Н. Ш. Альжанова
Х. К. Сәбит

Экономикалық-математикалық әдістер

Оқу құралы

Алматы
2007

ББК 65.В6
А 49

Пікір жазғандар:

Физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор ***Оспанов С. С.***
Экономика ғылымдарының докторы,
профессор ***Байзаков С. Б.***

А 49 Н. Ш. Альжанова, Х. К. Сәбит
Экономикалық-математикалық әдістер: Оқу құралы.— Алматы: Нүр-пресс, 2007.— 144 б.

ISBN 9965-813-27-2

Өздеріңізге ұсынылып отырған оқу-әдістемелік құралдың бөлімдерінде экономиканың әр алуан математикалық модельдерінің арасында ерекше орын алатын желілік модельдерді зерттеу құралы ретіндегі желілік программалаудың әдістері мен есептері беріледі. Желілік бағадрламалаудың көліктік есептері жеке пунктпен бөліп көрсетілген. Ол қалыптамалық және сондай-ақ желілік қойылымдарда берілген. Сонымен бірге өндірісті орналастыру есептерін шешуде қолданылуы мүмкін көпсатылы көліктік модель де келтірілген.

Одан әрі құралда недәуір күрделі модельдер мен әдістер қарастырылады. Бұл динамикалық программалау әдісі, экономиканы талдаудың баланстық әдісі және күнтізбелік жоспарлаудың желілік әдісі.

Құралда көптеген теориялық есептер дәлелдемелерсіз берілген және әдістер мен алгоритмдерді мысалдармен және есептермен көрнекілендіруге баса назар аударылған.

ББК 65.В6

А $\dfrac{0601000000}{00(05)\text{-}07}$

© Альжанова Н. Ш., Сабитова Х. К., 2007.
© Нүр-пресс, 2007.

ISBN 9965-813-27-2

АЛҒЫ СӨЗ

Экономикалық талдау мен есептеу әдістерін жетілдіруде зерттеудің математикалық тәсілдерін қолдану үлкен роль атқарады. Баға белгілеу заңдылықтары, өнім бірлігіне жұмсалатын еңбек пен материалдардың толық шығынын зерделеу, салааралық байланыстарды зерттеу, капитал салымының рента-ельділігі, өндірісті орналастырудың тиімділігін анықтау, өндірістік процесті оңтайлы жоспарлау, шектеулі ресурстарды тиімді пайдалану секілді экономикалық проблемалар және басқа да маңыздылығы бұлардан кем емес мәселелер математикалық тәсілдерді кеңінен қолдану арқылы табысты шешіле алады.

Мұндай есептер үшін құрамына желілік программалау, динамикалық программалау, ойындар теориясы және басқа математикалық пәндер кешені экономикалық нысандар мен процестердің математикалық модельдерімен бірге кіретін экономикалық-математикалық аппарат әзірленді және одан әрі жалғасуда. Бұл аппаратты, әсіресе өнеркәсіптік өндіріс, ауыл шаруашылығы, көлік, экономикалық зерттеулер және т.б. секілді салаларға қатысты есептердің кең айналымын шешуге мүмкіндік беретін желілік программалауды зерделеу экономистің тәжірибелік жұмысында күннен-күнге қажеттілікке айналуда.

Өздеріңізге ұсынылып отырған оқу-әдістемелік құралдың бастапқы бөлімдерінде экономиканың әр алуан математикалық модельдерінің арасында ерекше орын алатын желілік модельдерді зерттеу құралы ретіндегі желілік программалаудың әдістері мен есептері беріледі. Бұл көптеген экономикалық нысандар мен процестердің желілік модельдермен жеткілікті дәрежеде барабар сипатталатындығымен түсіндіріледі. Сонымен қатар желілік модельдер үшін құрамында тиімді әдістердің, алгоритмдер мен программалардың толық кешені бар әмбебап математикалық аппарат әзірленген. Тағы да атап өтетін нәрсе, желілік программалау есептерінің классы экономикалық есептер мен экономикалық зерттеулерді шешу тәжірибесінде едәуір зерделенген және кеңінен қолданылады.

Желілік бағадрламалаудың көліктік есептері жеке пунктпен бөліп көрсетілген. Ол қалыптамалық және сондай-ақ желілік қойылымдарда берілген. Сонымен бірге өндірісті орналастыру есептерін шешуде қолданылуы мүмкін көпсатылы көліктік модель де келтірілген.

Одан әрі құралда недәуір күрделі модельдер мен әдістер қарастырылады. Бұл динамикалық программалау әдісі, экономиканы талдаудың баланстық әдісі және күнтізбелік жоспарлаудың желілік әдісі.

Құралда көптеген теориялық есептер дәлелдемелерсіз берілген және әдістер мен алгоритмдерді мысалдармен және есептермен көрнекілендіруге баса назар аударылған.

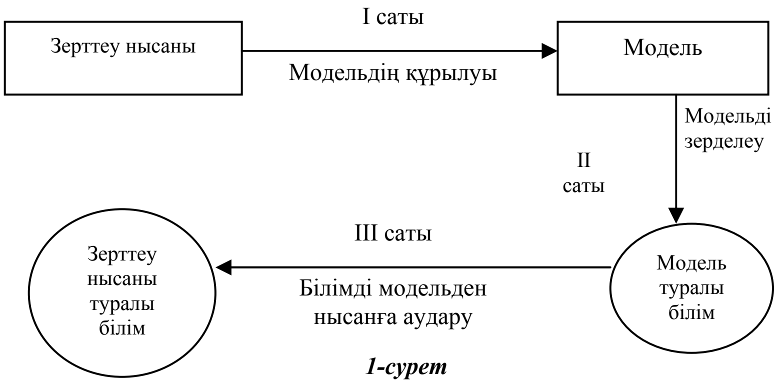
1. ЖЕЛІЛІК ПРОГРАММАЛАУ МІНДЕТТЕРІ МЕН ӘДІСТЕРІ

1.1. Модельдер және модельдеу

Экономикалық талдау мен есептеу әдістерін жетілдіруде зерттеудің математикалық тәсілдерін қолдану үлкен роль атқарады. Баға белгілеу заңдылықтары, өнім бірлігіне жұмсалатын еңбек пен материалдардың толық шығынын зерделеу, салааралық байланыстарды зерттеу, капитал салымының рентабельділігі, өндірісті орналастырудың тиімділігін анықтау, өндірістік процесті оңтайлы жоспарлау, шектеулі ресурстарды тиімді пайдалану секілді экономикалық проблемалар және басқа да маңыздылығы бұлардан кем емес мәселелер математикалық тәсілдерді кеңінен қолдану арқылы табысты шешіле алады.

Экономикалық-математикалық зерттеу негізінде зерделеніп отырған экономикалық процесті математикалық модельдеу, яғни бұл процестің сандық заңдылықтарын математикалық формулалар көмегімен сипаттау жатыр. Математикалық модельдердің көптеген анықтамалары бар. Солардың ішінде, біздің пікірімізше, недәуір дұрыс болып табылатын біреуін берейік.

Математикалық модель – математикалық символдармен жазылған нақты құбылыс абстракциясы. Оны талдау осы құбылыстың мәнін тереңдей ашуға мүмкіндік беретіндей етіп құрастырылған.



1-сурет

Модельдеу дегенде біз модельдердің құрылуын, оларды зерделеу мен қолдануды түсінеміз. Модельдеу процесінің мәнін сызба түрінде 1-суреттен көруге болады.

Модельді құрудың *бірінші сатысында* үш есепті шешу қажет:

- зерттеу мақсатын анықтау;
- негізгі шектеулерді айқындау;
- зерделеп отырған құбылыстың барлық мәдеметтерінің сандық көрінісі.

Зерттеу мақсаты есепті шешудің әр түрлі нұсқалары салыстырылатын және олардың ішінен ең үздігі таңдалып алынатын белгісімен (критерийімен) сипатталады. Әр алуан экономикалық есептерде мұндай критерий ретінде барынша жоғары табыс, өндірістің барынша төмен шығындары және басқалар таңдап алынуы мүмкін.

Әдетте, экономикалық есептер қою барынша тиімді пайдалануды қажет ететін шектеулі ресурстардың бар екендігін білдіреді. Сондықтан зерделеніп отырған мәселе үшін қандай ресурстардың шешуші болып табылатындығын, олардың қоры қандай екендігін анықтау өте маңызды. Ресурстар бойынша барлық шектеулер қарама-қайшы болмауы керек. Кейбір шектеулерді есепке алмау алынған шешімнің қолдануға тиімсіз болып қалуына және керісінше ресурстар бойынша қатаң шектеулер қою есептің шешімі аясын тым тарылтып жіберуге әкелуі мүмкін. Бұл оңтайлы шешім табу мүмкіндігін жоққа шығарады.

Экономикалық есептерді шешудің барлығында да математикалық тәсілдер қолданыла бермейтінін атап өткен жөн. Бұл үшін қажетті шарт зерделеніп отырған мәселені сипаттайтын есептер мен тәуелдіктердің бастапқы деректерінің сандық көрінісі болып табылады.

Математикалық модельді құру сандық мәні есепті шешу нұсқаларының бірін анықтайтын айнымалылардың кейбір сандарын енгізуден басталады. Оларды x, y және т.б. белгілейді.

Оңтайлылықтың таңдалып алынған критерийіне сәйкес мақсатты функция құрылады. Содан соң математикалық теңдік немесе теңсіздік түрінде осы процесті сипаттайтын өзара байланыстар бейнеленеді.

Жалпы түрде экономикалық есептің математикалық моделі мынадай түрге ие:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}$$

болған жағдайда функцияның экстремумын табу талап етіледі:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Мұндай түрдегі экстремальды есептерді шешуге экономиканың әр алуан есептерін талдау әкеледі.

Модельдеу процесінің *екінші сатысында* модель зерттеу-дің дербес нысанасы ретінде көрінеді. Модельдік тәжірибелер жүргізіледі.

Үшінші сатыда модель тілінен түпнұсқа тіліне өту жүзеге асады. Нәтижесінде модельдің нысана-түпнұсқаға барабар еместігі айқындалуы мүмкін. Бұл жағдайда модельді түзету, яғни 1 сатыға өту жүргізіледі.

Осылайша, модельдеу – бұл циклдық процесс, және ол зерттеліп отырған нысананы жеткілікті дәрежеде нақты бейнелейтін модель құрылғанға дейін жалғаса береді.

1.2. Экономикалық есептердің математикалық модельдерін құру үлгілері

Мынадай есепті қарастырайық.

Кондитерлік фабрика карамельдің A, B, және C үш түрін өндіру үшін негізгі шикізаттың үш түрін пайдаланады: қант ұнтағы, сірне және жеміс езіндісі. Шикізаттың әр түрінің 1 т карамель өндіруге жұмсалатын нормасы 1-кестеде көрсетілген.

Онда фабрика пайдаланатын шикізаттың әр түрінің жалпы саны, сонымен бірге карамельдің осы түрін сатудан түсетін табыс келтірілген.

Сатудан барынша жоғары табыс түсіретін карамель өндірудің жоспарын табу керек.

1-кесте

Шикізат түрі	1 т карамельге жұмсалатын шикізаттың нормасы (т)			Шикізаттың жалпы саны (т)
	A	B	C	
Қант ұнтағы	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Жеміс езіндісі	-	0,1	0,1	120
1 т өнімді сатудан түсетін табыс (тг)	108	112	126	

Көрініп тұрғандай, бұл жағдайда модель құру барысында шешілуі тиіс үш есептің үшеуі де шешілді. Дәлірек айтсақ, сатудан барынша жоғары табыс түсуін қамтамасыз ететін карамель өндіру жоспарын анықтауға құрылған есептің мақсаты айқындалды. Сонымен қатар карамельдің барлық түрлерін өндірудің негізгі ресурстары және олардың қоры анықталды. Үшінші есеп те шешілді, яғни карамельдің әрбір түрінің бірлігін өндіруге жұмсалатын ресурстар нормативі және өнім бірлігін сатудан түсетін табыс белгіленді.

Енді математикалық модельді құруға кірісе беруге болады. Модельді құру, жоғарыда айтылғандай, сандық мәні есепті шешу нұсқаларының бірін анықтайтын айнымалылардың кейбір сандарын енгізуден басталады. Бұл жағдайда есеп карамель өндірісінің жоспарын анықтауға құрылады. Осыған орай келесі айнымалыларды енгізейік: x_1 – A карамелін өндіру көлемі, x_2 – B карамелін өндіру көлемі және x_3 – C карамелін өндіру көлемі.

Мақсатты функция құралық. Кондитерлік фабрика A карамелінің 1 т сатудан 108 теңге көлемінде табыс алатыны бізге белгілі, ал фабрика карамельдің A түрінің x_1 тоннасын өндіреді, демек, A карамелінің x_1 тоннасын сатудан фабрика 108 x_1 теңге көлемінде табыс алады. Сәйкесінше, B карамелінің x_2 тоннасын сатудан түсетін табыс 112 x_2 теңгені, ал C карамелінің x_3 тоннасын сатудан түсетін табыс 126 x_3 теңгені құрайды. Сонда карамельдің барлық түрін сатудан түсетін табыстың сомасы мынаған тең болады: $108\ x_1+112\ x_2+126\ x_3$. Демек, мақсатты функция барынша көбейтуді қажет ететін мынадай түрге ие болады:

$f\ (x)=108\ x_1\ +\ 112\ x_2\ +\ 126\ x_3$, мұндағы $x=\ (x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3)$ – карамель өндірісінің жоспары.

Енді есептің шектелуін құрайық. А карамелінің 1 т өндіруге 0,8 т қант ұнтағы жұмсалатыны бізге белгілі, демек, А карамелінің x_1 тоннасын өндіруге 0,8 x_1 тонна қант ұнтағы жұмсалады. Сәйкесінше, В карамелінің x_2 тоннасын өндіруге - 0,5 x_2 тонна, ал С карамеліннің x_3 тоннасын өндіруге 0,6 x_1 тонна қант ұнтағы жұмсалады. Осылайша, карамельдің барлық түрлерін өндіруге $0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$ тонна қант ұнтағы жұмсалады. Бұл шығындар фабрикадағы қант ұнтағы қорынан, яғни 800 тоннадан асып кетпеуі қажет. Сонымен қант ұнтағы ресурсы бойынша бірінші шектелім мынадай түрде болады:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \leq 800$$

Сәйкесінше, карамельдің әрбір түрінің 1 тоннасына арналған сірне мен жеміс езіндісі шығындарының берілген нормативін, сонымен бірге осы ресурстардың фабрикада бар көлемін пайдалану арқылы шикізаттардың бұл түрін пайдалану бойынша шектеулер құрылады, дәлірек айтар болсақ,

$$0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \leq 600$$

$$0,1x_2 + 0,1x_3 \leq 800$$

Бұл шектеулерге айнымалылардың теріссіздігі шартын қосу қажет $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \ \geq 0$, себебі карамель өндірісінің көлемі теріс бола алмайды. Осылайша, берілген экономикалық есептің келесі математикалық моделін алдық.

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \leq 800 \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \leq 600 \\ 0,1x_2 + 0,1x_3 \leq 800 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \ \geq 0$$

шектеулері жағдайында $max\ f\ (x)=108\ x_1 + 112\ x_2 + 126\ x_3$ табу керек.

Математикалық модельді құруға арналған тағы бір есепті қарастырып көрейік.

Мал азығының рационына құрамына үш өнім кіреді: пішен, сүрленген шөп және ақуыз, кальций және витаминдер секілді коректік заттары бар концентраттар. Сәйкес азық құрамындағы қоректік заттар (1 кг-ға г-мен) және олармен қоректенудің минималды қажетті нормасы төмендегі кестеде берілген:

	Қоректік заттар / Азық	Ақуыз	Кальций	Витаминдер
1	Пішен	50	6	2
2	Сүрленген шөп	20	4	1
3	Концентраттар	180	3	1
	Тұтыну нормасы	2000	120	40

Минималды құн шарты бойынша малды азықтандырудың оңтайлы рационын анықтау керек, егер 1 кг пішеннің бағасы – 3 теңге, сүрленген шөп – 2 теңге, концентраттар 5 теңге тұратын болса.

Математикалық модельді құру үшін айнымалыларды енгіземіз:

x_1 - рациондағы пішен көлемі (кг)

x_2 – рациондағы сүрленген шөп көлемі (кг)

x_3 – рациондағы концентраттар көлемі (кг).

Есептің мәні мынада: қоректік заттардың минималды қажетті нормасы болатын және барынша арзанға түсетін рационды $x= (x_1, x_2\ \ x_3)$ анықтау керек.

Әуелі мақсатты функция құралық. Бізге белгілі, 1 кг пішен 3 теңге тұрады, ал оның рациондағы көлемі x_1 кг болуы қажет, демек рациондағы барлық пішен құны $3\ x_1$ теңгеге тең болады, осыған сәйкес рациондағы сүрленген пішеннің құны $2\ x_2$ теңге, ал концентраттар құны $5\ x_3$ теңге болады. Осылайша, рационның жалпы құны $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ тең болады да, мақсатты функция мынадай түрге ие болады:

$$f\,(x)=3x_1 + 2x_2 + 5x_3\ ,$$

және осы функцияның минимумын табу керек. Енді есептің шектеуін құрамыз. 1 кг пішенде 50 г ақуыз болатындықтан, x_1 кг пішендегі ақуыз ($50 \cdot x_1$) г болады. Сонымен қатар 1 кг сүрленген шөпте 20 г ақуыз бар, демек x_2 кг сүрленген шөпте ($20 \cdot x_1$) г ақуыз болады. Ақуыз концентраттарда да болады, дәлірек айтсақ, ($180\cdot x_3$) г. Осылайша, толық рациондағы ақуыз көлемі $50x_1 + 20x_2 + 180\cdot x_3$ болады және ол тұтынудың минималды қажетті нормасынан кем болмауы қажет, яғни 2000 г-нан кем болмайды. Сонымен мынадай қатынас аламыз:

$$50x_1 + 20x_2 + 180x_3 \geq 2000$$

Осындай жолмен, әрбір кг пішендегі, сүрленген шөп пен концентраттағы кальций мен витаминдердің нормативін, сонымен қатар оларды тұтынудың минималды қажетті нормасын пайдалана отырып, төмендегі шектеулерді аламыз:

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 120,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 40$$

Айнымалылардың теріс еместігі бойынша шектеулерді қоса отырып, берілген экономикалық есептің

$$50x_1 + 20x_2 + 180x_3 \geq 2000$$
$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 120$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 40$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

шектеулері жағдайындағы мынадай математикалық моделін аламыз:

$$\min f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

1.3. Желілік программалау есептерін қою, оны шешудің негізгі қасиеттері

ЖП жалпы есебі мынадай түрге ие:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1, r},\ где \qquad k < m, \qquad r < n$$

шартымен $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max$ табу керек.

Дегенмен негізгі тәсілдер мен есептеу сызбалары ЖП есептерінің канондық формаларына арналып әзірленген:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_2x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ K \quad K \quad K \quad K \quad K \quad K \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j=\overline{1,n}$$

Шартымен $f(x)=c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow max$ табу керек.

ЖП жалпы есебін канондық формаға келтіру үшін теңсіздік түріндегі барлық шектеулерді төменде берілген жолдармен теңестіру жеткілікті.

i-ші шектеуді алайық:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \qquad i=\overline{1,k}$$

Әрбір теңсіздік теңдікке айналатындай етіп $x_{n+i} \geq 0, \quad (i=\overline{1,k})$ қосымша айнымалыларын енгіземіз:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \qquad i=\overline{1,k}$$

Содан соң ЖП жалпы есептерінде кейбір айнымалыларға айнымалылардың теңсіздігі шарты қойылады. Жалпы есепті канондық формаға келтіру үшін бұл айнымалыларды есептен шығарып тастау керек немесе айнымалыларға өзгерту керек:

$$x_j = U_j - V_j, \quad где \quad U_j \geq 0, \quad V_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n}$$

Осылайша, ЖП есептерінің канондық формасына қатысты есептер мен дәлелдемелердің барлығын жүргізе отырып, біз талқылаудың ортақтығын жоғалтпаймыз.

$f(x)=c_1x_1 + c_2x_2 + ... c_nx_n$ функциясының минимумын табу қажет болған жағдайда $f_1(x)= - f(x)= -c_1x_1 - c_2x_2 -... -c_nx_n$ функциясының максимумын табуға көшуге болады, себебі $min\ f(x) = -max(-f(x))$ екендігі бәрімізге белгілі.

ЖП есебінің канондық формасын мына түрде жазамыз:

$A_1x_1 + A_2x_2 + ... A_nx_n = B$ (2)

$x_j \geq 0, j=\overline{1,n}$ (3) болғандағы

$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max$ (1) табамыз, мұндағы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ldots ; A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

1-анықтама. (2)-(3) шектеулерін қанағаттандыратын кез келген $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ жазықтық нүктесі жоспар немесе ЖП есебінің ұйғарынды шешімі деп аталады.

2-анықтама. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ жоспары тірек жоспары деп аталады, егер оң (нольдік емес) x_j коэффициенттерімен (2) жіктеуіне кіретін A_j $(j = \overline{1, n})$ векторлары желілік тәуелсіз жүйе құратын болса.

3-анықтама. Тірек жоспары құрамында теңдей *m* қосындылары бар болатын болса төмендемеген деп аталады. Керісінше жағдайда ол төмендеген деп аталады.

4-анықтама. (1) мақсатты функциясын максималды (минималды) мәніне жеткізетін жоспар оңтайлы немесе ЖП есебінің шешімі деп аталады.

ЖП есебінің негізгі қасиеттерін қарастыруға көшпес бұрын, дөңес жиынтықтардың бірқатар қасиеттерін еске сала кетейік, себебі олар тығыз түрде өзара байланысқан.

5-анықтама. $X_1, X_2, \ldots, X_n \in R^n$ – n-өлшемдік евклидтік кеңістіктің туынды нүктелер болсын делік. Бұл нүктелердің дөңес желілік комбинациясы деп

$$X = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \text{ где } \quad d_i \ge 0, i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} d_i = 1$$

нүктесі аталады.

6-анықтама. $X \in R^n$ – n-өлшемдік евклидтік кеңістіктің жиынтығы дөңес деп аталады, егер өзінің кез келген екі нүктесімен бірге оның құрамында туынды дөңес желі комбинациясы, яғни $X_1 \in X$, $X_2 \in X$, то $x = d_1x_1 + d_2x_2 \in X$, где $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, $d_1+d_2=1$ бар болатын болса.

Геометриялық тұрғыдан бұл дөңес жиынтықтың өзінің кез келген екі нүктесімен бірге осы нүктелерді өзара жалғайтын кесіндіге де ие екендігін білдіреді.

7-анықтама. Дөңес жиынтықтың нүктесі шеткі деп аталады, егер оны осы жиынтықтың қандай да бір екі нүктесінің дөңес желілік комбинациясы ретінде бере алмасақ.

ЖП есептерін шешудің негізгі қасиеттері бірқатар теоремалармен анықталады. Бұларды біз дәлелдемелерсіз береміз.

1-теорема. ЖП есебінің жоспарлар жиынтығы дөңес.

2-теорема. ЖП есебінің желілік формасы өзінің максимумына (минимумына) жоспарлардың дөңес жиынтығының шеткі нүктесінде жетеді. Егер ол өзінің максималды (минималды) мәніне бірден көп шеткі нүктеде жетсе, онда ол осы нүктелердің дөңес желілік комбинациясы болып табылатын кез келген нүктеде сондай мәнге жете алады.

3-теорема. $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ нүктесі шеткі болуы үшін оның x_j оң компоненттері $\sum\limits_{j=1}^{n} A_j x_j = B$ жіктеуіндегі $A_j (j = \overline{1, n})$ желілік тәуелсіз векторлар жағдайында коэффициенттер болғаны қажет және жеткілікті.

