляют. Таким образом, обратная индукция дает три решения. В двух из этих решений происходит «набег на банк» на первом и втором этапах соответственно. Третье решение соответствует случаю, когда оба вкладчика дожидаются получения максимального выигрыша $(3, 3)$.

Использование обратной индукции в играх с почти совершенной информацией можно дополнительно обосновать тем, что для них выполнен вариант Теоремы А.8.

Теорема А.9:

В игре с почти совершенной информацией (и конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий. ⌟

В отличие от игр с совершенной информацией в играх с почти совершенной информацией решение в чистых стратегиях может не существовать (как, например, в игре на Рис. А.22). Выход из положения состоит в том, чтобы ввести в поведение игроков элемент рандомизации, по аналогии со смешанными стратегиями, которые мы рассмотрели в случае статических игр.

Конечно, мы можем прямо перенести понятие смешанной стратегии на динамические игры, воспользовавшись представлением этих игр в нормальной форме. Согласно такой интерпретации *смешанная стратегия* игрока — это вероятности, с которыми игрок выбирает свои чистые стратегии. В этом случае игроки рандомизируют стратегии. Однако более предпочтительной кажется другая концепция:

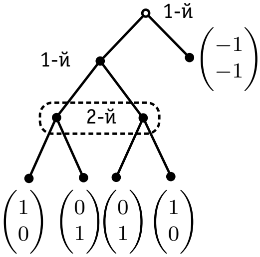


Рис. А.22. *Игра, в которой нет равновесия в чистых стратегиях*

игроки рандомизируют действия. Эта концепция лучше соответствует идеологии динамических игр.

Стратегию с рандомизацией действий принято называть поведенческой стратегией. Поведенческая стратегия должна указывать для каждого информационного множества, в котором ход принадлежит игроку, некоторое распределение вероятностей на множестве действий, из которых он выбирает в данном информационном множестве. При этом предполагается, что распределения вероятностей в разных информационных множествах статистически независимы.

Фундаментальный результат, принадлежащий Куну, состоит в том, что в играх с идеальной памятью использование поведенческих стратегий эквивалентно использованию смешанных стратегий (со случайным выбором чистых стратегий). Мы понимаем под эквивалентностью двух наборов стратегий то, что они порождают одно и то же распределение вероятностей на множестве конечных вершин (или, что то же самое, на множестве всех траекторий игры, начинающихся в начальной вершине). Несложно понять, что каждый набор смешанных стратегий однозначно порождает набор поведенческих стратегий, при этом оба они порождают одно и то же распределение на множестве конечных вершин. Обратное утверждение состоит в том, что для любого набора поведенческих стратегий найдется хотя бы один набор смешанных стратегий, который его порождает.

Рассмотрим эквивалентность поведенческих и смешанных стратегий на примере дерева игры, изображенного на Рис. А.23. Поведенческие стратегии можно задать указанием вероятностей μ_j $(j = 1, 2, 3)$ выбора соответствующим игроком стратегии L_j. Смешанную стратегию первого игрока можно задать вероятностями $\lambda_{LL}, \lambda_{RL}, \lambda_{LR}, \lambda_{RR}$, где первый индекс соответствует выбору в первой вершине, в которой ход принадлежит первому игроку, а второй — второй такой вер-

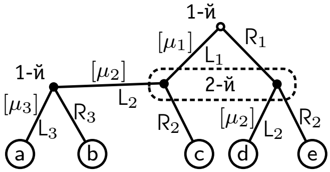


Рис. А.23. *Дерево игры для примера эквивалентности поведенческих и смешанных стратегий*

Таблица А.16. *Распределение вероятностей на конечных вершинах для примера эквивалентности поведенческих и смешанных стратегий*

вершина	поведенческие	смешанные
a	$\mu_1\mu_2\mu_3$	$\lambda_{LL}\nu$
b	$\mu_1\mu_2(1-\mu_3)$	$\lambda_{LR}\nu$
c	$\mu_1(1-\mu_2)$	$(\lambda_{LL}+\lambda_{LR})(1-\nu)$
d	$(1-\mu_1)\mu_2$	$(\lambda_{RL}+\lambda_{RR})\nu = (1-\lambda_{LL}-\lambda_{LR})\nu$
e	$(1-\mu_1)(1-\mu_2)$	$(\lambda_{RL}+\lambda_{RR})(1-\nu) = (1-\lambda_{LL}-\lambda_{LR})(1-\nu)$

шине. Соответственно смешанную стратегию второго игрока можно задать вероятностью ν выбора L_2. Распределение вероятностей на конечных вершинах показано в Таблице А.16. Очевидно, что два вида стратегий эквивалентны и соответствие между ними достигается при выполнении условий $\lambda_{LL} = \mu_1\mu_3$, $\lambda_{LR} = \mu_1(1-\mu_3)$ и $\nu = \mu_2$.

В дальнейшем мы везде будем говорить о *смешанных* стратегиях, имея в виду *поведенческие* стратегии.

Алгоритм обратной индукции можно естественным образом распространить на случай случайного выбора игроками своих действий. Заметим, что в играх с совершенной информацией с различными выигрышами такая обратная индукция даст то же самое единственное решение, что и обычная обратная индукция. Смешанные стратегии в этом решении будут вырожденными: каждый игрок будет выбирать одно из действий с единичной вероятностью. По-видимому, смешанные стратегии имеет смысл рассматривать только в играх с несовершенной информацией.

Рассмотрим в качестве примера Игру 10 «Набеги на банки» (с. 1067). Как мы уже видели, в этой игре существует три равновесия в чистых стратегиях. Мы сейчас увидим, что в игре, кроме того, существуют равновесия в смешанных стратегиях.

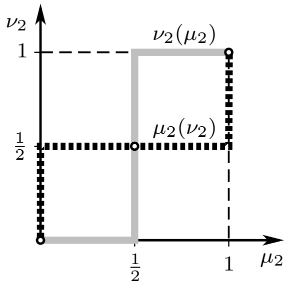


Рис. А.24. *Равновесия в смешанных стратегиях второго этапа игры «Набеги на банки»*

Обозначим через μ_1 вероятность того, что первый вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_1), а через ν_1 — вероятность того, что второй вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_2). Соответствующие вероятности на втором этапе обозначим μ_2 и ν_2 (вероятности выбора L_3 и L_4 соответственно).

В игре второго этапа существуют три равновесия Нэша в смешанных стратегиях (см. Рис. А.24). Два из этих равновесий — равновесия в вырожденных смешанных стратегиях. Есть также равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_2 = 1/2$ и $\nu_2 = 1/2$. Ожидаемые выигрыши вкладчиков составят при этом по $3/2$. Структура равновесий в редуцированной игре первого этапа зависит от того, какое из трех возможных равновесий второго этапа ожидают игроки. Равновесия в вырожденных смешанных стратегиях аналогичны рассмотренным выше равновесиям в игре с чистыми стратегиями. Кроме того, в редуцированной игре при $v_1, v_2 = 3$ (когда на втором этапе оба вкладчика оставляют деньги в банке) существует равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_1 = 1/2$ и $\nu_1 = 1/2$.

Задачи

А.41 Два игрока одновременно называют одно из трех чисел: 1, 2 или 3. При совпадении второй игрок отдает первому сумму, соответствующую названному и совпавшему числу (при несовпадении никто не платит). Дополнительно игроки получают удовольствие от участия в игре, которое они оценивают в $1/2$. Какую сумму z первый игрок должен заплатить второму до начала игры, чтобы тот согласился играть? Нарисуйте дерево, описывающее данную ситуацию.

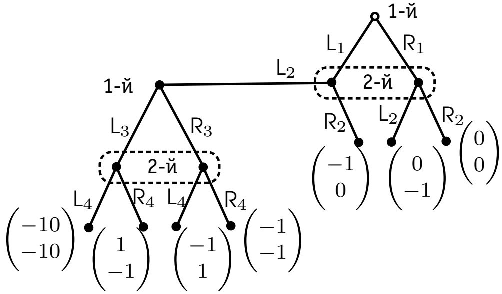


Рис. А.25. *Дерево для Игры А.42*

А.42 В игре участвуют два игрока. Игра состоит из двух этапов. На первом этапе игроки одновременно решают, хотят ли они участвовать во втором этапе. Если игрок говорит, что хочет участвовать во втором этапе то он платит \$1. Второй этап начинается, только если оба решают участвовать во втором этапе, в противном случае игра заканчивается, и деньги забирает организатор игры. В игре второго этапа игроки одновременно заявляют, хотят ли они забрать имеющиеся \$2. В случае их отказа, деньги достаются организатору этой игры. Если же на эти деньги претендуют оба, то между ними происходит ссора, потери от которой обо игрока оценивают выше, чем достающаяся им доля, так что выигрыш обоих отрицательный. Полностью эта игра с указанием всех выигрышей изображена на Рис. А.25. На первом этапе L обозначает «дать доллар», R — «не давать доллар». На втором этапе L обозначает «попытаться забрать доллары», R — «отказаться от долларов».

Проанализируйте эту игру и найдите в ней все совершенные в подыграх равновесия как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

А.43 Найдите равновесие в смешанных стратегиях для игры, изображенной на Рис. А.22 (с. 1069).

А.44 ⟦Мулен⟧ Пятьдесят пиратов делят добычу в 100 дукатов. Правило дележа следующее. В порядке старшинства каждый пират предлагает свою схему дележа. Если большинство пиратов (не менее половины, включая пирата, который предлагает дележ) принимают предложение, то оно выполняется и процедура дележа заканчивается. Если предложение отвергается, то пират, который его сделал, исключается из числа участвующих в дележе, и тогда настает оче-

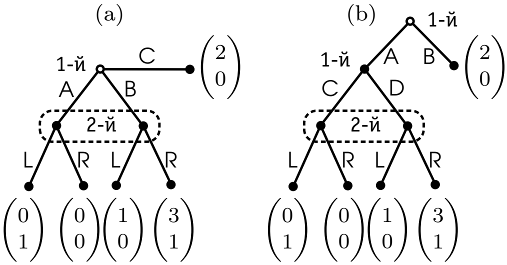


Рис. А.26. *Данные для задачи А.45*

редь следующего по старшинству пирата предложить схему дележа между оставшимися пиратами.

(A) Объясните, почему описанная игра является игрой с почти совершенной информацией.

(B) Как будет поделена добыча? (Предложите решение игры.)

(C) Будет ли равновесие единственным?

А.45 (A) Рассмотрите игру, изображенную на Рис. А.26a. Представьте ее в нормальной форме и найдите множество равновесий Нэша (в чистых стратегиях).

(B) Объясните, почему множество равновесий Нэша для этой игры совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

(C) Рассмотрите игру, изображенную на Рис. А.26b. Объясните, почему множество совершенных в подыграх равновесий в ней может быть найдено с помощью обратной индукции. Найдите это множество.

(D) Объясните, почему две рассматриваемые игры естественно считать в определенном смысле эквивалентными.

(E) Объясните, почему множества совершенных в подыграх равновесий в двух играх не совпадают. Сделайте вывод о недостатках этой концепции равновесия.

А.5 Статические игры с неполной информацией

Рассматривая статические игры, мы предполагали, что игроки в равной степени информированы о структуре игры, так что каждый из игроков знает множества возможных действий и целевые функции других игроков (более того, мы предполагали, что все это общеизвестно). На самом деле экономические субъекты всегда бывают информированы в разной степени или, другими словами, *асимметрично* информированы, поэтому многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от этого упрощающего предположения.

Мы рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно предпочтения других игроков. Предпочтения игроков в этих играх зависят от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло. Формально это учитывается с помощью введения понятия типа игрока: каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип. Можно считать, что первый ход делает *природа*, выбирая типы всех игроков. Такого рода игры называют играми с неполной информацией или байесовскими играми.

Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной и позволяет моделировать различные ситуации, содержащие элемент случайности, которые невозможно смоделировать в рамках игр с полной информацией, рассмотренных нами выше. Например, характеристики игрока могут зависеть от некоторых случайных параметров. Стратегия игрока при этом должна описывать, какие действия он выберет при каждом возможном значении параметра.

В этом параграфе мы разберем *статические* игры с неполной информацией. Динамическим играм с неполной информацией посвящен параграф А.6.

Опишем структуру статической игры с неполной информацией (статической байесовской игры). Как и ранее, $I = \{1, \ldots, m\}$ — множество игроков. В байесовских играх каждый игрок имеет несколько типов, $\theta_i \in \Theta_i$, где Θ_i — множество типов i-го игрока (не обязательно конечное или счетное). Предполагается, что появление того или иного типа — случайное событие. Таким образом, в описании байесовской игры должно быть задано распределение вероятностей на множестве

$$\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_m.$$

Если множества типов Θ_i конечны, то достаточно задать вероятности появления сочетаний типов $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, т. е. функцию

$$\pi \colon \Theta \mapsto \mathbb{R}_+,$$

для которой выполнены стандартные предположения о том, что вероятности должны быть неотрицательными и их сумма должна равняться единице.

В дальнейшем мы чаще всего будем предполагать, что имеет место независимость появления типов у разных игроков (для краткости будем называть это *независимостью типов*[32]). В таком случае достаточно задать вероятности появления каждого из типов для каждого игрока, т. е. m функций

$$\pi_i \colon \Theta_i \mapsto \mathbb{R}_+, \ i = 1, \ldots, m,$$

таких что $\pi_i(\theta)$ — вероятность появления типа $\theta \in \Theta_i$ игрока i. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков.

Если типы — это действительные числа, то можно считать, что дана функция распределения типов $F(\theta_1, \ldots, \theta_m)$. Независимость типов в данном контексте означает, что функцию распределения можно представить как произведение функций распределения типов отдельных игроков

$$F(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{m} F_i(\theta_i).$$

Предполагается, что все типы одного и того же игрока имеют одинаковые[33] множества действий X_i. Выигрыш в статических байесовских играх зависит не только от выбранных игроками действий $(x_1, \ldots, x_m) \in X$, но и от того, какие именно типы $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$ участвуют в игре. Предпочтения игроков заданы функциями выигрышей:

$$u_i \colon X \times \Theta \mapsto \mathbb{R},$$

где $X = X_1 \times \cdots \times X_m$.

Таким образом, описание статической байесовской игры должно включать в себя следующие составляющие:

- множество игроков;
- для каждого игрока — множество типов;
- распределение вероятностей на множествах типов;
- для каждого игрока — множество возможных действий;
- для каждого игрока — функции выигрышей.

В частном случае, когда множества типов конечны, статическая байесовская игра есть набор

$$\langle I, (\Theta_i)_{i \in I}, \pi, (X_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I} \rangle.$$

[32]Это предположение также называют *некоррелированностью типов*.

[33]Если рассматривается ситуация, в которой множества возможных действий разные у разных типов, то это можно смоделировать, введя для некоторых действий запретительно маленькие выигрыши («равные минус бесконечности»), так чтобы соответствующий тип их заведомо не стал выбирать.

Стратегии в статических байесовских играх не совпадают с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией стратегия игрока описывает действия *каждого* из типов этого игрока. Можно представить стратегию как функцию $s_i(\cdot)$, которая ставит в соответствие каждому типу $\theta \in \Theta_i$ некоторые действия $s_i(\theta) \in X_i$.

Естественное обобщение понятия рациональности в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых ожиданиях относительно стратегий других игроков[34]. Так как игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть *условным* по этому типу. (Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса — отсюда и термины «байесовские игры», «байесовское равновесие».) Ожидаемый выигрыш игрока i, имеющего тип θ_i и выбравшего действия x_i, в предположении, что остальные игроки выбрали стратегии

$$\mathbf{s}_{-i}(\cdot) = (s_1(\cdot), \ldots, s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), \ldots, s_m(\cdot)),$$

равен

$$U_i(\theta_i, x_i, \mathbf{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}[u_i(x_i, \mathbf{s}_{-i}(\tilde{\theta}_{-i}), \theta_i, \tilde{\theta}_{-i}) \mid \tilde{\theta}_i = \theta_i],$$

где $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$ — типы остальных игроков. Тильды над типами игроков означают, что соответствующие величины следует рассматривать как случайные.

Если имеет место независимость типов, то условное по типу математическое ожидание совпадает с безусловным, т. е.

$$U_i(\theta_i, x_i, \mathbf{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}(u_i(x_i, \mathbf{s}_{-i}(\tilde{\theta}_{-i}), \theta_i, \tilde{\theta}_{-i})).$$

Если множества типов конечны и типы независимы, то ожидаемый выигрыш рассчитывается по формуле

$$U_i(\theta_i, x_i, \mathbf{s}_{-i}(\cdot)) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \pi_{-i}(\theta_{-i}) u_i(x_i, \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}),$$

где мы обозначили

$$\Theta_{-i} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \ldots, \Theta_m)$$

и

$$\pi_{-i}(\theta_{-i}) = \prod_{j \neq i} \pi_j(\theta_j)$$

[34] Можно задать целевые функции не для типов, а для игроков. В таком случае игрок максимизирует ожидаемую полезность, исходя из вероятности того, что он окажется того или иного типа. Оба подхода совпадают при естественном предположении, что вероятность появления любого типа не равна нулю.

(вероятность того, что типы остальных игроков окажутся равными $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$).

Для байесовских игр предложена концепция равновесия[35], аналогичная равновесию Нэша в играх с полной информацией.

Определение А.12:

Набор стратегий $(\bar{s}_1(\cdot), \ldots, \bar{s}_m(\cdot))$ является равновесием Нэша—Байеса (байесовским равновесием) в игре с неполной информацией, если для каждого типа $\theta_i \in \Theta_i$ каждого игрока i действия $\bar{s}_i(\theta_i)$ максимизируют его ожидаемую полезность в предположении, что все другие игроки выбрали равновесные стратегии:

$$U_i(\theta_i, \bar{s}_i(\theta_i), \bar{\mathbf{s}}_{-i}(\cdot)) = \max_{x_i \in X_i} U_i(\theta_i, x_i, \bar{\mathbf{s}}_{-i}(\cdot)).$$ ◀

Для того чтобы введенные определения стали более понятными, проиллюстрируем их на условном примере.

Игра 11 («Выбор компьютера»):

В игре участвуют два игрока, использующие в работе компьютеры. Каждый игрок может быть двух типов — предпочитает работать либо на IBM PC, либо на Макинтоше, причем любители IBM PC попадаются с вероятностью π (для обоих игроков). Каждый из игроков выбирает либо IBM PC, либо Макинтош. Лишь после того, как игрок выбрал тип компьютера, он узнает, с партнером какого типа ему предстоит работать, и какой тот выбрал себе компьютер. Каждый из типов каждого из игроков получает от пользования компьютером любимой разновидности выигрыш 1, а от пользования другим компьютером — 0. Игроки получают дополнительный выигрыш 2, если выберут компьютеры одной и той же разновидности. ⇦

Игра представлена в Таблице А.17.

Мы не будем полностью решать эту игру[36]. Найдем только условия для параметра π, при которых набор стратегий «если игрок любит IBM, то он выбирает IBM; если игрок любит Mac, то он выбирает Mac», т. е. ((IBM, Mac), (IBM, Mac)), будет равновесием Нэша—Байеса.

[35] Концепция байесовского равновесия предложена Джоном Харшаньи (J. C. Harsanyi. Games with Incomplete Information Played by ‘Bayesian’ Players (parts I, II and III), *Management Science* **14** (1967-1968): 159–182, 320–334, 486–502).

[36] См. задачу А.47.

Таблица А.17. *Байесовская игра «Выбор компьютера»*

Игрок 1		Игрок 2: Любит IBM, IBM	Игрок 2: Любит IBM, Mac	Игрок 2: Любит Mac, IBM	Игрок 2: Любит Mac, Mac	
Любит IBM	IBM	3, 3	1, 0	3, 2	1, 1	$[\pi]$
	Mac	0, 1	2, 2	0, 0	2, 3	
Любит Mac	IBM	2, 3	0, 0	2, 2	0, 1	$[1-\pi]$
	Mac	1, 1	3, 2	1, 0	3, 3	
		$[\pi]$		$[1-\pi]$		

Рассмотрим выбор первого игрока, если он предпочитает IBM PC. Если он ожидает, что стратегией второго игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

$$\begin{aligned} \text{IBM:} \quad & \pi \cdot 3 + (1-\pi) \cdot 1, \\ \text{Mac:} \quad & \pi \cdot 0 + (1-\pi) \cdot 2. \end{aligned}$$

Первый игрок такого типа выберет IBM PC, если выполнено условие

$$\pi \cdot 3 + (1-\pi) \cdot 1 \geqslant \pi \cdot 0 + (1-\pi) \cdot 2$$

или

$$\pi \geqslant 1/4.$$

Рассмотрим теперь выбор первого игрока, если он предпочитает Макинтош. Поскольку в равновесии он ожидает, что стратегией второго игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

$$\begin{aligned} \text{IBM:} \quad & \pi \cdot 2 + (1-\pi) \cdot 0, \\ \text{Mac:} \quad & \pi \cdot 1 + (1-\pi) \cdot 3. \end{aligned}$$

Первый игрок такого типа выберет Макинтош, если выполнено условие

$$\pi \cdot 2 + (1-\pi) \cdot 0 \leqslant \pi \cdot 1 + (1-\pi) \cdot 3$$

или

$$\pi \leqslant 3/4.$$

Для второго игрока рассуждения аналогичные и приводят к тем же условиям, поскольку игроки одинаковы. Таким образом, условие

$$1/4 \leqslant \pi \leqslant 3/4$$

гарантирует, что набор стратегий ((IBM, Mac), (IBM, Mac)) будет байесовским равновесием.

Следующий пример не является полноценной игрой, поскольку выбор в нем делает только один игрок, однако он включает все те компоненты байесовской игры, о которых здесь говорилось. Этот пример показывает, как можно моделировать то, что один и тот же игрок может в зависимости от некоторых случайных обстоятельств обладать разным объемом информации. Размышления над этой игрой позволяют сломать некоторые стереотипы, которые могут сложиться на основе формального определения байесовской игры. Кроме того, это пример игры в которой типы не являются независимыми (игры с *коррелированными типами*).

Игра 12 («Вахтер»):

На входе в некоторое учреждение стоит вахтер. В учреждение могут войти посетители двух типов: «свои» и «чужие» (будем их для краткости обозначать A и B). Некоторые посетители кажутся вахтеру своими, а некоторые — чужими. Таким образом, в данной игре есть два типа вахтера (обозначим их соответственно a и b). Вахтер может проверить у посетителя наличие пропуска. При этом если посетитель окажется своим, то выигрыш вахтера составит -1, а если чужим, то 1.

Заметим, что посетитель в этой игре не имеет никакого выбора. По сути дела, эта игра вахтера с природой.

Матрица игры приведена в Таблице А.18. Вероятность того, что свой посетитель кажется вахтеру своим обозначена π_{Aa} и т. д. Заметим, что по смыслу игры, если вахтер достаточно опытен, то вероятности появления типов не должны быть независимыми.

Условная вероятность того, что посетитель свой, если он кажется своим, равна $\pi_{Aa}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$, а условная вероятность того, что посетитель чужой, если он кажется своим, равна $\pi_{Ba}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$. Таким образом, ожидаемый выигрыш вахтера типа a, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Aa}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}} \cdot (-1) + \frac{\pi_{Ba}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}} \cdot 1,$$

Таблица А.18. *Матрица Игры 12*

			Посетитель			
			A		B	
Вахтер	a	проверять	-1	$[\pi_{Aa}]$	1	$[\pi_{Ba}]$
		не проверять	0		0	
	b	проверять	-1	$[\pi_{Ab}]$	1	$[\pi_{Bb}]$
		не проверять	0		0	

а если не проверяет, то равен нулю. Аналогично, ожидаемый выигрыш вахтера типа b, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Ab}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot(-1)+\frac{\pi_{Bb}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то равен нулю.

Если вахтер опытен, то вероятность π_{Aa} велика по сравнению с вероятностью π_{Ba}, а вероятность π_{Ab} велика по сравнению с вероятностью π_{Bb}, и естественно ожидать, что вахтер будет проверять документы у каждого, кто ему кажется чужим и не будет проверять документы у каждого, кто ему кажется своим.

Разберем также пример, в котором множества типов являются континуумами.

Игра 13 («Аукцион первой цены с заявками в запечатанных конвертах»): Некий предмет продается с аукциона. Участники аукциона $(i = 1, \ldots, n)$ подают свои заявки $(p_i \geqslant 0)$ в запечатанных конвертах. Побеждает тот, кто предложит самую высокую цену. (Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием.) Победивший участник платит заявленную цену и получает предмет. Если i-й участник окажется победителем, то его выигрыш составит $v_i - p_i$, где v_i — ценность для него данного предмета; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. Известно, что оценки v_i распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$, т. е. $\tilde{v}_i \sim U[0, 1]$, и независимы.

В данном случае можно считать, что множество типов каждого игрока совпадает с отрезком $[0, 1]$. Удобно рассматривать стратегию i-го игрока как функцию $p_i(v)$, ставящую в соответствие типу v цену, которую он предложит:

$$p_i\colon [0, 1] \mapsto \mathbb{R}_+.$$

Решить эту задачу непосредственно затруднительно. Можно предложить следующий путь решения: предположить, что равновесные стратегии обладают некоторыми естественными свойствами, затем вычислить, исходя из этого, равновесные стратегии и показать, что на самом деле найдено равновесие.

По смыслу задачи естественно искать симметричное равновесие, т. е. такое равновесие, в котором все игроки i выбирают одинаковые стратегии:

$$p_i(v) = p_0(v) \text{ для всех } v.$$

Кроме того, предположим, что одинаковая для всех стратегия $p_0(\cdot)$ является дифференцируемой функцией с положительной производной. Охарактеризуем, исходя из этих предположений, оптимальный отклик i-го игрока.

Если этот игрок выберет цену p, то вероятность того, что другой игрок (j) предложил более низкую цену, равна

$$\Pr(p_0(\tilde{v}_j) < p) = \Pr(\tilde{v}_j < p_0^{-1}(p)) = p_0^{-1}(p) = \varphi(p),$$

где мы воспользовались тем, что оценка $\tilde{v}_j$ равномерно распределена на $[0, 1]$, и обозначили через $\varphi(p)$ функцию, обратную к $p_0(\cdot)$. Поскольку, по предположению, $\tilde{v}_j$ распределены независимо, то события $p_0(\tilde{v}_j) < p$ независимы, и вероятность того, что i-й игрок выиграет аукцион, заявив цену p, равна $\varphi(p)^{n-1}$. (Здесь мы пользуемся тем, что, коль скоро $p_0(\cdot)$ — возрастающая функция, то вероятность события $p_0(\tilde{v}_j) = p$ равна нулю.) Таким образом, ожидаемый выигрыш i-го игрока с оценкой v, предложившего цену p, в предположении, что все остальные игроки выбрали стратегии $p_0(\cdot)$, равен

$$\varphi(p)^{n-1} \cdot (v - p) + (1 - \varphi(p)^{n-1}) \cdot 0 = (v - p)\varphi(p)^{n-1}.$$

Условия первого порядка для задачи максимизации ожидаемого выигрыша имеют вид

$$(n-1)(v-p)\varphi(p)^{n-2}\varphi'(p) - \varphi(p)^{n-1} = 0$$

или

$$(n-1)(v-p)\varphi'(p) - \varphi(p) = 0.$$

В равновесии игрок, имеющий оценку v, должен предлагать цену $p = p_0(v)$. Подставив это в условия первого порядка, получаем

$$(n-1)(v - p_0(v))\varphi'(p_0(v)) - \varphi(p_0(v)) = 0.$$

Так как $\varphi(\cdot)$ — функция, обратная к $p_0(\cdot)$, то

$$\varphi(p_0(v)) = v \quad \text{и} \quad \varphi'(p_0(v)) = \frac{1}{p_0'(v)}.$$

Получим дифференциальное уравнение

$$(n-1)[v - p_0(v)] - p_0'(v)v = 0.$$

Решением этого уравнения, как несложно проверить, является

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v + \frac{C}{v^{n-1}},$$

где C — константа интегрирования. Найдем эту константу. По смыслу игры $p_0(v)$ не должна превышать v, поскольку в этом случае если игрок с оценкой v выиграет аукцион, то он окажется в убытке. С другой стороны, по условию заявленная цена не может быть отрицательной. Поэтому должно выполняться граничное условие $p_0(0) = 0$, откуда $C = 0$. Таким образом, наши рассуждения приводят к стратегиям вида

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v.$$

В самом деле, при таких стратегиях других игроков ожидаемый выигрыш игрока с оценкой v, а именно

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}(v-p)p^{n-1},$$

достигает глобального максимума на $\mathbb{R}_+$ при $p = \frac{n-1}{n}v$, т. е. условия первого порядка дали нам правильное решение. Заметим, что хотя мы нашли равновесие, но не можем быть уверены, что полученное нами решение единственно.

Если в аукционе участвуют два игрока, то в равновесии каждый предложит цену на уровне половины своей оценки. С ростом количества участников равновесные стратегии все больше приближаются к «правдивым» стратегиям $p_i(v) = v$.

Выше уже упоминалось, что равновесие в смешанных стратегиях в статических играх с полной информацией можно представить как байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в статических играх с неполной информацией. С помощью байесовского равновесия можно имитировать эффект смешанных стратегий при использовании только чистых стратегий. Рассмотрим, как это можно сделать на примере Игры 7 «Инспекция» (с. 1033). Предположим, что оба игрока могут быть разных типов. Для упрощения предположим, что тип у каждого из игроков — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$, причем типы независимы. При этом предполагаем, что разные типы одного и того же игрока имеют одинаковые предпочтения (те, что заданы Таблицей A.9). Несложно проверить, что следующий набор стратегий является байесовским равновесием расширенной игры: налогоплательщик платит налог, если его тип удовлетворяет условию $\theta_1 \leqslant 1/2$, в противном случае он налог не платит; аналогично налоговый инспектор проверяет, если его тип удовлетворяет условию $\theta_2 \leqslant 1/2$. Это байесовское равновесие полностью воспроизводит равновесие в смешанных стратегиях исходной игры: в половине случаев налогоплательщик платит налог и в половине случаев налоговый инспектор проверяет налогоплательщика. Рандомизирует при этом не игрок, а природа, когда выбирает тот или иной тип игрока.

Конечно, в расширенной игре существует не одно, а бесконечно много байесовских равновесий. Для получения другого байесовского равновесия требуется только произвольным образом разбить множество типов каждого игрока на две части, вероятности попадания в которые равны вероятностям использования чистых стратегий в исходном равновесии в смешанных стратегиях.

Можно также имитировать равновесие в смешанных стратегиях с помощью слегка измененной игры, в которой к выигрышам добавляются малые случайные возмущения, зависящие от типов игроков. Такой подход позволяет избавиться от множественности байесовских равновесий, о котором только что говорилось. При этом равновесие в смешанных стратегиях будет пределом байесовских равновесий в «возмущенных» играх (см. задачу A.50).

Мы рассмотрели байесовское равновесие в чистых стратегиях. По аналогии с ним несложно определить байесовское равновесие в смешанных стратегиях. Следующий пример иллюстрирует такое равновесие.

Игра 14:

Как и в Игре 11, имеется два игрока, выбирающие компьютеры. Первый игрок может быть только одного типа — любитель IBM PC, а второй — тех же двух типов, что и в Игре 11, причем эти два типа встречаются с равными вероятностями. Полностью игра задана в Таблице A.19.

Обозначим вероятности выбора IBM PC следующим образом: μ для первого игрока, α для второго игрока, любящего IBM PC, и β для второго игрока, любящего Mac. Эти вероятности однозначно

Таблица А.19. *Байесовская игра «Выбор компьютера», асимметричный вариант*

		Игрок 2			
		Любит IBM		Любит Mac	
		IBM	Mac	IBM	Mac
Игрок 1	IBM	3, 3	1, 0	3, 2	1, 1
	Mac	0, 1	2, 2	0, 0	2, 3
		[0,5]		[0,5]	

задают смешанные стратегии игроков. Рассмотрим по очереди для каждого из типов каждого игрока, какие стратегии являются оптимальными откликами на стратегии других игроков.

Если первый игрок выберет IBM PC, то его ожидаемый выигрыш составит

$$0{,}5(\alpha \cdot 3 + (1-\alpha) \cdot 1) + 0{,}5(\beta \cdot 3 + (1-\beta) \cdot 1) = 1 + \alpha + \beta,$$

а если Mac, то

$$0{,}5(\alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 2) + 0{,}5(\beta \cdot 0 + (1-\beta) \cdot 2) = 2 - \alpha - \beta.$$

Оптимальный отклик на α и β имеет вид

$$\mu(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha + \beta > 0{,}5, \\ [0,1], & \text{если } \alpha + \beta = 0{,}5, \\ 0, & \text{если } \alpha + \beta < 0{,}5. \end{cases}$$

Если второй игрок, любящий IBM PC, выберет IBM PC, то его ожидаемый выигрыш составит

$$\mu \cdot 3 + (1-\mu) \cdot 1 = 1 + 2\mu,$$

а если Mac, то

$$\mu \cdot 0 + (1-\mu) \cdot 2 = 2 - 2\mu.$$

Его оптимальный отклик на μ имеет вид

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu > 0{,}25, \\ [0,1], & \text{если } \mu = 0{,}25, \\ 0, & \text{если } \mu < 0{,}25. \end{cases}$$

Если второй игрок, любящий Mac, выберет IBM PC, то его ожидаемый выигрыш составит

$$\mu \cdot 2 + (1 - \mu) \cdot 0 = 2\mu,$$

а если Mac, то

$$\mu \cdot 1 + (1 - \mu) \cdot 3 = 3 - 2\mu.$$

Его оптимальный отклик на μ имеет вид

$$\beta(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu > 0{,}75, \\ [0, 1], & \text{если } \mu = 0{,}75, \\ 0, & \text{если } \mu < 0{,}75. \end{cases}$$

Множество равновесий можно найти перебором трех возможных случаев: $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ и $\alpha \in (0, 1)$. Первым двум случаям соответствуют два различных равновесия, оба в чистых стратегиях. (Читателю предлагается доказать это самостоятельно; см. задачу A.52.) Рассмотрим только случай $\alpha \in (0, 1)$. Такую невырожденную смешанную стратегию первый из типов второго игрока будет применять, только если две чистые стратегии дают ему одинаковый выигрыш, т. е. если $\mu = 0{,}25$. При этом $\mu < 0{,}75$ и второй из типов второго игрока выберет стратегию $\beta = 0$. С другой стороны, первый игрок выберет $\mu = 0{,}25$, только если $\alpha + \beta = 0{,}5$, откуда $\alpha = 0{,}5$. Мы нашли в случае $\alpha \in (0, 1)$ одно равновесие, в котором

$$\mu = 0{,}25, \quad \alpha = 0{,}5, \quad \beta = 0.$$

Задачи

A.46 Как представить Игру 2 (с. 1011) в виде байесовской игры?

A.47 В Игре 11 найдите все байесовские равновесия (в чистых стратегиях).

A.48 Два партнера ($i = 1, 2$) одновременно решают, инвестировать ли в проект или нет. Если оба инвестируют, то проект окажется успешным и каждый получит доход v_i. В противном случае проект провалится и каждый получит доход 0. Инвестиции (вне зависимости от успешности проекта) связаны для отдельного партнера с издержками c. Каждого из партнеров интересует чистый доход. В природе встречаются два типа партнеров. Партнеры типа H получают высокий доход от проекта, $v_i = 2$, и встречаются с вероятностью μ. Партнеры типа L получают низкий доход от проекта, $v_i = 1$, и встречаются с вероятностью $1 - \mu$. Типы двух партнеров независимы.

(A) При каких условиях на параметры μ и c будет существовать равновесие (Нэша—Байеса), в котором каждый из партнеров инвестирует, если и только если имеет тип H?

(B) Найдите все возможные равновесия в зависимости от параметров μ, c.

A.49 Богатство отца составляет \$3 с вероятностью $1/5$, \$6 с вероятностью $1/5 \cdot 4/5$, \$12 с вероятностью $1/5 \cdot (4/5)^2$ и т. д. (т. е. $\$3 \cdot 2^k$ с вероятностью $1/5 \cdot (4/5)^k$ для каждого $k \geqslant 0$). В один конверт он кладет две трети своего богатства, в другой — одну треть. Он дает по конверту каждому из двух сыновей (каждый из сыновей с одинаковой вероятностью получит любой конверт). Каждый из сыновей видит, сколько денег в его собственном конверте, но не знает, сколько денег в конверте брата. Каждый из сыновей имеет функцию полезности от богатства $\ln w$. (*Указание:* $3^9 > 2^{14}$.)

Рассмотрим следующую игру. Каждый из братьев решает, разделить ли деньги, находящиеся в конвертах. Таким образом, оба брата одновременно говорят «Да» или «Нет». Если оба говорят «Да», они делят деньги поровну. Если хотя бы один из братьев говорит «Нет», то они остаются с деньгами, находящимися в их собственных конвертах.

Каждый брат знает только количество денег в его собственном конверте. Таким образом, тип каждого брата — это элемент множества $\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$.

(A) Каково распределение вероятностей по типам?

(B) Опишите эту ситуацию формально как игру с неполной информацией.

(C) Опишите равновесие (Нэша—Байеса) в чистых стратегиях, в котором братья делят деньги. Проверьте, что это действительно равновесие.

(D) Существует ли в этой игре другое равновесие?

(E) Предположите теперь, что отец объявил, что ни в одном из конвертов не может находиться больше чем $\$3 \cdot 2^K$ (для некоторого $K \geqslant 1$). Охарактеризуйте равновесия Нэша—Байеса в чистых стратегиях получившейся в результате игры.

A.50 В Таблице A.20 показана «возмущенная» игра «Инспекция» (см. Игру 7). В ней ε_1 и ε_2 — случайные возмущения, соответствующие типу первого и второго игроков соответственно, причем ε_1 и ε_2 равномерно распределены на отрезке $[0, \delta]$ ($\delta > 0$) и независимы меж-

Таблица А.20. *Игра для задачи* A.50

		Инспектор: проверять	Инспектор: не проверять
Проверяемый	нарушать	-1; $\underline{1+\varepsilon_2}$	$\underline{1+\varepsilon_2}$; 0
	не нарушать	$\underline{0}$; -1	0; $\underline{0}$

ду собой[37]. Найдите байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в этой игре. Докажите, что при $\delta \to 0$ найденное байесовское равновесие стремится к равновесию в смешанных стратегиях исходной игры (Игра 7 на с. 1033).

(*Указание:* Подскажем, равновесие какого вида здесь искать. Каждый игрок выбирает некоторый пороговый уровень $\bar{\varepsilon}_i$. Равновесные стратегии выглядят следующим образом: если $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}_1$, то первый игрок выбирает стратегию «нарушать», а если $\varepsilon_1 > \bar{\varepsilon}_1$ — то стратегию «не нарушать»[38]; аналогичным образом второй игрок выбирает стратегию «проверять», если $\varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2$, и стратегию «не проверять», если $\varepsilon_2 > \bar{\varepsilon}_2$.)