Егер тірек жоспарының анықтамасын еске түсіретін болсақ, онда:

1) әрбір тірек жоспары ЖП есебі жоспарларының дөңес жиынтығының шеткі нүктесіне сәйкес келетіндігі;

2) әрбір шеткі нүктемен (әрбір тірек жоспарымен) берілген $A_1, A_2, \ldots, A_n$ жүйесінің m желілік тәуелсіз векторлары байланысты.

1.4. Желілік программалау есептерін шешудің сызба әдісі

ЖП есебінің геометриялық түсіндірмесін берейік. Оны жазықтықта берген дұрыс: желілік форманың максимумын табу талап етіледі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_2x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad (2') \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad (3') \end{cases}$$

шектеулері жағдайында

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \ \to max \qquad (1')$$

табу қажет.

Теңсіздікті (3') X_1OX_2 оң квадрант жазықтығында анықтайды. Шектеулер жүйесі теңсіздіктердің әрбірі (2') геометриялық тұрғыдан шендес түзулерге сәйкес жартылай жазықтығын анықтайды

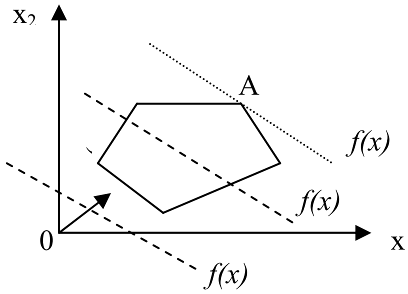
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}\,x_2 = b_i \quad i = \overline{1,m} \qquad (4)$$

Осылайша, есептің желілік формасын анықтау облысы (1′)–(3′) оң X_1OX_2 квадрантында орналасқан жартылай жазықтықтардың (2') жалпы бөлігі түрінде болады. Бұл осы жартылай жазықтықтарды қиып өтетін көп нүктелер – шешімнің көпбұрышы ($n \ge 3$ болғанда – шешімнің көпқыры) деп аталатын дөңес жиынтық. ЖП бастапқы есебі шешімнің $f(x)$ мақсатты функциясы максималды мәнге ие болатын көпбұрышының осындай нүктесін табуда болып отыр. Егер шешімнің көпбұрышы бос болмаса және ондағы мақсатты функция жоғарыдан шектелген болса, онда бұл нүкте бар. Мұндай жағдайларда, 2 теоремаға сәйкес, шешім көпбұрышының сүйір ұшының (соңғы нүктенің) бірінде мақсатты функция максималды мәнге жетеді. Оны анықтау үшін түзу құрамыз $c_1x_1 + c_2x_2 = f(\overline{x})$, мұндағы $f(\overline{x})$=const және оны шешімнің көпбұрышы бойымен желілік форманың ұлғаюы бағытында өз-өзіне параллель түрде шешімнің шешімнің көпбұрышымен қиысатын соңғы ортақ нүктеден өткенге дейін қозғаймыз. Осы нүкте координаттары есептің оңтайлы жоспарын анықтайды.

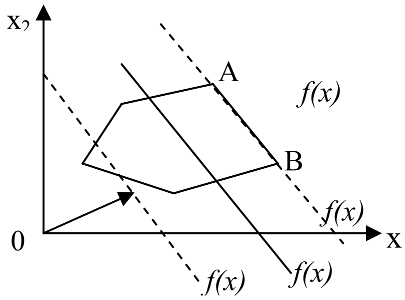
(1′)–(3′) есептерін шешу барысында әр түрлі жағдайлар кездесуі мүмкін екенін де атап өткен жөн.

1. Есептің шешімін анықтау облысы көпбұрыш түрінде болсын. Мұндағы мақсатты функция бір ғана А нүктесінде максималды мәнге ие болатындығы 2-суретте көрсетілген.

3-суретте мақсатты функцияның максималды мәнге АВ қиындысының кез келген нүктесінде ие болатындығы жағдайы көрсетілген. $c(c_1,c_2)$ векторы мақсатты функцияның ұлғаю бағытын көрсетеді.

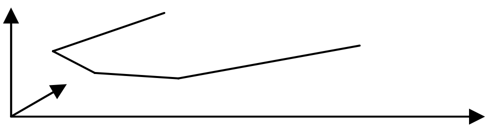


2-сурет



3-сурет

II. Есептің шешімін анықтау облысы шексіз. 4-суретте желілік форманың жоғарыдан шектелмегендігі жағдайы көрсетілген.

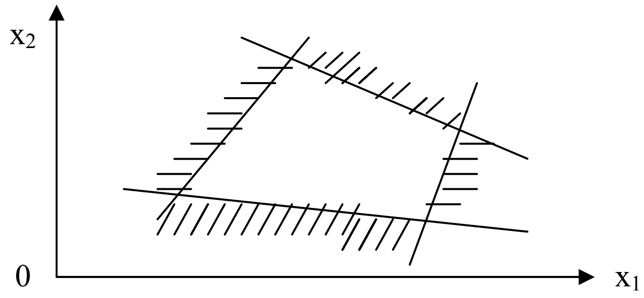


4-сурет

III. Есептің шешімін анықтау облысы – бос жиынтық. Бұл жағдайда ЖП есебін шешу мүмкін емес, себебі есепті шектеу жүйесі үйлесімсіз.

Үш немесе одан да көп айнымалылары бар есеп берілген жағдайда (2′)–(3′) шарттары кеңістікте дөңес көпқырлылық (дөңес көпқырлы жиынтық) құрайды.

Желілік форма геометрикалық тұрғыдан параллель жазықтықтар (гипержазықтықтар) тобы ретінде түсіндіріледі. Есепті шешу үшін жазықтықты (гипержазықтықты) желілік форманың ұлғаюы бағытында әзірше оның құрамында көпқырлылықтың (көпқырлы жиынтықтың) нүктелері бар болып тұрғанға дейін қозғалту керек. Жазықтықтың (гипержазықтықтың) ең шекті орналасу қалпы есептің шешімін анықтайды. ЖП есептерін шешу қасиеттері негізінде жазықтықтың (гипержазықтықтың) шектік қалпына көпқырлылықтың (көп қырлы жиынтықтың) сүйір ұшында немесе оның қандай да бір қырының барлық нүктелерінде қол жеткізіледі деп айтуға болады.



5-сурет

Желілік программалау есептерін интерпретациялау негізінде оны шешудің графикалық деп аталатын тәсілі құрылады. Есептерді екі өлшемді кеңістікте графикалық тәсілмен шешудің алгоритмі төмендегі сатылардан тұрады:

1. Шектік түзулер құрады, олардың теңдеулері (2′)–(3′) шектеулеріндегі теңсіздің белгілерін дәл теңдіктер белгілеріне ауыстыру нәтижесінде алынады.
2. Шешімнің көпбұрышын табады.
3. $c = (c_1, c_2)$ векторын құрады.
4. $f(x)= c_1x_1 + c_2x_2$, түзуін құрып, оның мәнін қандай да бір санға тең деп қабылдайды.
5. $f(x)= c_1x_1 + c_2x_2$, түзуін С векторы бағытында шешімнің көпбұрышы бойымен жылжытады, осының нәтижесінде мақсатты функция максималды мәнге ие болатын нүктені (нүктелерді) табады, немесе желілік форманың шексіздігін жоспарлар жиынтығына орнатады.
6. Функция максимумы нүктесінің координаттарын анықтайды және осы нүктедегі желілік форманың мәнін табады.

Мысал.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \ \leq \ 2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq \ 6 \\ x_1 + x_2 \ \leq \ 8 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

шарты жағдайында

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow max$$

графикалық тәсілмен шешу қажет.

Бірінші $2x_1 + x_2 \geq 2$ теңсіздігін аламыз.

Шектік түзі сызбасын құрып, ондағы теңсіздік белгісін теңдік белгісімен алмастырамыз, яғни $2x_1 + x_2 = 2$ (*)

Берілген түзуді екі нүкте бойынша құрамыз: мысалы, $x_1 = 0$ қойып, x_2 аламыз.

$2 \cdot 0 + x_2 = 2, \ \ x_2$ = 2, ал $x_2 = 0,$ қойып, x_1 анықтаймыз.

$2 \cdot x_2 + 0 = 2, \ \ x_1 = 1,$

x_1	x_2
0	2
1	0

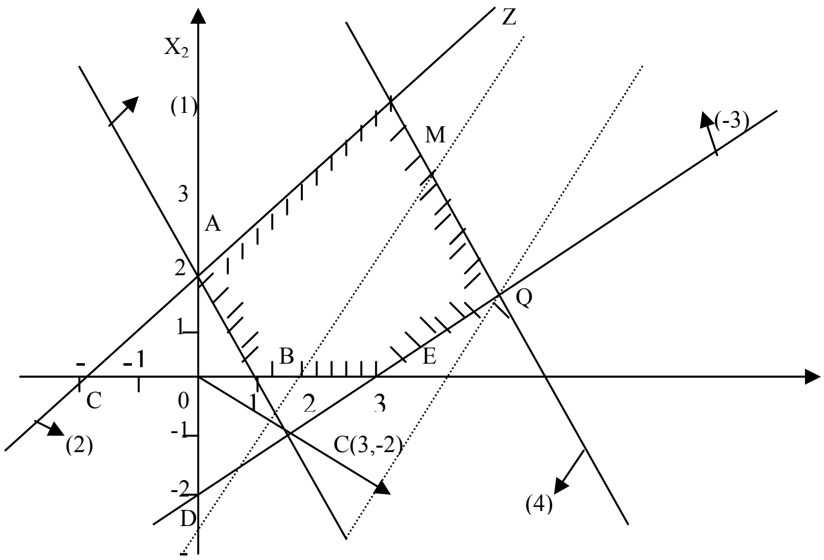
Осылайша, түзу өтетін (*) екі нүктені таптық, дәлірек айтсақ $A(0,2)$ және $B(1,0)$. Осы нүктелерді $x_1 \, 0 \, x_2$ жазықтығында табамыз.

Түзуді осы нүктелер арқылы жүргіземіз. Теңсіздіктің шешімі

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

шекті түзудің бір жағында орналасқан жарты жазықтық нүктелері болады. Ізделіп отырған жарты жазықтықты анықтау үшін жарты жазықтықтың біріне жататын нүктені алып, оның коррдинаттарының берілген теңсіздікті қанағаттандыра алатынын немесе алмайтынын тексеру керек. Тексеру үшін $0(0,0)$ нүктелерін алған ыңғайлы. Берілген теңсіздікке осы нүктенің координаттарын ($x_1 = 0, \ x_2 = 0$) қоя отырып, бұл нүкте оның шешімі болмайтынына көз жеткіземіз, себебі $2 \cdot 0 + 0 \ngeq 2$.

Демек, бұл теңсіздіктің шешімі $0(0,0)$ нүктелері жоқ жазықтықтың нүктелері болады. 6-суретте бірінші теңсіздіктің шешімі болып табылатын жарты жазықтық стрелкамен көрсетілген. Стрелка маңайындағы жақшаларда шектік түзудің номері берілген.



6-сурет

Осы жолмен екінші теңсіздіктің графикалық шешімін табамыз

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

Әуелі шектік түзу құрамыз

$-x_1 + x_2 = 2$

x_1	x_2
0	2
-2	0

Ол $A(0,2)$ және $C(-2,0)$ нүктелері арқылы өтеді. Түзуді осы нүктелер арқылы жүргіземіз. $0(0,0)$ нүктесінің координаттарын $-x_1 + x_2 \leq 2$ теңсіздігіне қойып, $0<2$, яғни теңсіздікті қанағаттандыратын $0(0,0)$ нүктесінің координаттарын аламыз, демек, екінші теңсіздіктің шешімі жарты жазықтықтың шектік түзудің $0(0,0)$ нүктесі орналасқан бөлігіндегі барлық нүктелері болып табылады.

Одан әрі қарай үшінші теңсіздіктің шешімін анықтаймыз

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$2x_1 - 3x_2 = 6$ шектік түзуді екі нүкте бойынша құрамыз:

$\underline{x_1 = 0}$, $0 - 3x_2 = 6$ $\underline{x_2 = -2}$

$\underline{x_2 = 0}$, $2x_1 - 0 = 6$ $\underline{x_1 = 3}$

x_1	x_2
0	- 2
3	0

Д(0,-2)

Е (3,0)

0(0,0) нүктесі де осы теңсіздікті қанағаттандырады, енді 6-суретте *0(0,0)* нүктесі бар және, демек, теңсіздіктің шешімі болып табылатын жарты жазықтықты стрелкамен көрсетеміз.

Одан соң осы жолмен төртінші теңсіздіктің графикалық шешімін табамыз

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

Шектік түзуді

$$x_1 + x_2 = 8$$

келесі екі нүкте бойынша құрайық: $x_1 = 4$ болса, онда $4 + x_2 = 8$, $x_2 = 4$, ал $x_1 = 3$ десек, x_2 анықтаймыз:

$$3 + x_2 = 8, \ x_2 = 5$$

M(4,4) және *N (3,5)* нүктелерін тауып, осы нүктелер арқылы түзу жүргіземіз. *0(0,0)* нүктесінің координаттары берілген теңсіздікті қанағаттандырады, себебі 0 + 0 <8.

Сондықтан да берілген теңсіздіктің шешімі жарты жазықтықтың шектік түзудің *0(0,0)* нүктесі орналасқан бөлігіндегі нүктелері болып табылады.

$x_1 \geq 0$ *и* $x_2 \leq 0$ шарттары көрсетіп отырғандай, шешім бірінші квадрантта.

Алынған жарты жазықтықтардың қиысуы берілген есептің шешімінің көпбұрышын анықтайды. 6-суретте көрсетілгендей, шешімнің көпбұрышы *ABEQZ* бесбұрышы болып табылады. Осы бесбұрыштағы кез келген нүктенің координаттары есептің шектеуін қанағаттандырады, енді осы нүктелер жиынтығының ішінен

$$f(x) = 3x_1 - 2x_2$$

желілік формасы өзінің максималды мәніне ие болатын нүктені табу қажет. Бұл нүктені табу үшін *f(x)* функциясының ұлғаю бағытын көрсететін С= $(c_1 , c_2) = (3, - 2)$ векторын құрамыз. $f(x)= 3x_1 +2x_2$ түзуін құрып, $f(x)$ еркін мән береміз, мысалы, $f(x)= 6$, яғни $3x_1 - 2x_2 = 6$ түзуін құрамыз.

Оны тағы да өзінің екі нүктесі бойынша құрамыз. $x_1 = 0$ болсын, сонда x_2 анықталады:

$$3 \cdot 0 - 2x_2 = 6, \ x_2 = -3$$

Енді $x_2 = 0$ делік, онда $3x_1 - 2 \cdot 0 = 6$ қайдан $x_1 = 2$

Осылайша, (0, -3) және (2,0) нүктелері арқылы өтетін түзу құрамыз. 6-суретте бұл түзу үзік сызықпен белгіленген. Осы түзуді өзіне параллель түрде С векторы бағытымен жылжытар болсақ, оның шешімнің көпбұрышымен ортақ соңғы нүктесі Q нүктесі болатындығын көреміз. Бұл нүктенің координаттары оңтайлы жоспар немесе есептің шешімі болып табылады.

Q нүктесі 3 және 4 түзулерінің қиысу нүктесі болып табылады, демек, оның координаттары осы түзулердің теңдеуін қанағаттандырады

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Демек, бұл теңдеулер жүйесін Q нүктесінің координаттарын анықтау үшін шешу қажет. Жүйені шеше отырып, табамыз:

$x_1 = 6, x_2 = 2$, ал $\max f(x)= f(Q)= 3 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 18 - 4 = 14$

Сонымен, $X_{опт} = (6,2)$ және $f(x_{опт})= 14$ шешімі алынды.

1.5. Желілік программалау есептерін шешудің симплексті әдісі

Жоғарыда қарастырылған сызба тәсіл өзінің көрнекілігіне байланысты бірқатар құндылыққа ие, бірақ $n \geq 3$ болған жағдайда оны қолдану мүмкін емес. Мұндай есептерді шешу үшін басқа тәсілдер әзірленген. Осындай тәсілдердің бірі симплексті тәсіл болып табылады. Отандық әдебиеттерде ол жоспарды біртіндеп жақсарту тәсілі атауымен жиі кездеседі.

Тәсілдің идеясы – онда есепті шешімі көпқырлылығының сүйір ұшын реттемелі іріктеу жүзеге асады. Қандай да бір бұрыштың сүйір ұшы алынады да, онда желілік форманың мәні есептеледі. Содан соң желілік форманың мәні көрші көпқырлылықтың сүйір ұштарында есептеледі. Желілік форманың мәні барынша жоғары болған бұрыштың сүйір ұшы бастапқы ретінде қабылданады да, процедура қайталанады. Бұрыштың сүйір ұшын іріктеу есептің шешімі табылғанға дейін немесе есептің шешілмейтіндігі белгіленгенге дейін жүре береді. Сонымен қатар қадам саны түпкілікті, себебі жоспарлар жиынтығы немесе дөңес көпқырлылық, немесе дөңес көпқырлы аумақ, бірақ екі жағдайда да шеткі нүктелер (бұрыштардың сүйір ұштары) саны түпкілікті.

1.5.1. Тірек жоспардың оңтайлылық және оңтайсыздық өлшемдері

ЖП есебі канондық формада берілсін делік:

$$A_1x_1 + A_1x_2 + \dots + A_nx_n = B \qquad (6)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \overline{n} \qquad (7)$$

шарты жағдайында

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow max \qquad (5)$$

табу керек, мұндағы

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; \quad j = \overline{1,n}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

Қандай да бір төмендемеген (невырожденный) тірек жоспары белгілі болсын делік $x = (x_1\ x_2\ ,\ \dots,\ x_n)$. Талқылау қарапайым болу үшін жоспардың нольдік емес компоненттері алғашқы m компонент болсын деп, ал қалған компоненттері 0-ге тең деп есептелік, яғни $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$.

Осылайша, бастапқы тірек жоспары мынадай түрге ие:

$X = (x_1, x_2,\ \dots,\ x_m,\ 0, 0,\ \dots,\ 0)$ немесе $X = (x_1, x_2, \dots,\ x_m)$

Бәрімізге мәлім, әрбір тірек жоспарға берілген жүйенің желілік тәуелсіз векторлар жүйесі $A_1, A_2\ , \dots,\ A_{kn}$ сәйкес келеді.

Бастапқы тірек жоспарына $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ m-өлшемдік кеңістікте базис құратын $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Желілік тәуелсіз векторлар сәйкес келеді. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ - есеп жоспары болғандықтан, ол (6) шартын қанағаттандырады, яғни

$$A_1 x_1 + A_2 x_2, + \ldots + A_m x_m = B \quad \text{немесе} \quad \sum_{i=1}^{m} A_i x_i = B \qquad (8)$$

Есептің басқа еркін жоспарын алайық

$$X(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots, x_m(\theta), x_{m+1}(\theta), \ldots, x_n(\theta)),$$

Бұл бастапқы x жоспарынан өзінің j–ші компонентасының ($j>m$) 0-ден өзгешелігімен ерекшеленеді, яғни

$$X_{m+1}(\theta) = X_{m+2}(0) = \ldots = X_{j-1}(\theta) = X_{j+1}(\theta) = \ldots = X_n(\theta) = 0, X_j(\theta) = \theta > 0$$

Осы жоспарлар арасында қандай байланыс бар екенін, яғни x жоспарынан жаңа $X(\theta)$ жоспарына қалай өтуге болатындығын қарастырайық.

$X(\theta)$ есептің жоспары болғандықтан, ол да (6) шартты қанағаттандырады:

$$A_1 x_1(\theta) + \ldots + A_m x_m(\theta) + A_j x_j(\theta) = B \qquad \text{немесе}$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i(\theta) + A_j x_j(\theta) = B \qquad \text{немесе}$$

(8) формуланы алып, екі бөліктен де $A_j \cdot \theta$ шығарып тастаймыз:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i(\theta) = B - A_j x_j(\theta) = B - A_j \cdot \theta \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i - A_j \cdot \theta = B - A_j \cdot \theta \qquad (10)$$

$A_1, \ldots, A_m$ векторлар жүйесі базис құратын болғандықтан, кез келген $A_j (j = \overline{1, n})$ векторын осы базис векторларына бір рет қана жіктеуге болады:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_i Z_{ij}, \; j = \overline{1, n} \qquad (11)$$

мұндағы Z_{ij} – жіктеу коэффициенті. (11)-ді (10)-ға әкеліп қояйық:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i - \theta \sum_{i=1}^{m} A_i Z_{ij} = B - A_j \cdot \theta \qquad \text{немесе}$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i (x_i - \theta Z_{ij}) = B - A_j \theta \qquad (12)$$

(9) және (12) формулаларын салыстыра отырып, олардың екеуі де сол бір вектордың B - $A_j \cdot \theta$ базис бойынша жіктелуі екендігін көреміз, ал мұндай жіктеу біреу ғана болғандықтан, онда, демек, жіктеу коэффициенттері тең болуы керек, яғни

$$x_i(\theta) = x_i - \theta \cdot Z_{ij}, \qquad i = \overline{1, m}, \qquad j = \overline{1, n} \qquad (13)$$

Осылайша, бір тірек жоспарынан екінші тірек жоспарына өтуге болатын реккуретті қатынас алдық. Сонымен бірге $x(\theta)$ (5) - (7) есебінің жоспары болу үшін, θ $x_i(\theta) \geq 0$ болатындай етіп таңдалып алынады. Бұдан басқа, $x(\theta)$ тірек жоспары болуы үшін, онда m- нен кем нольдік емес компоненттер болуы қажет, яғни θ $x_1(\theta)$ компонеттерінің бірі 0-ге айналатындай етіп таңдалып алынады:

$$x_i(\theta) = x_i - \theta Z_{ij} = 0, \theta = \frac{x_i}{Z_{ij}} \quad i = \overline{1, m}, \qquad j = \overline{1, n}$$

Ең дұрысы,

$$\theta = \min_i \frac{x_i}{Z_{ij}} > 0$$

алу керек.

$\theta = \min\limits_i \dfrac{x_i}{Z_{ij}} = \dfrac{x_r}{Z_{rj}} > 0$ болсын делік, онда

$X_r(\theta) = X_r - \theta \cdot Z_{rj} = X_r - X_r = 0$, *т.е.*

$X(\theta) = X_1(\theta), \ldots, X_{r-1}(\theta), 0, X_{r+1}(\theta), \ldots, X_m(\theta), 0 \ldots X_j(\theta) \ldots 0;$

Осылайша, $X(\theta)$ құрамында m нольдік емес компоненттер және $A_1, A_2,..., A_{r-1}, A_{r+1},...,A_m$ жоспарының нольдік емес компоненттеріне сәйкес келетін векторлар бар, A_j желілік тәуелсіз. Демек, $x(\theta)$ жоспары – тірек жоспары.

Назар аударатын тағы бір мәселе, бір x тірек жоспарынан екінші $x(\theta)$ жоспарына өткенде бастапқы $A_1,...,A_m$ бір A_r векторы шығарылған, ал қалған $A_{m+1},..., A_n$ векторларының ішіндегі екінші A_j векторы енгізілген.

Желілік форманың жаңа $x(\theta)$ тірек жоспарына сәйкес мәнін анықтайық. Айта кететін нәрсе, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i$- желілік форманың бастапқы x жоспарына сәйкес келетін мәні.

$$f(x(\theta) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i(\theta) + c_j x_j(\theta)$$

Осы формулаға (13)-ті қоямыз:

$$f(x(\theta) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i - \theta Z_{ij}) + C_j \cdot \theta = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i - \theta(\sum_{i=1}^{m} c_i Z_{ij} - c_j)$$

$\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i = f(x)$ екендігін ескере отырып және $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i Z_{ij} = Z_j$, деп белгілегенде, соңғы формула мынадай түрге ие болады: $f(x(\theta)) = f(x) - \theta(Z_j - c_j)$, $Z_j - C_j = \Delta_j$), деп белгілеп, мынаны аламыз: $f(x(\theta)) = f(x) - \theta \Delta_j$, себебі $\theta \geq 0$ болса, онда 3 жағдай болуы мүмкін:

1) $\Delta_j \geq 0$ барлығы үшін $j = \overline{1, n}$, сонда $f(x(\theta)) \leq f(x)$, яғни x жоспарына желілік форманың максималды мәні сәйкес келеді. Тірек жоспарының оңтайлылығының келесі критерийлерін аламыз.