A.51 В условиях Игры 13 рассмотрите аукцион *второй* цены с заявками в запечатанных конвертах. (Что такое аукцион второй цены, объясняется в Игре 4.)

(А) Пользуясь результатами анализа Игры 4, покажите, что «правдивые» стратегии (предлагать свою истинную оценку) составляют байесовское равновесие.

(В) Проверьте, что ожидаемый доход аукциониста в данном равновесии такой же, как для аукциона первой цены.

A.52 Проведите полный анализ игры Игры 14.

A.6 Динамические байесовские игры. Совершенное байесовское равновесие

В этом параграфе мы рассмотрим разновидность игр, которые являются таким же обобщением статических байесовских игр, каким являются динамические игры с полной информацией для статиче-

[37] Равномерное распределение выбрано нами только из соображений удобства. В данном случае подошло бы любое разумное непрерывное распределение.

[38] Вероятность того, что $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ равна нулю, поэтому этот случай можно не рассматривать.

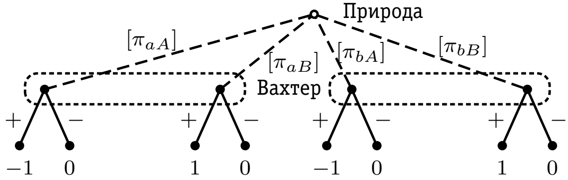


Рис. А.27. *Дерево игры «Вахтер»*

ских игр с полной информацией, т. е. динамические байесовские игры (динамические игры с неполной информацией).

Важный результат состоит в том, что байесовские игры (игры с неполной информацией) можно представить как динамические игры с несовершенной информацией, если ввести *природу*, делающую случайные ходы, как еще одного игрока. То, что один игрок не знает тип другого игрока, при этом отражается с помощью соответствующего задания информационных множеств.

На Рис. А.27 показано построенное по этому принципу дерево игры «Вахтер» (Игра 12 на с. 1079). Знаками «+» обозначены действия «проверять», а знаками «–» — «не проверять».

В качестве еще одного примера динамической байесовской игры рассмотрим модификацию Игры 8 «Террорист» (с. 1046).

Игра 15 («Террорист»):
Ситуация в данной игре такая же, как в Игре 8, однако террорист может быть двух типов: «нормальный» и «сумасшедший». Нормальный террорист, так же как и в Игре 8, получает выигрыш -100 в случае, если взорвет бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист получает в этом случае выигрыш 0. Вероятность того, что террорист окажется сумасшедшим, равна π. Пилот не знает, с террористом какого типа он имеет дело, но сам террорист знает свой тип. ⇦

Игра схематически показана на Рис. А.28. В игру был добавлен дополнительный фиктивный игрок — природа. Это сделано для того, чтобы показать на схеме случайный выбор типа террориста. Природа не имеет никакой целевой функции, поэтому на схеме показаны только выигрыши двух исходных игроков.

Первый ход делает природа. С вероятностью π природа создает сумасшедшего террориста, а с вероятностью $1-\pi$ — нормального. Пунктирной рамкой показано информационное множество пилота, соответствующее условию, что он не знает типа террориста.

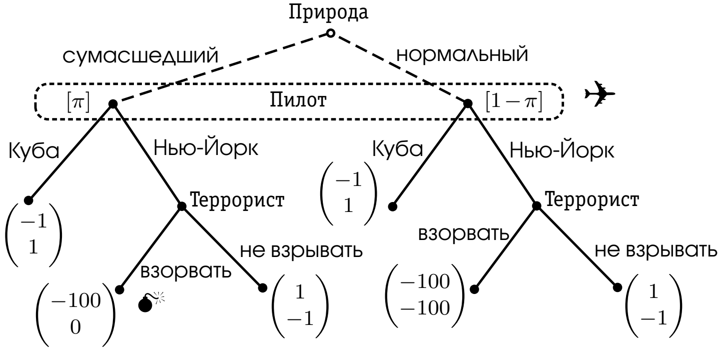


Рис. А.28. *Игра «Террорист»*

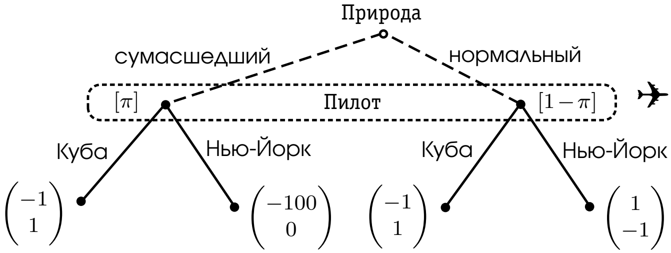


Рис. А.29. *Свернутая игра «Террорист»*

Решение этой игры можно найти, применяя обратную индукцию. Сначала нужно рассмотреть поведение террористов обоих типов. Нормальный террорист, как мы видели раньше в Игре 8, не будет взрывать бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист, наоборот, предпочтет взорвать бомбу (так как 0 больше -1). В результате этих рассуждений (которые, как предполагается, должен проводить рациональный пилот) получим свернутую игру, которая показана на Рис. А.29.

Если пилот выберет Кубу, то в любом случае поучит -1. Если же пилот выберет Нью-Йорк, то с вероятностью π он получит -100, а с вероятностью $1-\pi$ получит 1, т. е. его ожидаемый выигрыш составит

$$\pi \cdot (-100) + (1-\pi) \cdot 1 = 1 - 101\pi.$$

Пилот должен сравнить выигрыш -1 с выигрышем $1-101\pi$ и выбрать максимальный. Таким образом, вид решения будет зависеть от параметра π. Если вероятность встретить сумасшедшего террориста мала, т. е. $\pi < 2/101$, то пилот полетит в Нью-Йорк, а если эта вероятность велика, т. е. $\pi > 2/101$, то он предпочтет полететь на Кубу. При $\pi = 2/101$ пилоту все равно, куда лететь.

Заметим, что в рассмотренном примере не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор пилота, поскольку знали, с какой вероятностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой — в правой.

Однако зачастую такие вероятности неизвестны. Мы сталкивались уже с этой проблемой, рассматривая динамические игры с полной, но несовершенной информацией. В подобных ситуациях коль скоро игрок стоит перед выбором в некотором информационном множестве, состоящем более чем из одной вершины, то ему приходится делать некоторые предположения относительно того, с какой вероятностью он может оказаться в той или иной вершине. Если игрок имеет такого рода ожидания, то на их основе он выбирает ту альтернативу, которая может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к понятию совершенного байесовского равновесия.

Совершенное байесовское равновесие состоит из следующих компонент:

- набора стратегий $(s_1, \ldots, s_m)$ всех игроков;
- для каждого игрока i — набора ожидаемых им стратегий остальных игроков $\mathbf{s}^e_{-i}$;
- для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход,— ожидаемого им распределения, заданного на вершинах этого информационного множества (англ. *beliefs* — убеждение, представления, вера; мы будем называть это ожиданиями).

Для того чтобы описанный набор стратегий и ожиданий составлял совершенное байесовское равновесие, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия.

✻ Ожидания любого игрока согласуются со стратегиями: ожидаемое распределение на вершинах информационных множеств для каждого игрока i соответствует выбранной игроком стратегии (s_i)

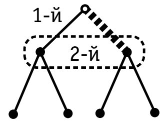


Рис. А.30. *Второй игрок должен ожидать, что находится в правой вершине информационного множества*

и тем стратегиям, которые, как он ожидает, выберут другие игроки ($\mathbf{s}^e_{-i}$).

* Выбранная стратегия последовательно оптимальна при данных ожиданиях, т. е. выбор в каждом информационном множестве должен быть таким, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш в предположении, что после этого информационного множества игра будет идти в соответствии с набором стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$.

* Ожидаемые стратегии совпадают с фактически выбранными стратегиями: $\mathbf{s}^e_{-i} = \mathbf{s}_{-i}$.

Первое условие требует специального пояснения. Поясним сначала это условие для случая чистых стратегий. Рассмотрим некоторого игрока i и информационное множество, в котором этому игроку принадлежит ход. Какими должны быть его ожидания в данном информационном множестве? Предположим, что траектория, соответствующая набору стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$ и выходящая из начальной вершины, проходит через одну из вершин данного информационного множества. В таком случае если игрок рационален, то он должен ожидать, что будет находиться именно в этой вершине, коль скоро игра достигнет данного информационного множества и ему придется делать в нем выбор.

В качестве примера рассмотрим статическую игру, изображенную на Рис. А.30. Если второй игрок ожидает, что первый игрок выберет правую стратегию, то он должен ожидать также, что будет находиться в правой вершине своего информационного множества. Следует отметить, что если второй игрок будет исходить из сформированных таким способом ожиданий, то, выбирая свои действия оптимальным образом, он повторит ту функцию отклика, которую мы рассматривали при анализе равновесия Нэша.

В случае смешанных стратегий общего вида рассуждения должны быть схожими. Следует вычислить, с какой вероятностью будет достигаться каждая из вершин некоторого информационного множества в процессе игры, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$. Тогда ожидаемая вероятность того, что игрок может находиться в некоторой вершине рассматриваемого информационного множества, равна вероятности достижения этой вершины деленной на сумму вероятностей достижения вершин рассматриваемого информационного множества. Указанная сумма вероятностей есть просто вероятность достижения рассматриваемого информационного множества, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$. Понятно, что эта вероятность не должна быть равна нулю, чтобы можно было произвести деление. (Если же вероятность равна нулю, т. е. данное информационное множество не может быть достигнуто, то указанное правило неприменимо.) Описанный способ вычисления вероятностей соответствует классическому правилу Байеса для условных вероятностей.

Напомним, что правило Байеса применимо к событиям A и B_j $(j = 1, \ldots, m)$, таким что

- $B_1, \ldots, B_m$ — несовместные события, т. е.

$$B_j \cap B_k = \varnothing \text{ при } j \neq k;$$

- тот факт, что произошло одно из событий B_j гарантирует, что произошло также событие A, т. е.

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

При этом верна следующая формула Байеса:

$$\Pr\{B_j \mid A\} = \frac{\Pr\{B_j\} \Pr\{A \mid B_j\}}{\sum_{k=1}^{m} \Pr\{B_k\} \Pr\{A \mid B_k\}} = \frac{\Pr\{B_j\} \Pr\{A \mid B_j\}}{\Pr\{A\}}.$$

В этой формуле $\Pr\{B_j\}$ — вероятность события B_j, $\Pr\{B_j \mid A\}$ — вероятность события B_j при условии, что произошло событие A, $\Pr\{A\}$ — вероятность события A, $\Pr\{A \mid B_j\}$ — вероятность события A при условии, что произошло событие B_j. В знаменателе первой дроби стоит формула полной вероятности для $\Pr\{A\}$. Чтобы можно было применить правило Байеса, нужно чтобы знаменатель не был равен нулю ($\Pr\{A\} \neq 0$).

В применении к рассматриваемой проблеме можно считать, что событие B_j означает, что процесс игры привел в определенную вершину, а событие A — что процесс игры привел в данное информационное множество. Если брать только такие вершины, которые содержатся в рассматриваемом информационном множестве, то $\Pr\{A \mid$

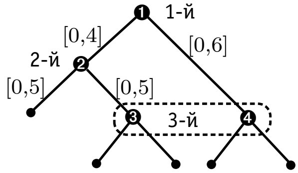


Рис. А.31. *Третий игрок должен сопоставить вершинам ❸ и ❹ вероятности* 0,25 *и* 0,75 *соответственно*

$B_j\} = 1$ и формула упрощается:

$$\Pr\{B_j \mid A\} = \frac{\Pr B_j}{\Pr A},$$

где $\Pr\{A\} = \sum_{k=1}^{m} \Pr\{B_k\}$.

Поясним сказанное на примере игры, изображенной на Рис. А.31. Если третий игрок считает, что первый игрок выбирает левую сторону с вероятностью 0,4 и что второй игрок выбирает левую и правую сторону с равными вероятностями, то он должен считать, что вершина ❸ будет достигаться в процессе игры с вероятностью $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$, а вершина ❹ — с вероятностью 0,6. Таким образом, он должен сопоставить вершине ❸ вероятность

$$0{,}2/(0{,}2 + 0{,}6) = 0{,}25,$$

а вершине ❹ — вероятность

$$0{,}6/(0{,}2 + 0{,}6) = 0{,}75.$$

Это только одно из требований. Даже если при наборе стратегий $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$ процесс игры никогда не может привести в некоторое информационное множество, ожидания игрока в данном информационном множестве должны соответствовать $(s_i, \mathbf{s}^e_{-i})$. Так, в игре, изображенной на Рис. А.32a, при указанных ожиданиях относительно стратегий первого и второго игроков третий игрок должен ожидать, что может оказаться в левой вершине с вероятностью 0,1, а в правой вершине — с вероятностью 0,9, хотя вероятность достижения информационного множества равна нулю. Ограничимся только этими пояснениями и не станем давать более точного определения.

Заметим, что не всегда можно по данному набору стратегий сформировать ожидания. Например, в игре, изображенной на Рис. А.32b, при указанных ожиданиях о стратегии первого игрока второй игрок

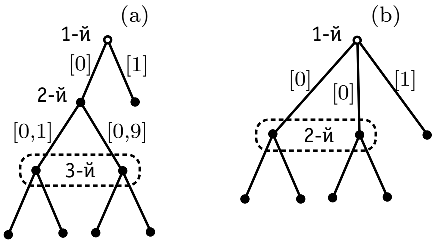


Рис. А.32. *(a) Ожидания третьего игрока определены, хотя вероятность достижения информационного множества равна нулю. (b) Ожидания второго игрока могут быть произвольными*

не может сформировать ожидания в своем информационном множестве. Второй игрок может получить ход только в результате ошибки первого игрока, и трудно судить, какая из ошибок более вероятна. В таких случаях мы будем только требовать, чтобы у игрока были *некоторые* ожидания и чтобы он выбирал стратегию на основе этих ожиданий[39].

Отличительной особенностью совершенного байесовского равновесия является то, что для его поиска в общем случае невозможно использовать обратную индукцию. Если в игре нет подыгр, то совершенное байесовское равновесие приходится находить как решение системы уравнений: ожидаемые распределения на вершинах информационных множеств находятся в соответствии с равновесным набором стратегий, а равновесная стратегия выбирается каждым игроком на основе предположений об ожидаемых распределениях на вершинах информационных множеств.

Для иллюстрации использования совершенного байесовского равновесия рассмотрим модификацию Игры 15 (с. 1088) с двумя типами террористов, в которой террорист предварительно решает, хочет ли он проводить операцию. Если он не станет осуществлять задуманную акцию, то вне зависимости от типа выигрыш террориста составит 0, а выигрыш пилота составит 0. Дерево игры показано на Рис. А.33. Как и прежде, первый элемент вектора — выигрыш пилота. Поскольку выбор террориста (каждого из типов) в Нью-Йорке можно предсказать однозначно, то будем рассматривать «частично

[39]Для таких случаев в теории игр к настоящему времени разработано несколько различных концепций решений. Однако мы не будем здесь углубляться в эти проблемы.

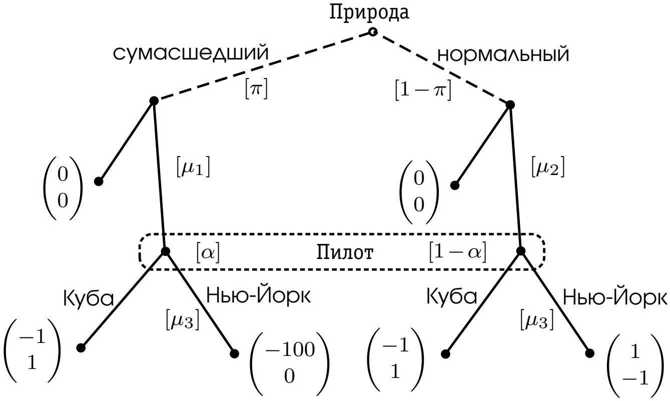


Рис. А.33. *Дерево модифицированной игры «Террорист»*

свернутую» игру. Совершенное байесовское равновесие определяется следующими величинами:

- вероятностью $\mu_1 \in [0, 1]$, с которой сумасшедший террорист проводит операцию;
- вероятностью $\mu_2 \in [0, 1]$, с которой нормальный террорист проводит операцию;
- вероятностью $\alpha \in [0, 1]$, с которой пилот ожидает встретить сумасшедшего террориста;
- вероятностью $\mu_3 \in [0, 1]$, с которой пилот летит в Нью-Йорк.

Этого достаточно для описания равновесия. Все остальные вероятности очевидным образом рассчитываются как функции указанных.

Рассмотрим сначала поведение пилота при ожиданиях, заданных параметром α. Ожидаемые выигрыши пилота от двух возможных действий равны

$$\begin{aligned} \text{Куба:} \quad & -1, \\ \text{Нью-Йорк:} \quad & \alpha \cdot (-100) + (1 - \alpha) \cdot 1. \end{aligned}$$

Таким образом, если $-1 < \alpha \cdot (-100) + (1 - \alpha) \cdot 1$, т. е. $\alpha < 2/101$, то пилот предпочтет полететь в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$), если $\alpha > 2/101$, то на Кубу ($\mu_3 = 0$), а в случае, когда $\alpha = 2/101$, ему все равно, куда лететь (μ_3 любое). То есть зависимость стратегии от ожиданий имеет следующий вид:

$$\mu_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 2/101, \\ [0,1], & \text{если } \alpha = 2/101, \\ 0, & \text{если } \alpha > 2/101. \end{cases}$$

Далее рассмотрим, какими должны быть ожидания пилота α в зависимости от вероятностей μ_1 и μ_2. Если $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$, то можно использовать формулу Байеса. В рассматриваемой игре можно считать, что события следующие: B_1 — террорист сумасшедший, B_2 — террорист нормальный, A — в процессе игры пилот получил ход и должен выбирать, куда ему лететь. (Проверьте, что эти события удовлетворяют требованиям, необходимым для использования правила Байеса.) При этом, используя введенные обозначения,

$$\begin{aligned} &\Pr\{B_1\} = \pi, && \Pr\{B_2\} = 1 - \pi, \quad \Pr\{B_1 \mid A\} = \alpha, \\ &\Pr\{A \mid B_1\} = \mu_1, && \Pr\{A \mid B_2\} = \mu_2. \end{aligned}$$

Получаем по формуле Байеса, что

$$\alpha(\mu_1, \mu_2) = \frac{\pi\mu_1}{\pi\mu_1 + (1-\pi)\mu_2}$$

при $\mu_1 \neq 0$ или при $\mu_2 \neq 0$. Если $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, то, согласно принятому нами определению байесовского равновесия, ожидания пилота α могут быть любыми: $\alpha(\mu_1, \mu_2) = [0,1]$.

Рассмотрим теперь выбор каждого из типов террориста. Если террорист сумасшедший, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции при стратегии пилота, заданной вероятностью μ_3, равен

$$(1 - \mu_3) \cdot 1 + \mu_3 \cdot 0 = 1 - \mu_3.$$

Он сравнивает этот выигрыш с нулем. Таким образом,

$$\mu_1(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1, \\ [0,1], & \text{если } \mu_3 = 1. \end{cases}$$

Если террорист нормальный, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции равен $1 - 2\mu_3$. Он тоже сравнивает этот выигрыш с нулем, т. е.

$$\mu_2(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1/2, \\ [0,1], & \text{если } \mu_3 = 1/2, \\ 0, & \text{если } \mu_3 > 1/2. \end{cases}$$

Набор вероятностей $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \alpha^*)$ задает совершенное байесовское равновесие, если выполнены четыре условия:

$$\mu_3^* \in \mu_3(\alpha^*), \quad \alpha^* \in \alpha(\mu_1^*, \mu_2^*),$$
$$\mu_1^* \in \mu_1(\mu_3^*), \quad \mu_2^* \in \mu_2(\mu_3^*).$$

Для того чтобы найти решения этой системы, следует разобрать несколько случаев. Проанализируем по отдельности следующие три взаимоисключающие возможности:

(1) нормальный террорист не проводит операцию ($\mu_2 = 0$);
(2) нормальный террорист проводит операцию ($\mu_2 = 1$);
(3) у нормального террориста невырожденная смешанная стратегия[40] ($\mu_2 \in (0, 1)$).

(1) Рассмотрим случай, когда $\mu_2 = 0$. Предположим, что при этом $\mu_1 \neq 0$. Тогда пилот наверняка будет знать, что он может иметь дело только с сумасшедшим террористом ($\alpha = 1$). Зная это, пилот выберет Кубу ($\mu_3 = 0$). Но в таком случае нормальному террористу тоже выгодно проводить операцию. Мы пришли к противоречию. Значит, единственная возможность состоит в том, что сумасшедший террорист не проводит операцию ($\mu_1 = 0$). Но такое может быть, только если он знает, что пилот полетит в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$). Однако такое поведение пилота возможно только в том случае, если вероятность того, что он имеет дело с сумасшедшим террористом, мала ($\alpha \leqslant 2/101$).

Мы нашли в рассматриваемой игре одно из равновесий (точнее, семейство равновесий одного типа):

$$\mu_3^* = 1, \quad \alpha^* \in [0, 2/101], \quad \mu_1^* = 0, \quad \mu_2^* = 0.$$

Это равновесие поддерживается уверенностью пилота, что вероятность встречи с сумасшедшим террористом мала. Заметим, что эти ожидания ни на чем не основаны, ведь в рассматриваемом равновесии пилот не может сформировать свои ожидания на основе правила Байеса.

(2) Рассмотрим теперь случай, когда $\mu_2 = 1$. Такое поведение нормального террориста возможно, только если пилот с достаточно большой вероятностью полетит на Кубу, а именно если $\mu_3 \leqslant 1/2$. При такой стратегии пилота сумасшедшему террористу выгодно проводить операцию ($\mu_1 = 1$). Но если оба террориста проводят операцию, то для пилота вероятность встретить сумасшедшего террориста совпадает с вероятностью, с которой такие террористы встречаются

[40] Или, как еще говорят, вполне смешанная.

вообще, т. е. $\alpha = \pi$. Пилот может выбрать $\mu_3 \leqslant 1/2$, только если $\alpha \geqslant 2/101$. Таким образом, равновесие может достигаться только при $\pi \geqslant 2/101$. При $\pi > 2/101$ имеем $\mu_3 = 0$. Таким образом, если сумасшедшие террористы встречаются на свете достаточно часто, т. е. если $\pi > 2/101$, то в рассматриваемой игре может иметь место следующее равновесие:

$$\mu_3^* = 0, \quad \alpha^* = \pi, \quad \mu_1^* = 1, \quad \mu_2^* = 1.$$

В вырожденном случае, когда $\pi = 2/101$, получаем следующее множество равновесий:

$$\mu_1^* = 1, \quad \mu_2^* = 1, \quad \mu_3^* \in [0, 1/2], \quad \alpha^* = \pi = 2/101.$$

(3) И наконец, рассмотрим случай, когда нормальный террорист использует невырожденную смешанную стратегию ($\mu_2 \in (0, 1)$). Условием использования такой стратегии является то, что обе альтернативы дают ему одинаковую полезность, т. е. то, что пилот летит в Нью-Йорк с вероятностью 1/2 ($\mu_3 = 1/2$). Такая стратегия пилота может поддерживаться только ожиданиями $\alpha = 2/101$. Учитывая, что сумасшедшему террористу выгодно участвовать в акции ($\mu_1 = 1$), из формулы Байеса получим следующее уравнение:

$$\alpha = \frac{2}{101} = \frac{\pi}{\pi + (1-\pi)\mu_2}.$$

Значит, пилот может сформировать такие ожидания, только если

$$\mu_2 = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку вероятность μ_2 должна быть меньше единицы, то вероятность, с которой природа порождает сумасшедших террористов, должна быть достаточно мала: $\pi < 2/101$.

Таким образом, при $\pi < 2/101$ следующие вероятности определяют равновесие:

$$\mu_3^* = \frac{1}{2}, \quad \alpha^* = \frac{2}{101}, \quad \mu_1^* = 1, \quad \mu_2^* = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку проанализированы все три возможных случая, то мы нашли все возможные равновесия игры.

Задачи

A.53 Изобразите Игру 11 и Игру 14 в виде дерева.

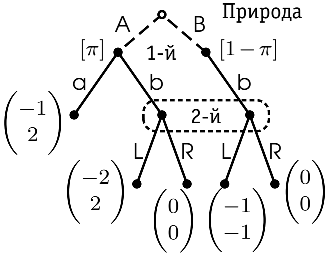


Рис. А.34. *Дерево игры к задаче А.57*

А.54 Найдите совершенные байесовские равновесия в игре, изображенной на Рис. А.20 на с. 1066.

А.55 «Карточный блеф». В начале игры игроки (1 и 2) вносят по 1 руб. После этого с равной вероятностью игрок 1 получает одну из двух возможных карт, «старшую» или «младшую». Далее игрок 1 может повысить ставку, добавив 2 руб. Если он этого не сделает, то игра заканчивается и деньги забирает игрок 2. Если игрок 1 повышает, то делает ход игрок 2. Он либо уравнивает, добавляя 2 руб., либо пасует. В первом случае карта открывается и деньги забирает игрок 1, если карта старшая, и игрок 2, если карта младшая. Во втором случае деньги забирает игрок 1.

(А) Нарисуйте дерево игры.

(В) Покажите, что в этой игре нет совершенного байесовского равновесия в чистых стратегиях.

(С) Найдите равновесие в смешанных стратегиях. Как часто игрок 1 будет блефовать, т. е. повышать, имея младшую карту? Как часто игрок 2 будет уравнивать?

(D) Для каждого из игроков определите, согласится ли он добровольно участвовать в такой игре. Каким должен быть возмещающий платеж одного другому, чтобы оба не отказались играть.

А.56 В играх, рассматривавшихся в задаче А.45 (см. Рис. А.26 на с. 1073) найдите и сравните множества совершенных байесовских равновесий в смешанных стратегиях. С чем связано различие двух множеств? В какой из двух игр, по вашему мнению, есть «лишние» равновесия?

А.57 Используя концепцию совершенного байесовского равновесия (в смешанных стратегиях), проанализируйте игру, дерево которой изображено на Рис. А.34.

А.7 Игры и Парето-оптимальность

Рассмотрим теперь важную для экономических приложений концепцию Парето-оптимальности в контексте теории игр.

Пусть задана игра с полной информацией в нормальной форме:

$$G = \langle I, (X_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle.$$

Напомним определение Парето-оптимальности.

Определение А.13:

Исход $\mathbf{y} \in X$ доминирует по Парето исход $\mathbf{x} \in X$ (является Парето-улучшением по сравнению с $\mathbf{x}$), если в нем каждый игрок получает выигрыш не меньше, чем в исходе $\mathbf{x}$, а хотя бы один из игроков получает выигрыш строго больше, чем в $\mathbf{x}$, т. е.

$$u_i(\mathbf{y}) \geqslant u_i(\mathbf{x}) \text{ для всех } i \in I$$

и

$$u_j(\mathbf{y}) > u_j(\mathbf{x}) \text{ для некоторого } j \in I.$$

Исход $\hat{\mathbf{x}} \in X$ называется Парето-оптимальным, если не существует другого исхода $\tilde{\mathbf{x}} \in X$, такого что он доминирует $\hat{\mathbf{x}}$ по Парето.

Множество всех Парето-оптимальных точек называют границей Парето. ◀

Рассмотренные выше решения (равновесия) не являются в общем случае Парето-оптимальными, что, в частности, показывает следующая игра.

Игра 16 («Игра Ауманна»[41]):

Перед двумя участниками игры стоит следующий выбор. Каждый может потребовать, чтобы организатор игры дал сто долларов другому игроку, либо потребовать, чтобы он дал один доллар ему самому. Участники одновременно и независимо делают выбор, после чего организатор игры исполняет их требования.

Описанная игра представлена в Таблице А.21.

[41] Эта игра представляет собой вариант известнейшей игры «Дилемма заключенных». Сюжет «Дилеммы заключенных» следующий. Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Прокурор предложил каждому следующую сделку. Если он сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а не сознавшийся — 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным также известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 3 года. (Цифры у разных авторов разные.)

Таблица A.21. *Игра Ауманна*

		Игрок 2	
		\$100 другому	\$1 ему
Игрок 1	\$100 другому	100 100	101 0
	\$1 ему	0 101	0 0

В этой игре у каждого игрока существует строго доминирующая стратегия — потребовать один доллар себе. Соответствующий исход является и равновесием в доминирующих стратегиях, и равновесием Нэша. Примечательным является то, что этот исход является единственным не Парето-оптимальным исходом. Исход, в котором оба игрока требуют отдать сто долларов другому, строго доминирует его по Парето.

A.7.1 Сотрудничество в повторяющихся играх

Ситуации, аналогичные той, которая описана в игре Ауманна, являются примерами фиаско координации. Одно из объяснений этого фиаско состоит в том, что в игре Ауманна игроки только один раз должны сделать выбор. В ситуациях, когда игра повторяется и игроки помнят всю все принятые ими ранее решения (предысторию игры), между ними вполне может возникнуть сотрудничество.

Чтобы проанализировать эту догадку формально, введем понятие повторяющейся игры. Под повторяющейся игрой понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической). Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры. Рис. A.35 показывает, как это сделать на примере игры Ауманна.

Аналогично, чтобы получить дерево n раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине $n-1$ раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры. Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется. В отличие от обычных игр в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры. Общий

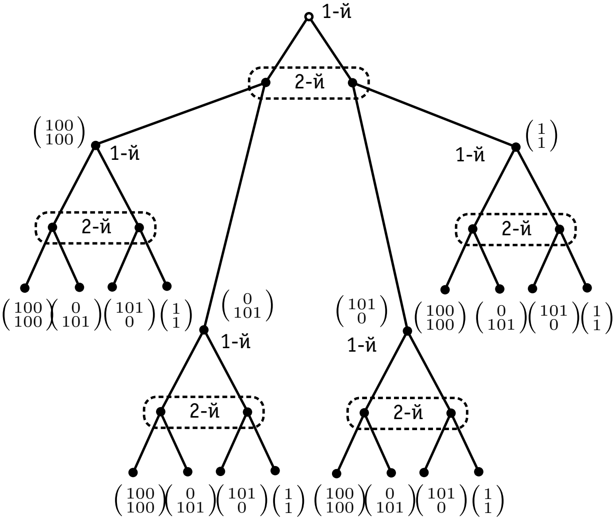


Рис. А.35. *Дважды повторяющаяся игра Ауманна*

выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории игры. Таким образом, если u_{ij} — выигрыш, полученный i-м игроком в результате j-го повторения игры (на j-м раунде), то общий выигрыш в n раз повторяющейся игре составит

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}.$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем. Другими словами, пусть $\delta_{ij} \in (0, 1)$ — дисконтирующий множитель i-го игрока для j-го раунда. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij})^{j-1} u_{ij}.$$

Будем считать в дальнейшем, что $\delta_{ij} = \delta_i$, т. е. дисконтирующий множитель не зависит от раунда.

Как нетрудно заметить, повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, поэтому совершенное в подыграх равновесие в них можно находить обратной индукцией.

Проанализируем повторяющуюся игру Ауманна. Используя обратную индукцию, рассмотрим последний раунд игры. Заметим, что все, что происходило в предыдущих раундах, влияет только на выигрыши, но не на множества стратегий. Однако влияние на выигрыши сводится только к тому, что ко всем выигрышам данного раунда добавляется одна и та же константа, определяемая предысторией игры. Таким образом, при анализе можно не принимать во внимание выигрыши предыдущих раундов. Тем самым все сводится к анализу однократно повторенной игры Ауманна, равновесие которой нам известно: каждый игрок попросит один доллар себе.

Далее рассмотрим игры предпоследнего раунда, которые становятся играми последнего раунда в редуцированной игре. «Свертывание» последнего раунда добавляет к выигрышам предпоследнего раунда одну и ту же константу (в нашем случае это 1 для обоих игроков). Предыстория игры тоже влияет только тем, что добавляет константу к выигрышам. Таким образом, опять с точностью до константы получаем исходную игру. Продолжая редуцировать игру, мы на всех раундах получим одно и то же решение, совпадающее с равновесием исходной игры. Таким образом, равновесная траектория будет представлять собой n раз повторенное равновесие обычной игры Ауманна. Догадка о возникновении сотрудничества в повторяющейся игре в данном случае не подтверждается.

Можно сформулировать общую теорему для повторяющихся игр.

Теорема А.10:

Пусть в игре G с совершенной информацией (и конечным числом ходов) существует единственное совершенное в подыграх равновесие. Тогда в повторенной n раз игре G (G^n) существует единственное совершенное в подыграх равновесие, причем равновесные стратегии в игре G^n являются повторениями равновесных стратегий в игре G. ┘

Мы не будем приводить формальное доказательство. Оно очевидным образом конструируется по схеме, которую мы применили, анализируя повторяющуюся игру Ауманна.

То, что гипотеза о возникновении сотрудничества не подтверждается, может быть связано с тем, что игроки знают, что игра закончится на n-м ходу. И в самом деле, если бы игра Ауманна повторялась бесконечное число раз, то сотрудничество между игроками могло бы иметь место.

Мы ранее не вводили в рассмотрение бесконечные игры, однако их основные элементы можно определить по аналогии с конечными играми. Выигрыш в бесконечно повторяющейся игре рассчитывается по формуле[42]

$$u_i = \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} u_{ij}.$$

В отличие от игры с конечным числом повторений в бесконечно повторяющейся игре Ауманна возможно возникновение сотрудничества. Рассмотрим стратегии следующего вида:

- сотрудничать, если на предыдущих ходах другой игрок сотрудничал (в том числе в первом раунде тоже сотрудничать);
- не сотрудничать, если хотя бы в одном из предыдущих раундов другой игрок взял один доллар себе.

Такую стратегию называют триггерной. Если дисконтирующие множители δ_1, δ_2 достаточно высоки, то такие стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие.

Рассмотрим, при каких условиях игроку выгодно придерживаться триггерной стратегии, если его партнер также ее придерживается.

Поскольку после того как игрок взял один доллар себе, его партнер во всей дальнейшей игре будет поступать таким же образом, то отказавшемуся от сотрудничества игроку будет выгодно брать один доллар себе во всей дальнейшей игре. Таким образом, если отказ от сотрудничества произойдет в k-м раунде, то игрок не может получить больше, чем

$$\sum_{j=1}^{k-1} (\delta_i)^{j-1} \cdot 100 + (\delta_i)^{k-1} \cdot 101 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} \cdot 1.$$

Если же ни один из игроков не будет отклоняться от триггерной стратегии, то их выигрыши составят

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} \cdot 100.$$

Значит, чтобы отклоняться было невыгодно, должно быть выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} \cdot 100 \geqslant \sum_{j=1}^{k-1} (\delta_i)^{j-1} \cdot 100 + (\delta_i)^{k-1} \cdot 101 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} \cdot 1$$

[42] Так как $\delta_i \in (0,1)$, то при ограниченности выигрышей в исходной игре ряд сходится.

или

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} \cdot 99 \geqslant (\delta_i)^{k-1} \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{99\delta_i}{1-\delta_i} \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 99\delta_i \geqslant 1-\delta_i \;\Leftrightarrow\; \delta_i \geqslant \frac{1}{100}.$$

Таким образом, если дисконтирующие множители малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для игроков и им будет выгодно отклониться от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

Следует отметить, однако, что рассмотренное равновесие будет не единственным совершенным в подыграх равновесием в бесконечно повторяющейся игре Ауманна. На самом деле в бесконечно повторяющихся играх практически всегда равновесий бесконечно много. В частности, стратегии, согласно которым независимо от предыстории игроки всегда берут один доллар себе, тоже составляют равновесие.

Существует теорема (в англоязычной литературе она известна под названием *Folk Theorem*, что на русский можно перевести как «Народная теорема»), утверждающая, что в бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1-\delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и, кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины. В разных вариантах теоремы пороговая величина разная: это либо выигрыш в некотором равновесии Нэша исходной игры, либо минимаксный (резервный) выигрыш (т. е. для каждого игрока максимальный выигрыш, который от может себе гарантировать вне зависимости от поведения других игроков)[43].

Эту теорему можно интерпретировать как утверждение о том, что в бесконечно повторяющейся игре «почти все возможно». Кроме того, из теоремы можно сделать вывод, что в бесконечно повторяющейся игре совершенных в подыграх равновесий бывает, как правило, «слишком много». Понятно, что это снижает ценность полученного выше результата о возникновении сотрудничества в игре Ауманна.

[43] См. J. W. Friedman. A Non-cooperative Equilibrium for Supergames, *Review of Economic Studies* **38** (1971): 1–12.

A.7.2 Игры торга

Теперь мы рассмотрим важный класс игр, моделирующих достижение соглашений между экономическими субъектами, — так называемые игры торга. В таких играх в условиях полной информации решения всегда Парето-оптимальны.

Игра 17 («Торг»[44]):
Два игрока (A и B) делят между собой некоторую сумму денег (или любое бесконечно делимое благо). Будем считать, что общее количество равно денег 1. Дележ можно задать долей $x \in [0, 1]$, достающейся игроку A. Если игрок A получает x, то игрок B получает $1 - x$. Торг происходит в несколько раундов. На каждом раунде один из игроков предлагает дележ x_j, где j — номер раунда. Другой игрок может либо отклонить, либо принять этот дележ. Если дележ принимается, то торг заканчивается и игроки получают свои доли $(x_j, 1 - x_j)$. Если дележ отклоняется, то настает очередь другого игрока предложить свой дележ. Игрок A предлагает дележ в раундах с нечетными номерами, а игрок B — в раундах с четными номерами. Если за n раундов игроки не договорятся, то игра заканчивается и каждый игрок получает 0.

Предполагается, что игроки предпочитают получить деньги как можно раньше, поэтому полученная сумма денег умножается на дисконтирующий множитель, т. е. если игроки договорятся на j-м раунде, то их выигрыши составят $\delta_A^{j-1} x_j$ и $\delta_B^{j-1}(1 - x_j)$ соответственно, где $\delta_A, \delta_B \in (0, 1)$ — дисконтирующие множители. ⮘

Рассмотрим эту игру при $n = 3$. На Рис. A.36 показано дерево игры. Проведем анализ с использованием обратной индукции. В последнем раунде игрок B заведомо примет предложение игрока A, если $\delta_B^2(1 - x_3) > 0$, т. е. если $x_3 < 1$. Если $x_3 = 1$, то игроку B все равно, принять или отклонить предложение. Игроку A выгодно назвать x_3 как можно бóльшим. Значит, в равновесной стратегии не может быть $x_3 < 1$, ведь игрок A тогда мог бы немного увеличить x_3, не изменив выбора игрока B, и увеличил бы при этом свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_3 = 1$. Чтобы при этом действительно было равновесие, игрок B должен в своей стратегии быть «благожелательным» по отношению к A, т. е. принять его предложение; в противном случае игрок A мог бы предложить x_3 меньше 1 и увеличить при этом свой выигрыш.