4-теорема. (5)-(7) есептерінің $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ тірек жоспары оңтайлы болып табылады, егер $\Delta_j \geq 0$ кез келген $j = \overline{1, n}$ үшін болса.

2) $\Delta_j < 0$ кейбір $\Delta_j < 0$ үшін және оған сәйкес келетін z_{ij} арасында оң сан болатын болса. Мұндай жағдайда $f(x(\theta))> f(x)$,, яғни бұл жағдайда x бастапқы жоспары оңтайлы емес және желілік форманың үлкен мәні бар $X(\theta)$ жоспарын құруға болады. Осылайша, тірек жоспарының оңтайлы еместігінің келесі критерийлерін аламыз.

5-теорема. Егер x тірек жоспары төмендемеген және $\Delta_j < 0$ кейбір $j = k$ үшін болса және z_{ik} сандарының арасында оң сандар бар болатын болса, онда x жоспары – оңтайлы емес және оның жақсартылуы мүмкін.

3) $\Delta_j < 0$ кейбір $j = k$ үшін және барлық $z_{ik} \le 0$, онда x жоспары оңтайлы емес, бірақ жаңа жоспар құру мүмкін емес, себебі төмендегідей болатын θ табу мүмкін емес:

$$\theta = \min_i \frac{x_i}{z_{ik}} > 0$$

6-теорема. Егер $\Delta_j < 0$ кейбір $j = k$ үшін және барлық $z_{ik} \le 0$, онда есеп шешілмейді.

1.5.2. Бастапқы тірек жоспарды құру

Жоғарыда айтылғандай, ЖП есебін симплексті тәсілмен шешу бір тірек жоспарынан желілік форма мәні ұлғаятын екінші жоспарға өтуге негізделеді, яғни оңтайлы жоспарды іздей процесі кейбір бастапқы тірек жоспарынан басталады.

(5)-(7) есебін қарастырайық. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0 \ldots 0)$ – осы есептің төмендемеген тірек жоспары болсын делік. Мұндағы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – есеп базисі. X-ті (6) шартына қоямыз:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i = B \quad (**)$$

$A_0 = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ – төмендемеген матрица деп белгілейміз, себебі $A_1, A_2, \ldots, A_m$ векторлары желілік тәуелсіз. Сонда формуланы (**) матрицалық түрде жазуға болады:

$A_0x = B$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (14)

A_0 – төмендемеген матрица болғандықтан, A_0^{-1} кері матрицасы болады, ол жалғыз. (14)-ті сол жағынан A_0^{-1}-ға көбейтейік:

$A_0^{-1}A_0x = A_0^{-1}B$ себебі $A_0^{-1}A_0 = E$ онда $x = A_0^{-1}B$ (15)

Бастапқы тірек жоспарының компоненттері осылай анықталады. Оның оңтайлылығын бағалау үшін шамасын анықтау қажет

$$\Delta_j = Z_j - c_j, \; j = \overline{1,n}, \qquad где \qquad Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i Z_{ij},$$ яғни

Z_{ij} - A_j векторының ажырау коэффициентін

$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_i Z_{ij}, \quad j = \overline{1,n}$ базисі бойынша табу қажет.

Бұл формуланы енгізілген $A_0 = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ белгісін пайдалана отырып, матрицалық түрде жазамыз:

$A_j = A_0x_j$, мұндағы $X_j = (Z_{ij}, Z_{2j}, \ldots Z_{Zmj})$

Осы формуланың екі бөлігін сол жағынан A_0^{-1} –ға көбейтіп, аламыз:

$A_0^{-1}A_j = A_0^{-1}A_0x_j$, яғни, $x_j = A_0^{-1}A_j$ (16)

Сонымен, (15) және (16) формулалары бастапқы тірек жоспарын анықтауға және оның оңтайлылығын бағлауға мүмкіндік береді. Дегенмен есептеу процедуралары тұрғысынан бұл формулалар едәуір қиындықтар тудырады. Егер $A_0 = E$- жалғыз матрица болса, есеп недәуір жеңілденеді, онда аламыз:

$X = B$ (17)
$x_j = A_j$

себебі $A_0^{-1} = E$ яғни

$x_i = b_i, \quad i = \overline{1,m}$ (17)
$Z_{ij} = a_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$

1.5.3. Симплексті әдістің алгоритмі және есептеу сызбасы

ЖП-дың төмендегі түрде жазылған есебін қарастырайық:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 + \qquad a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

шарты жағдайында

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$ табу керек.

Бұл есептің векторлық формасы мынадай түрге ие:

$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$

$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$ шарты жағдайында

$f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max$ табу керек, мұндағы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \ldots \qquad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \ldots, \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Көріп тұрғанымыздай, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – векторлар жүйесі желілік тәуелсіз және матрица $A_0 = (A_1, A_2, \ldots A_m) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{pmatrix} = E$$

Бұл жағдайда, егер $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – жүйесін бастапқы базис ретінде қабылдасақ, онда оған $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ бастапқы тірек жоспары сәйкес келеді.

Мұнымен қатар, $A_0=E$ болғандықтан, (17′) негізінде

$$x_i = b_i \qquad i = \overline{1, m}$$

$$Z_{ij} = a_{ij} \qquad i = \overline{1, m}, \qquad j = \overline{1, n}$$

Осылайша, бастапқы тірек жоспары мына түрге ие:

$$x=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0).$$

Егер нольдік компоненттерді алып тастасақ, онда $x = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Тірек жоспарын оңтайлылыққа зерттеуді, сонымен қатар одан кейінгі есептеу процедураларын симплексті деп аталатын төменде берілген кестелер түрінде жүргізген ыңғайлы (2-кесте). Бұл кестедегі C_0 бағанында желілік форманың базис векторындағыдай индекске ие белгісіздерінің коэффициенттері жазылады.

2-кесте

				C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
I	Базис	C_0	B	A_1	A_2	…	A_r	…	A_m	A_{m+1}	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	X_1	1	0	…	0	…	0	Z_{1m+1}	…	Z_{1k}	…	Z_{1n}
2	A_2	C_2	X_2	0	1	…	0	…	0	Z_{2m+1}	…	Z_{2k}	…	Z_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R	A_r	C_r	X_r	0	0	…	1	…	0	Z_{rm+1}	…	Z_{rk}	…	Z_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	A_m	C_m	X_m	0	0	…	1	…	1	Z_{mm+1}	…	Z_{mk}	…	Z_{mn}
m+1			f(x)	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

В бағанында бастапқы тірек жоспарының оң компоненттерін жазамыз. Осы бағанда есептеу нәтижесінде оңтайлы жоспардың оң компоненттері анықталады. A_j ($j = \overline{1,n}$) векторларының бағандарында осы векторлардың (Ƶ_{ij}) базисі бойынша ажырау коэффициенті орналасады, берілген жағдайда $\text{Ƶ}_{ij} = a_{ij}$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Осылайша, әуелгі кестенің бірінші m жолы есептің бастапқы деректері негізінде құрылады. Ал кестенің ($m+1$) –ші жолының көрсеткіштері есептеліп шығарылады. В бағанындағы осы жолда желілік форманың берілген тірек жоспарына сәйкес келетін мәні жазылады, ал келесі A_j бағанында - $\Delta_j = \text{Ƶ}_j - C_\partial$, $(j = \overline{1,n})$ мәні. Шындығында да, мысалы, Δ_1 –ді есептеп шығаралық:

$$\Delta_1 = \text{Ƶ}_1 - C_1 = \sum_{i=1}^{m} C_i \text{Ƶ}_{i1} - C_1 = C_1 \text{Ƶ}_{11} + C_2 \text{Ƶ}_{21} + \Lambda + C_m \text{Ƶ}_{m1} - C_1 =$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \Lambda + C_m \cdot 0 - C_1 = C_1 - C_1 = 0$$

Сол секілді

$$\Delta_2 = \text{Ƶ}_2 - C_2 = \sum_{i=1}^{m} C_i \text{Ƶ}_{i2} - C_2 = \sum_{i=1}^{m} C_i a_{i2} - C_2 =$$

$$C_1 a_{12} + C_2 a_{22} + \Lambda + C_m a_{m2} - C_2 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \Lambda + C_m \cdot 0 - C_2 = 0$$

және т.б., ең соңында

$$\Delta_m = \text{Ƶ}_m - C_m = \sum_{i=1}^{m} C_i \text{Ƶ}_{im} - C_m = \sum_{i=1}^{m} C_i a_{im} - C_m =$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \Lambda + C_m \cdot 1 - C_m = 0$$

Симплексті кестенің бастапқы деректерін толтырғаннан кейін итеративті есептеу процесі басталады, ол төменде келтірілген бірнеше қадамнан тұрады.

1-қадам. Жоспарды оңтайлылыққа тексеру. Бұл үшін ($m+1$)-ші жолдың элементтері қаралады - $\Delta_j, j = \overline{1,n}$. Егер $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$ болса, онда осы кестеде жазылған тірек жоспары оңтайлылық критерийіне сәйкес оңтайлы болып табылады. Есептеу процесі аяқталды. Егер $\Delta_j<0$ кейбір белгіленген j үшін болса, онда кестеде жазылған тірек жоспары оңтайлы емес болып табылады және оның жақсартылуы мүмкін, яғни желілік формасының мәні үлкен жаңа тірек жоспарын құруға болады. Жоғарыда айтылғандай, бір тірек жоспарынан екінші тірек жоспарына өту үшін бастапқы базис векторларының бірін шығарып, оның орнына басқа вектор енгізу керек. Сондықтан келесі қадамдар базиске енгізілетін және одан шығарылатын базистерді анықтаумен байланысты болады.

2-қадам. Базиске енгізілетін векторды анықтау. Жалпы алғанда, базиске енгізілетін вектор ретінде A_j векторларының ол үшін $\Delta_j<0$ болатын кез келген векторын алуға болады. Бірақ, оңтайлы жоспар алу процесін жылдамдату үшін базиске A_j-дің ол үшін $\min\limits_{j} \Delta_j$ орын алатын векторын енгізген ыңғайлы. $\min\limits_{j} \Delta_j = \Delta_k < 0$ болсын делік. Бұл A_k векторының базиске енгізілетінін білдіреді. Мұнда оған сәйкес келетін бағанды бағыттаушы деп атайды.

3-қадам. Базистен шығарылатын векторды анықтау. Базистен шығарылуы тиіс векторларды анықтау үшін $\theta = \min\limits_{i, z_{ik}>0} \frac{x_i}{z_{ik}}$ саны анықталады. $\theta = \min\limits_{i} \frac{x_i}{z_{ik}} = \frac{x_r}{z_{rk}} > 0$ болсын делік. Бұл A_r векторының базистен шығарылатынын білдіреді, ал кестенің r- ші жолын бағыттаушы деп атайды. Мұнда, атап өту қажет, егер $z_{ik} \le 0, \quad i=\overline{1,m}$ болса, онда есеп шешілмейді.

4-қадам. Симплексті кестенің Гаусс формулалары бойынша қайта құрылуы. Бұл қадамда бастапқы симплексті кестенің барлық элементтері Гаусс формулалары бойынша қайта құрылады. Мұнда жаңа тірек жоспарының компоненттері төмендегі формулалар бойынша анықталады:

$$X'_i = \begin{cases} X_i - \dfrac{x_r}{z_{rk}} z_{ik}, & i \neq r \\ \dfrac{x_r}{z_{rk}}; & i = r \end{cases} \tag{18}$$

A_j векторларының жаңа тірек жоспарына сәйкес келетін жаңа базис бойынша ыдырау коэффициенті төмендегі формулалар бойынша анықталады:

$$Z'_{ij} = \begin{cases} z_{ij} - \dfrac{z_{rj}}{z_{rk}} \cdot z_{ik}, & i \neq r \\ \dfrac{z_{rj}}{z_{rk}}; & i = r \end{cases} \tag{19}$$

Алынған x'_i және Z'_{ij} мәндерін жаңа симплексті кестеге жазады. Мұнда осы кестенің ($m+1$)-ші жолының элементтері оларды анықтау негізінде немесе Гаусс формулалары бойынша анықталады:

$$\begin{cases} f(x') = f(x) - \dfrac{x_r}{z_{rk}} \Delta_k \\ \Delta'_j = \Delta_j - \dfrac{z_{rj}}{z_{rk}} \Delta_k; & j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{20}$$

Осылайша, (18)-(20) рекурренті формулаларының негізінде жаңа симплексті кестені аламыз (3-кесте), онда жаңа тірек жоспарының нольдік емес компоненттері, A_j векторларының жаңа тірек жоспарына сәйкес келетін жаңа базис бойынша ыдырау коэффициенті жазылады.

Жаңа симплексті кестені толтырғаннан кейін 1-қадамға, яғни жаңа тірек жоспарын оңтайлылыққа тексеруге көшеміз. 1-4 қадамдары оңтайлы жоспар анықталғанша немесе есептің шығарылмайтындығы белгілі болғанша қайталана береді.

3-кесте.

				C_1	C_2	…	C_r	..	C_m	C_m+1	…	C_k	..	C_n
I	Ба-зис	C_0	B	A_1	A_2	…	A_r	..	A_m	A_m+1	…	A_k	..	A_n
1	A_1	C_1	X_1'	1	0	…	Z'_{1r}	..	Z'_{1m}	Z'_{1m+1}	…	0	..	Z'_{1n}
2	A_2	C_2	X_2'	0	1	…	Z'_{2r}	..	Z'_{2m}	Z'_{2m+1}	…	0	..	Z'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R	A_k	C_k	X_k'	0	0	…	Z'_{rr}	..	Z'_{rm}	Z'_{rm+1}	…	1	..	Z'_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	A_m	C_m	X_m'	0	0	…	Z'_{mr}	..	Z'_{mm}	Z'_{mm+1}	…	0	..	Z'_{mn}
m+1			$f(x')$	0	0	…	Δ'_r	..	0	Δ'_{m+1}	…	0	..	Δ'_n

Сонымен, бір тірек жоспарынан екіншісіне өту бір симплексті кестеден екіншісіне өтуге тіреледі. Жаңа симплексті кесте элементтерін (18)-(20) рекуррентті формулалар көмегімен, немесе тікелей осылардан шығатын ережелер бойынша есептеп шығаруға болады. Бұл ережелер мынадай.

r – кестенің бағыттаушы жолы, ал *k* – бағыттаушы бағаны болсын делік. *r* –ші жол мен *k* –ші бағанның қиылысында тұрған элементті бағыттаушы деп атаймыз. Сонда C_0 бағанының бағыттаушы жолына берілген C_k шамасын қоямыз. Бастапқы кестенің бағыттаушы жолының (* жаңа кестенікі осы жолдың элементтерін бөлумен анықталады) элементтерін бағыттаушы элментке. Жаңа кестенің бағыттаушы бағанының бағыттаушы элменттерден басқа барлық элменттері 0-ге тең, жаңа кестенің бағыттаушы элменті 1-ге тең. Жаңа кестенің базисінде қалған векторлар өзгеріссіз жазылады. Қалған элементтер тікбұрыштың келесі мнемоникалық ережесі бойынша анықталады. Жаңа кестенің Z'_{ij} элементін анықтау үшін ескі кестеде тікбұрыш құрылады, ол *i*-ші және *r*-ші жолдарымен және *j*-ші және *k*-ші бағандарымен анықталады.

	j-ші баған		k-ші баған	
	Z_{ij}		Z_{ik}	*i*-ші жол
	Z_{rj}		$\boldsymbol{Z_{rk}}$	*r*-ші жол

7-сурет

$$Ƶ'_{ij} = Ƶ_{ij} - \frac{Ƶ_{ij} \cdot Ƶ_{ik}}{Ƶ_{rk}}$$

Мысал:

$f(x)= 3x_1 + 2x_3 -6x_6 \ \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 \qquad - 2x_6 = 24 \\ x_1 \qquad + 3x_3 + x_5 \qquad - 4x_6 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,6}$$

шарты жағдайында.

Шешімі. Шектеулер жүйесін вектрлық формада жазамыз:

$A_1x_1+A_2\,x_2,+ A_3\,x_3 +A_4x_4+A_5\,x_5+ A_6\,x_6 =B,$ мұндағы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Көріп тұрғанымыздай, осы векторлар арасында жекелеген A_2,A_4,A_5 кездеседі, сонымен қатар осы векторлардан құрылған матрица – жекелеген матрица:

$$(A_2, A_4, A_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Демек, осы векторларды бастапқы базис ретінде алуға болады. Бұл базиске $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,,x_6)$ тірек жоспары сәйкес келеді (анықтама бойынша), ондағы нольдік емес компоненттер сәйкесінше $x_2,,x_4,x_5$ болады, яғни тірек жоспары $x=(0,x_2,0,x_4, x_5,0)$. Жоғарыда айтылғанға сәйкес, $x_2=18,\ x_4 =24,\ x_5 = 36.$ Бұл нәтижені, сонымен қатар, $x=(0,x_2,\ 0,\ x_4,\ x_5,0)$ тірек жоспарын шектеулі есептер жүйесіне қою арқылы да алуға болады. Шын мәнінде, тірек жоспарын бірінші теңдікке қоялық:

$$2 \cdot 0 + x_2 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 18, \text{ шығатыны } x_2 = 18$$

Тірек жоспарды екінші және үшінші шектеулерге қоя отырып, аламыз: $x_4=24$, $x_5=36$. Осылайша, бастапқы базисті A_2, A_4, A_5 векторлары құрайды, бұл базиске $x=(0, 18, 0, 24, 36, 0)$ бастапқы тірек жоспары сәйкес келеді.

Бастапқы симплексті кесте құрайық.

4-кесте

	C_0	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ
A_2	0	18	2	1	-3	0	0	6	9
A_4	0	24	-3	0	2	1	0	-2	-
A_5	0	36	1	0	3	0	1	-4	36
Δ		0	-3	0	-2	0	0	6	

Бастапқы симплексті кестенің қалай толтырылатынын сипаттайық. Бірінші бағанда $A_j\,(j=\overline{1,6})$-ның бастапқы базис құратын векторлары, яғни A_2, A_4, A_5 векторлары жазылады. Келесі C_0 бағанында базис векторы секілді индекске ие $f(x)$ желілік формасының белгісіздері жағдайындағы коэффициент-тер орналастырылады, яғни $c_2=0$, $c_4=0$, $c_5=0$. B бағанында $x_2=18$, $x_4=24$, $x_5=36$ жоспарының нөльдік емес компоненттері жазылады, ал осы бағанның соңғы жолында (Δ-жолында) желілік форманың берілген жоспар жағдайында қабылдайтын мәні енгізіледі. Бұл мән B векторының C_0 векторына скалярлық туындысына тең. Бұл жағдайда төмендегіні аламыз:

$$f(x)= c_2x_2 + c_4x_4 + c_5x_5 = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 36 = 0$$

Кестенің келесі бағандарында (алғашқы үш жолында) A_j ($j=\overline{1,n}$) векторларының базис векторлары бойынша ыдырау коэффициенттері орналасады. Жоғарыда көрсетілгендей, егер базис жекелеген векторлар құратын болса, онда A_j векторының базис бойынша ыдырау коэффициенті $Z_{ij}=a_{ij}$, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,6}$. Сондықтан кестенің бұл бөлігі тапсырманың бастапқы деректері негізінде құралады. $A_1, \ldots, A_6$ бағандарының соңғы жолында Δ_j: $\Delta_j = Z_j - C_j$, $j=\overline{1,6}$

мәндері жазылады, Zj мұнда A_j ($j = \overline{1,n}$) векторының C_0 =(c_2, c_4, c_5) векторына скалярлық туындысы ретінде тұр, ал C_j $(j = \overline{1,6})$ - бұл желілік форманың коэффициенттері. Мысалы, анықтайық

Δ_1: $\Delta_1 = Z_1 - C_1 = A_1 \cdot C_0 - C_1 = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 3 = -3$

Δ_2, Δ_3 және басқалар осы секілді есептеледі.

$\Delta_2 = Z_2 - C_2 = A_2 \cdot C_0 - C_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_3 = Z_3 - C_3 = A_3 \cdot C_0 - C_3 = (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$ және т.б.

Симплексті кесте толтырылғаннан кейін бастапқы тірек жоспары оңтайлылыққа тексеріледі. Егер барлық $\Delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$, онда тірек жоспары оңтайлы. Бұл жағдайда Δ_j арасында теріс $\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_3 = -2 < 0$ бар. Сондықтан бастапқы тірек жоспары оңтайлы емес және оны жақсарту қажет (егер мүмкін болса), яғни желілік форманың көбірек мәні сәйкес келетін жаңа тірек жоспарын құру керек.

Жаңа тірек жоспарына өту үшін базис секторларының бірін шығарып, оның орнына берілген $A_j(j = \overline{1,6})$ векторлар жүйесінің басқа векторын енгіземіз. Базиске енгізілетін векторды анықтау үшін минималды $\Delta_j (j = \overline{1,6})$ табылады.

$$\min_j \Delta_j = \min(-3,0,-2,0,0,6) = \Delta_1 = -3 < 0$$

Демек, A_1 векторы базиске енгізіледі және оған сәйкес келетін баған бағыттаушы болып табылады. Кестедегі осы бағанды бөліп көрсетеміз.

Одан соң базистен шығарылуы қажет векторды анықтаймыз. Осы мақсатпен B бағанының элементтерінің бағыттаушы бағанның оң элементтеріне қатынастары есептеп шығарылады, олар симплексті кестенің соңғы бағанына жазылады. Осы қатынастар ішінен минималдысы ізделіп табылады да, ол базистен шығарылатын векторды анықтайды. Берілген жағдайда аламыз:

$$\theta = \min_{i, Zij > 0} \frac{xi}{Zij} = \min\left(\frac{18}{2}; \frac{36}{1}\right) = \min(9,36) = 9$$

Минималды қатынас A_2 векторына сәйкес келеді, демек, осы вектор базистен шығарылады, ал сәйкес жол бағыттаушы деп аталады. Осы жолды бөліп көрсетеміз.

Содан соң симплексті тәсілдің алгоритміне сәйкес симплексті кестенің Гаусс формуласы бойынша қайта құрылуы жүргізіледі. Келесі кестені аламыз (5-кесте).

5-кесте

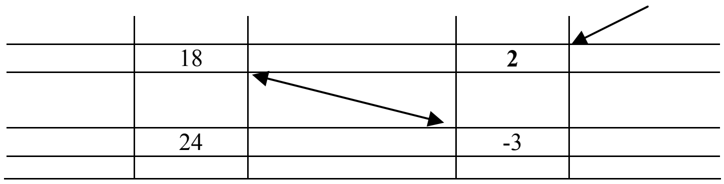
	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ
A_1	3	9	1	½	$-^3/_2$	0	0	3	-
A_4	0	51	0	$^3/_2$	$-^5/_2$	1	0	7	-
A_5	0	27	0	-½	$^9/_2$	0	1	-7	
Δ		27	0	$^3/_2$	$-^{13}/_2$	0	0	15	

Гаусс формуласы бойынша есептеулерге нақтырақ тоқталып өтейік. Жаңа кестеде базистегі A_2 векторының орнына A_1 векторы қойылған, ал C_0 бағанында сәйкесінше $C_1 = 3$ тұр.