[44] A. Rubinstein. Perfect Equilibrium in a Bargaining Model, *Econometrica* **50** (1982): 97–109.

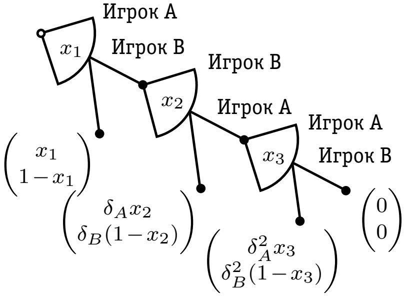


Рис. A.36. *Торг, три раунда*

Анализ третьего раунда показывает, что игрок A должен будет предложить $x_3 = 1$, а игрок B должен будет принять этот дележ. Мы можем теперь «свернуть» игру, заменив третий раунд на конечную вершину с выигрышами δ_A^2 и 0.

Во втором раунде игрок A выбирает между δ_A^2 (если отклоняет предложение) и $\delta_A x_2$ (если принимает). Таким образом, если $x_2 > \delta_A$, то он примет предложенный дележ, а если $x_2 < \delta_A$, то отклонит. При $x_2 = \delta_A$ игроку A все равно, какой выбор сделать. Игрок B предпочтет получить выигрыш $\delta_B(1 - x_2)$, а не 0, поэтому он не станет предлагать $x_2 < \delta_A$. С другой стороны любой дележ $x_2 > \delta_A$ не является равновесным, поскольку игрок B в этом случае может уменьшить x_2, не меняя выбора игрока A, и, тем самым увеличить свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_2 = \delta_A$. Чтобы этот выбор был равновесным, требуется, чтобы в равновесии игрок A принял дележ $x_2 = \delta_A$, несмотря на то, что отказ от этого дележа должен принести ему такой же выигрыш.

Остается торг, состоящий из одного раунда, в котором игроки получат δ_A^2 и $\delta_B(1 - \delta_A)$, если не придут к соглашению (см. Рис. A.37). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что уже в первом раунде игроки придут к соглашению: игрок B примет дележ $x_1 = 1 - \delta_B(1 - \delta_A)$, предложенный игроком A. Выигрыши при этом составят $1 - \delta_B(1 - \delta_A)$ и $\delta_B(1 - \delta_A)$.

О торге в условиях полной информации можно сделать два замечания:

- *торг заканчивается в первом раунде*;
- *равновесный исход Парето-оптимален.*

Рис. A.38 показывает графический способ нахождения равновесия в игре «Торг» при $n = 3$. На этом графике видно, как изменяется

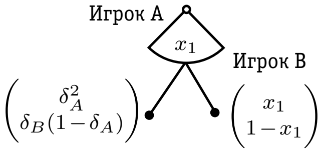


Рис. А.37. *Свернутая игра «Торг», первый раунд*

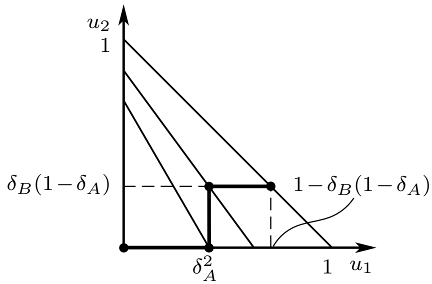


Рис. А.38. *Равновесие в игре «Торг»*

граница Парето от раунда к раунду, сжимаясь в сторону начала координат из-за дисконтирования. Процесс нахождения решения изображен ломаной, выходящей из начала координат (показана жирной линией).

Задачи

А.58 Постройте по своему имени и фамилии игру, как это описано в задаче А.21 на с. 1043. Найдите в этой игре границу Парето. Есть ли среди равновесий Нэша Парето-оптимальные?

А.59 Объясните, почему в антагонистической игре (игре, в которой сумма выигрышей игроков — постоянная величина) любой исход является Парето-оптимальным.

А.60 Объясните, в чем состоит аналогия между аукционом, в котором игрок платит названную им цену, и игрой Ауманна (дилеммой заключенных). Представьте аукцион первой цены с двумя участниками как игру и сравните множество равновесий Нэша с границей Парето.

A.61 Рассчитайте общие выигрыши (в каждой из конечных вершин) в повторяющейся дважды игре Ауманна, изображенной на Рис. A.35, считая, что дисконтирующие множители обоих игроков равны 1/2.

A.62 Определите при каких значениях дисконтирующих множителей пара стратегий следующего вида[45] будет совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре Ауманна: «В первом раунде сотрудничать. В остальных раундах поступать так же, как другой игрок в предыдущем раунде».

A.63 Найдите совершенное в подыграх равновесие в бесконечно продолжающемся торге. Решение может опираться на тот факт, что через каждые два раунда подыгра, начинающаяся с текущей вершины, повторяет исходную игру с точностью до дисконтирования. Таким образом, естественно искать стационарное равновесие. Найдите такое равновесие и покажите, что оно является совершенным в подыграх равновесием. Будет ли это равновесие оптимальным по Парето?

[45] По-английски эту стратегию называют *tit-for-tat*, что может означать как «око за око», так и «услуга за услугу», а если обобщенно, то «платить той же монетой».

Приложение

Математическое приложение

B

В этом приложении приведены сведения из нескольких разделов математики, которые используются при изложении основного материала или могут быть использованы при решении задач. С целью упростить их использование, мы не стремимся сформулировать соответствующие формальные утверждения в максимально общей форме. Здесь приводятся также ссылки на публикации, в которых могут быть найдены их доказательства (и возможные обобщения).?? переделать

B.1 Основные обозначения

$\Rightarrow$	логическое следование (импликация)
$\Leftrightarrow$	логическая эквивалентность (равносильность)
$\forall$	«для всех»
$\exists$	«существует»
$\nexists$	«не существует»
$\neg$	логическое отрицание
$:$	«такой что»
$I(C)$	индикатор условия C; $I(C) = 1$, если C истинно и 0 иначе
$x \in X$	x принадлежит X (x является элементом множества X)
$x \notin X$	x не принадлежит X
$X \subset Y$	Y включает X (X является подмножеством множества Y)

$\{ x \in X \mid C \}$	множество всех элементов множества X, удовлетворяющих условию C
$\varnothing$	пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента)
$X \cup Y$	объединение множеств X и Y (множество элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств)
$\bigcup_{i\in I} X_i$	объединение множеств X_i по индексу $i \in I$
$X \cap Y$	пересечение множеств X и Y (множество общих элементов)
$\bigcap_{i\in I} X_i$	пересечение множеств X_i по индексу $i \in I$
$X \setminus Y$	теоретико-множественная разность множеств X и Y (множество элементов X, которые не принадлежат Y)
$X \times Y$	декартово произведение множеств X и Y, т. е. множество упорядоченных пар $\{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$
$\bigtimes_{i\in I} X_i$	декартово произведение множеств X_i по индексу $i \in I$
$X + Y$	(арифметическая) сумма множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$, т. е. множество всех сумм $\{ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y \}$
$\sum_{i\in I} X_i$	сумма множеств $X_i \subset \mathbb{R}^n$ по индексу $i \in I$, т. е. множество $\left\{ \sum_{i\in I} \mathbf{x}_i \;\middle|\; \mathbf{x}_i \in X_i \text{ для всех } i \in I \right\}$
$\mathbf{x} + Y$	сумма множества Y и вектора $\mathbf{x}$, т. е. множество всех сумм $\{ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in Y \}$
$\operatorname{int} X$	внутренность множества X
$f(\cdot)$	функция (отображение)
$f^{-1}(\cdot)$	функция, обратная к функции $f(\cdot)$
$f\colon X \mapsto Y$	функция (однозначное отображение из X в Y)
$F\colon X \rightrightarrows Y$	многозначное отображение из X в Y

$\mathbb{R}$	множество вещественных (действительных) чисел
$\lfloor x \rfloor$	целая часть действительного числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x)
$[a, b]$	замкнутый интервал $\mathbb{R}$ с концами a и b
$[a, b)$	полуинтервал, интервал $[a, b]$ без точки b
$(a, b]$	полуинтервал, интервал $[a, b]$ без точки a
(a, b)	открытый интервал $\mathbb{R}$ с концами a и b
$\mathbb{R}^n = \bigtimes_{i=1}^n \mathbb{R}$	n-мерное вещественное пространство
$\mathbb{R}^n_+$	неотрицательная часть множества $\mathbb{R}^n$ — множество элементов $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами
$\mathbb{R}^n_{++}$	положительная часть множества $\mathbb{R}^n$ — множество элементов $\mathbb{R}^n$ с положительными компонентами
$\mathbf{x} = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$	точка (вектор) n-мерного пространства
$\mathbf{0}$	вектор, состоящий из нулей
$\mathbb{1}$	вектор, состоящий из единиц
$\mathbf{e}^j$	j-й орт, т. е. вектор, у которого j-й элемент равен единице, а все остальные элементы — нулю
$\mathbf{x}_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$	вектор $(n-1)$-мерного пространства, получаемый удалением из вектора $\mathbf{x}$ i-го элемента
$\mathbf{xy}$	скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, $\mathbf{xy} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
$\\|\mathbf{x}\\|$	евклидова норма вектора $\mathbf{x}$, $\\|\mathbf{x}\\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
$V_\varepsilon(\mathbf{x})$	ε-окрестность точки $\mathbf{x}$, т. е. (для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) множество $\{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\\| < \varepsilon \,\}$ (открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса ε с центром в точке $\mathbf{x}$)

$V_\varepsilon(X)$	ε-окрестность множества X, т. е. множество $\{\,\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} \in X \colon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\,\}$ (арифметическая сумма множества X и ε-окрестности нуля, т. е. $X + V_\varepsilon(\mathbf{0})$)
$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$	вектор $\mathbf{x}$ поэлементно не меньше вектора $\mathbf{y}$ ($x_i \geqslant y_i$ для всех i)
$\mathbf{x} \geqslant\neq \mathbf{y}$	вектор $\mathbf{x}$ поэлементно не меньше вектора $\mathbf{x}$, но не равен ему ($x_i \geqslant y_i$ для всех i, и существует i_0, такой что $x_{i_0} > y_{i_0}$)
$\mathbf{x} > \mathbf{y}$	вектор $\mathbf{x}$ поэлементно больше вектора $\mathbf{y}$ ($x_i > y_i$ для всех i)
$\{x_i\}$	последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$
$\{\mathbf{x}_i\}$	последовательность векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$
$\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_i$	предел последовательности $\{\mathbf{x}_i\}$
$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$	предел функции $f(\cdot)$ при $\mathbf{x}$ стремящемся к $\mathbf{x}_0$
$f(\mathbf{x}) \to y_0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$	предел $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}$ стремящемся к $\mathbf{x}_0$ равен y_0
$\inf X$	инфимум, точная нижняя граница множества $X \subset \mathbb{R}$
$\sup X$	супремум, точная верхняя граница множества $X \subset \mathbb{R}$
$\mathbf{A}^\mathsf{T}$	транспонированная матрица $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	матрица, обратная к матрице $\mathbf{A}$
$\|\mathbf{A}\|$	определитель матрицы $\mathbf{A}$
$f'(\cdot)$	первая производная функции $f(\cdot)$
$f''(\cdot)$	вторая производная функции $f(\cdot)$
$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$	частная производная функции $f(\cdot)$ по переменной x_i
$\nabla f(\cdot)$	градиент функции $f(\cdot)$

$\nabla^2 f(\cdot)$	матрица Гессе (матрица вторых частных производных) функции $f(\cdot)$
$\tilde{x} \sim F$	случайная величина $\tilde{x}$ имеет распределение F
$\Pr(A)$	вероятность события A
$\Pr(A \mid B)$	условная вероятность события A относительно B
E	оператор математического ожидания
$\mathsf{E}(\tilde{x} \mid \tilde{y})$	условное математического ожидание $\tilde{x}$ относительно $\tilde{y}$
Var	оператор дисперсии, $\mathsf{Var}\,\tilde{x} = \mathsf{E}[(\tilde{x} - \mathsf{E}\,\tilde{x})^2]$
$\mathsf{Cov}(\tilde{x}, \tilde{y})$	ковариация $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, т. е. $\mathsf{E}[(\tilde{x} - \mathsf{E}\,\tilde{x})(\tilde{y} - \mathsf{E}\,\tilde{y})]$

В.2 Элементы топологии n-мерного вещественного пространства

Будем рассматривать подмножества в $\mathbb{R}^n$ ($X \subset \mathbb{R}^n$).

Определение В.1:

Евклидовой нормой вектора (точки) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ называют величину

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

◀

Евклидова норма определяет расстояние между двумя точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (метрику) по формуле $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. Данная метрика определяет структуру топологического пространства[1], т. е. совокупность открытых (замкнутых) множеств в $\mathbb{R}^n$.

Определение В.2:

ε-окрестностью точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ называется множество точек, которые находятся от точки $\mathbf{x}$ в пределах расстояния $\varepsilon > 0$:

$$V_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon \,\}.$$

◀

[1] Заметим, что эта топология не зависит от выбора нормы (метрики) в $\mathbb{R}^n$.

(Под ε-окрестностью можно понимать также шар, задаваемый нестрогим неравенством $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$. Как правило, это не изменяет характер соответствующих утверждений.)

Определение В.3:

Точка $\mathbf{x} \in X$ называется внутренней точкой $X \subset \mathbb{R}^n$, если найдется некоторая ε-окрестность точки $\mathbf{x}$, которая полностью лежит в X ($V_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset X$). ◀

Определение В.4:

Множество всех внутренних точек множества X называется его внутренностью и обозначается $\operatorname{int} X$. ◀

Определение В.5:

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если любая его точка является внутренней. ◀

Пустое множество $\varnothing$ принято считать открытым (так как множество не содержит элементов, то любой элемент может обладать каким угодно свойством).

Теорема В.1:

⁎ Пространство $\mathbb{R}^n$ является открытым множеством.

⁎ Множества $(a, b) \in \mathbb{R}$ являются открытыми ┘

Теорема В.2:

⁎ Объединение любого (возможно, бесконечного) семейства открытых множеств является открытым множеством.

⁎ Пересечение любого конечного множества открытых множеств является открытым множеством. ┘

Определение В.6:

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus X$ является открытым. ◀

Теорема В.3:

⁎ Пустое множество $\varnothing$ является замкнутым множеством.

⁎ Пространство $\mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством. ┘

Теорема В.4:

⁎ Объединение любого конечного множества замкнутых множеств является замкнутым множеством.

⁎ Пересечение любого (возможно, бесконечного) семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством. ┘

Определение B.7:

Точка $\mathbf{x}$ называется граничной точкой множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если любая ε-окрестность точки $\mathbf{x}$ содержит как точки, принадлежащие X, так и точки, не принадлежащие X. ◀

Определение B.8:

Множество граничных точек множества X называют его границей.◀

Теорема B.5:

Множество X является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит свою границу. ┘

Теорема B.6:

Множество X является замкнутым если и только если предел любой последовательности точек, все члены которой принадлежат X, также принадлежит X. ┘

Определение B.9:

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если оно полностью содержится внутри некоторой ε-окрестности. То есть X является ограниченным, если найдутся точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$, такие что $X \subset V_\varepsilon(\mathbf{x})$. ◀

Теорема B.7:

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченным тогда и только тогда, когда каждая последовательность его элементов содержит сходящуюся подпоследовательность. ┘

Определение B.10:

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется компактным (компактом), если оно замкнуто и ограничено. ◀

Теорема B.8:

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является компактным в том и только том случае, если каждая последовательность точек X содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит X. ┘

Теорема B.9:

Множества $[a, b] \in \mathbb{R}$ являются компактными. ┘

Теорема B.10:

Компактное множество $X \subset \mathbb{R}$ содержит свою точную верхнюю и точную нижнюю границу. ┘

В.3 Геометрия множеств *n*-мерного вещественного пространства

Будем рассматривать подмножества в $\mathbb{R}^n$ $(X \subset \mathbb{R}^n)$.

Определение В.11:
Вектор $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$ называется выпуклой комбинацией векторов $\mathbf{x}_i \in X$ $(i = 1, \ldots, n)$, если $\alpha_i \geqslant 0$ для всех i и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. ◀

Определение В.12:
Множество X называется выпуклым, если из того, что $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ следует, что

$$\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in X \ \text{ для всякого } \alpha \in [0, 1]. \quad ◀$$

Теорема В.11:
Пересечение любого (возможно, бесконечного) семейства выпуклых множеств является выпуклым. ┘

Теорема В.12:
Сумма выпуклых множеств является выпуклым множеством. ┘

Определение В.13:
Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется подпространством $\mathbb{R}^n$, если $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in X$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. ◀

Определение В.14:
Множество X называется гиперплоскостью, если найдутся вектор коэффициентов $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbf{p} \neq \mathbf{0})$ и число c, такие что $X = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{px} = c \,\}$. ◀

Каждая гиперплоскость делит множество (пространство) $\mathbb{R}^n$ на два полупространства.

Определение В.15:
Множество X называется полупространством, если оно представимо в виде $X = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{xp} \leqslant c \,\}$, где $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ — вектор коэффициентов, c — число. ◀

Теорема В.13:
Полупространство является замкнутым выпуклым множеством. ┘

Теорема В.14:
Замкнутое выпуклое множество совпадает с пересечением всех содержащих его подпространств. ┘

Определение B.16:

Множество $\mathrm{Co}(X)$ называется выпуклой оболочкой множества X, если оно является пересечением всех полупространств, содержащих X. ◀

Теорема B.15:

Множество выпукло тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей выпуклой оболочкой. ┘

Теорема B.16:

Выпуклая оболочка множества X, $\mathrm{Co}(X)$, совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций элементов X. ┘

Определение B.17:

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Гиперплоскость, задаваемая уравнением $\mathbf{px} = c$ ($\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, c — число), называется опорной гиперплоскостью множества X, если (i) соответствующее полупространство, задаваемое неравенством $\mathbf{px} \leqslant c$, содержит X ($\mathbf{px} \leqslant c$ для всех $\mathbf{x} \in X$), и (ii) эта гиперплоскость имеет общие точки с множеством X ($\exists \bar{\mathbf{x}} \in X : \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = c$). ◀

Определение B.18:

Множество X называется конусом, если из того, что $\mathbf{x} \in X$, следует, что $\alpha\mathbf{x} \in X$ при всех $\alpha > 0$. ◀

Теорема B.17:

Множество X является выпуклым конусом тогда и только тогда, когда из $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ следует, что

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in X \quad \text{для всех } \alpha, \beta > 0.$$ ┘

Теорема B.18:

Конус X является выпуклым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет свойству аддитивности, т. е. когда из $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ следует, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in X$. ┘

B.4 Вогнутые и квазивогнутые функции

Пусть X — подмножество $\mathbb{R}^n$. В этом параграфе мы будем предполагать, что X — выпуклое множество.

Определение В.19:

Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ называется вогнутой, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \geqslant \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}).$$

Функция $f(\cdot)$ называется выпуклой, если $-f(\cdot)$ вогнута. ◀

Определение В.20:

Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ называется строго вогнутой, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, таких что $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и $\alpha \in (0,1)$ выполнено

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) > \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}).$$

Функция $f(\cdot)$ называется строго выпуклой, если $-f(\cdot)$ строго вогнута. ◀

Заметим, что строго вогнутая функция является вогнутой. Линейная функция $\mathbf{px}$ является примером вогнутой, но не строго вогнутой функции.

Теорема В.19:

Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ является вогнутой тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$, таких что $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$, выполнено

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(\mathbf{x}_j).$$

┘

Данное свойство (как и определение вогнутой функции) является частным случаем неравенства Йенсена: $f(\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}) \geqslant \mathsf{E}\,f(\tilde{\mathbf{x}})$ (для таких случайных величин $\tilde{\mathbf{x}}$, у которых соответствующие математические ожидания существуют, в частности, для дискретных случайных величин).

Теорема В.20:

Пусть $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$ — вогнутая функция, $\Delta > 0$ и $x, y, x+\Delta, y+\Delta \in X$. Тогда при $x > y$ выполнено $f(x+\Delta) - f(x) \geqslant f(y+\Delta) - f(y)$. ┘

Определение В.21:

Верхним лебеговым множеством (*superlevel set*) функции $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$, соответствующим уровню $t \in \mathbb{R}$, называется множество $\{\, \mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \geqslant t \,\}$.◀

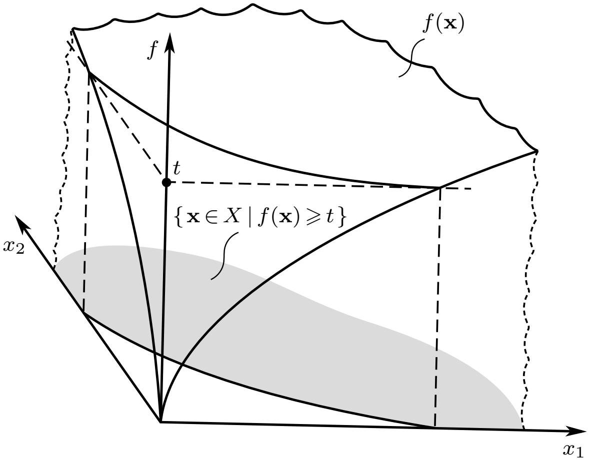


Рис. B.1. *Верхнее лебегово множество вогнутой функции*

Теорема B.21:

Всякое верхнее лебегово множество вогнутой функции выпукло.⌟

Заметим, что это необходимое, но не достаточное условие вогнутости функции. Например, всякое верхнее лебегово множество функции x^3 выпукло, но сама она не вогнута (при $x \geqslant 0$ она строго выпукла, что несовместимо с вогнутостью). Указанное свойство является необходимым и достаточным для квазивогнутых функций, о которых речь ниже.

Определение B.22:

Подграфиком функции $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ называется множество

$$\left\{\, (\mathbf{x}, t) \;\middle|\; \mathbf{x} \in X, t \leqslant f(\mathbf{x}) \,\right\}. \qquad \blacktriangleleft$$

Теорема B.22:

Подграфик функции является выпуклым множеством тогда и только тогда, когда функция вогнута. ⌟

Теорема B.23:

Пусть $f_j\colon X \mapsto \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ — вогнутые функции. Тогда $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(\mathbf{x})$ при $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ — вогнутая функция. В частности, сумма вогнутых функций вогнута.

Пусть $f_j\colon X \mapsto \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$ — строго вогнутые функции. Тогда $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(\mathbf{x})$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geqslant 0$ и $\alpha_j > 0$ хотя бы для одного j, — строго вогнутая функция. В частности, сумма строго вогнутых функций строго вогнута. ┘

Теорема В.24:

Пусть $f_j\colon X \mapsto \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$ — вогнутые функции. Тогда их поточечный минимум $\min_{j=1,\dots,m} f_j(\mathbf{x})$ — вогнутая функция. ┘

Аналогичное свойство верно и в общем случае (не обязательно конечного) семейства вогнутых функций.

Теорема В.25:

Пусть $f\colon X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$ — семейство вогнутых по $\mathbf{x}$ функций, зависящих от параметра $\mathbf{y} \in Y$ (где $Y \subset \mathbb{R}^m$). Тогда их поточечный инфимум $g(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — вогнутая функция с областью определения

$$\left\{ \mathbf{x} \in X \;\middle|\; \inf_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > -\infty \right\}.$$ ┘

Теорема В.26:

Пусть $g\colon X \mapsto \mathbb{R}$ — вогнутая функция, и ее область значений Y является выпуклым множеством, и пусть $h\colon Y \mapsto \mathbb{R}$ — вогнутая неубывающая функция. Тогда суперпозиция этих функций $f(\mathbf{x}) = h(g(\mathbf{x}))$ — вогнутая функция. ┘

Теорема В.27:

Пусть множество X является открытым, а функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема. Эта функция является вогнутой тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ выполнено неравенство

$$f(\mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$ ┘

То есть вогнутая функция лежит (не строго) ниже любой своей касательной.

Теорема В.28:

Пусть множество X является открытым, функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема (т. е. во всех точках X определена ее матрица Гессе $\nabla^2 f(\cdot)$ — матрица вторых частных производных функции $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$). Эта функция является вогнутой тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x} \in X$ ее матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ отрицательно полуопределена. ┘

Теорема B.29:

Пусть множество X является открытым. Если функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и ее матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ отрицательно определена для всех $\mathbf{x} \in X$, то $f(\cdot)$ строго вогнута. ⌟

Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно. Так, функция $f(x) = -x^4$ является строго вогнутой, но $f''(0) = 0$.

Теорема B.30:

Выпуклая (вогнутая) функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна на внутренности ее множества определения $\operatorname{int}(X)$. ⌟

Определение B.23:

Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ называется квазивогнутой, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \geqslant \min(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})).$$

Функция $f(\cdot)$ называется квазивыпуклой, если $-f(\cdot)$ квазивогнута. ◀

Определение B.24:

Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ называется строго квазивогнутой, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, таких что $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и $\alpha \in (0, 1)$ выполнено

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) > \min(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})).$$

Функция $f(\cdot)$ называется строго квазивыпуклой, если $-f(\cdot)$ строго квазивогнута. ◀

Теорема B.31:

Всякая вогнутая функция квазивогнута. ⌟

Теорема B.32:

Всякая строго вогнутая функция строго квазивогнута. ⌟

Теорема B.33:

Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ квазивогнута тогда и только тогда, когда все ее лебеговы множества выпуклы. ⌟

Теорема B.34:

Если $f_j\colon X \mapsto \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ — набор квазивогнутых функций, то множество

$$\left\{\, x \in X \;\middle|\; f_j(x) \geqslant 0 \ \text{ для всех } j = 1, \ldots, m \,\right\}$$

является выпуклым. ⌟

Теорема В.35:

Непрерывная функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$, является квазивогнутой тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из трех условий:

* функция $f(\cdot)$ является неубывающей;
* функция $f(\cdot)$ является невозрастающей;
* существует точка $x^* \in X$, такая что на множестве $X \cap (-\infty, x^*]$ функция $f(\cdot)$ является неубывающей, а на множестве $X \cap [x^*, +\infty)$ — невозрастающей. ⌟

Теорема В.36:

Пусть $g\colon X \mapsto \mathbb{R}$ — квазивогнутая функция с областью значений Y и пусть $h\colon Y \mapsto \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Тогда суперпозиция этих функций $f(\mathbf{x}) = h(g(\mathbf{x}))$ — квазивогнутая функция. ⌟

Теорема В.37:

Пусть множество X является открытым и функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема. Эта функция является квазивогнутой тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, таких что $f(\mathbf{y}) \geqslant f(\mathbf{x})$, выполнено неравенство

$$\nabla f(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geqslant 0.$$ ⌟

Теорема В.38:

Пусть множество X является открытым. Если функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и квазивогнута, то для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, таких что $\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\nabla f(\mathbf{x}) = 0$, выполнено $\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{p} \leqslant 0$.

Как следствие, для всех $\mathbf{x} \in X$, таких что $\nabla f(\mathbf{x}) \neq 0$, матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируемой и квазивогнутой функции является отрицательно полуопределенной на гиперплоскости $\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\nabla f(\mathbf{x}) = 0$. ⌟

Обратное, вообще говоря, неверно, но имеется близкий аналог.

Теорема В.39:

Пусть множество X является открытым. Если функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и если для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, таких что $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\nabla f(\mathbf{x}) = 0$, выполнено $\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{p} < 0$, то функция $f(\cdot)$ является квазивогнутой.

Другими словами, достаточным условием квазивогнутости дважды непрерывно дифференцируемой функции является то, что ее матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ является отрицательно определенной на гиперплоскости $\mathbf{p}^\mathsf{T}\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ при всех $\mathbf{x} \in X$, таких что $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, и отрицательно определенной при $\mathbf{x} \in X$, таких что $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. ⌟

В.5 Теоремы отделимости

Теорема В.40 (об опорной гиперплоскости):

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество и точка $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ является граничной точкой множества X, то найдется вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), такой что

$$\mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqslant 0 \ \text{ для всех } \mathbf{x} \in X.$$

Соответствующая гиперплоскость, задаваемая уравнением $\mathbf{px} = \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}$, проходит через точку $\bar{\mathbf{x}}$ и является опорной гиперплоскостью множества X. ⌟

Теорема В.41:

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ — два непустых выпуклых множества, не имеющие общих точек. Тогда найдутся вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) и число $c \in \mathbb{R}$, такие что выполнены неравенства:

$$\mathbf{px} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant c \ \text{ для всех } \mathbf{x} \in X.$$

и

$$\mathbf{py} = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \leqslant c \ \text{ для всех } \mathbf{y} \in Y.$$

⌟

В этой теореме говорится о существовании гиперплоскости (задаваемой уравнением $\mathbf{px} = c$), которая делит пространство $\mathbb{R}^n$ на два полупространства, в одном из которых лежит множество X, а в другом множество Y. Такую гиперплоскость называют разделяющей гиперплоскостью для множеств X и Y. Следующая теорема усиливает предыдущую и говорит о том, что при дополнительных предположениях разделение множеств будет строгим.

Теорема В.42 (Минковский):

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ — два непустых выпуклых множества, не имеющие общих точек, причем X компактно, а Y замкнуто. Тогда

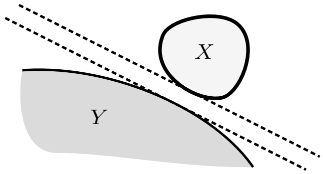


Рис. В.2. *Иллюстрация к теореме Минковского*

найдутся вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) и два числа $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 > c_2$, такие что выполнены неравенства:

$$\mathbf{px} \geqslant c_1 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in X$$

и

$$\mathbf{py} \leqslant c_2 \quad \text{для всех } \mathbf{y} \in Y.$$

Заметим, что если компактное множество в этой теореме является точкой $\mathbf{x}$ (не принадлежащей Y), то удобно использовать следующую формулировку этой теоремы: найдутся вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) и число $c \in \mathbb{R}$, такие что $c < \mathbf{px}$ и

$$\mathbf{py} \leqslant c \quad \text{для всех } \mathbf{y} \in Y.$$

В.6 Опорные функции

Определение В.25:

Функция $f_X : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ называется опорной функцией множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$f_X(\mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{px}.$$

Теорема В.43 (об опорной функции):

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, и пусть в точке $\bar{\mathbf{x}}$ достигается максимум скалярного произведения $\mathbf{px}$ на X: $f_X(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}$. Тогда опорная функция $f_X(\cdot)$ дифференцируема в $\mathbf{p}$ тогда и только тогда, когда $\bar{\mathbf{x}}$ — единственная такая точка. При этом $\nabla f_X(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{x}}$.

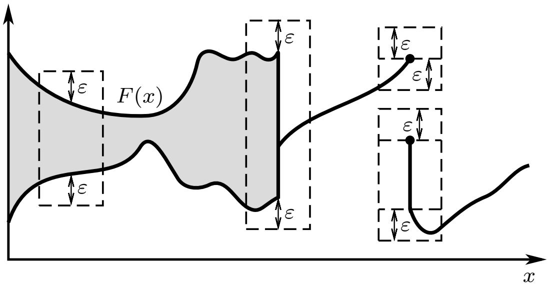


Рис. В.3. *Полунепрерывное сверху отображение*

В.7 Точечно-множественные отображения

Точечно-множественное (многозначное) отображение $F\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, сопоставляет каждой точке $\mathbf{x} \in X$ некоторое подмножество $\mathbb{R}^m$.

Определение В.26:

Отображение $F\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ называется полунепрерывным сверху в точке $\bar{\mathbf{x}} \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что ε-окрестность множества $F(\bar{\mathbf{x}})$ содержит множества $F(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ из δ-окрестности $\bar{\mathbf{x}}$.

Отображение называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке своего множества определения. ◀

В приложениях достаточно просто устанавливается другое свойство отображения — замкнутость его графика, которое при некоторых предположениях эквивалентно полунепрерывности сверху отображения. Под графиком отображения понимается множество

$$\{\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in F(\mathbf{x}) \,\}.$$

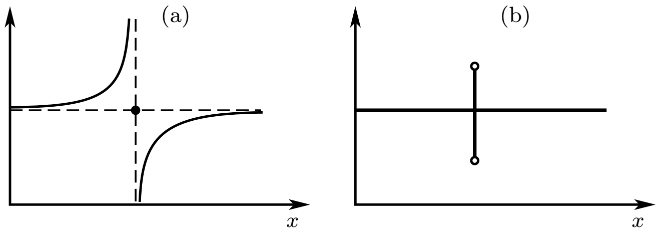


Рис. В.4. *(a) Отображение имеет замкнутый график, но не полунепрерывно сверху. (b) Полунепрерывное сверху отображение с незамкнутым графиком*

Теорема В.44:

Пусть $F\colon X \rightrightarrows Y$ — точечно-множественное отображение, где $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$.

{i} Если Y — компактное множество, а отображение $F(\cdot)$ имеет замкнутый график, то $F(\cdot)$ полунепрерывно сверху.

{ii} Если $F(\mathbf{x})$ — замкнутое множество для каждого $\mathbf{x}$ из X и отображение $F(\cdot)$ полунепрерывно сверху, то $F(\cdot)$ имеет замкнутый график. ⌟

Определение В.27:

Отображение $F\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ называется полунепрерывным снизу в точке $\bar{\mathbf{x}}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x}$ из δ-окрестности $\bar{\mathbf{x}}$ ε-окрестность множеств $F(\mathbf{x})$ содержит $F(\bar{\mathbf{x}})$.

Отображение называется полунепрерывным снизу, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке своего множества определения. ◀

Определение В.28:

Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно сверху и снизу одновременно. ◀

Теорема В.45:

Пусть отображение $F\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ ($X \in \mathbb{R}^n$) является однозначным (т. е. функцией). Оно полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда оно является непрерывной функцией.

То же свойство выполняется для полунепрерывности снизу. ⌟

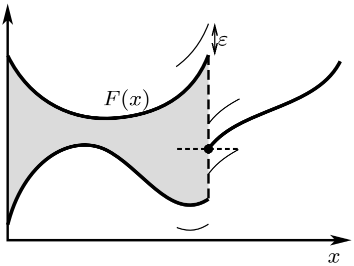


Рис. В.5. *Полунепрерывное снизу отображение*

Теорема В.46:

Отображение, ставящее в соответствие вектору $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$ множество

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \mathbf{px} \leqslant \beta(\mathbf{p}) \right\},$$

где $\beta\colon \mathbb{R}^n_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, такая что $\beta(\mathbf{p}) > 0$ при всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$, является непрерывным. (В частности, это верно для $\beta(\mathbf{p}) = \beta$, где $\beta > 0$.) ⌟

В.8 Теоремы о неподвижной точке

Теорема В.47 (Брауэр):

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и пусть функция $f\colon X \mapsto X$ непрерывна на X. Тогда существует точка $\bar{\mathbf{x}} \in X$, такая что

$$\bar{\mathbf{x}} = f(\bar{\mathbf{x}}).$$ ⌟

Теорема В.48 (Какутани):

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и пусть $F\colon X \rightrightarrows X$ — отображение, которое имеет замкнутый график и такое что $F(\mathbf{x})$ — непустое выпуклое замкнутое множество для любой точки $\mathbf{x} \in X$. Тогда существует точка $\bar{\mathbf{x}} \in X$, такая что

$$\bar{\mathbf{x}} \in F(\bar{\mathbf{x}}).$$ ⌟

Как нетрудно понять, из Теоремы В.44 следует, что условие замкнутости графика отображения $F(\cdot)$ в теореме Какутани можно заменить на условие полунепрерывности сверху этого отображения.

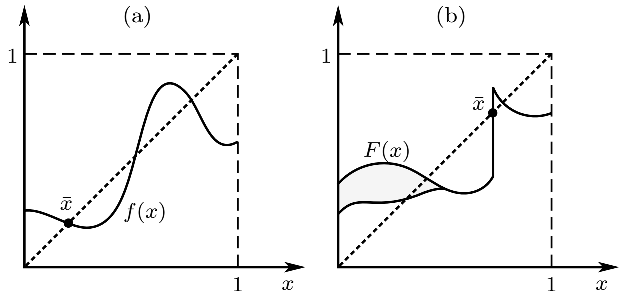


Рис. В.6. *Иллюстрация теорем о неподвижной точке: (a) Брауэра; (b) Какутани (на каждой диаграмме показана только одна из неподвижных точек)*

В.9 Однородные функции

Определение В.29:

Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ — конус, называется положительно однородной степени α, если для любой точки $\mathbf{x} \in X$ и любого положительного числа t выполнено

$$f(t\mathbf{x}) = t^{\alpha} f(\mathbf{x}). \qquad \blacktriangleleft$$

Теорема В.49:

Непрерывно дифференцируемая функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$, определенная на открытом конусе $X \subset \mathbb{R}^n$, является положительно однородной степени α тогда и только тогда, когда для любой точки $\mathbf{x} \in X$ выполняется тождество (формула Эйлера)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \alpha f(\mathbf{x}).$$

┘

Теорема В.50:

Если дифференцируемая функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$, определенная на открытом конусе $X \subset \mathbb{R}^n$, положительно однородна степени α, то ее частные производные $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ положительно однородны степени $\alpha - 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. ┘

В.10 Теорема Юнга

Теорема В.51 (Юнг):
Если $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и для всех $i, j = 1, \ldots, n$ выполняется соотношение

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}.$$ ⌟

Теорема Юнга говорит о том, что матрицы вторых частных производных (матрицы Гессе) $\nabla^2 f(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(\cdot)$ являются симметричными.

В.11 Теорема о неявной функции

Теорема В.52:
Пусть X — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, P — открытое множество в $\mathbb{R}^k$ и пусть $\mathbf{f}\colon X \times P \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция. Пусть в точке $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) \in X \times P$ выполнено $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$ и матрица $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}})$ (матрица первых частных производных $\mathbf{f}$ по $\mathbf{x}$) невырождена. Тогда существует окрестность точки $\bar{\mathbf{p}}$, $V \subset P$ и непрерывно дифференцируемая функция $\mathbf{x}\colon V \mapsto X$, такие что для всех $\mathbf{p} \in V$ выполнено

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = \mathbf{0}.$$ ⌟

В.12 Оптимизация без параметров

Пусть X — множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ — функция. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in X}. \qquad (\mathcal{O})$$

Множество решений этой задачи обозначается

$$\operatorname*{argmax}_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}).$$

Теорема В.53:
Если X — выпуклое множество, а $f(\cdot)$ — квазивогнутая функция, то множество решений задачи ($\mathcal{O}$) является выпуклым. ⌟

Теорема B.54:

Если X — выпуклое множество, а $f(\cdot)$ — строго квазивогнутая (в частности, строго вогнутая) функция, то множество решений задачи ($\mathcal{O}$) состоит не более чем из одной точки. ⌟

Теорема B.55:

Если X — непустое замкнутое ограниченное множество, а $f(\cdot)$ — непрерывная функция, то множество решений задачи ($\mathcal{O}$) непусто, замкнуто и ограничено. ⌟

Утверждение о непустоте оптимального решения из последней теоремы принято называть теоремой Вейерштрасса.