Әуелі бағыттаушы жолдың элементтері анықталады, оларды бағыттаушы элементке бөлу арқылы аламыз (бағыттауғы элемент бағыттаушы жол мен бағыттаушы бағанның қиылысында тұр), яғни бастапқы кестеде бірінші жолдың (бағыттаушы) элементтерін 2-ге бөлеміз. Сонымен жаңа кестенің бірінші жолын алдық.

Содан соң бағыттаушы бағанның элементтерін анықтаймыз. Гаусс формуласы бойынша олардың бағыттаушы элементтен басқасының барлығы 0-ге тең, ал бағыттаушы элементі 1-ге тең. Осылайша, жаңа кестенің A_1 бағанын алдық.

Қалған элементтер жоғарыда келтірілген тікбұрыштың мнемоникалық ережесі көмегімен анықталады. Мысалы, 5-кестенің B бағанында және A_4 жолында тұрған элементті қалай есептеп шығару керек екендігін көрсетейік. Бұл үшін бастапқы 4-кестеде сәйкес элемент үшін тікбұрыш құрамыз, оның шыңдарында бағыттаушы жолдың және баған мен бағыттаушы элементтің элементтері, яғни бағыттаушы элемент тұрады.



8-сурет

$$24-\frac{18(-3)}{2}=24+27=51$$

Жаңа кестеде 24 санының орнына алынған 51 саны қойылады.

4-кестенің *B* бағанындағы келесі элемент былайша қайта құрылады:

	18		**2**	
	36		1	

9-сурет

$$36-\frac{18\cdot 1}{2}=36-9=27$$

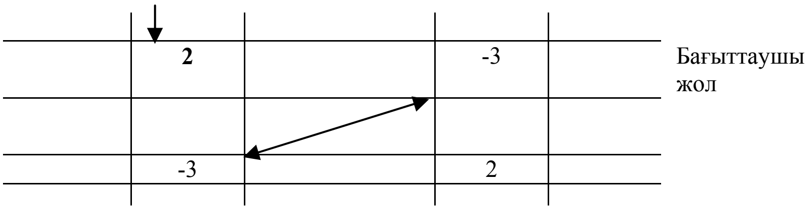
5-кестенің *B* бағанындағы соңғы элементті есептеп шығару үшін мынадай тікбұрыш аламыз:

	18		**2**	
	0		-3	

10-сурет

$$0-\frac{18(-3)}{2}=0+27=27$$

Одан әрі қарай 4-кестенің A_3 бағанында және A_4 жолында тұрған элементті анықтаймыз. Бұл үшін 3-кестеде төменде келтірілгендей тікбұрыш құрамыз. 4-кестенің ізделінді элементіне сәйкес келетін 2 элементінен баған бойынша бағыттаушы жолға қарай жүреміз, шың элементін (-3) табамыз және 2 элементінен жол бойынша бағыттаушы бағанға қарай жүреміз, тағы да шаң элементін (-3) анықтаймыз, енді тікбұрыштың соңғы элементі болып бағыттаушы 2 элементі, бағыттаушы баған табылады.



11-сурет

$$2-\frac{(-3)(-3)}{2}=\frac{4-9}{2}=-\frac{5}{2}$$

4-кестенің барлық элементтерінің Гаусс формуласы бойынша қайта құрылуы нәтижесінде 5-кестені аламыз.

5-кестеде жаңа тірек жоспары және A_j векторларының жаңа A_2,A_4,A_5 базисі бойынша ыдырау коэффициенті жазылған. 5-кестеден көрініп тұрғандай, оның нөлдік емес компоненттері x_1,x_4,x_5 болады (жаңа базиске сәйкес), және де

$x_1 = 9,\ x_4 = 51,\ x_5 = 27,\ x_2 = x_3 = x_6 = 0.$

Жаңа жоспарға сәйкес келетін желілік форманың мәні 27-ге тең.

Бірақ, 5-кестеден көрініп тұрғандай, бұл жоспар да оңтайлы емес, себебі $\Delta 3=-\frac{13}{2}<0$. Демек, симплексті процесс жалғасуда.

Δ_j арасында бір ғана теріс болғандықтан, дәлірек айтсақ, Δ_3, онда A_3 векторы базиске енгізіледі, ал оған сәйкес келетін баған бағыттаушы болып табылады. Оны бөліп көрсетеміз. θ-ні анықтаймыз. Мұндағы тапсырма да оңайланады, себебі бағыттаушы бағанда бір элемент қана оң, сол элемент базистен шығарылатын векторды анықтайды. Мұндай вектор A_5 болып табылады, ал оған сәйкес келетін жол - бағыттаушы жол, оны да бөліп көрсетеміз.

5-кестені Гаусс формуласы бойынша өзгертеміз. 6-кестені аламыз.

6-кесте

	C_0	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	3	18	1	$^3/_9$	0	0	$^3/_9$	$^6/_9$
A_4	0	66	0	$^{12}/_9$	0	1	$^5/_9$	$^{28}/_9$
A_3	2	6	0	$-^1/_9$	1	0	$^2/_9$	$-^{14}/_9$
Δ		66	0	$^7/_9$	0	0	$^{13}/_9$	$^{44}/_9$

Көріп тұрғанымыздай, $\Delta_j \geq 0, j = \overline{1,6}$, демек, $x=(x_1,0,x_3,x_4 0,0)$ $= (18,0,6,66,0,0)$ жоспары оңтайлы, ал $f(x)=66$ мәні берілген шектеулер жағдайындағы осы функция үшін максималды.

Бір симплексті кестеден екіншісіне өту барысында соңғы жолдың элементтерін Гаусс формуласы бойынша да, бастапқы симплексті кестені құру кезінде жүргізілген есептеулерге ұқсас есептеулер жүргізу бойынша да анықтауға болады.

1.6. Стандартты түрдегі желілік программалау есептерін шешудің симплексті әдісі

Стандартты түрдегі желілік программалау тапсырмалары былайша жазылады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \qquad (22)$$

$$x_j \geq 0, \, j = \overline{1,n} \qquad (23)$$

шарты жағдайында

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max \qquad (21)$$

(21)-(23) есептерін канондық түрге келтірейік, ол үшін әрбір теңсіздік (22) теңдікке айналатын қосымша $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \ldots,$ $x_{n+m} \geq 0$ теріс емес ауыспалыларды енгіземіз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad (22')$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1, n+m} \qquad (23')$$

Шектеулердің өзгертілген жүйесін векторлық түрде жазамыз:

$A_1x_1+A_2\,x_2,+\ldots+A_n\,x_n\;+A_{n+1}x_{n+1}+\ldots+A_{n+m}\,x_{n+m}\;=B,$ мұндағы

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix};\quad \ldots,\;A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix};\quad A_{n+1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\quad A_{n+2}=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix};\quad \ldots,$$

$$A_{n+m}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

A_j ($j=\overline{1,n+m}$) векторларының арасында m бірліктері

$A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$,

бар болғандықтан, оларды бастапқы тірек жоспары сәйкес келетін

$$X=(\overbrace{0,0,\ldots,0}^{n},x_{n+1},\ldots,x_{n+m})=(0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)$$

бастапқы базис ретінде қабылдауға болады.

Қосымша ауыспалылардың желілік формаға кірмейтінін есепке ала отырып, бастапқы симплексті кестені құрамыз, яғни

$$C_{n+1}=C_{n+2}=\ldots=C_{n+m}=0,\;\; C_0=(C_{n+1},\ldots,C_{n+m})=(0,0,\ldots,0),$$

аламыз: $f(x)=(C_0\,B)=(0\cdot b_1\;+0\cdot b_2+\ldots+0\;\cdot b_m=0$

$$\Delta_j=Z_j-c_j,=(C_0\cdot A_j)-c_j=0-c_j=-c_j,\;\; j=\overline{1,n+m}$$

Осылайша, бастапқы симплексті кесте мынадай түрге ие болады (7-кесте):

7-кесте

Базис	C_0	B	A_1	A_2	…	A_n	A_{n+1}	A_{n+2}	..	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	..	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	..	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	..	⋮
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	..	1
Δ		0	$-c_1$	$-c_1$	…	$-c_n$	0	0	..	0

Үлгі ретінде төменде берілетін есепті қарастыралық.

Кәсіпорын төрт түрлі өнім шығарады және негізгі құрылғылардың үш түрін пайдаланады: токарьлық, фрезерлік және тегістеуші. Құрылғылардың әрбір түрінде өнім бірлігін даярлауға жұмсалатын уақыт шығыны 8-кестеде келтірілген. Сол кестеде құрылғылардың әрбір түріне жұмсалатын жұмыс уақытының жалпы қоры, қандай да бір өнім бірлігін сатудан түсетін пайда берілген. Өнімдердің әрқайсысының оларды сатудан түсетін жалпы пайдасы максималды болып табылатын көлемін анықтау керек.

8-кесте

Құрылғы түрі	Өнім бірлігіне жұмсалатын уақыт шығыны (станок-сағ)				Жұмыс уақытының жалпы қоры (станок-сағ)
	1	2	3	4	
Токарьлық	2	1	1	3	300
Фрезерлік	1	-	2	1	70
Тегістеуші	1	2	1	-	340
Өнім бірлігін сатудан түскен пайда (тг)	8	3	2	1	

Есепті шешу үшін оның математикалық моделін құрамыз. 1 өнімнің ізделінді шығарылымын x_1 деп белгілейміз, 2-өнімдікін - x_2, 3 өнімдікін - x_3, 4 өнімдікін - x_4. Мақсатты функцияны жазамыз. 1-өнімді сатқаннан түсетін пайда 8 теңге болғандықтан, біз көлемін x_1 деп белгілеген 1-өнімнің барлығын сатқаннан түсетін пайда 8 x_1 құрайды. Сондай-ақ, 2-өнімді сатқаннан түсетін пайда - 3· x_2 тең болса, 3-өнімді -2· x_3, 4-өнімді - 1· x_4. Сонда барлық өнімдерді сатқаннан түсетін пайда аомасын білдіретін мақсатты функция төмендегіше жазылады:

$$f(x)= 8x_1 + 3x_2 +2x_3 + x_4$$

Есептің шектеулеріне көшелік. Тауарлық станоктың өнім бірлігіне жұмсалатын уақыт шығыны 2 станок-сағатқа тең болса, демек, 1-өнімнің жалпы көлеміне $2\ x_1$ станок-сағат жұмсалады. Токарьлық станоктың 2-өнімді шығаруға жұмсалатын уақыты - 1· x_2, 3-өнімді - 1· x_3, ал 4-өнімді - $3x_4$. Токарьлық станоктың өнімнің барлық 4 түрін шығаруға жұмсалатын уақыт шығыны ондағы жұмыс уақыты қорын асып кетпейтіндей шама құрайды, яғни токарьлық станокты пайдалану мерзіміне қойылатын шектеу мынадай теңсіздік түрінде жазылады:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300$$

Осыған сәйкес, фрезерлік және тегістеуші станоктарды пайдалану мерзіміне қойылатын шектеулер мынадай түрде болады:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \leq 70$$
$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \leq 340$$

Өздерінің экономикалық мазмұны бойынша x_1, x_2, x_3 және x_4 ауыспалылары тек теріс емес мән қабылдай алады, яғни

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,4}$$

Осылайша, есептің математикалық моделі былайша жазылады:

$$f(x) = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340 \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Есеп стандартты түрде жазылған. Оны канондық түрге келтірейік:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 300 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_7 = 340 \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,7} \end{cases}$$

f(x) желілік формасы өзгеріссіз қалады. Шектеулерді векторлық формада жазайық:

$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 + A_7x_7 = B$, мұндағы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 300 \\ 70 \\ 340 \end{pmatrix};$$

Көріп тұрғанымыздай, A_5, A_6, A_7 жекелеген векторларын бастапқы базис ретінде қабылдауға болады, оған төмендегі бастапқы тірек жоспары сәйкес келеді:

$$X = (0,0,0,0,x_5,\ x_6,x_7\ ) = (0,0,0,0,300,70,340)$$

Бастапқы симплексті кесте былай жазылады:

9-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Θ
A_5	0	300	2	1	1	3	1	0	0	150
A_6	0	70	1	0	2	1	0	1	0	70
A_7	0	340	1	2	1	0	0	0	1	340
Δ		0	-8	-3	-2	-1	0	0	0	

1-қадам. Жоспарды оңтайлылыққа тексеру.

$\Delta_j\ (j = \overline{1,7})$ арасында терістері бар болғандықтан, демек, бастапқы тірек жоспары оңтайлы емес. Сондықтан жаңа тірек жоспарына көшеміз.

2-қадам. Базиске енгізілетін векторды анықтау.

$\min\limits_{j} \Delta_j = \min\ (-8,-3,\ -2,\ -1) = -8 = \Delta_1 < 0$ анықтаймыз.

Бұл A_1 векторының базиске енгізілетінін және оған сәйкес келетін бағанның бағыттаушы болатынын білдіреді. Симплексті кетедегі осы бағанды бөліп көрсетеміз.

3-қадам. Базистен шығарылатын векторды анықтау шамасын табамыз.

$$\theta = \min_{i,\, z_{i1} > 0} \frac{x_i}{z_{i1}} = \min\left(\frac{300}{2} : \frac{70}{1} : \frac{340}{1} \right) = \frac{x_6}{z_{61}} = 70$$

Минималды қатынас A_6 векторына сәйкес келеді, демек, осы вектор базистен шығарылады, ал сәйкес жол бағыттаушы болады. Оны кестеде бөліп көрсетеміз.

4-қадам. Гаусс формуласы бойынша кестенің қайта құрылуы.

Гаусс формуласы бойынша бастапқы кестенің қайта құрылуы нәтижесінде келесі симплексті кестені аламыз (10-кесте).

10-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	0	160	0	1	-3	1	1	-2	0	160
A_1	8	70	1	0	2	1	0	1	0	-
A_7	0	270	0	2	-1	-1	0	-1	1	135
Δ		560	0	-3	14	7	0	8	0	

Жаңа кестеде басқа жоспар аламыз

X= (70,0,0,0,160,0,270), оның үстіне *f(x)* = 560. Бірақ бұл жоспар да оңтайлы болып табылмайды, себебі $\Delta_2 = -3<0$. Сондықтан симплекстік процесс жалғасуда. Сонымен біз $\min_j \Delta_j = \Delta_2 = -3<0$ екендігін анықтадық, бұл A_2 векторының базиске енгізілетінін білдіреді. A_7 векторына сәйкес келетін $\theta = \min\left(\frac{160}{1};\frac{270}{2}\right) = 135$ анықтап алып, вектордың базистен шығарылатынын қорытындылаймыз. Кестені Гаусс формуласы бойынша қайта құрып, мынаны аламыз:

11-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	25	0	0	$^5/_2$	$^3/_2$	1	$-^3/_2$	$-^1/_2$
A_1	8	70	1	0	2	1	0	1	0
A_2	3	135	0	1	$-^1/_2$	$-^1/_2$	0	$-^1/_2$	$^1/_2$
Δ		965	0	0	$25/_2$	$^{11}/_2$	0	$^{13}/_2$	$^3/_2$

Соңғы кестеден көрініп тұрғандай (11-кесте), алынған тірек жоспары x = (70,135,0,0) оңтайлы болып табылады, себебі $\Delta_j \geq 0, \quad j=\overline{1,7}$.

Осылайша, 1-өнімді 70-ке тең көлемде өндіруді және 2-өнімді 135 көлемінде өндіруді қарастыратын өнімді шығару жоспары оңтайлы болып табылады. Оның үстіне оңтайлы жоспар өнімнің 3 және 4 түрін өндіруді қарастырмайды. Беріліп отырған өндірістің оңтайлы жоспарында фрезерлік және тегістеуші құрылғылардың жұмыс уақыты қоры толығымен пайдаланылады ($x_6 = 0$, $x_7 = 0$) және токарьлық құрылғының 25 станок-сағаты пайдаланылмай қалады ($x_5 = 25$), ал өндірілген өнімді сатудан түсетін пайда 965 теңгені құрайды.

1.7. Жасанды базис әдісі (М-есеп)

Жоғарыда көрсетілгендей, канондық түрде жазылған есеп үшін егер A_j векторларының арасында m бірліктері бар болса, сонымен қатар стандартты түрде жазылған есеп үшін есеп шарттарынан тікелей бастапқы тірек жоспарын көрсетіп, оны симплексті тәсілмен шешуге кірісуге болады. Бірақ желілік программалаудың канондық түрде жазылған көптеген есептері үшін A_j векторларының арасында m бірліктері әрдайым бола бермейді. Осындай есепті қарастырайық.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (25)$$

$$x_j \geq 0, \; , \; j = \overline{1, n} \qquad (26)$$

шарты болғанда функция максимумын табу қажет дейік және

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (24)$$

векторлар арасында $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

бірліктері жоқ. Бұл жағдайда *М*-есеп деп аталатын есеп құрылады. Онда былай делінеді: төмендегі шартпен

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+1} = b_m \\ x_j \geq 0, \end{cases} \qquad (28)$$

$$j = \overline{1, n+m} \qquad (29)$$

функция максимумын табу қажет

$$\overline{f}(x)= c_1x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_nx_n - M(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}) \quad (27)$$

мұндағы M – жеткілікті дәрежеде үлкен оң сан.

Бұл екі есеп - (24)-(26) және (27)-(29) - әр түрлі болғанмен, олардың оңтайлы жоспарлары сәйкес келеді, себебі M-нің үлкен сан болғаны соншалық - $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ ауыспалылары M-есептің оңтайлы жоспарында 0-ге тең болуы қажет. Осылайша, $f(x)= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ функциясы негізінен максималданады екен, яғни егер M-есептің шешімі бар болатын болса, ол бастапқы есептің де шешімі болып табылады. Сондықтан M-есептің (27)-(29) шешімін анықтауға толығырақ тоқталамыз. Бұл есепте $A_j (j = \overline{1, n+m}$) векторлары арасында m бірліктері бар.

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ldots ; \qquad A_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Оларды бастапқы базис ретінде қабылдауға болады, оның үстіне бұл векторлар жасанды деп аталады, ал осы векторлардан құрылған базис жасанды базис деп аталады. Бұл базиске тірек жоспарын сәйкес қоюға болады $X = (0,0, \ldots, 0, x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m})$, мұндағы $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ ауыспалылар да жасанды деп аталады. Есептеп шығарамыз:

$$f(x)= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0$$

$$- M (x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}) = 0 - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} = 0 - M \sum_{i=1}^{m} b_i$$

Жоспардың оңтайлылығын анықтау үшін есептеп шығару қажет:

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} C_{n+i} z_{ij} - C_j = -M \sum_{i=1}^{m} a_{ij} - C_j,$$

$$j = \overline{1, n+m}$$

Көріп отырғанымыздай, Δ_j және $f(x)$ екі қосындыдан тұрады: бір қосынды M-ға тәуелді, ал екіншісі – тәуелді емес. M-есепке арналған симплексті кесте әдеттегіге ұқсас, тек оның екі жолға бөлінетін Δ - жолы ғана өзгеше: Δ' жолында M-ға тәуелсіз шама жазылады, ал Δ'' жолында M кезіндегі коэффициенттер жазылады. Осылайша, есептің симплексті кестесі мынадай түрге ие болады (12-кесте).

12-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	…	A_n	A_{n+1}	A_{n+2}	..	A_{n+m}
A_{n+1}	-M	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	..	0
A_{n+2}	-M	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	..	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	..	⋮
A_{n+m}	-M	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	..	1
Δ'		0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	..	0
Δ''		$-\sum_{i=1}^{m} b_i$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$	…	$-\sum_{i=1}^{m} a$	0	0	..	0

Бұл кесте симплексті тәсілдің алгоритмі бойынша өзгереді, бұл жерде критерий ретінде Δ''-жолдың элементтері қарастырылады. Δ''-жолдың элементтерін оңтайлылық критерийі ретінде жетекшілікке ала отырып, кестенің өзгеруі төмендегілерге қол жеткізілгенше жалғаса береді:

1) барлық жасанды векторлар базистен шығарылғанша;

2) жасанды векторлардың барлығы бірдей базистен шығарылған жоқ, дегенмен барлық элементтер $\Delta''_j=0$, $j=\overline{1,n+m}$, яғни оңтайлылық критерийі орындалады және жоспарды жақсарту процесін жалғастыруға болмайды.

Бірінші жағдайда алғашқы (24)-(26) есептерінің бастапқы тірек жоспары алынды. Оның оңтайлылығын Δ' - жолдың элементтері анықтайды, ал егер жоспар оңтайлы емес болса, онда Δ''-жолын шегеріп тастап кестенің өзгеру процесі оңтайлы жоспарды алғанға дейін жалғаса береді.

Екінші жағдайда, егер Δ''-жолдың элементі B бағанында нольге тең емес болса, онда бастапқы есептің бірде-бір жоспары жоқ, ал егер *B* бағанындағы элемент 0-ге тең болса, онда есептің бастапқы тірек жоспары төмендетілген болады.

Осылайша, желілік программалау есебін жасанды базис тәсілімен шешу процесі төмендегі сатылардан тұрады:

1) *M*-есеп құрылады;
2) *M*-есептің бастапқы симплексті кестесі құрылады;
3) Симплексті тәсілдің алгоритмін пайдалана отырып, бұл кесте барлық жасанды векторлары базистен шығарылғанша өзгере береді. Нәтижесінде немесе алғашқы есептің бастапқы тірек жоспары алынады, немесе есептің шешілмейтіндігі анықталады.
4) Табылған бастапқы тірек жоспары оңтайлылыққа тексеріледі және егер ол оңтайлы болмаса, онда жоспарды жақсарту процесі оңтайлы жоспар алғанға дейін жалғаса береді, немесе есептің шешілмейтіндігі анықталады.

Егер алғашқы есепте бірнеше бірлік векторлар бар болса, онда оларды бастапқы базиске енгізу қажет екендігін атап өткен жөн.

Мысал. Төмендегі шектеулер жағдайында

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_3 = 14 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3} \end{cases}$$

функцияның максимумын табу қажет:

$f(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$

Көріп тұрғанымыздай, $A_j\ (j = \overline{1,3})$ векторлары арасында бірліктері жоқ, ал есеп канондық түрде берілген. Демек, оны жасанды базис тәсілімен шешу қажет. Ол үшін *M*-есеп құрамыз.

$$f(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - M(x_4 + x_5 + x_6) \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_3 + x_6 = 14 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

M-есепті симплексті тәсілмен шешеміз. Көріп тұрғанымыздай, *M*-есепте бірлік векторлар бар:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

олар, жоғарыда көрсетілгендей, жасанды базис құрады. Бұл базиске тірек жоспары сәйкес келеді

$$x = (0,\ 0\ ,0,\ x_4\ ,\ x_5,\ x_6) = (0\ ,0\ ,0\ ,10\ ,12,\ 14)$$

мұндағы x_4, x_5, x_6 ауыспалылары да жасанды деп аталады. M-есептің бастапқы кестесін құрайық (13-кесте)

13-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ
A_4	-M	10	1	1	0	1	0	0	-
A_5	-M	12	0	1	1	0	1	0	12
A_6	-M	14	1	0	1	0	0	1	14
Δ'		0	-5	-6	-7	0	0	0	
Δ''		-36	-2	-2	-2	0	0	0	

Δ' және Δ'' жолдарының элементтері қалай анықталатынын көрсетейік. B бағанында, бізге белгілі, жоспардың нольдік емес компоненттері жазылады, ал соңғы екі жолда – осы жоспарға сәйкес келетін функция мәні, сонымен қатар бұл мән C_0 векторының B векторына скалярлық туындысына тең:

$$(C_0,B) = -\ 10M - 12M - 14M = -\ 36M = 0 - 36M$$

Δ' жолында M-ға тәуелсіз шаманы жазамыз, яғни - 0, ал Δ'' жолына M кезіндегі коэффициентті жазамыз, яғни – 36.