Теорема B.56:

Если $f(\cdot)$ — дифференцируемая функция и точка $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(X)$ является решением задачи ($\mathcal{O}$), то $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. ⌟

Заметим, что для справедливости последнего утверждения достаточно, чтобы функция $f(\cdot)$ была дифференцируема в рассматриваемой точке $\mathbf{x}$.

Условие $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ называется условием первого порядка для решения задачи ($\mathcal{O}$).

Теорема B.57:

Если X — выпуклое множество, а $f(\cdot)$ — дифференцируемая вогнутая функция, то условие первого порядка $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ является не только необходимым, но и достаточным того, чтобы точка $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(X)$ являлась решением задачи ($\mathcal{O}$). ⌟

Заметим, что для квазивогнутой функции (в отличие от вогнутой) из того, что $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, вообще говоря, не следует, что точка $\mathbf{x}$ является максимумом этой функции. Например, производная квазивогнутой функции x^3 в точке $x = 0$ равна нулю, но это не точка максимума.

Теорема B.58:

Если $f(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция и точка $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(X)$ является решением задачи ($\mathcal{O}$), то матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ является отрицательно полуопределенной. ⌟

Отрицательную полуопределенность матрицы Гессе называют условием второго порядка. Теоремы (B.56) и (B.58) утверждают, что условия первого и второго порядка являются необходимыми условиями максимума дважды непрерывно дифференцируемой функции. Заметим, что эти условия, вообще говоря, не являются достаточными, что показывает пример функции $f(x) = x^3$, для которой $f'(0) = 0$ и $f''(0) = 0$, но ноль не является точкой максимума. Заметим, что выполнение в точке $\mathbf{x}$ усиленных условий второго порядка (отрицательная определенность матрицы Гессе в точке $\mathbf{x}$) вместе с условием первого порядка является достаточным, чтобы точка $\mathbf{x}$ была точкой локального максимума. Дополнительное требование, что целевая функция является квазивогнутой, гарантирует, что эти условия являются достаточными условиями глобального максимума.

Теорема В.59:

Пусть X — выпуклое множество, а $f(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая квазивогнутая функция. Тогда если в точке $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(X)$ выполнено $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ и матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ является отрицательно определенной, то $\mathbf{x}$ является решением задачи ($\mathcal{O}$). ⌟

В.13 Оптимизация с параметрами

Рассмотрим следующую параметрическую задачу оптимизации:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \to \max_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \in X(\mathbf{p}). \end{gathered} \qquad (\mathcal{O}_p)$$

Здесь $\mathbf{p} \in P$ — параметр задачи ($P \subset \mathbb{R}^k$), $X(\mathbf{p}) \subset \mathbb{R}^n$ — множество допустимых решений при данных значениях параметров (отображение $X \colon P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$). Целевая функция задачи:

$$f\colon \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in P, \mathbf{x} \in X(\mathbf{p}) \right\} \mapsto \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ множество точек, являющихся решениями этой задачи при данных значениях параметров $\mathbf{p}$. Обозначим через P^* множество параметров, при которых задача имеет решение:

$$P^* = \left\{ \mathbf{p} \in P \mid \mathbf{x}(\mathbf{p}) \neq \varnothing \right\}.$$

Обозначим через $\varphi(\mathbf{p})$ значение данной задачи при $\mathbf{p} \in P^*$.

Заметим, что $\mathbf{x}(\cdot)$ можно рассматривать как отображение: $\mathbf{x} \colon P^* \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Теорема Вейерштрасса (см. Теорему В.55) гарантирует непустоту множества $\mathbf{x}(\mathbf{p})$, если множество допустимых решений $X(\mathbf{p})$ при данном $\mathbf{p}$ является компактным.

Условия полунепрерывности сверху решений и непрерывности значений такой параметрической задачи оптимизации описывает следующая теорема.

Теорема В.60 (Берж):

Предположим, что отображение $X(\cdot)$ и функция $f(\cdot)$ непрерывны в окрестности точки $\bar{\mathbf{p}}$ и $X(\mathbf{p})$ компактно для $\mathbf{p} \in P$ в окрестности этой точки. Тогда отображение $\mathbf{x}(\cdot)$ полунепрерывно сверху в точке $\bar{\mathbf{p}}$, а функция $\varphi(\mathbf{p})$ непрерывна в этой точке. ┘

Так как постоянное отображение $X(\mathbf{p}) = X$ является непрерывным, то следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы Бержа.

Теорема В.61:

Пусть отображение $\mathbf{x}(\cdot)$ ставит в соответствие параметру $\mathbf{p} \in P$ $(P \subset \mathbb{R}^k)$ множество точек, являющихся решениями следующей экстремальной задачи:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \to \max_{\mathbf{x} \in X},$$

где X — компактное множество. Предположим, что функция $f(\cdot)$ непрерывна в окрестности точки $\bar{\mathbf{p}}$. Тогда $\mathbf{x}(\cdot)$ является полунепрерывным сверху в точке $\bar{\mathbf{p}}$, а функция $\varphi(\mathbf{p})$ является непрерывной в этой точке. ┘

Теорема В.62:

Предположим, что отображение $X(\cdot)$ непрерывно в окрестности точки $\bar{\mathbf{p}}$ и $X(\mathbf{p})$ замкнуты для $\mathbf{p} \in P$ в окрестности этой точки. Предположим также, что функция $f(\cdot)$ имеет вид $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{px}$ и что множество решений задачи $(\mathcal{O}_p)$ при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$ компактно. Тогда отображение $\mathbf{x}(\cdot)$ определено в окрестности точки $\bar{\mathbf{p}}$ и полунепрерывно сверху в этой точке, а функция $\varphi(\mathbf{p})$ непрерывна в этой точке. ┘

В.14 Условия дифференцируемости решения задачи оптимизации по параметрам

Условия существования и дифференцируемости оптимального решения задачи $(\mathcal{O}_p)$ с постоянным отображением $X(\cdot)$ могут быть получены на основе следующей теоремы.

Теорема В.63:

Рассмотрим задачу $(\mathcal{O}_p)$ с постоянным отображением $X(\mathbf{p}) = X$. Предположим, что существует пара $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}})$, такая что $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}})$

и $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$. Предположим, кроме того, что функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ дважды непрерывно дифференцируема и строго вогнута по $\mathbf{x}$ в некоторой окрестности точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}})$ и что $|\nabla^2_{\mathbf{xx}} f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}})| \neq 0$.

Тогда решение задачи $(\mathcal{O}_p)$ существует и единственно при любых $\mathbf{p}$ из некоторой окрестности точки $\bar{\mathbf{p}}$, причем функция $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности. ┘

Доказательство: Поскольку $\bar{\mathbf{x}}$ является внутренним решением задачи $(\mathcal{O}_p)$ при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то пара $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}})$ удовлетворяет условиям первого порядка:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) = 0.$$

Условия теоремы гарантируют выполнение всех предположений теоремы о неявной функции относительно соотношения

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0.$$

Поэтому данное соотношение определяет в некоторой окрестности точки $\bar{\mathbf{p}}$ функцию $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$, которая является непрерывно дифференцируемой в этой окрестности.

Из непрерывности $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$ следует, что существует окрестность точки $\bar{\mathbf{p}}$, в которой $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) \in \operatorname{int} X$. Так как $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям первого порядка и функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ строго вогнута по $\mathbf{x}$, то $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$ является (единственным) решением задачи $(\mathcal{O}_p)$ при данном $\mathbf{p}$. ■

B.15 Теорема об огибающей

Рассмотрим следующий частный случай задачи $(\mathcal{O}_p)$. В этой задаче оптимизации с помощью функций

$$g_j\colon \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in P, \mathbf{x} \in X(\mathbf{p}) \right\} \mapsto \mathbb{R}$$

в явном виде задается ряд ограничений в виде равенств:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \to \max_{\mathbf{x} \in X} \\ g_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0,\ j = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{$\mathcal{O}_g$}$$

Пусть, как и выше, P^* — множество параметров, при которых задача имеет решение, $\varphi(\mathbf{p})$ — значение данной задачи при $\mathbf{p} \in P^*$, и пусть $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{p})$ — множители Лагранжа, соответствующие решению.

Для подобных задач в микроэкономическом анализе широко используется класс утверждений (называемых теоремами об огибающей) следующего типа.

Теорема B.64:

Предположим, что выполнено следующее:

* функции $f(\cdot)$ и $g_j(\cdot)$ дифференцируемы;
* решение задачи существует и единственно в окрестности точки $\bar{\mathbf{p}}$, $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ принадлежит внутренности множества X для всех $\mathbf{p}$ из данной окрестности и функция $\mathbf{x}(\cdot)$ дифференцируема в этой точке.

Тогда выполняется соотношение

$$\nabla\varphi(\bar{\mathbf{p}}) = \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}), \bar{\mathbf{p}}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\bar{\mathbf{p}}) \nabla_{\mathbf{p}} g_j(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}), \bar{\mathbf{p}}).$$

B.16 Теоремы Куна—Таккера

Теоремы Куна—Таккера — родовое название для утверждений, представляющих собой обобщение теоремы Лагранжа на случай задач оптимизации с ограничениями в виде как равенств, так и неравенств (характеристики решений экстремальных задач в терминах двойственных переменных). Рассмотрим сначала задачи с ограничениями в виде неравенств, т. е. задачи следующего типа:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}\in X} \\ g_j(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{$\star$}$$

Здесь $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ — целевая функция, $g_r\colon X \mapsto \mathbb{R}$ $(r = 1, \ldots, m)$ — функции ограничений, X — некоторое множество $\mathbb{R}^n$.

Функция

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

называется функцией Лагранжа (лагранжианом) этой задачи, а коэффициенты λ_j — множителями Лагранжа.

Наиболее простые варианты этих теорем формулируются в терминах так называемой седловой точки.

Определение B.30:

Точка $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ называется седловой точкой функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $(f\colon X \times Y \mapsto \mathbb{R})$, если выполняются следующие неравенства:

$$f(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \leqslant f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \leqslant f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \ \text{ для всех } \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{y} \in Y$$ ◄

Теорема В.65 (теорема Джона в терминах седловой точки):

Пусть функции $f(\cdot)$, $g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)$ вогнуты, множество X выпукло и $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи ($\star$), такое что $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$. Тогда существуют множители Лагранжа $\bar{\lambda}_j \geqslant 0$, $j = 0, \ldots, m$, не все равные нулю, такие что пара $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ (при фиксированном $\bar{\lambda}_0$) является седловой точкой функции Лагранжа данной задачи, т. е. для всех $\mathbf{x} \in X$, $\lambda_j \geqslant 0$ выполнено

$$\bar{\lambda}_0 f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}_j g_j(\mathbf{x}) \leqslant \bar{\lambda}_0 f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}_j g_j(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant \bar{\lambda}_0 f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\bar{\mathbf{x}}).$$

┘

Заметим, что это свойство решения задачи можно сформулировать в эквивалентном виде. Если $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи ($\star$), то существуют множители Лагранжа $\bar{\lambda}_j \geqslant 0$, не все равные нулю, такие что $\bar{\mathbf{x}}$ является решением задачи

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \to \max_{\mathbf{x} \in X}$$

и выполняются условия дополняющей нежесткости ($j = 1, \ldots, m$):

$$\bar{\lambda}_j g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

Другими словами, существует задача максимизиции без ограничений, такая что каждое решение данной задачи условной максимизации является одновременно и решением этой задачи максимизации без ограничений (заметим, что в данной ситуации поиск максимума на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ можно заменить поиском максимума на всем пространстве $\mathbb{R}^n$).

Обратное, вообще говоря, верно, только если $\bar{\lambda}_0$ не равно нулю; в этом случае любое решение задачи безусловной максимизации является также решением данной задачи (условной максимизации).

Если множитель Лагранжа целевой функции $\bar{\lambda}_0$ равен нулю, то теорема Джона, как несложно заметить, дает характеристику ограничений задачи (так, для каждого допустимого решения по крайней мере одно ограничение выходит на равенство), а не ее решения (функция Лагранжа в этом случае не зависит от вида целевой функции и поэтому, если решение задачи безусловной максимизации не единственно, множества решений этих задач не совпадают).

Следующее условие, называемое условием Слейтера, гарантирует, что $\bar{\lambda}_0$ не равно нулю. Соответствующую теорему называют теоремой Куна—Таккера.

Условие Слейтера:

Существует $\mathbf{x}^* \in X$, такой что

$$g_j(\mathbf{x}^*) > 0 \text{ для всех } j = 1, \ldots, m.$$

Теорема B.66 (теорема Куна—Таккера в терминах седловой точки):

Пусть выполнены условия теоремы Джона и пусть задача ($\star$) удовлетворяет условию регулярности в форме Слейтера. Тогда в теореме Джона множитель Лагранжа целевой функции $\bar{\lambda}_0 > 0$ (и его без ограничения общности можно выбрать равным единице). Таким образом, существуют множители Лагранжа $\bar{\lambda}_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, такие что пара $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ является седловой точкой функции Лагранжа данной задачи при $\bar{\lambda}_0 = 1$. ⌟

Обратное утверждение носит безусловный характер.

Теорема B.67 (обратная теорема Куна—Таккера):

Пусть функции $f(\cdot)$, $g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)$ вогнуты, множество X выпукло и существуют неотрицательные множители Лагранжа $\bar{\lambda}_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие условиям дополняющей нежесткости, такие что $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$ максимизирует функцию Лагранжа при $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$. Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ является решением задачи ($\star$). ⌟

Поскольку оптимальное решение $\bar{\mathbf{x}}$ максимизирует лагранжиан, то в случае, когда целевая функция и ограничения дифференцируемы, должно выполняться следующее (необходимое) условие максимума:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{0}.$$

Оказывается, что при дифференцируемости это условие является необходимым условием максимума и в ситуации, когда целевая функция и функции ограничений не являются, вообще говоря, вогнутыми. Приведем соответствующие утверждения (теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме).

Теорема B.68 (теорема Джона для дифференцируемых функций):

Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи ($\star$), такое что $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$ и функции $f(\cdot)$, $g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)$ дифференцируемы в точке $\bar{\mathbf{x}}$.

Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 0, \ldots, m$, не все равные нулю, такие что выполнены следующие соотношения (условия Куна—Таккера):

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0 \qquad \text{(условия дополняющей нежесткости).}$$ ┘

Отметим, что условия дополняющей нежесткости можно записать в виде

$$\lambda_j g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \; j = 1, \ldots, m.$$

Из этих условий следует, что если множитель Лагранжа положителен ($\lambda_j > 0$), то соответствующее ограничение в решении задачи (при $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$) выполняется как равенство (т. е. $g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$). Другими словами, это ограничение активно. С другой стороны, в случае, когда $g_j(\bar{\mathbf{x}}) > 0$, то соответствующий множитель Лагранжа λ_j равен нулю.

Если в задаче ($\star$) часть ограничений имеет вид ограничений на неотрицательность некоторых x_i, то для них можно не вводить множители Лагранжа, записав такие ограничения отдельно:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in X} \\ g_j(\mathbf{x}) \geqslant 0, \; j = 1, \ldots, m, \\ x_i \geqslant 0, \; i \in P \subset \{1, \ldots, n\}. \end{gathered} \tag{$\star\star$}$$

Во внутренней точке (в том смысле, что[2] $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$) условия первого порядка для $i \in P$ будут тогда иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} \leqslant 0.$$

Для $i \notin P$ здесь, как и в случае представления задачи в виде ($\star$), производная функции Лагранжа по переменной x_i будет иметь вид $\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0$.

Кроме того, выполнены также условия дополняющей нежесткости

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0, \quad \sum_{i \in P} \frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} \bar{x}_i = 0.$$

Из второго из этих условий следует, что при $\bar{x}_i > 0$ ($i \in P$) выполнено

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0.$$

[2] Но не в том смысле, что $\bar{x}_i > 0$ для $i \in P$.

С другой стороны, если $\partial\mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})/\partial x_i < 0$, то $\bar{x}_i$ должен быть равен нулю.

Другая модификация теоремы связана с наличием в задаче ограничений в виде равенств. Обозначим множество соответствующих индексов через E. Задача принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}\in X} \\ g_j(\mathbf{x}) \geqslant 0, j \in \{1, \dots, m\} \setminus E, \\ g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j \in E, \\ x_i \geqslant 0,\ i \in P \subset \{1, \dots, n\}. \end{gathered} \tag{$\star\star\star$}$$

При этом в теореме Джона модифицируется условие, что все множители Лагранжа неотрицательны — множители Лагранжа λ_j при $j \in E$ могут иметь произвольный знак.

Теорема Джона не гарантирует, что множитель Лагранжа целевой функции λ_0 отличен от нуля. Однако если $\lambda_0 = 0$, то условия Куна—Таккера (как уже было отмечено) характеризуют не решение рассматриваемой задачи, а структуру множества ограничений в точке $\bar{x}$, и теорема не имеет непосредственной связи с интересующей нас задачей максимизации функции $f(\cdot)$, поскольку градиент самой функции $f(\cdot)$ «пропадает» из условий Куна—Таккера. Поэтому важно охарактеризовать условия, которые гарантируют, что $\lambda_0 > 0$. Такие условия называются условиями регулярности

Одно из возможных условий регулярности — это упоминавшееся выше условие Слейтера. Заметим, что строгое неравенство в точке $\mathbf{x}^*$, фигурирующей в условии Слейтера, не обязано выполняться для линейных ограничений. Условие Слейтера может «не работать» в случае невыпуклых задач (см. пример, изображенный на Рис. В.8, где это условие выполнено, но $\lambda_0 = 0$).

В случае, когда целевая функция и ограничения задачи являются дифференцируемыми, простейшее условие регулярности формулируется в терминах градиентов функций-ограничений: градиенты активных ограничений в точке $\bar{\mathbf{x}}$ линейно независимы. (В число рассматриваемых ограничений следует включать и ограничения на неотрицательность.)

Обозначим через A множество индексов тех ограничений, которые в точке оптимума $\bar{\mathbf{x}}$ активны (в том числе индексы всех ограничений в виде равенств), т. е.

$$g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \Leftrightarrow j \in A.$$

Тогда если градиенты ограничений — векторы $\{\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}})\}_{j\in A}$ — линейно независимы[3], то $\lambda_0 > 0$. Это условие называется условием регулярности Куна—Таккера. .

Заметим, что если $\lambda_0 > 0$, то без потери общности можно считать $\lambda_0 = 1$, что обычно и делается. Соответствующую теорему и называют собственно (прямой) теоремой Куна—Таккера.

Теорема В.69 (прямая теорема Куна—Таккера, необходимое условие оптимальности):

Пусть функции $f(\cdot), g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)$ дифференцируемы и пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи ($\star$), такое что $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$ и выполнено условие регулярности Куна—Таккера.

Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, такие что при $\lambda_0 = 1$ выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0.$$

Несложно переформулировать теорему Куна—Таккера для задач ($\star\star$) и ($\star\star\star$). Здесь требуются такие же модификации условий Куна—Таккера, как и для теоремы Джона для задач ($\star\star$) и ($\star\star\star$).