Кестенің келесі бағандарына $A_j\,(j=\overline{1,6})$ A_j векторларының (Z_{ij}) базисі бойынша ыдырау коэффициенттері жазылады. Сонымен бірге $Z_{ij} = a_{ij}$ базисті бірлік векторлар құрған жағдайда, ал $\Delta_j = Z_{ij} - C_j$, мұндағы Z_j C_0 және A_j векторларының скалярлы туындысы ретінде анықталады. Мысалы,

$$\Delta_1 = Z_1 - C_1 = (C_0A_1) - C_1 = (-M)\cdot 1 + (-M)\cdot 0 + (-M)\cdot 1 - 5 = -\ 2M - 5$$

Сондықтан A_1 бағанының Δ' жолына M-ға тәуелсіз шаманы жазамыз, яғни – 5, ал Δ'' жолына - M кезіндегі коэффициент, яғни – 2. Осыған ұқсас $\Delta_2 = Z_2 - C_2 = (C_0 A_2) - C_2 = (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - 6 = -2M - 6$.

Кестенің A_2 бағанындағы Δ' жолына – 6, ал Δ'' жолына – 2 жазамыз және т.б. Осылайша, бастапқы кесте алында.

Алынған кестеден көрініп тұрғандай, M-есептің бастапқы жоспары оңтайлы емес, себебі Δ''_j арасында терістері бар. Симплексті тәсілдің алгоритміне сәйкес жаңа тірек жоспарына көшеміз. Әуелі базиске енгізілуі қажетті векторды анықтаймыз, ол үшін $\min\limits_j \Delta''_j = \Delta''_1 = \Delta''_2 = \Delta''_3 = -2$ табамыз.

Бұл жалпы жағдайда базиске A_1, A_2, және A_3 векторларының кез келгенін енгізуге болатындығын білдіреді, бірақ Δ' жолының сәйкес элементтеріне назар аударсақ,

$$\min_j \Delta'_j = \min(-5,-6,-7) = -7 = \Delta'_3 < 0$$

онда базиске Δ' және Δ'' жолдарындағы минималды мәнге сәйкес келетін A_3 векторын енгізу дұрыс екендігін байқауға болады.

$$\theta = \min_{i, Zi3 > 0} \frac{xi}{Zi3} = \min\left(\frac{12}{1}; \frac{14}{1}\right) = 12$$

есептеп шығарып, минималды қатынас сәйкес келетін A_5 векторын базистен шығарып тастау керектігін анықтаймыз. Бұл вектор жасанды болғандықтан және бұдан былай бізге қажет болмайтындықтан, есептеулерді қысқарту мақсатында бұл векторды келесі кестеге енгібеуге де болады. 13-кестені Гаусс формуласы бойынша өзгерте отырып, 14-кестені аламыз.

14-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_6
A_4	-M	10	1	1	0	1	0
A_3	7	12	0	1	1	0	0
A_6	-M	2	1	-1	0	0	1
Δ'		84	-5	1	0	0	0
Δ''		-12	-2	0	0	0	0

Сонымен, жаңа жоспар алынды $x = (0, 0, 12, 10, 02)$, бірақ ол да оңтайлы емес, себебі $\Delta''_1 = -2 < 0$. Базиске A_1 векторын енгізіп және базистен жасанды A_6 векторын шығарып, келесі тірек жоспарына өтеміз . Жаңа кесте төмендегі түрге ие (15-кесте).

15-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4
A_4	-M	8	0	2	0	1
A_3	7	12	0	1	1	0
A_1	5	2	1	-1	0	0
Δ'		94	0	-5	0	0
Δ''		-8	0	-2	0	0

Көріп тұрғанымыздай, $\Delta''_2 = -2 < 0$. Жоспарды жақсарту процесі жалғаса береді. A_2 векторын базиске енгіземіз, ал A_4 векторын – шығарамыз. Келесі кестені аламыз (16-кесте).

16-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3
A_2	6	4	0	1	0
A_3	7	8	0	0	1
A_1	5	6	1	0	0
Δ'		110	0	0	0
Δ''		0	0	0	0

Соңғы кестеде (16-кесте) барлық жасанды векторлар базистен шығарылған, демек, алғашқы есептің бастапқы тірек жоспары алынды. Оның оңтайлылығы Δ'-жолдың элементтерімен анықталады. Кестеден көріп тұрғанымыздай, $\Delta'_j = 0, j = \overline{1,3}$, демек, оңтайлы жоспар алынды $x = (6, 4, 8)$, ал функцияның максималды мәні 110-ға тең.

1. 8. Екі жақты желілік программалау тапсырмалары

Желілік программалаудың әрбір тапсырмасымен мұнымен байланысты басқа бір тапсырманы белгілі бір ретпен салғастыруға болады, бұл тапсырма алғашқысына қатысты алғанда екі жақты деп аталады.

Екі жақты тапсырмалардың осындай жұбын бірге қарастыру сызықтық бағдарламалау, түрлі есептеу алгоритмдерін құру мәселелерін теориялық тұрғыдан зерттеудің тиімді құралы болып табылады, сонымен қатар есептеулер нәтижелерін талдау барысында үлкен рөл атқарады.

1.8.1. Симметриялық екі жақты тапсырмалар, олардың экономикалық интерпретациясы

Сызықтық бағдарламалаудың негізгі тапсырмасы мынадай түрде беріледі.

Қандай да бір мекемеде m түрлі ресурстардың $b_1, b_2, \ldots, b_m$ көлемі бар, олардан өнімнің n түрі өндіріледі.

Мына мәндер белгілі:

C_j - өнімнің j-інші түрінің 1 бірлігінің құны ($j = \overline{1, n}$),

a_{ij} – j-інші өнімнің 1 бірлігін өндіруге кеткен i-інші ресурс шығынының көлемі.

Өнімді өндірудің өнім құнын арттыратын жоспарын анықтау керек.

Тапсырманың математикалық моделін құрайық. J-інші өнімді өндіру көлемін x_j арқылы белгілейміз, онда тапсырманың мақсатты түрдегі функциясы мен шектеулері былайша жазылады:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = \overline{1, m} \qquad (31)$$

болған жағдайда

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \qquad (32)$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (30)$$

арттыру.

Дәл осы алғашқы мәліметтер бойынша келесі экономикалық тапсырманы құруға болады.

Мекеме қолда бар ресурстардан өнім өндірмей, бұл ресурстарды сату жөнінде шешім қабылдады делік. Осының барысында ресурстардың мынадай келесі жағдайларды қамтамасыз ететіндей бағаларын анықтау міндеті туындайды: бір жағынан, сатып алатын ұйым барлық ресурстардың жалпы құнын азайтуға тырысады; екінші жағынан, өндіруші мекеме ресурстың әр түрі үшін шикізатты дайын өнім етіп өндіретін жағдайда қолында болатын сомадан аз болмайтындай каржы алуы тиіс, әйтпесе оған ресурстарды сату емес, өзінің жеке өндірісін ұйымдастыру тиімді.

Тапсырманың математикалық моделін құрайық. Айнымалыларды енгіземіз: $У_i$ - ресурстың i-інші түрінің құны ($i=\overline{1,m}$). Сонда i-інші ресурстың бүкіл көлемінің құны y_ib_i-ге тең болады, ал барлық ресурстар бағасы:

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \dots + y_mb_m$$

j-інші өнімнің 1 бірлігін өндіруге кеткен i-інші шикізат шығынының көлемі a_{ij}-ге тең болады, оның бағасы y_ia_{ij}-ді құрайды, ал j-інші өнімнің 1 бірлігін өндіруге кеткен барлық ресурстар құны мына сомаға тең болады:

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \dots + y_ma_m\,,$$

бұл сома j-інші өнімнің 1 бірлігінің C_j құнынан кем болмауы тиіс, яғни өнімнің әр түрі бойынша мынадай шектеулер енгізу қажет:

$$y_1a_{ij} + y_2a_{2j} + \dots + y_ma_{mj} \geq C_j,\ j=\overline{1,n}$$

Осылайша, бұл тапсырманың математикалық моделі былайша жазылады:

$$\begin{cases} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \dots + y_ma_{m1} \geq C_1 \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \dots + y_ma_{m2} \geq C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad (33)$$

$$y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \dots + y_ma_{mn} \geq C_n$$

$y_j \geq 0,\ i=\overline{1,m}$ (34) болған жағдайда

$g(y)=y_1b_1 + y_2b_2 + \dots + y_mb_m$ (35) азайту талап етіледі.

Егер (30)-(32) және (33)-(35) тапсырмаларын салыстырсақ, онда мыналарды көреміз:

1. Бір тапсырманың мақсатының функциясы артады, ал екі жақты тапсырманікі азаяды.

2. Бір тапсырмадағы шектеулер саны келесі тапсырмадағы айнымалылар санына тең.

3. Шектеулер жүйесі коэффициенттерінің матрицасы бірін екіншісінен тасымалдау арқылы алынады.

Шындығында, (30)-(32) тапсырмасының шектеулер жүйесі коэффициенттерінің матрицасын A арқылы белгілесек,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots\, a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots\, a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots\, a_{mn} \end{pmatrix}$$

онда (33)-(35) тапсырмасының шектеулер жүйесі коэффициенттерінің матрицасы A' болады:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \ldots\, a_{m1} \\ a_{12}\, a_{22} \ldots\, a_{m2} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{1n}\, a_{2n} \ldots\, a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Екі тапсырма айнымалыларының да дұрыс мәндері сақталады.

5. Бір тапсырманың шектеулер жүйесінің бос мүшелері - келесі тапсырманың мақсат функциясының коэффициенттері, ал біріншісінің мақсат коэффициенттері келесі тапсырманың шектеулер жүйесінің бос мүшелері болып шығады.

6. Бір тапсырмадағы теңсіздік түрі - « $\le$ », ал екіншісінікі - « $\ge$ ».

Сызықтық бағдарламалаудың аталмыш сипаттарға ие тапсырмалары симметриялық өзара екі жақты тапсырмалар деп аталады. Осының барысында олардың біреуі – тікелей (алғашқы), келесісі екі жақты (кездесетін) деп аталады.

Таза математикалық көзқарас тұрғысынан тікелей түріне екі жақты жұп тапсырмаларының кез келгені жатқызылады.

Экономикалық қырынан алып қарағанда, тікелей тапсырманы шешу өнімді шығарудың тиімді жоспарын береді, ал екі жақты тапсырманы шешу қолданылып жүрген ресурстардың шартты бағаларының оңтайлы жүйесін алуға мүмкіндік береді. Академик Л.В.Конторович оларды «объективті түрде негізделген бағалар» деп атаған.

1.8.2. Симметриялық емес екі жақты тапсырмалар, екіжақтылықтың негізгі теоремасы

Тікелей тапсырма былайша беріледі:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = \overline{1, k}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = \overline{k+1, m}$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = \overline{1, l}, \qquad l \le n$$

болған жағдайда

$f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j$ функциясын арттыру қажет.

Екі жақты тапсырма мынадай түрге ие болады:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \qquad j = \overline{1, l}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \qquad j = \overline{l+1, n}$$

$$y_i \ge 0, \qquad i = \overline{1, k}$$

болған жағдайда

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

функциясының мәнін азайту керек.

Егер осы тапсырманың екеуін салыстырсақ, онда екі жақты симметриялық емес жұпты құрудың жалпы ережесін қалып-тастыруға болады.

1. Тікелей тапсырманың әрбір *i*-інші шектеу мәніне екі жақты тапсырманың y_i айнымалысы сәйкес келеді $(i = \overline{1, m})$ және керісінше, екі жақты тапсырманың әрбір j -інші шектеу мәніне тікелей тапсырманың x_j айнымалысы сәйкес келеді $(j = \overline{1, n})$.

2. Тікелей тапсырманың шектеулер матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

және екі жақты тапсырманың шектеулер матрицасы:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} a_{22} \cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

өзара тасымалданған.

3. Тапсырмалардың біреуіндегі шектеулердің бос мүшелері келесі тапсырманың мақсатты функциясының айнымалылары сәйкес келгенде коэффициенттер болып табылады. Осыған орай арттыру керісінше азайту мәніне өзгереді.

4. Тікелей тапсырмадағы шектеулерді, яғни теңсіздіктерді арттыру барысында - «≤» белгісімен және азайту барысында ≥» белгісімен жазған жөн.

5. Тікелей тапсырманың әрбір i-інші шектеуіне, яғни теңсіздігіне - екі жақты тапсырмадағы сәйкес айнымалының дұрыс мәні ($y_i \geq 0$), ал теңдікке y_i айнымалысы, яғни бос мүше сәйкес келеді. Керісінше, айнымалының дұрыс мәніне ($x_j \geq 0$) - екі жақты тапсырмада j -інші шектеу-теңсіздік, ал бос айнымалыға теңдік сәйкес келеді.

Мысал. Мына берілген мәндер бойынша екі жақты тапсырма құру:

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 4 \end{cases} \qquad I - 1$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad x_4 \geq 0$$

Шешуі. Екі жақты тапсырманы құруға көшпес бұрын алғашқы тапсырма көшірмесін реттеп алу қажет. Мақсатты функция мәні азаятындықтан, барлық шектеу-теңсіздіктерді «≥» түріне келтіріп алу шарт. Бұл үшін үшінші теңсіздікті 1-ге көбейтеміз, осыдан кейін шектеулер жүйесі былайша жазылады:

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 8 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \geq -4 \end{cases}$$

Екі жақты тапсырмада 3 айнымалы: y_1, y_2, y_3, яғни алғашқысында шектеулер саны қанша болса, сонша айнымалы болады. Екі жақты тапсырманың мақсатты функциясын құрайық, соған қоса екі жақты тапсырманың мақсатты функциясының айнымалылары барысындағы коэффициенттер ретінде алғашқы тапсырмадағы шектеулердің оң жақ бөлігі танылады:

$$g(y) = 10y_1 + 8y_2 - 4y_3 \to \max,$$

тікелей тапсырмадағы мақсатты функция мәні азаятындықтан, екі жақты тапсырмадағы мақсатты функция мәні артады. Екі жақты тапсырма шектеулерін құру барысында оның A^1 матрицасының тікелей тапсырма шектеулерінің A матрицасына қатысты алғанда тасымалданатындығын, яғни A матрицасының бағандары A^1 матрицасының жолдары болатындығын ескереміз. Сонымен, екі жақты тапсырманың бірінші шектеуін жазайық:

$$2y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 2$$

Бірінші шектеу «≤» белгісімен жазылады, өйткені x_1 -ге дұрыс мән қойылған, ал шектеудің оң жақ бөлігі алғашқы тапсырманың сызықтық түрінің айнымалы x_1 болғандағы коэффициентіне тең болады, яғни $c_1=2$. Екі жақты тапсырмадағы екінші шектеу теңдік түрінде жазылады, өйткені x_2 айнымалысына дұрыс мән қойылмаған:

$$-y_1 + 2y_2 + y_3 = -1$$

$x_3 \geq 3$ $x_4 \geq 0$, x_5 болғандықтан, сәйкесінше екі жақты тапсырманың үшінші және төртінші шектеулері теңсіздік түрінде жазылады, ал бесінші шектеу теңдік түрінде жазылады, өйткені x_5 айнымалысына дұрыс мән қойылмаған, бұл шектеулердің оң жақ бөлігінде алғашқы тапсырманың сызықтық түріндегі сәйкес айнымалылары барысындағы коэффициенттер тұрады:

$$\begin{aligned} &y_1 - y_2 - 3y_3 \leq 1 \\ &-3y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -3 \\ &-y_1 + y_2 - 2y_3 = 1 \end{aligned}$$

Алғашқы тапсырмадағы бірінші шектеу теңдік түрінде болып келеді, сондықтан екі жақты тапсырманың y_1 бірінші айнымалысы бос мүше болады, ал y_2 және y_3 айнымалыларына дұрыс мән қойылған, өйткені алғашқы тапсырмадағы екінші және үшінші шектеулер теңсіздіктер болып табылады. Осылайша, екі жақты тапсырма мынадай түрге ие болады:

$$g(y) = 10\,y_1 + 8\,y_2 - 4\,y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2\,y_1 + y_2 - 2\,y_3 \le 2 \\ -\,y_1 + 2\,y_2 + y_3 = -1 \\ y_1 - y_2 - 3\,y_3 \le 1 \\ -\,3\,y\;\; - 2\,y_2 + y_3 \le -3 \\ -\,y_1 + y_2 - 2\,y_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_2 \ge 0, \qquad y_3 \ge 0$$

Тікелей және екі жақты тапсырмаларды шешу барысында олардың арасында өзара тәуелділік те бар. Осы тәуелділікті сипаттайтын теоремалардың біреуін келтірейік.

7-теорема. Егер екі жақты тапсырмалар жұбының біреуінің оңтайлы жоспары болса, онда екіншісінің де осындай жоспары болады, сонымен қатар тапсырмалардың сызықтық түрлеріндегі экстремалды мәндері сәйкес болып шығады, яғни

$$\max f(x) = \min g(y)$$

Егер екі жақты тапсырманың біреуінің шешімі болмаса, онда екіншісінің де шешімі болуы мүмкін емес.

1.8.3. Екі жақты симплексті әдіс

Сызықтық бағдарламалаудың канондық

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \;\to\; max \qquad (36)$$

түріндегі тапсырмасы берілген делік. Мұндағы шектеулер:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B, \qquad (37)$$

Бұл жерде мына мән белгілі:

$$Aj = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; \quad j = \overline{1,n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n} \qquad (38)$$

Алғашқы *m* векторлары біркелкі болсын, яғни

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots ; \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix};$$

$$\ldots ; \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

және $b_i(i = \overline{1, m})$ сандарының ішінде теріс мәнділері бар делік. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_m$ векторлар жүйесін алғашқы базис десек, онда оған сызықтық теңдеулер жүйесінің (37) шешімі болып табылатын $x=(b_1,b_2 \ \ldots,b_m,0,..,0$ вектор сәйкес келеді, алайда ол (36) – (38) тапсырмасының жоспары болып табылмайды, өйткені оның b_i компоненттерінің ішінде теріс мәндері бар.

Анықтама. Сызықтық теңдеулер жүйесінің (37) $A_1,\ldots,A_m$ деп анықталатын $x=(b_1,b_2 \ \ldots,b_m,0,..,0)$ шешімі, егер $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$ болса, (36)-(38) тапсырманың бүркеншік жоспары деп аталады.

Әдеттегідей, алғашқы симплексті кесте құрамыз және егер кестеде бүркеншік жоспар болса, онда есепті екі жақты симплексті әдіспен шешу келесі алгоритм бойынша жүзеге асырылады.

<u>1-қадам.</u> Бүркеншік жоспардың теріс элементтерінің ішінен ең кішісін (абсолюттік шама бойынша ең үлкен мән) іздейміз. Мына мән белгілі болсын:

$$\min_i x_i = \min_i b_i = b_r < 0$$

Бұл A_r векторының базистен шығарылатындығын, ал кестенің r-інші тармағының бағыттауыш болып табылатындығын білдіреді.

<u>2-қадам.</u> θ шамасын былайша анықтаймыз:

$$\theta = \min_{j, Z_{rj} < 0} \left(-\frac{\Delta_j}{Z_{rj}}\right) = \left(-\frac{\Delta_k}{Z_{rk}}\right) > 0$$

Бұл A_k векторының базиске A_r векторының орнына енгізілетіндігін, ал k бағанының бағыттауыш болып табылатындығын білдіреді.

3-қадам. Кестені Гаусс формулалары бойынша қайта құрамыз.

1-3 қадамдар оңтайлы жоспар алынғанша қайталана береді.

Бұл алгоритмді келесі тапсырманы шешу барысында қарастырамыз.

Мысал. $max\ f(x)=-2x_1-x_2-3x_3$ мәнін табу керек. Мұнда мыналар белгілі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ x_1 + x_2 \quad \ge 4 \quad I-1 \\ x_2 + x_3 \quad \ge 6 \quad I-1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,3}$$

Шешуі. «≥» түріндегі барлық теңсіздіктерді оның екі бөлігін де (-1) мәніне көбейте отырып, «≤» түріндегі теңсіздіктерге әкеліп қоямыз, яғни шектеулер жүйесінің екінші және үшінші теңсіздіктерінің екі бөлігін де (-1) мәніне көбейтеміз. Осы арқылы мынадай жүйе алынады:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ -x_1 - x_2 \quad \le -4 \\ -x_2 - x_3 \quad \le -6 \end{cases}$$

Енді қосымша айнымалыларды енгізу арқылы тапсырманы канон түріне келтіреміз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = \ -4 \\ -x_2 - x_3 + x_6 = \ -6 \end{cases}$$

Алғашқы симплексті кесте құрайық 17-кесте:

17-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	12	1	1	1	1	0	0
A_5	0	-4	-1	-1	0	0	1	0
A_6	0	-6	0	-1	-1	0	0	1
Δ		0	2	1	3	0	0	0

Көріп отырғанымыздай, алғашқы симплексті кестеде мынадай бүркеншік жоспар алынады:

$$X = (0, 0, 0, 12, -4, -6)$$

<u>1-қадам.</u> *B* бағанынан ең кіші элементті табамыз: $\min_i x_i = \min\{-4, -6\} = -6$

Бұл элемент A_6 векторына сәйкес келеді, ізінше бұл вектор базистен шығарылады, ал оған сәйкес келетін тармақ бағыттауыш болып табылады. Оны кестеде белгілеп көрсетеміз.

<u>2-қадам.</u> Θ шамасын анықтайық.

$$\theta = \min\left(-\frac{1}{(-1)}; \frac{3}{(-1)}\right) = \min(1,3) = 1$$

Бұл жерде тек бағыттауыш тармақтың теріс элементтеріне деген қатынастар ғана қарастырылатындығын ескертіп өтейік.

Көріп отырғанымыздай, ең кіші қатынас A_2 векторына сәйкес келеді, яғни A_2 векторы базиске енгізіледі, ал оған сәйкес келетін баған бағыттауыш болып табылады, оны кестеде белгілеп көрсетеміз.

<u>3-қадам.</u> Кестені Жордан-Гаусс формулалары бойынша қайта құрамыз. Нәтижесінде 18-кесте мәліметтерін аламыз.

18-кесте

	C_0	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	6	1	0	0	1	0	1
A_5	0	2	-1	0	1	0	1	-1
A_2	-1	6	0	1	1	0	0	-1
Δ		-6	2	0	2	0	0	1

Оңтайлы жоспарға қол жеткіземіз: x = (0, 6, 0) *max f(x) = -6.*

2. ЖЕЛІЛІК ПРОГРАММАЛАУДЫҢ ТРАНСПОРТТЫҚ ТАПСЫРМАСЫ

Желілік программалаудың (ЖП) көптеген тапсырмаларының ішінен арнайы тапсырмалардың кейбір топтары бөлініп көрсетілді. Оларды жалпы тәсілдермен шешу есептік сипаттағы бірқатар қиыншылықтармен бірге жүреді. Осыған байланысты арнайы, едәуір қарапайым шешу тәсілдері әзірленді. Тапсырмалардың осындай топтарының бірі транспорттық тапсырмалар болып табылады.

2.1. Тапсырманың берілуі және математикалық моделі

Тапсырманың берілуі. А1, А2, ... , Аm-нің m жіберілу пункттерінде біртекті жүктің сәйкес а1, а2, ... , аm бірлігі бар, ол В1, В2, ..., Вn-нің n тұтыну пункттеріне жеткізілуі керек. Ал оларға сұраныс сәйкесінше в1, в2, ..., вn бірлігін құрайды. Мұнда А пунктінен В пунктіне ($i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$) жүк бірлігін тасымалдауға жұмсалатын транспорттық шығындар С берілген.

Барлық жүк жіберілу пунктінен толығымен шығарылатын, барлық тұтыну пункттеріндегі сұраныс қамтамасыз етілетін және транспорттық шығындар сомасы минималды болатын тасымалдау жоспарын анықтау керек.

Тапсырманың бастапқы мәліметтерін бөлуші деп аталатын келесі кестеге орналастырған ыңғайлы 19-кесте.