Условие

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

можно переписать в виде

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}).$$

Это соотношение показывает, что в точке максимума градиент целевой функции является линейной комбинацией антиградиентов ограничений, причем все коэффициенты этой линейной комбинации неотрицательны. Рис. В.7 иллюстрирует это свойство. Интуитивно идея этого свойства состоит в том, что если бы какой-нибудь коэффициент линейной комбинации был отрицательным, то можно было бы увеличить значение целевой функции, двигаясь вдоль градиента соответствующего ограничения.

[3] В конкретных приложениях может быть удобным проверять что градиенты *всех* ограничений линейно независимы.

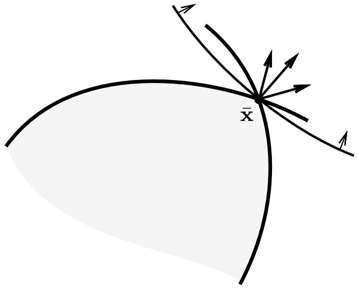


Рис. В.7. *Иллюстрация теоремы Куна—Таккера*

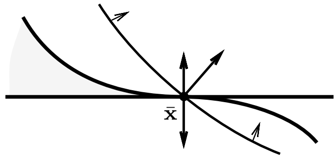


Рис. В.8. *Нарушение условий регулярности*

Рис. В.8 демонстрирует последствия нарушения условия регулярности. Градиенты ограничений в точке максимума $\bar{\mathbf{x}}$ на рисунке линейно зависимы, и, как следствие, градиент целевой функции нельзя представить как линейную комбинацию градиентов ограничений.

Один из вариантов обратной теоремы Куна—Таккера утверждает, что при вогнутости функций $f(\cdot)$, $\{g_k(\cdot)\}$ выполнение этих условий в допустимом решении $\bar{\mathbf{x}}$ (т. е. в точке, удовлетворяющей ограничениям) при некоторых множителях Лагранжа, удовлетворяющих требованиям прямой теоремы, гарантирует, что $\bar{\mathbf{x}}$ является решением задачи.

Теорема В.70 (обратная теорема Куна—Таккера, достаточное условие оптимальности):
Пусть $f(\cdot)$ — дифференцируемая вогнутая функция, $g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)$ — дифференцируемые квазивогнутые функции, множество X выпукло и точка $\bar{\mathbf{x}}$ допустима в задаче ($\star$), причем $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$. Пусть, кроме того, существуют множители Лагранжа $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, такие что при $\lambda_0 = 1$ выполнены условия Куна—Таккера:

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, \ldots, n$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0.$$

Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи ($\star$). ⌟

Доказательство: Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — допустимое решение задачи ($\star$), удовлетворяющее условиям Куна—Таккера, и пусть $\mathbf{x}$ — произвольное допустимое решение этой задачи (т. е. для всех j выполнено $g_j(\mathbf{x}) \geqslant 0$). Покажем, что $f(\bar{\mathbf{x}}) \geqslant f(\mathbf{x})$.

Поскольку функция $f(\cdot)$ вогнута, то должно выполняться неравенство

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant \nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Выражение справа не может быть положительным. Действительно, если $\lambda_j = 0$, то соответствующее слагаемое равно нулю. Если же $\lambda_j > 0$, то по условию дополняющей нежесткости $g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. При этом $g_j(\mathbf{x}) \geqslant 0 = g_j(\bar{\mathbf{x}})$, откуда, учитывая квазивогнутость функции $g_j(\cdot)$, имеем $\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \geqslant 0$. При этом соответствующее слагаемое неотрицательно. Таким образом, вся сумма неотрицательна и $f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant 0$. ■

Теорему можно очевидным образом переформулировать для задач ($\star\star$) и ($\star\star\star$). Для задачи ($\star\star\star$) ограничения в виде равенств могут быть только линейными (это связано с тем, что ограничение в виде равенства $g_j(\mathbf{x}) = 0$ следует представить с помощью двух ограничений в виде неравенств: $g_j(\mathbf{x}) \geqslant 0$ и $-g_j(\mathbf{x}) \geqslant 0$, каждое из которых задается квазивогнутой функцией; такое может быть, только если ограничение линейное).

В еще одном варианте достаточного условия оптимальности предположение о вогнутости целевой функции заменяется на предположение о квазивогнутости с некоторыми дополнительными условиями.

Теорема B.71 (обратная теорема Куна—Таккера, случай квазивогнутой целевой функции):

Пусть $f(\cdot), g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)$ — дифференцируемые квазивогнутые функции, множество X выпукло, точка $\bar{\mathbf{x}}$ допустима в задаче ($\star$), причем $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$ и $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$. Пусть, кроме того, существуют множители Лагранжа $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, такие что при $\lambda_0 = 1$ в этой точке выполнены условия Куна—Таккера.

Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи ($\star$). ┘

Доказательство: Пусть $\mathbf{x}$ — некоторое допустимое решение задачи оптимизации, и пусть точка $\hat{\mathbf{x}} \in X$ такова, что $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) < 0$ (существование такой точки следует из того, что $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$ и $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$). Рассмотрим точки вида $\mathbf{x}(\theta) = (1-\theta)\mathbf{x} + \theta\hat{\mathbf{x}}$ при $\theta \in (0, 1]$. Покажем, что $f(\mathbf{x}(\theta)) < f(\bar{\mathbf{x}})$.

Пусть это не так и $f(\mathbf{x}(\theta)) \geqslant f(\bar{\mathbf{x}})$. При этом из квазивогнутости целевой функции следует, что в рассматриваемом допустимом решении $\mathbf{x}$ выполнено неравенство $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}(\theta) - \bar{\mathbf{x}}) \geqslant 0$. С другой стороны, выполнено $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqslant 0$ (см. доказательство Теоремы В.70). Из этих двух неравенств получим

$$0 \leqslant \nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}(\theta) - \bar{\mathbf{x}}) - (1-\theta)\nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \theta\nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}),$$

но это противоречит выбору точки $\hat{\mathbf{x}}$.

Перейдя в неравенствах $f(\mathbf{x}(\theta)) < f(\bar{\mathbf{x}})$ к пределу при $\theta \to 0$, убеждаемся, что $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\bar{\mathbf{x}})$. ■

Литература

М. Аоки · *Введение в методы оптимизации*, М.: Наука, 1977.

В. Гильденбранд · *Ядро и равновесие в большой экономике*, М.: Наука, 1986.

Э. Маленво · *Лекции по микроэкономическому анализу*, М.: Наука, 1985.

Х. Никайдо · *Выпуклые структуры и математическая экономика*, М.: Мир, 1972.

Ю. Г. Решетняк · *Курс математического анализа*, т. I, Новосибирск: Издательство Института математики, 1999.

Р. Рокафеллар · *Выпуклый анализ*, М.: Мир, 1973.

И. Экланд · *Элементы математической экономики*, М.: Мир, 1983.

C. Berge · *Topological Spaces Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces and Convexity*, New York: Dover, 1997.

S. Boyd and L. Vandenberghe · *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

G. A. Jehle and P. J. Reny · *Advanced Microeconomic Theory*, Addison-Wesley, 1998.

A. Mas-Colell, M. Whinston, and J. Green · *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.

Словарь

адвалорный налог
ad valorem tax

аддитивно-сепарабельная функция
additively separable function, additive separable function

Акерлова модель
Akerlof model

актив
asset, security

актив Эрроу
Arrow security

активное ограничение
binding constraint

арбитраж
arbitrage

Архимеда аксиома
Archimedian axiom

асимметричная информация
asymmetric information

аукцион первой/второй цены
first/second price auction

аукцион с заявками в запечатанных конвертах
sealed-bid auction

Байеса правило
Bayes' rule

байесовский
Bayesian

безарбитражные цены активов
arbitrage-free asset prices

безбилетник
free-rider

безразличия множество
indifference set

безрисковый актив
riskless asset

безрисковый эквивалент
certainty equivalent

Бертрана модель
Bertrand model

бесконечно повторяющаяся игра
infinitely repeated game

бинарное отношение
binary relation

благо
good

благосостояние
welfare

более рискованный
more risky, riskier

бюджетное ограничение
budget constraint

Вальраса закон
Walras' law

ведомый (в модели Штакельберга)
follower

верхнее лебегово множество
upper contour set, "at least as good as" set (для потребителя), superlevel set (функции)

вершина (дерева игры)
node

взаимодополняющие блага
complements

взаимозаменяемые блага
substitutes

внешнее влияние
external effect, externality

внутренний (о точке, равновесии)
interior

вогнутый
concave

вознаграждение за риск
risk premium

возрастающая отдача
increasing returns

вполне смешанная стратегия
completely mixed strategy, totally mixed strategy

выигрыш (в теории игр)
payoff

выпуклый
convex

выпуск
output

выручка
revenue

выявление
revelation

выявленные предпочтения
revealed preference

гарантированный эквивалент
certainty equivalent

голосование
voting

голосование по правилу простого большинства
majority voting

готовность платить
willingness to pay

двойственность
duality

двусторонняя монополия
bilateral monopoly

двухставочный тариф
two-part tariff

дерево игры
game tree

дилемма заключенных
prisoners' dilemma

динамическая игра
dynamic game

дисконтирующий множитель
discount factor

дискриминация ценовая
price discrimination

дискриминация ценовая первого/второго/третьего типа
first-/second-/third-degree price discrimination

дифференцированные блага
differentiated products

добровольное финансирование
voluntary contribution

добровольность участия
voluntary participation

доминируемая стратегия
dominated strategy

доминирующая стратегия
dominant strategy

дополняющей нежесткости условия
complementary slackness conditions

допустимое состояние
feasible state, feasible allocation

допустимость бездеятельности
possibility of inaction

досуг
leisure

доход потребителя
consumer's income

доходность
rate of return

дуополия
duopoly

единственности точки пересечения условие
single-crossing condition, single-crossing property

единственность
uniqueness

закон Вальраса
Walras' law

закон спроса
law of demand

затраты (производственных факторов)
input

игра с идеальной памятью
game with perfect recall

игра с нулевой суммой
zero-sum game

игра с полной/неполной информацией
game of complete/incomplete information

игра с почти совершенной информацией
game of almost perfect information

игра с совершенной/несовершенной информацией
game of perfect/imperfect information

игрок
player

идеальная ценовая дискриминация
ideal price discrimination

избыточный спрос
excess demand

издержек функция
cost function

издержки сделок
transaction cost

излишек потребителя
consumer's surplus

излишек производителя
producers's surplus

изокванта
isoquant

инвестирование
investment

индивидуализированная цена
personalized price

интегрируемость
integrability

интуитивный критерий
intuitive criterion

информационная рента
information rent, informational rent

информационное множество
information set

иррефлексивность
irreflexivity

исход игры
outcome

Йенсена неравенство
Jensen's inequality

картель
cartel

квазивогнутый
quasiconcave

квазилинейный
quasilinear

квота
quota, share

коалиция
coalition

коллективное благо
collective good

компенсированная вариация
compensating variation

компенсированный спрос
compensated demand

комплиментарные блага
complements

конечная вершина
terminal node

конечная игра
finite game

контингентное благо
contingent good

кооперативная игра
cooperative game

коррелированное равновесие
correlated equilibrium

Курно модель
Cournot model

лагранжиан
Lagrangian

лексикографическое упорядочение
lexicographic (lexicographical) ordering

Лернера индекс
Lerner index

«лимон»
lemon

Линдаля равновесие
Lindahl equilibrium

локальная ненасыщаемость
local nonsatiation

малоценное благо
inferior good

манипулируемость
manipulability

Марковица модель
Markowitz model

маршаллианский спрос
Marshallian demand

матрица замены
substitution matrix

множество допустимых потребительских наборов
consumption set

множество производственных возможностей
production possibilities set

множество требуемых затрат
input requirement set

множитель Лагранжа
Lagrange multiplier

молчаливый сговор
tacit collusion

монополия
monopoly

моральный риск
moral hazard

набеги на банки
bank runs

найма модель
principal-agent model, principal-agent problem

налог с единицы товара
unit tax

налог со стоимости товара
ad valorem tax

налогообложение
taxation

наниматель (в модели найма)
principal

народная теорема
folk theorem

насыщение
satiation

начальный запас
(initial) endowment

не хочешь — не бери
take-it-ot-leave-it

неблагоприятный отбор
adverse selection

независимость от посторонних альтернатив
independence of irrelevant alternatives

неисключаемость
non-excludability

нейтральный к риску
risk neutral

неконкурентность
non-rivalness

некооперативная игра
noncooperative game

нелинейное ценообразование
nonlinear pricing

необратимость
irreversibility

неоднородные блага
heterogeneous goods

неопределенность
uncertainty

неподвижная точка
fixed point

непрерывность
continuity

неприятие риска
risk aversion

непрямая функция полезности
indirect utility function

несовершенная конкуренция
imperfect competition

неявная производственная функция
implicit production function

нормальная форма игры
normal form

нормальное благо
normal good

носитель (лотереи, распределения)
support

Нэша равновесие
Nash equilibrium

обобщенная аксиома выявленных предпочтений
generalized axiom of revealed preference

обратная индукция
backward induction

обратная функция спроса/предложения
inverse demand/supply function

общее равновесие
general equilibrium

общеизвестная информация
common knowledge

общественное благо
public good

общественный излишек
social surplus

объединяющий (о равновесии, контракте)
pooling

ограниченная ответственность
limited liability

однопиковые предпочтения
single-peaked preferences

однородная функция
homogeneous function

ожидаемая полезность
expected utility

ожидаемый выигрыш
expected payoff

ожидания
expectations, beliefs (в теории игр)

олигополия
oligopoly

опорная гиперплоскость/функция
support hyperplain/function

оптимальный отклик
best response

оптимум первого/второго ранга
first/second best

отдача от масштаба
returns to scale

отклик
response

отношение к риску
risk attitude, attitude towards risk

отношение правдоподобия
likelihood ratio

отношение предпочтения
preference relation

отображение (многозначное)
correspondence

отсутствие рога изобилия
no free lunch

пакет
bundle

Парето-граница
Pareto frontier

Парето-улучшение
Pareto improvement

паушальный налог
lump-sum tax

переговорная сила
bargaining power

переговорное множество
contract curve

персональный арбитраж
personal arbitrage

Пигу налог
Pigovian tax, Pigouvian tax

поведенческая стратегия
behavior strategy

повторяющаяся игра
repeated game

подрынок
submarket

подыгра
subgame

покров неведения
veil of ignorance

полезности функция
utility function

полнота
completeness

полунепрерывность сверху
upper semicontinuity, upper hemicontinuity

портфель
portfolio

последовательное отбрасывание доминируемых стратеги
iterative elimination of dominated strategies

постоянная отдача
constant returns

потребитель
consumer

потребительский набор
consumption bundle

правило выбора
choice rule

предельная норма замещения (замены)
marginal rate of substitution

предельная норма трансформации
marginal rate of transformation

предельная полезность
marginal utility

предельные издержки
marginal cost

предложение
supply

предпочтения
preferences, preference, preference relation

предыстория (в игре)
history, past history, previous history

премия за риск
risk premium

прибыль
profit

принцип выявления
revelation principle

принятие решений
decision making

производитель
producer

производственная функция
production function

производственное множество
production set

пропорциональное рационирование
proportional-rationing rule

простая лотерея
simple lottery

работник (в модели найма)
agent

равновесие
equilibrium

развернутая форма игры
extensive form

разделяющая гиперплоскость
separating hyperplane

разделяющий (о равновесии, контракте)
separating

рандомизация
randomization

расходов функция
expenditure function

рационализация
rationalizing

рационирования схема
rationing scheme

резервная полезность
reservation utility

рента
rent

реплика
replica

репрезентативный потребитель
representative consumer

рефлексивность
reflexivity

рискофил
risk-lover, risk-loving, risk-seeking, risk-proclive agent/individual

рискофоб
risk-averse, risk-averter

Роя тождество
Roy's identity

рыночный портфель
market portfolio

самовыявления ограничение/условие
self-selection constraint/condition

свернутая игра
reduced game

свобода расходования
free disposal

сговор
collusion

седловая точка
saddle point

сепарабельный
separable

сигнализирование
signalling

скрытая информация
hidden information

скрытые действия
hidden action

слияние
merger

Слуцкого уравнение
Slutsky equation

случайный ход природы
random move by nature

смесь лотерей
mixture of lotteries

смешанная стратегия
mixed strategy

собственная подыгра
proper subgame

совершенная конкуренция
perfect competition

совершенное байесовское равновесие
perfect Bayesian equilibrium

совершенное в подыграх равновесие
subgame perfect equilibrium

совершенные рынки
perfect markets

совместимости стимулов ограничение/условие
incentive compatibility constraint/condition

солнечных пятен равновесие
sunspot equilibrium

состояние мира (природы)
state of the world, state of nature

состояние экономики
state of economy

«спот»-рынок
spot market

спрос
demand

сравнительная статика
comparative statics

ставка налога
tax rate

статическая игра
static game

стохастическое доминирование
stochastic dominance

стохастическое доминирование первого/второго порядка
first/second order stochastic dominance

стратегия
strategy

строго доминируемая стратегия
strictly dominated strategy

строгое отношение предпочтения
strict preference relation

субъективная вероятность
subjective probability

теорема благосостояния
welfare theorem

теорема двойственности
duality theorem

теорема о взаимных фондах
mutual fund theorem

теорема о разделении (для теории инвестирования)
separation theorem

теорема об огибающей
envelope theorem

теорема отделимости
separation theorem, separating hyperplane theorem

технологическое множество
production set

технология
technology, production plan

тип (игрока)
type

товар
commodity

торг
bargaining

точечно-множественное (многозначное) отображение
correspondence

точка угрозы
threat point, disagreement point

трагедия общин
tragedy of commons

траектория игры
game path

транзитивность
transitivity

трансакционные издержки
transaction cost

трансферабельная полезность
transferable utility

трансферт
transfer

треугольник Харбергера
Harberger triangle

триггерная стратегия
trigger strategy

убывающая отдача
decreasing returns

усилия
effort

условие первого/второго порядка
first-order/second-order condition

условие регулярности (в теореме Куна—Таккера)
constraint qualification

условный спрос на факторы производства
conditional factor demand

участия условие
participation constraint

фиаско рынка
market failures

функция распределения
cumulative distribution function

функция с постоянной эластичностью замены
constant elasticity of substitution function, CES-function

хиксианский спрос
Hicksian demand

ход (в теории игр)
move

Хотеллинга лемма
Hotelling's lemma

целевая функция
objective function

цена удушения спроса
choke price

ценовое лидерство
price leadership

ценообразование по предельным издержкам
marginal cost pricing

ценополучатель
price-taker

частное благо
private good

частное равновесие
partial equilibrium

чистая стратегия
pure strategy

чистые потери благосостояния
deadweight loss

чистый выпуск
net output, netput

Шепарда лемма
Shephard's lemma

Штакельберга дуополия
Stackelberg duopoly

Эджворта ящик
Edgeworth box

эквивалентная вариация
equivalent variation

экономика (как народное хозяйство, модель)
economy

экономика обмена
exchange economy

экономика распределения
distribution economy

экономический субъект
(economic) agent

экстерналия
externality

эластичность
elasticity

элементарная функция полезности
elementary utility function

Эрроу—Дебре модель
Arrow–Debreu model

эффект диплома
sheepskin effect

эффект дохода/замены
income/substitution effect

эффективная граница
efficient frontier, efficient boundary

эффективное рационирование
efficient-rationing rule

ядро
core

Именной указатель

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Ш

Э

Предметный указатель

В

Г

Д

М

Н

О

П

Р

Т