19-кесте

b_j / a_i	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1j} X_{1j}	...	C_{1n} X_{ln}
a_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2j} X_{2j}	...	C_{2n} X_{2n}
	...	...	...	...	...	...
a_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	...	C_{ij} X_{ij}	...	C_{in} X_{in}
...	...	...	...	...	...	...
a_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mj} X_{mj}	...	C_{mn} X_{mn}

Тапсырманың математикалық моделі. Тапсырманың математикалық моделін құру үшін A_i $(i=\overline{1,m})$ пунктінен B_j $(j=\overline{1,m})$ пунктіне тасымалданатын жүк бірлігінің көлемін білдіретін $X_{ij} \geq 0$ $(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n})$ айнымалыларын енгіземіз. Бұл ауыспалылар келесі шарттарды қанағаттандыруы керек:

а) барлық өнім жіберілу пунктінен шығарылуы керек:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+K+x_{1j}+K+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+K+x_{2j}+K+x_{2n}=a_2 \\ K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K \\ x_{i1}+x_{i2}+K+x_{ij}+K+x_{in}=a_i \\ K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K \\ x_{m1}+x_{m2}+K+x_{mj}+K+x_{mn}=a_m \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} X_{ij}=a_i\,(i=\overline{1,m})$$

b) Барлық тұтыну пунктеріндегі сұраныс толығымен қанағаттандырылуы керек:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+K+x_{i1}+K+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+K+x_{i2}+K+x_{m2}=b_2 \\ K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K \\ x_{1j}+x_{2j}+K+x_{ij}+K+x_{mj}=b_j \\ K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K \\ x_{1n}+x_{2n}+K+x_{in}+K+x_{mn}=b_n \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} X_{ij}=b_j\,(j=\overline{1,n})$$

c) Тасымалдау тек бір бағытта, яғни

$A_i\,(i=\overline{1,m})$ *в* $B_j\,(j=\overline{1,n})$ пунктінен пунктіне

$X_{ij} \geq 0,\,(i=\overline{1,m},\,j=\overline{1,n})$

жүреді.

d) Транспорттық шығындар сомасы минималды болуы қажет:

$$
\begin{aligned}
L(x) = {} & C_{11}X_{12} + C_{12}X_{12} + \ldots + C_{1j}X_{1j} + \ldots + C_{1n}X_{1n} + \\
& + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + \ldots + C_{2j}X_{2j} + \ldots + C_{2n}X_{2n} + \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + C_{i1}X_{i1} + C_{i2}X_{i2} + \ldots + C_{ij}X_{ij} + \ldots + C_{in}X_{in} + \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + C_{m1}X_{m1} + C_{m2}X_{m2} + \ldots + C_{mj}X_{mj} + \ldots + C_{mn}X_{mn} \to \min
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \min L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

мұндағы $X = \begin{pmatrix} x_{11}x_{12} \ldots x_{1j} \ldots x_{1n} \\ x_{21}x_{22} \ldots x_{2j} \ldots x_{2n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{i1}x_{i2} \ldots x_{ij} \ldots x_{in} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1}x_{m2} \ldots x_{mj} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$ - тасымалдау жоспары

Осылайша, тапсырманың математикалық моделі мынадай түрге ие болады:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}) \qquad (4)$$

2.2. Транспорттық тапсырма моделінің ерекшеліктері

Көріп тұрғанымыздай, (1)-(4) модельдері – ЖП тапсырмасының моделі. Бірақ оның бірқатар ерекшеліктері бар. Бұл ерекшеліктер транспорттық тапсырманы шешудің едәуір ыңғайлы есептеу тәсілдерін даярлауға мүмкіндік берді және бұл ерекшеліктердің мәні (2)-(3) шектеу жүйесінің салыстырмалы түрдегі қарапайымдығында:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & K & x_{1n} & x_{21} & x_{23} & K & x_{2n} & K & x_{m1} & x_{m2} & K & x_{mn} \\ 1 & 1 & K & 1 & 0 & 0 & K & 0 & K & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 1 & 1 & K & 1 & K & 0 & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & & K & K & K \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & K & 0 & K & 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & 0 & K & 0 & 1 & 0 & K & 0 & K & 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 1 & K & 0 & 0 & 1 & K & 0 & K & 0 & 1 & K & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & & K & K & K \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad K \quad 1}_{n}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad K \quad 1}_{n}} & K & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad K \quad 1}_{n}} \end{array}\right\}$$

А матрицасының барлық элементтері 1 және 0-ден тұрады және мұндағы әрбір бағанда тек екі бірлік (1) қана болады.

Шектеу жүйесін векторлық түрде жазалық:

$P_{11}X_{11} + P_{12}X_{12} + \ldots + P_{1n}X_{1n} + P_{21}X_{21} + P_{22}X_{22} + \ldots P_{2n}X_{2n} + \ldots + P_{m1}X_{m1} + P_{m2}X_{m2} + \ldots + P_{mn}X_{mn} = P_0$, мұндағы

$$P_{11}=\begin{pmatrix} \left.\begin{array}{c}1\\0\\K\\0\end{array}\right\}m \\ \left.\begin{array}{c}1\\0\\K\\0\end{array}\right\}n \end{pmatrix}; \quad P_{12}=\begin{pmatrix} \left.\begin{array}{c}1\\0\\K\\0\end{array}\right\}m \\ \left.\begin{array}{c}0\\1\\K\\0\end{array}\right\}n \end{pmatrix}, \ldots \quad P_{1n}=\begin{pmatrix} \left.\begin{array}{c}1\\0\\K\\0\end{array}\right\}m \\ \left.\begin{array}{c}0\\0\\K\\1\end{array}\right\}n \end{pmatrix}; \ldots \quad P_{mn}=\begin{pmatrix} \left.\begin{array}{c}0\\0\\K\\1\end{array}\right\}m \\ \left.\begin{array}{c}0\\0\\K\\1\end{array}\right\}n \end{pmatrix};$$

$$P_0=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ K \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ K \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{немесе} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}X_{ij} = P_0$$

$$\textbf{\textit{где}}\quad P_{ij}=\begin{pmatrix}0\\0\\K\\1\\K\\0\\0\\0\\K\\1\\K\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\ m\ \ i\text{-тармағы}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\ n\ \ (m+j)\text{ -тармағы}\end{matrix}\qquad \begin{pmatrix}i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}\end{pmatrix}$$

Осылайша, векторлық түрдегі транспорттық тапсырма моделі мынадай түрге ие болады:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}\to\min \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}X_{ij}=P_0 \qquad (5)$$

$$x_{ij}\ge 0,\qquad i=\overline{1,m},\qquad j=\overline{1,n} \qquad (4)$$

1-анықтама. $X=\|X_{ij}\|$ mxn матрицасымен анықталатын (2)-(4) жүйесінің теріс емес әрбір шешімі (1)-(4) транспорттық тапсырмасының жоспары деп аталады.

2-анықтама. $X=\|X_{ij}\|$ mxn жоспары егер нольдік емес коэффициентті (5) теңдікке кіретін $P_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ векторлар желілік тәуелсіз болса, тірек жоспары деп аталады.

3-анықтама. (1) мақсатты функциясы минималды мәнге ие болатын $X=\|X_{ij}\|$ mxn жоспары оңтайлы жоспар деп аталады.

1-теорема. (1)-(4) тапсырмалары шешімді болу үшін

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6}$$

шартының орындалуы қажет және ол жеткілікті.

Мұнда транспорттық тапсырма моделі *жабық* деп аталады.

2-теорема. (2)-(3) шектеулер жүйесінің А матрицасының рангі шектеулер санынан 1-ге кіші, яғни $r(A) = m + n - 1$.

Теоремадан желілік тәуелсіз $P_{ij}\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ векторларының барынша жоғары саны тек (*m*+*n*-*1*) бола алатындығы, ізінше, транспорттық тапсырманың $X = \left\| X_{ij} \right\|$ mxn тірек жоспарында *(m+n-1)*-ден аспайтын нөлдік емес компоненттердің бола алатындығы айқындалады. Кері жағдайда ол тудырылған деп аталады.

2.3. Бастапқы тірек жоспарды анықтау

ЖП-дың жалпы тапсырмаларын шешудегі секілді, транспорттық тапсырманың оңтайлы жоспарын іздестіру де оның қандай да бір тірек жоспарын табудан басталады.

Транспорттық тапсырманың бастапқы тірек жоспарын анықтаудың бірнеше әдісі бар. Оның екеуін – батыс бұрыш әдісін және минималды элемент әдісін қарастыралық. Бұл тәсілдердің мәні мынада: тірек жоспары *(m+n-1)* қадамнан тысқары жатыр, оның үстіне әрбір қадамда жоспардың искомой матрицасының немесе жолы, немесе бағаны анықталады.

Солтүстік-батыс бұрышы әдіс.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

жоспарын анықтау жоғарғы сол жақ бұрыштағы (солтүстік-батыс) = X_{11} элементінен басталады.

1-қадам. $x_{11}= min(a_1,b_1)$

Екі жағдай болуы мүмкін:

А) $a_1 \pi b_1$, бұл жағдайда $X_{11} = a_1, X_{ij} = 0, \quad j = \overline{2,n}.$

Осылайша, жіберудің A_1 бірінші пункті барлық жүкті тұтынудың B_1 бірінші пунктіне бағыттады, яғни толығымен босады, сондықтан да басқа B_2,B_3 , ...B_n пункттеріне A_1 пунктінен ешқандай жүктің жіберілуі мүмкін емес. Матрица-жоспардың алғашқы жолы осылайша анықталады, ал бөлуші кестеде бірінші жол жабылады. Мұнда алғашқы тұтынушының сұранысы $в_1^1 = в_1 - x_{11}$ тең болады. Екінші қадамға көшейік.

Б)) $a_1>b_1$, бұл жағдайда $x_{11} = в_1$, ал бірінші бағанның қалған элементтері 0-ге тең, яғни $x_{i1} = 0, i = \overline{2,m}$, себебі бірінші В тұтынушының сұранысы толығымен қанағаттандырылды, енді оған басқа A_2 , ...A_m жіберу пункттерінен жүк келмейді. Матрица-жоспардың алғашқы бағаны осылайша анықталады. Мұнда бөлуші кестедегі бірінші баған жабылады, ал бірінші A_1 жабдықтаушы жүгінің көлемі $a_1^1 = a_1 - x_{11}$ тең болады. Екінші қадамға көшейік.

2-қадам. 1-қадамға сәйкес

А) жағдайында - $x_{21} = \min(a_2, b_1 - x_{11})$ элементін, ал

Б) жағдайында $x_{12} = \min(a_1 - x_{11}, b_2)$ элементін анықтай-мыз ж.т.б.

Бұл процесс жоспардың барлық элементтері анықталғанға дейін жалғаса береді.

Теорема. Солтүстік-батыс бұрыш әдісінің нәтижесінде алынған жоспар тірек жоспар болып табылады.

Мысал: $a_1 = 15$ $в_1 = 11$

$a_2 = 16$ $в_2 = 12$

$a_1 = 17$ $в_3 = 12$

$в_4 = 13$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Солтүстік-батыс әдісімен бастапқы тірек жоспарды анықтаймыз. Әуелі тапсырманың шешімділігін тексерейік:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 15 + 16 + 17 = 48$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 11 + 12 + 12 + 13 = 48$$

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

тапсырма шешімді.

Бөлуші кесте құрайық (20-кесте):

20-кесте

a_i \ b_j	*0* ~~*11*~~	*0* ~~*8*~~ ~~*12*~~	*0* ~~*4*~~ ~~*12*~~	*0* ~~*13*~~
0 ~~*4*~~ ~~*15*~~	8 11	4 4	6	3
0 ~~*8*~~ ~~*16*~~	7	4 8	5 8	6
0 ~~*13*~~ ~~*17*~~	3	7	4 4	6 13

1-қадам. $X_{11} = min\ (a_1,\ b_1) = min\ (15,\ 11) = 11 = b_1$, бұл жағдайда бірінші тұтынушы толығымен қанағаттандырылды, сондықтан $X_{21} = 0$, $X_{31} = 0$, ал бөлуші кестеде бірінші баған жабылады, мұнда жіберудің бірінші пунктінде $a_1^1 = a_1 - x_{11} = 15 - 11 = 4$ көлемде жүк қалады.

2-қадам. Бірінші бағанды анықтағаннан кейін матрица-жоспарда қалған жоғарғы сол жақ (солтүстік-батыс) элементті тағы да анықтаймыз: $X_{12} = min\ (a_1^1,\ b_2) = min\ (4,\ 12) = 4 = a_1^1$. Бұл жағдайда бірінші A_1 жабдықтаушы толығымен босады, сондықтан B_3 және B_4 пункттеріне одан ештеңе түспейді, яғни $X_{13} = 0$, $X_{14} = 0$ және бөлуші кестенің бірінші жолы жабылады, ал екінші тұтынушының сұранысы $в_2^1 = в_2 - x_{12} = 12 - 4 = 8$ тең болады.

3-қадам. Сызылғаннан кейін қалған матрица-жоспарда жоғарғы сол жақ (солтүстік-батыс) элементті тағы да анықтаймыз:

$$X_{22} = min\ (a_2, b_2^1) = min\ (16,\ 8) = 4 = b_2^1.$$

Көріп тұрғанымыздай, екінші тұтынушының сұранысы толығымен қанағаттандырылды, сондықтан да үшінші жабдықтаушыдан оған ештеңе жіберудің керегі жоқ, яғни $X_{32} = 0$, бөлуші кестенің екінші бағаны жабылады, ал екінші жабдықтаушыда $a_2^1 = a_2 - X_{22} = 16 - 8 = 8$ көлемінде жүк қалады.

4-қадам. Екінші бағаны анықталғаннан кейін қалған матрица-жоспарда элементті анықтаймыз:

$$X_{23} = min\ (a_2^1, b_3) = min\ (8,\ 12) = 8 = a_2^1.$$

Екінші жабдықтаушы толығымен босады, сондықтан да тұтынудың 4-ші пунктіне бұл жабдықтаушыдан жүк келмейді, яғни $X_{24} = 0,$ сөйтіп бөлуші кестенің екінші жолы жабылады, сұраныс $b_3^1 = b_3 - x_{23} = 12 - 8 = 4$.

5-қадам. X_{33}-ті анықтаймыз:

$$X_{33} = min\ (a_3, b_3^1) = min\ (17{,}4) = 4 = b_3^1.$$

$$a_3^1 = a_3 - X_{33} = 17 - 4 = 13$$

6-қадам. Жоспардың соңғы элементін анықтаймыз:

$$X_{34} = min\ (a_3^1, b_4) = min\ (13{,}13) = 13$$

Осылайша, $m+n-1 = 3+4-1 = 6$ қадам арқылы бастапқы тірек жоспар анықталды:

$$X = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Алынған жоспарға сәйкес келетін транспорттық шығындарды анықтаймыз. Оларды бөлуші кесте бойынша оңай есептеп шығаруға болады:

L(X) = 11*8+4*4+8*4+8*5+4*4+13*6=88+16+32+40+16+78=270

Солтүстік-батыс бұрыш әдісімен құрылған тірек жоспарда транспорттық шығындар көрсетілмейді, сондықтан алынуы мүмкін шешім оңтайлы шешімнен алшақ болады. Оңтайлы шешімге минималды элемент тәсілімен анықталған жоспар жақынырақ.

Минималды элемент әдісі. Бұл әдістің де алгоритмі қадамдардың соңғы санынан тұрады.

1-қадам. Шығындар матрицасынан минималды элемент табылады:

$$\min C_{ij} = C_{i0\,j0}$$

$X_{i0\,j0}$: жоспарының сәйкес элементі анықталады:

$$X_{i0\,j0} = \min \quad (a_{i0}, b_{j0})$$

2 жағдай болуы мүмкін:

А) $a_{i0} < b_{j0}$, онда $X_{i0\,j0} = \min \quad (a_{i0}, b_{j0}) = a_{i0}$, бұл жағдайда A_{i0} пункті толығымен босаған, сондықтан басқа тұтынушыларға бұл пункттен жүк жіберілмейді, яғни $X_{i0\,j} = 0,\ j \neq j_0$ және бөлуші кестенің i_0 жолы жабылады, ал $b_{j0}{}^1 = b_{j0} - x_{i0\,j0}$, 2-қадамға өтелік.

Б) $a_0 > b_0$, бұл жағдайда $X_{i0\,j0} = \min \quad (a_{i0}, b_{j0}) = b_{j0}$, яғни B_{j0} - тұтынушының сұранысы толығымен қанағаттандырылды, демек басқа жабдықтаушылардан оған жүк жеткізу қажет емес, сондықтан $X_{ij0} = 0, (i \neq i_0)$, яғни бастапқы тірек жоспардың j_0-ші бағаны анықталды. Мұнда бөлуші кестедегі j_0-ші баған жабылады, ал $a_{i0}{}^1 = a_{i0} - x_{i0\,j0}$. 2-қадамға өтелік.

2-қадам. 1-қадамда бастапқы тірек жоспардың жолын немесе бағанын анықтағаннан кейін, сәйкес жол немесе баған сызылғаннан кейін қалған бөлуші кестеде тағы да транспорттық шығындардың минималды элементін іздейміз- $C_{ij} (i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n};\ i \neq i_0; j \neq j_0)$. 1-қадамдағы секілді жоспардың сәйкес элементі анықталады және т.б. Осы процесті жалғастыра отырып, қадамдардың соңғы санына қарай бастапқы жоспарды анықтай аламыз.

Теорема. Минималды элемент әдісімен алынған жоспар тірек жоспар болып табылады.

Мысалы:

$a_1 = 15 \qquad в_1 = 11$

$a_2 = 16 \qquad в_2 = 12$

$a_1 = 17 \qquad в_3 = 12$

$в_4 = 13$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Тапсырманың шешімділігі алдын ала анықталған. Тірек жоспарды минималды элемент әдісімен анықталық.

Бөлуші кесте құрамыз (21-кесте):

21-кесте

b_j / a_i	0 ~~11~~	~~10~~ ~~12~~	0 ~~6~~ ~~12~~	0 ~~13~~
0 ~~2~~ ~~15~~	8	4 2	6	3 13
0 ~~6~~ ~~16~~	7	4 10	5 6	6
0 ~~6~~ ~~17~~	3 11	7	4 6	6

1-қадам. Транспорттық шығындар арасынан минималды элементті табамыз:

$$\min C_{ij} = 3 = C_{14}$$

X_{14} жоспарының бөлуші кестенің бірінші жолында және соңғы бағанында орналасқан сәйкес элементін анықтаймыз:

$$X_{14} = min\ (a_1, b_4) = min\ (15,13) = 13 = b_4$$

Көріп тұрғанымыздай, 4-ші тұтынушының сұранысы толығымен қанағаттандырылды, сондықтан $X_{24} = 0$, ал $X_{34} = 0$ және бөлуші кестенің 4-ші бағаны жабылады, мұнда $a_1^1 = a_1 - x_{14} = 15 - 13 = 2$. 2-қадамға өтелік.

2-қадам. 4-ші бағанды сызып тастағаннан кейін қалған бөлуші кестеде транспорттық шығындардың минималды элементін іздейміз - $C_{31} = 3$. Жоспардың сәйкес элементін анықтаймыз: $X_{31} = min\ (a_3, b_1) = min\ (17,11) = 11= b_1$, сонда $X_{11} =0, X_{21} = 0$ және бөлуші кестенің бірінші бағаны жабылады, ал $a_3^1= a_3 - x_{31} = 17 - 11 =6$. 3-қадамға өтеміз.

3-қадам. Сызылғаннан кейін қалған бөлуші кестеде тағы да транспорттық шығындардың минималды элементі анықталады. Олар бірнешеу болғандықтан, кез келгенін таңдаймыз, мысалы, $C_{12} = 4$. Жоспар элементін табайық $X_{12} = min\ (a_1^1, b_2) = min\ (2, 12) = 2= (a_1^1)$, мұнда $x_{13} =0$ және бөлуші кестенің бірінші жолы жабылады, ал $b_2^1 = b_2 - x_{12} = 10$.

4-қадам. Бөлуші кестеде 4 торша қалды, оларда транспорттық шығындардың минималды элементін табамыз - $C_{22} = 4$. $X_{12} = min\ (a_2, b^1{}_2) = min\ (16, 10) = 10 = (b^1{}_2$ анықтаймыз, мұнда $x_{32} = 0$ және бөлуші кестенің 2-ші бағаны жабылады, ал $a_2^1 = a_2 - x_{22} = 16\text{-}10=6$.

5-қадам. Транспорттық шығындардың келесі минималды элементі - $C_{33} = 4$. $X_{33} = min\ (a_3^1, b_3) = min\ (6, 12) = 6= a_3,$ анықтаймыз, 3-ші жолдың барлық элементтері анықталған, яғни бөлуші кестенің 3-ші жолы жабылады, мұнда тек 3-ші тұтынушы ғана қанағаттандырылмай қалды, оған жүктің 6 бірлігі жетпейді, мұны ол жүктің 6 бірлігі қалған 2-ші жабдықтаушыдан алады.

6-қадам. $X_{23} = min\ (a_2^1, b_3^1) = min\ (6, 6) = 6$

Сонымен, тірек жоспарын аламыз $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \\ 11 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Алынған тасымалдау жоспарына сәйкес келетін шығындарды анықтаймыз. Оларды бөлуші кесте бойынша оңай есептеуге болады:

L(X) = 2*4+13*3*+10*4+6*5+11*3+6*4=8+39+40+30+33+24=174

Егер енді минималды элемент және солтүстік-батыс бұрыш әдістерімен алынған жоспарлардың транспорттық шығындарын салыстырып көрер болсақ, онда минималды элемент тәсілі арқылы үздік тірек жоспары алынғандығын көруге болады.

2.4. Транспорттық тапсырманың тірек жоспарының оңтайлылық өлшемі

Әрбір A_i жіберу пунктіне сәйкесінше $U_i \ (i = \overline{1,m})$ шамаларын қоямыз, ал әрбір тұтыну пунктіне - $B_j - V_j \ (j = \overline{1,n})$. Потенциалдар деп аталатын бұл шамаларда мынадай шарттар орындалады:

жоспардың нөлдік емес компоненттері үшін - $V_j - U_i = C_{ij} \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$

Шамаларды анықтаймыз:

$$C'_{ij} = C_{ij} + U_i - V_j \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Бұлардан $C^1 = \left\| C^1_{ij} \right\| mxn$ матрицасын құрамыз.

Матрица $C^1 = \begin{pmatrix} C^1_{11} & C^1_{12} & \text{K} & C^1_{1n} \\ C^1_{21} & C^1_{22} & \text{K} & C^1_{2n} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ C^1_{m1} & C^1_{m2} & \text{K} & C^1_{mn} \end{pmatrix}$

$X = \left\| X_{ij} \right\| mxn$ жоспарының бағалаушы матрицасы деп аталады.

Сонда транспорттық тапсырма жоспарының оңтайлылық өлшемі төмендегі теорема түрінде беріледі.

Теорема. $X = \left\| X_{ij} \right\| mxn$ жоспары оңтайлы болу үшін оның бағалаушы матрицасының барлық элементтері теріс емес болуы қажет және жеткілікті, яғни:

$$C^1_{ij} = C_{ij} + U_i - V_j \geq 0 \qquad \text{для} \quad X_{ij} = 0 \quad i = \overline{1,m},$$

$$C^1_{ij} = C_{ij} + U_i - V_j = 0 \qquad \text{для} \quad X_{ij} > 0 \quad j = \overline{1,n}$$

2.5. Потенциалдар әдісі

Потенциалдар әдісі алдын ала қарастырылған кезеңнен және бір типті итерациялардың соңғы санынан тұрады.

Алдын ала қарастырылған кезеңде бізге белгілі әдістердің (солтүстік-батыс бұрыш әдісі, минималды элемент әдісі және т.б.) бірі арқылы бастапқы тірек жоспар анықталады.

Өз кезегінде, әрбір итерация 2 кезеңге бөлінеді.

Бірінші сатыда алынған тірек жоспардың оңтайлылығы тексеріледі. Егер жоспар оңтайлы болса, онда шешу процесі аяқталады, егер оңтайлы болмаса, онда екінші кезеңге өту іске асады. Екінші кезеңде едәуір оңтайлы жаңа тірек жоспары құрылады.

Алдын ал қарастырылған кезеңде қандай да бір $X = \|X_{ij}\| mxn$ тірек жоспары анықталды деп есептейік.

1-кезең. Жоспардың оңтайлылығын тексеру.

Жоспардың оңтайлылығын тексеру үшін бұл жоспардың бағалаушы матрицасын табу қажет:

$$C^1 = \|C^1_{ij}\| mxn = \|C_{ij} + U_i - V_j\| mxn.$$

Бағалаушы матрицаны құру үшін U_i и V_j $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ потенциалдарын анықтау қажет. Олар

$$C_{ij} + U_i - V_j = 0 \quad \text{болғанда} \quad X_{ij} > 0. \qquad (*)$$

мәні үшін бар болып табылады.

Бұдан былай бұл элементтерді $(X_{ij} > 0)$ базистік деп атаймыз. Бізге белгілі болғандай, егер $X = \|X_{ij}\| mxn$ тудырмаған тірек жоспары болса, онда ол нақты (*m*+*n*-*1*) нөлдік емес базистік элементтерді қамтиды. Олардың әрқайсысы үшін (*) қатынасын құрамыз. Теңдіктердің (*m*+*n*) белгісіздері бар (*m*+*n*-*1*) жүйесін, яғни белгісіздік жүйесін аламыз: $U_j (i = \overline{1,m})$ және $V_j (j = \overline{1,n})$. Айнымалылардың біріне туынды мән бере отырып, бұл жүйенің кейбір жеке шешімін табамыз.

Мысалы, $U_1 = 0$, мәнін қойып (*m*+*n*-*1*) белгісіздері бар (*m*+*n*-*1*) теңдеулер жүйесін аламыз, мұны шешу арқылы басқа белгісіздердің мәнін табамыз. Потенциалдарды осылайша анықтап алып, жоспардың бағалаушы матрицасын құрамыз.

Егер бағалаушы матрицаның барлық элементтері теріс емес болса, онда X жоспары оңтайлы (оптималды) және процесс аяқталған, ал егер бағалаушы матрица элементтерінің арасында терістері бар болса, онда жоспар оңтайлы (оптималды) емес және 2-сатыға өту керек.

2-саты. Жаңа тірек жоспарын құру.

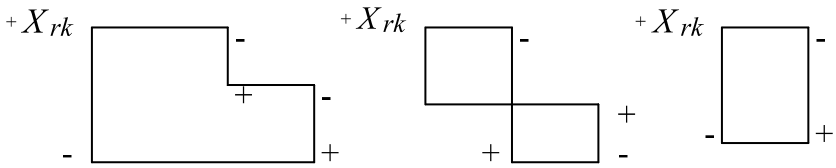
Бағалаушы матрицаның теріс элементтерінің арасында минималды элемент бар. Бұл C_{rk}^{1}, элементі болсын, яғни $\min C_{ij}^{1} = C_{rk}^{1} < 0$

Матрица-жоспарда X_{rk} сәйкес элементі үшін шығыршық құрылады.

Шығыршық – бұл тұйық үзік желі, мұның өзектері жолдар мен бағандардан алшақ орналасқан, ал жоғарғы жағында берілген X_{rk} = элементі және жоспардың нөлдік емес (базистік) элементі орналасқан.

Егер жоспар туындамайтын тірек жоспар болса, онда оның әрбір базистік емес (нөлдік) элементі үшін шығыршық құруға болады және бұл шығыршық біреу ғана болмақ.

Шығыршықтар түрлі конфигурацияға ие. Мысалы, мынадай түрлері болады:



12-сурет

Шығыршықтың жоғарғы жағын X_{rk} элементінен бастап кезекпен «+» және «-» белгілерімен белгілейміз. Шығыршықтың жоғарғы жағында орналасқан және «-» белгісімен белгіленген жоспар элементтерінің ішінде ең минималды элементті табу керек, яғни

$$\theta = \min\left\{X_{ij}^{цепи}\right\} = X_{i0j0}$$

"–"

θ санын шығыршықтың «+» белгісімен белгіленген элементтеріне қоса отырып және «-» белгісімен белгіленген элементтерінен ала отырып, шығыршық бойымен оның орнын ауыстырамыз. Шығыршыққа енбейтін жоспардың қалған элементтері өзгеріссіз қалады. Нәтижесінде жаңа жоспар пайда болады, мұнда X_{i0j0} элементі - базистік емес, ал $X_{rk} = \theta$ (бұрынғы базистік емес) элементі базистік сипат алады. Осылайша, жаңа жоспарда базистік элементтердің саны өзгермейді. Содан кейін 1-кезеңге өтеміз, мұнда пайда болған жаңа жоспардың оңтайлылығы тексеріледі. Бұл үшін оны бағалау матрицасын құру керек. Мұны, бұрын көрсетілгендей, тірек жоспардың $U_i (i = \overline{1,m})$ u $V_j (j = \overline{1,n})$ потенциалдарын анықтау арқылы жүзеге асыруға болады. Алайда жаңа жоспарды бағалау матрицасын алдыңғы жоспарды бағалау матрицасын дәлме-дәл қайта жасай отырып құруға болады. Шынымен-ақ, жаңа жоспардың алдыңғы жоспардан еркшелігі мынада екекніне назар аударайық: мұнда алдыңғы жоспарда базистік болған бір ауыспалы (X_{i0j0}) – базистік емес, ал базистік емес ауыспалы (X_{rk}), керісінше, базистік сипат алады, ал екі жоспардың да қалған базистік ауыспалылары абсолюттік көлемі бойынша ерекшеленсе де, өзара сәйкес келеді. Бірақ жаңа және алдыңғы жоспарларды бағалау матрицалары үшін бұл базистік ауыспалыларға нөлдер сәйкес келеді. Сондықтан алдыңғы жоспарды бағалау матрицасының жасалу алгоритмінің мәні мынада: мұнда C^1_{rk} элементі 0-ге айналып, барлық базистік 0-дер сақталуы керек, тек сақталмайтыны – жаңа жоспарда базистік емес (C^1_{i0j0}) элементіне айналған элементке сәйкес келетін базистік 0. Бұл былайша іске асады. Бағалау матрицасының r жолының (немесе k бағанының) элементтеріне $|C^1_{rk}|$ қосылады, яғни C^1_{rk} =0 болады. Егер осының барысында осы жолда (немесе бағанда) тұрған базистік 0-дер бұзылатын болса, онда олар бұзылған базистік 0 қайда болса, сол бағанның (немесе жолдың) барлық элементтерінен $|C^1_{rk}|$ санын алу арқылы қалпына келтіріледі. Егер базистік нөлдер тағы да бұзылса, онда ұқсас жолмен олар қалпына келтірілуі керек, бұл үрдіс бағалау матрицасы толығымен қайта жасалғанша жалғасады. Осының барысында жаңа жоспардағы базистік емес элементке сәйкес келетін алдыңғы жоспардағы базистік 0-ді қалпына келтіру қажет емес екенін ескерте кету керек.

Жаңа жоспардың бағалау матрицасын осылайша құра отырып, оның тиімділігін тексереміз. Ал егер жоспар тиімді болмаса, онда 2-кезеңге өтеміз, яғни желілік форманың төменгі мәні сәйкес келетін жаңа тірек жоспарын құрамыз.

Мысал. Тапсырманың тиімді жоспарын табу керек:

$a_1 = 15$ $в_1 = 11$

$a_2 = 16$ $в_2 = 12$

$a_1 = 17$ $в_3 = 12$

$в_4 = 13$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Тапсырманың шешімділігі алдын ала анықталған. Барлық алғашқы берілген мәліметтерді бөлуші кестеге орналастырайық.

22-кесте

a_i \ b_j	11	12	12	13	U
15	8 11	4 4	6	3	$U_1=0$
16	7	4 8	5 8	6	$U_2=0$
17	3	7	4 4	6 13	$U_3=1$
V	$V_1=8$	$V_2=4$	$V_3=5$	$V_4=7$	

Бөлуші кестені тағы бір бағанмен және жолмен толықтырайық.

Кестеге солтүстік-батыс бұрыш әдісі арқылы алынған жоспарды орналастырамыз.

$$X = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

1-кезең. Жоспардың оңтайлылығын тексеру.

Х жоспарының оңтайлылығын тексеру үшін оны бағалау матрицасын құру қажет:

$$C^1 = \begin{pmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & C_{13}^1 & C_{14}^1 \\ C_{21}^1 & C_{22}^1 & C_{23}^1 & C_{24}^1 \\ C_{31}^1 & C_{32}^1 & C_{33}^1 & C_{34}^1 \end{pmatrix}$$

Мұндағы $C_{ij}^1 = C_{ij} + U_i - V_j$, ал U_i и V_j потенциалдары $x_{ij} > 0$ (жоспардың нөлдік емес, базистік элементтері) үшін шарт (*) $C_{ij} + U_i - V_j = 0$ болған жағдайда анықталады.

U_i және V_j потенциалдарын анықтаймыз. Нөлдік емес $x_{11} = 11 > 0 \quad (i = 1, j = 1)$ элементі үшін шарт (*) былайша жазылады:

$C_{11} + U_1 - V_1 = 0$, ал $C_{11} = 8$. Мынадай теңдік шығады:

$8 + U_1 - V_1 = 0$

Нөлдік емес $x_{12} (i = 1, j = 2)$ элементі үшін шарт (*) былайша жазылады:

$C_{12} + U_1 - V_2 = 0$, яғни $C_{12} = 4$ мәнін осы қатынасқа қойғанда, $4 + U_1 - V_2 = 0$ теңдігі шығады.

Әрі қарай осыған ұқсас теңдіктер шығарамыз:

$X_{22} = 8 > 0, \quad C_{22} + U_2 - V_2 = 0 \quad$ *или* $\quad 4 + U_2 - V_2 = 0$

$X_{23} = 8 > 0, \quad C_{23} + U_2 - V_3 = 0 \quad 5 + U_2 - V_3 = 0$

$X_{33} = 4 > 0, \quad C_{33} + U_3 - V_3 = 0 \quad 4 + U_3 - V_3 = 0$

$X_{34} = 13 > 0, \quad C_{34} + U_3 - V_4 = 0 \quad 6 + U_3 - V_4 = 0$

Осылайша, мынадай жүйе пайда болады:

$$\begin{cases} 8 + U_1 - V_1 = 0 \\ 4 + U_1 - V_2 = 0 \\ 4 + U_2 - V_2 = 0 \\ 5 + U_2 - V_3 = 0 \\ 4 + U_3 - V_3 = 0 \\ 6 + U_3 - V_4 = 0 \end{cases}$$

Бұл – 7 белгісізі бар 6 теңдіктен тұратын анықталмаған жүйе. Осы жүйенің жеке шешімін табалық. $U_1 = 0$, делік, онда бірінші теңдіктен - $V_1 : 8 + 0 - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 8$, ал екінші теңдіктен $V_2 : 4 + 0 - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 4$ теңдіктерін анықтаймыз. V_2 мәнін біле отырып, үшінші теңдіктен $U_2 : 4 + U_2 - 4 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$ теңдігін есептеп шығарамыз. Әрі қарай төртінші теңдіктен $V_3 : 5 + 0 - V_3 = 0, V_3 = 5$ теңдігін анықтай аламыз. V_3 мәнін біле отырып, бесінші теңдіктен $U_3 : 4 + U_3 - 5 = 0, U_3 = 1$ теңдігін табамыз және ақырында соңғы теңдіктен $U_3 = 1$ мәнін қоя отырып, $V_4 : 6 + 1 - V_4 = 0, V_4 = 7.$ теңдігін анықтаймыз.

Көріп отырғанымыздай, потенциалдарды есептеп шығару - әжептәуір күрделі үдеріс. Оны былайша елеулі түрде оңайлатуға болады. Теңдікті мынадай түрде жазамыз: $x_{ij} > 0$ (базистік) үшін

$$(*) C_{ij} + U_i - V_j = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{r} U_i = V_j - C_{ij} \\ V_j = U_i + C_{ij} \end{array} \right\}$$

Енді бөлуші кестеге U қосымша бағаны мен V қосымша тармағын енгіземіз. (**) формуласын қолданып, $U_1=0$ мәнін қоямыз. Бөлуші кестенің бірінші тармағынан нөлдік емес мәндерді табамыз және V-ның сәйкес мәндерін анықтаймыз. Осылайша, бірінші тармақ пен бірінші бағанда $x_{11}=11 \neq 0$, ізінше, $V_1 = U_1 + C_{11} = 0 + 8 = 8$ теңдігін анықтаймыз. Сонымен қатар бірінші жол мен екінші бағанда $x_{12} \neq 0$, сондықтан $V_2 = U_1 + C_{12} = 0 + 4 = 4.$ мәнін есептеп шығаруға болады. Енді бұл жолда нөлдік емес мәндер жоқ. Енді бөлуші кестенің V мәндері анықталған бағандарын қарастырамыз. Бұлар – бірінші және екінші бағандар. Бірінші бағанда нөлдік емес мәндер жоқ (x_{11} –

ден басқа), ал екіншісінде – $x_{22} = 8 \neq 0$. Осы нөлдік емес мән арқылы $U_2 = V_2 - C_{22} = 4 - 4 = 0$. теңдігін анықтауға болады (қар.(**)). U_2 мәнін біле отырып, $x_{23} = 8 \neq 0$ нөлдік емес мән арқылы $V_3 = U_2 - C_{23} = 0 + 5 = 5$ теңдігін табамыз, ал $x_{33} = 4 \neq 0$ мәні арқылы $U_3 = V_3 - C_{33} = 5 - 4 = 1$ теңдігін аламыз, соңында $x_{34} = 13 \neq 0$ мәні арқылы, U_3 мәнін біле отырып, $V_4 = U_3 - C_{34} = 1 + 6 = 7$ теңдігін анықтаймыз. Осылайша, теңдіктер құрмай-ақ (*), бөлуші кесте негізінде, (**) формулаларды қолдана отырып, потенциалдарды анықтауға болады. 1-кестеде аталған тәсілмен бөлуші кестедегі потенциалдарды есептеп шығару барысы бағыттауыштармен көрсетілген. Біздіңше, потенциалдарды есептеп шығарудың бұл тәсілі анағұрлым ыңғайлы.

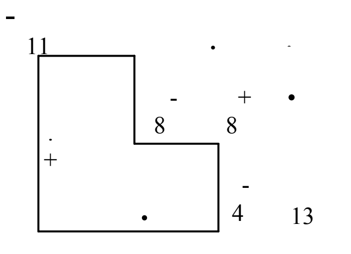
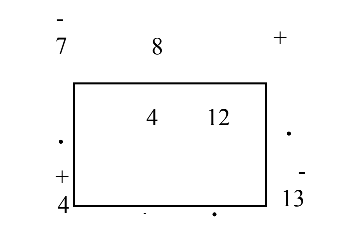
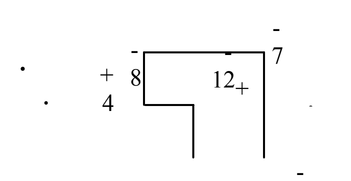
Енді бағалау матрицасын құруға көшуімізге болады. $C^1 = \left\| C_{ij}^1 \right\| mxn$ бағалау матрицасының элементтері $C_{ij}{}^1 = C_{ij} + U_1 - V_j$ формуласы бойынша анықталатыны белгілі.

Көріп отырғанымыздай, бөлуші кестеде потенциалдар бағаны мен тармағы болғанда (1-кестені қар.), бағалау матрицасының элементтерін есептеп шығару жеткілікті түрде қарапайым болып келеді, ал нақты C_{ij} бағалау матрицасының элементін анықтау үшін C_{ij} шығындар матрицасының сәйкес элементіне қиылыстарында алғашқы элемент орналасқан і-інші тармақтағы U_i потенциалын қосып, j-інші бағандағы V_j потенциалын алып тастау керек. Осылайша, $C_{11}{}^1$-ді анықтау үшін C_{11} элементіне бірінші тармақта орналасқан U_1-ді қосып, бірінші баганда орналасқан V_1-ді алып тастау керек, яғни: $C_{11}{}^1 = C_{11} + U_1 - V_1 = 8 + 0 - 8 = 0$.

Мысалы, $C_{24}{}^1$ мәнін анықтау үшін $C_{24} = 6$ элементіне U_2 (екінші тармақта) қосып, V_4 (төртінші бағанда) алып тастау қажет, өйткені бұл элемент бөлуші кестенің екінші тармағы мен төртінші бағанының қиылысында орналасқан, яғни $C_{24}{}^1 = C_{24} + U_2 - V_4 = 6 + 0 - 7 = -1$.

Итеративті түрде есептеп шығару барысын келесі түрде орналастырған ыңғайлы. Есеп шығару барысын сипаттайық.

23-кесте

Интер-вал №	Тірек жоспар	Бағалау матрицасы
0 0	 	$\begin{array}{rrrrl} \underline{0} & \underline{0} & 1 & -4 & \\ -1 & \underline{0} & \underline{0} & -1 & \\ -4 & 4 & \otimes & \underline{0} & +4 \end{array}$
	$\theta = \min(11,8,4)=4$	
1	 	$\begin{array}{rrrrl} \otimes & \underline{0} & 1 & -8 & \\ -1 & \underline{0} & \underline{0} & -5 & \\ \underline{0} & 8 & 4 & \underline{0} & -8 \end{array}$
	$\theta = 7$	+8 +8
2	 	$\begin{array}{rrrrl} 8 & \underline{0} & 1 & \underline{0} & \\ 7 & \underline{0} & \underline{0} & 3 & \\ \underline{0} & 0 & & \otimes & +4 \end{array}$
	$\theta = 6$ · 6	-4
	· 2 · 13 · 10 6 · 11 · 6 ·	$\begin{array}{rrrr} 4 & \underline{0} & 1 & \underline{0} \\ 3 & \underline{0} & \underline{0} & 3 \\ \underline{0} & 4 & \underline{0} & 0 \end{array}$

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \\ 11 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Бағалау матрицасында жоспардың нөлдік емес (базистік) компоненттеріне сәйкес келетін элементтер 0-ге тең болуы керек ((*) негізінде). Бұл нөлдерді базистік деп атайық және оларды базистік емес нөлдерден ажырату үшін астын сызамыз.Тірек жоспардағы нөлдік емес элементтерді жазбаймыз, тек олар тұруы тиіс орындарды ғана нүктелермен белгілейміз.

Көріп отырғанымыздай, алдыңғы тірек жоспардың бағалау матрицасында теріс элементтер бар. Ізінше, тиімділік өлшемі негізінде бұл жоспар қарқынсыз, демек оны жақсартуға болады. Бірінші кезең аяқталды, екінші кезеңге көшейік.

2-кезең. Бағалау матрицасының теріс элементтерінің ішінде минималды $\min C_{ij}^{1} = C_{14}^{1} = C_{31}^{1} = -4 < 0$ мәнін табу керек.

Мысалы, $C_{31}^{1} = -4 < 0$ мәнін алайық. x_{31} жоспарының сәйкес элементі үшін шығыршық құрамыз. Ол x_{31} элементінен басталып, $x_{33} \to x_{23} \to x_{22} \to x_{12} \to x_{11} \to x_{31}$ арқылы өтеді. Шығыршықтың жоғарғы жақтарын x_{31} элементінен бастап, кезекпен, «+» және «-» белгілерімен белгілейміз. Шығыршықтың «-» белгісімен белгіленген элементтерінің ішінен ең кішісін табамыз:

$$\theta = \min_{"-"}\left\{X_{ij}^{цепи}\right\} = \min\{11,8,4\} = 4$$

Содан соң θ санын шығыршықтың «+» белгісімен белгіленген элементтеріне қоса отырып, «-» белгісімен белгіленген элементтерден ала отырып, шығыршық бойымен θ санының орнын ауыстырамыз. Осының барысында жоспардың шығыршыққа енбеген компоненттері өзгеріссіз қалады. Нәтижесінде кестеде алғашқы жоспардан кейін төменде жазылған жаңа жоспар аламыз. Бұл жоспарда алғашқы жоспарда базистік болған x_{33} элементі базистік емес, ал x_{31} элементі, керісінше, алғашқы жоспарда базистік емес болып, жаңа жоспарда базистік болады. Осымен 2-кезең аяқталады. 1-кезеңге өту керек, яғни алынған жоспардың тиімділігін тексеру шарт.

Жаңа жоспардың тиімділігін тексеру үшін оның бағалау матрицасын құру керек екені белгілі. Оны алдыңғы жоспардың бағалау матрицасын эквивалентті түрде қайта жасау жолымен табамыз. Бұл үшін бағалау матрицасының $C_{31}^{1} = -4$ элементін 0-ге айналдыру шарт, өйткені жаңа тірек жоспарда ол базистік x_{31}=4 элементіне сәйкес келеді. Сонымен қатар жаңа жоспарда жоспардың базистік емес элементіне сәйкес келетін базистік нөлді есептемегенде, алдыңғы жоспардың бағалау матрицасындағы барлық базистік нөлдер сақталуы тиіс.

Бұл - $C_{33}^{1} = 0$ элементі. Оны матрицада жұқа сызықпен белгілейміз. Бағалау матрицасында $C_{31}^{1} = -4$ мәнін 0-ге айналдыру үшін матрицаның үшінші тармағының барлық элементтеріне 4 санын қосамыз, бірақ осының барысында біз екі базистік C_{33}^{1}=0 және $C_{34}^{1} = 0$ нөлдерін бұзамыз. Алайда базистік $C_{33}^{1} = 0$ нөл мәнін қалпына келтірудің керегі жоқ, өйткені бұрын ескертіп өткеніміздей, ол жаңа жоспарда базистік емес x_{33}=0 элементіне сәйкес келеді. Сондықтан бағалау матрицасында оған кез келген сан сәйкес келе алады. Ал базистік $C_{34}^{1} = 0$ нөлін қалпына келтіру үшін ол орналасқан төртінші бағанның барлық элементтерінен 4 санын алып тастаймыз. Төртінші бағанда базистік нөлдер болмағандықтан, осымен бағалау матрицасының құрылуы аяқталады, нәтижесінде біз жаңа жоспардың бағалау матрицасын аламыз.

Көріп отырғанымыздай, жаңа жоспардың бағалау матрицасында теріс $C_{14}^{1} = -8, C_{21}^{1} = -1, C_{24}^{1} = -5.$ элементтері бар. Сонымен, алынған жоспар тиімді емес және жоспарды жақсарту үрдісі тиімді жоспар алынғанға дейін жалғаса береді. Бүкіл есеп барысы 2-кестеде берілген.

2.6. Транспорттық тапсырманың тірек жоспарының туындау жағдайлары

Егер нөлдік емес (базистік) компоненттерінің саны аз (m+n-1) болса, тиімді жоспар туындаушы деп аталады. Тірек жоспар екі жағдайда туындауы мүмкін:

- алғашқы тірек жоспардың құрылуы барысында;
- потенциалдар әдісімен жоспарды жақсарту барысында.

Бірінші жағдайда жоспардың туындаушылығынан арылу үшін базистік айнымалылардың жетіспеген көлемі базистік емес (нөлдік) айнымалылар ішінен таңдалып алынады, бірақ осының барысында жоспардың тірек болу шарты бұзылмау керек, яғни көптеген базистік айнымалылардан тұйық шығыршық құруға болмайтындай жағдай ескерілуі керек.

Мысалы:

$a_1 = 10 \qquad в_1 = 10$

$a_2 = 12 \qquad в_2 = 8$

$a_1 = 14 \qquad в_3 = 6$

$в_4 = 12$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Алғашқы тірек жоспарды солтүстік-батыс бұрыш әдісімен құрамыз.

24-кесте

b_j / a_i	0 ~~10~~	0 ~~8~~	0 ~~2~~ ~~6~~	0 ~~12~~
0 ~~10~~	1 10	2 0	3	4
0 ~~4~~ ~~12~~	4	3 8	2 4	1
0 ~~12~~ ~~14~~	2	3	1 2	4 12

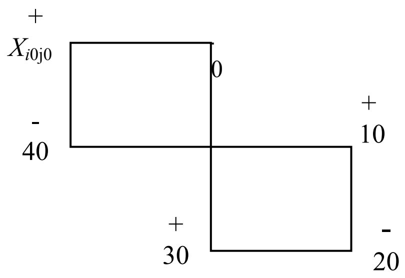
Тірек жоспарды аламыз:

$$x = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Жоспар туындаушы емес болуы үшін онда m+n –1 = 3+4-1=6 нөлдік емес айнымалылары болуы тиіс. Құрылған жоспарда нөлдік емес элементтер – 5, яғни туындаушы жоспар алдық. Жоспардың туындаушылығынан арылу үшін жоспардың бір нөлдік компонентін базистік деп қабылдау қажет, бірақ бұл жерде базистік элементтерден тұйық шығыршықтың құрылмағаны жөн. Осылайша, базистік айнымалы ретінде x_{12}=0 немесе x_{21}=0 мәндерін қабылдауға болады, бірақ базистік ретінде x_{32}=0 айнымалысын қарастыруға болмайды, өйткені бұл жағдайда базистік айнымалылардан $x_{22} \to x_{23} \to x_{33} \to x_{32} \to x_{22}$ шығыршығы құрылады, яғни жоспардың тірек болу шарты бұзылады.

<u>Екінші жағдайда</u> жаңа тірек жоспарын құру үрдісінде θ мәнін анықтау барысында шығыршықта «-» белгісімен белгіленген ең кіші мәндердің біреуі ғана емес, бірнешеуі болса және шығыршық бойымен θ санының орнын ауыстыру барысында нөлге жоспардың айнымалыларының біреуі ғана емес, бірнешеуі айналса, жоспардың туындаушылығына жол ашылады. Жоспардың туындаушылығын болдырмау үшін алынған нөлдік айнымалылардың біреуін базистік емес деп, қалғандарын базистік деп есептейді.

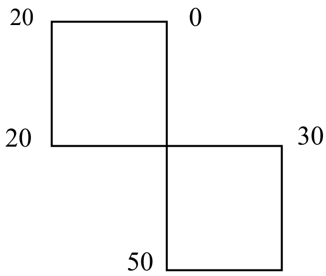
Мысалы:



13-сурет

$$\theta = \min(40,20,20) = 20$$

Шығыршық бойымен θ санының орнын ауыстыру барысында нөлге жоспардың екі айнымалысы айналады. Жоспардың туындаушылығын болдырмау үшін бір нөлді базистік емес деп, екіншісін базистік деп есептейміз.



14-сурет

<u>Ескерту.</u> Бұрын көрсетілгендей, тапсырманы шешу барысында жоспардың нөлдік элементтері жазылмайды, олар орналасқан орындар ғана нүктелермен белгіленеді. Нөлдік элемент базистік деп қабылданған жағдайда ол жоспарда нөл ретінде жазылады.

2.7. Транспорттық тапсырманың ашық моделі.

Алғашқыда көрсетілгендей, транспорттық тапсырманың моделі мынадай түрге ие:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cij\, x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} xij = a_i, \quad i = \overline{1, m} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} xij = b_j, \quad j = \overline{1, n} \qquad (3)$$

$$xij \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \qquad j = \overline{1, n} \qquad (4)$$

Бұған дейін транспорттық тапсырманың жабық моделі қарастырылды, бұл модель үшін мынадай шарт орындалған болатын:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Алайда тәжірибелік тапсырмаларды шешу барысында көбінесе осы аталмыш шарт орындалмайтын жағдайға тап болуға тура келеді, яғни мына теңсіздікке кез боламыз:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (7)$$

(7) шарты орындалған жағдайда (1)-(4) моделі ашық деп аталады. Бұл жағдайда тапсырма жабық модельге ашық модельді келтіру арқылы шешіледі. Мұнда мынадай екі жағдайдың болуы мүмкін екені анық:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad 2)\ \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Олардың әрқайсысын жеке қарастырайық.

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Бұл жағдайда жабдықтаушылардағы өнімнің мөлшері тұтынушыларға қажетті $y = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ көлемінен әлдеқайда артық және осыған орай жабдықтаушылардың бірқатары толық жабдықталмаған, яғни транспорттық тапсырма моделінде шарт мынадай түрге ие болады:

2) (*) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = \overline{1,m}$

Ашық модельді жабық модельге келтіру үшін жалған тұтынушы енгізіледі, оның сұранысы мынадай:

$$b_{n+1} = y = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Осының барысында қосымша $X_{in+1} \ge 0 \quad i = \overline{1,m}$ айнымалылары енгізіледі, олар теңсіздіктерді (*) теңдіктерге айналдырады:

$$(2^1)\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \qquad i=\overline{1,m}$$

Шындығында бұл тұтынушы жоқ болғандықтан, жабдықтаушылардан жалған тұтынушыға өнімді жеткізуге кететін шығын болмайды, яғни $C_{i,n+1}=0 \quad (i=\overline{1,m})$.

Мынадай модель аламыз:

$$(1^1)\ \min \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$(2^1)\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \qquad i=\overline{1,m}$$

$$(3^1)\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j=\overline{1,n+1}$$

$$(4^1)\ x_{ij} \ge 0, \qquad i=\overline{1,m} \quad j=\overline{1,n+1}$$

Бұл үшін мынадай шарт орындалады:

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$, яғни ($1^1$)-($4^1$) моделі – жабық.

Бұл жағдайда бөлуші кесте мынадай түрге ие болады 25-кесте:

25-кесте

	B_1	B_2	…	b_n	b_{n+1}
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	0
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	0
…	...	…	…	…	…
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	0

Тапсырма шешімі табылғаннан кейін тиімді жоспарда соңғы баған алынып тасталады, ал осы бағанның нөлдік емес мәндері сәйкес жабдықтаушыларда қолданылмаған күйде қалатын өнімнің көлемін көрсетеді.

Екінші жағдайды қарастырайық:

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i \,\pi\, \sum_{j=1}^{n} b_j$,

Бұл жағдайда тұтынушылардың сұранысы

$\mu = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, көлеміндегі өнімнің қолда бар мөлшерінен асып түседі, осыған орай кейбір тұтынушылардың сұранысы қанағаттандырылмайды, яғни транспорттық тапсырманың (3) моделінің шектелуі теңсіздік түрін қабылдайды:

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_j, \qquad j = \overline{1,n}$$

Ашық модельді жабық модельге келтіру үшін жалған жабдықтаушы енгізіледі, оның өнімінің көлемі мынадай:

$$a_{m+1} = \mu = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Осының барысында қосымша $X_{m+1,} \quad j \ge 0 \quad j = \overline{1,n}$ айнымалылары енгізіледі, олар теңсіздіктерді (**) теңдіктерге айналдырады:

$$(3^{11}) \qquad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \qquad j = \overline{1,n}$$

Шындығында бұл жабдықтаушы болмағандықтан, жалған жабдықтаушыдан тұтынушыларға өнімді жеткізуге кететін шығын болмайды, яғни $C_{m+1j} = 0 \quad (j = \overline{1,n})$.

Жабық модель аламыз:

$$(1^{11}) \min f(x) \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$(2^{11}) \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = \overline{1, m+1}$$

$$(3^{11}) \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \qquad j = \overline{1,n}$$

$$(4^{11})\, x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1, m+1} \quad j = \overline{1,n}, \quad так \quad как$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Бұл жағдайда бөлуші кесте мынадай түрге ие болады (26-кесте):

26-кесте

	B_1	B_2	…	b_n
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}
A_{m+1}	0	0	…	0

Алынған шешімде соңғы жол алынып тасталады, ал оның нөлдік емес мәндері тұтынушылардың қанағаттандырылмаған сұранысының көлемін білдіреді.

Мысалы:

$a_1 = 70$ $в_1 = 80$
$a_2 = 40$ $в_2 = 30$
$a_3 = 20$ $в_3 = 50$
$в_4 = 40$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \\ 9 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 70 + 40 + 20 = 130$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 80 + 30 + 50 + 40 = 200$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = 200 - 130 = 70$$

Жабдықтаушылардың мүмкіндіктерінен 70 сұраныс асып түседі. μ = 70 көлемінде өнімі бар жалған 4 жабдықтаушы енгізіледі.

Бөлуші кесте құрайық (27-кесте).

27-кесте

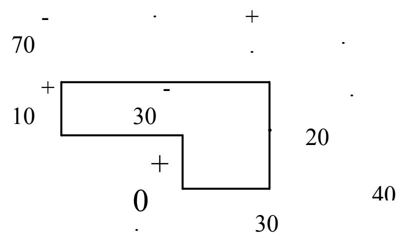
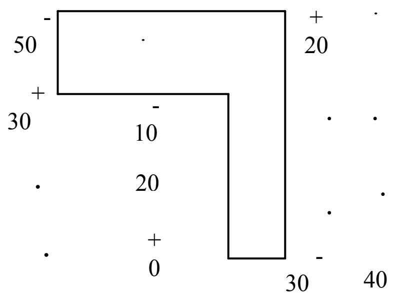
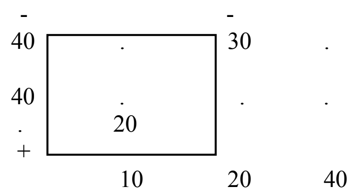
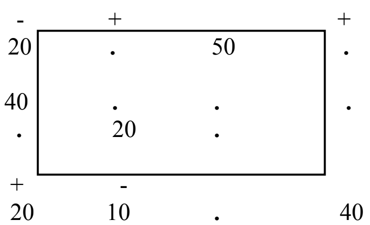
a_i \ b_j	0 ~~10~~ ~~80~~	0 ~~30~~	0 ~~50~~	0 ~~40~~	U_i
0 ~~70~~	8 ~~70~~	7	4	7	0
0 ~~30~~ ~~40~~	3 *10*	5 30	6	4	5
0 ~~20~~	9	2 0	5 20		8
0 ~~40~~ ~~70~~	0	0	0 30	40	13
V_j	8	10	13	13	

Алғашқы тірек жоспары солтүстік-батыс бұрыш әдісі арқылы алынған. 28-кестеде тапсырманың бүкіл шешілу барысы көрсетілген.

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 20 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Осының барысында бірінші, екінші және төртінші тұтынушылар сәйкесінше өнімнің 10, 20 және 40 бірліктерін толықтай алмайды.

28-кесте

Тірек жоспар	Бағалау матрицасы
	$\begin{array}{ccccc} & & & -6 & \\ \underline{0} & -3 & -9 & -5 & \\ \underline{0} & \underline{0} & -2 & -4 & \\ 9 & \underline{0} & \otimes & -2 & \\ 5 & 3 & \underline{0} & \underline{0} & -9 \end{array}$
$\theta = 20$	+9 +9
	$\begin{array}{ccccc} \underline{0} & -3 & \underline{0} & 3 & \\ \underline{0} & \otimes & 7 & 5 & \\ 9 & \underline{0} & 9 & 7 & -6 \\ -4 & -6 & \underline{0} & \underline{0} & \end{array}$
$\theta = 10$	+6
	$\begin{array}{ccccc} \underline{0} & 3 & \underline{0} & 3 & \\ \underline{0} & 6 & 7 & 5 & \\ 3 & \underline{0} & 3 & 1 & +4 \\ -4 & \underline{0} & \otimes & \underline{0} & +4 \end{array}$
$\theta = 20$	-4 -4
	$\begin{array}{ccccc} \otimes & -1 & \underline{0} & -1 & +1 \\ \underline{0} & 2 & 7 & 1 & \\ 7 & \underline{0} & 7 & 1 & \\ \underline{0} & \underline{0} & 4 & \underline{0} & \end{array}$

θ = 20				-1			
.	.	50	20	1	0	$\underline{0}$	$\underline{0}$
40	.	.	.	$\underline{0}$	2	6	1
.	40	.	.	7	$\underline{0}$	6	1
40	10	.	20	$\underline{0}$	$\underline{0}$	3	$\underline{0}$

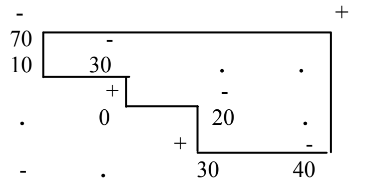
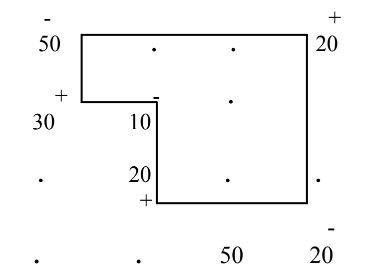
2.8. Тасымалды блоктау

Тәжірибелік тапсырмаларды шешу барысында қосымша шарт енгізу қажеттілігі жиі кездеседі, осыған сәйкес жекелеген жабдықтаушылардан кейбір тұтынушыларға жекелеген жүк тасымалы қысқартылуы тиіс. Бұл шарттар тасымалға тыйым салу немесе блоктау деп аталады. Мұндай шарттар ашық модельдерді зерттеу барысында пайда болуы мүмкін. Мысалы, алдыңғы тапсырманы төртінші тұтынушы толығымен қанағаттандырылған жағдайда шешейік. Осының барысында бөлуші кесте қалай өзгеретінін, яғни осы қосымша шарт онда қалайша көрініс табатынын қарастырамыз.

Шындығында жалған жабдықтаушыдан жүк тасымалы жүзеге асырылмайтындықтан және одан түсетін өнім қанағаттандырылмаған сұраныс көлемін білдіретіндіктен, осыған орай төртінші тұтынушыға осы тұтынушының сұранысын қанағаттандыру үшін жалған жабдықтаушыдан жүк тасымалына тыйым салу керек. Ал жалған жабдықтаушыдан төртінші тұтынушыға жүктің тасымалдануына тек үлкен көлік шығынын шығару арқылы ғана тыйым салуға болады. $C_4 = M$ делік (жеткілікті түрде үлкен сан) Бөлуші кесте құрайық. Алғашқы тірек жоспарды солтүстік-батыс бұрыш әдісі арқылы анықтайық. Бүкіл тапсырма шешу барысы 29-кестеде көрсетілген.

b_j / a_i	0 ~~10~~ ~~80~~	0 ~~30~~	0 ~~50~~ ~~30~~	0 ~~40~~	U_1
0 ~~70~~	8 70	7	4	7	0
0 ~~30~~ ~~40~~	3 10	5 30	6	4	5
0 ~~20~~	9	2	5 0	3 20	8
0 ~~40~~ ~~70~~	0	0	0 30	M 40	13
V_j	8	10	13	13+M	

29-кесте

Тірек жоспар	Бағалау матрицасы
	$\begin{matrix} \underline{0} & -3 & -9 & -M-6 & \\ \underline{0} & \underline{0} & -2 & (-4-M) & \\ 9 & \underline{0} & \times & (-2-M) & \\ 5 & 3 & \underline{0} & \underline{0} & -(M+6) \end{matrix}$
θ = 20	+(M+6)+- (M+6)
	$\begin{matrix} 0 & -3 & (M-3) & \underline{0} & \\ \underline{0} & \otimes & (M+4) & 2 & \\ 8 & \underline{0} & (M+6) & 4 & (-M-3) \\ -M-1 & M-3 & \underline{0} & \underline{0} & \end{matrix}$
θ = 10	+M+3

.

- + 40 30 40 . . . . 20 . . + - 0 10 50 10	$\underline{0}$ M $M-3$ $\underline{0}$ $-M-1$ $\underline{0}$ 0 $M+4$ 2 $-M-1$ $-M+5$ $\underline{0}$ 3 $-M+1$ 4 $\underline{0}$ $\underline{0}$ $\underline{\otimes}$
θ = 10	+M+1 M+1
- + 30 . . 40 40 . . . . 20 . . + - 10 10 50	$\otimes$ -1 -4 $\underline{0}$ $+4$ $\underline{0}$ 2 3 2 6 $\underline{0}$ 3 2 $\underline{0}$ $\underline{0}$ $\underline{0}$ $M+1$
θ = 30	-4
+ - . . 30 40 40 . . . - + . 20 . + . . + - 40 10 20 .	4 3 $\underline{0}$ $\underline{0}$ -2 $\underline{0}$ 2 3 -2 6 $\underline{0}$ 3 -2 $\underline{0}$ $\underline{0}$ $\otimes$ $M-3$ $+2$ $+2$
. . 50 20 40 . . . . 0 . 20 40 30 . .	2 1 $\underline{0}$ $\underline{0}$ $\underline{0}$ 2 5 0 6 $\underline{0}$ 5 $\underline{0}$ $\underline{0}$ $\underline{0}$ 2 $M-1$

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 20 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Осының барысында бірінші және екінші тұтынушылар сәйкесінше 30 және 40 бірліктерді толықтай алмайды.

2.9. Желі түріндегі транспорттық тапсырма

Матрица түріндегі транспорттық тапсырмада жекелеген жіберу пунктілері мен тұтыну пунктілері бар, сонымен қатар тұтыну пунктілерінен жіберу пунктілеріне жүк тасымалдау мүмкін емес. Алайда тәжірибелік тапсырмалардың көбінде бір мезгілде өнімді алып шығару және енгізу пунктілері болып табылатын пунктілер бар. Транспорттық тапсырманың осындай жағдайға жинақталуы транспорттық желі деген ұғымды тудырады.

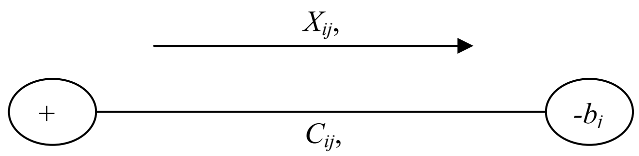
Транспорттық тапсырманың желі түрінде берілуі. $a_1,a_2,\ \dots a_p$ қуаттылығы бар $A_1,A_2,\ \dots A_p$ пунктілерінде кейбір біртекті өніммен жабдықтаушылардың P саны мен $B_1,\ B_2,\ \dots B_p$ пунктілерінде $b_1,b_2,\ \dots\ b_q$ сұранысы бар осы өнімді тұтынушылардың q саны бар делік.

Тапсырманы желі түрінде беру үшін келесі белгілер мен ұғымдарды енгіземіз. Желіде әрбір жабдықтаушыны шеңбермен белгілейміз, оның ішінде жабдықтаушының «+» - + $a_i(i=\overline{1,P})$ белгісімен белгіленген қуаттылығы көрсетіледі. Әрбір тұтынушы да шеңбермен белгіленеді, оның ішінде «-» - $в_i\ \ (j=\overline{1,q})$ белгісімен сұраныс жазылады.

Жабдықтаушылар мен тұтынушыларға сәйкес келетін бұл шеңберлер транспорттық желінің шыңдары деп аталады.

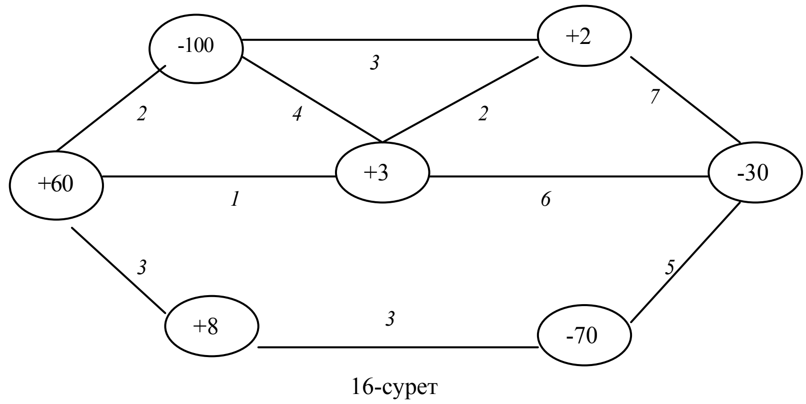
Егер пунктілердің арасында жолдар болса, онда сәйкес шыңдар сызықтар арқылы бірігеді, бұл сызықтар транспоттық желінің қабырғалары (дугами или звеньями) деп аталады.

Әр қабырғаға не пунктілер арасындағы арақашықтықты, не олардың арасындағы өнім бірліктерін тасымалдауға кеткен шығынды көрсететін C_{ij} саны сәйкес келеді. Бір пунктіден екінші пунктіге жүк жеткізуді жоғарғы жағынан X_{ij} жабдықтау көлемін көрсете отырып, сәйкес шыңдар арасында орналасқан бағыттауыштар арқылы белгілейміз. Бағыттауыш соған қоса өнімнің орнын ауыстыру бағытын, яғни X_{ij} көрсетеді.



15-сурет

Әдеттегідей, өнімді тасымалдаудың тиімді жоспарын табу керек. Белгілі болу үшін нақты мысал қарастырайық. Қандай да бір өніммен жабдықтаушылар саны – 4 (i=4), осы өнімді тұтынушылар саны 3 $(j=\overline{1,3})$ болсын делік. Келесі суретте осы тапсырманың желі түрінде берілуі көрсетілген (16-сурет).



16-сурет

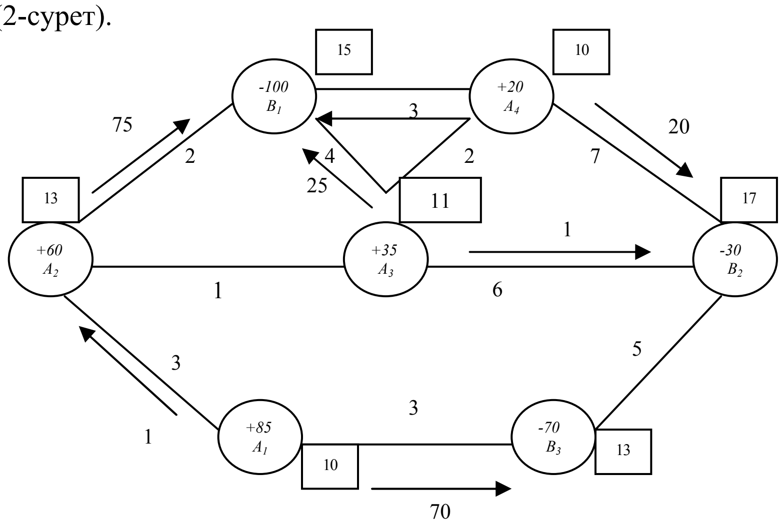
Транспорттық тапсырманы желі түрінде шешудің оны матрица түрінде шешумен салыстырғанда елеулі айырмашылығы жоқ екенін ескерте кету керек. Екі жағдайда да шешу әдістері бір ғана идеяға негізделген.

Көрсетілген мысалда желі түрінде берілген транспорттық тапсырманы шешудің потенциалдар әдісін қарастырайық.

Тапсырманы шешу матрица түрінде шешу сияқты алғашқы тірек жоспарды құрудан басталады.

Алғашқы тірек жоспарды құру. Желінің жабдықтаушыларға сәйкес келетін шыңдарын $A_i\,(i=\overline{1,4})$ арқылы, тұтынушыларға сәйкес келетін шыңдарын – $B_j\,(j=\overline{1,3})$ деп белгілейік (17-сурет).

Бөлуді A_1 шыңынан бастаймыз. Ондағы мән оң мән, осыған орай одан 85 бірлік көлеміндегі өнімді алып шығару керек. A_1 шыңына A_2 және B_3 жолдарының желісі арқылы біріккен екі шың кірігеді. B_3 шыңына 70 бірліктік сұранысы бар тұтынушы сәйкес келеді. Сондықтан 70 бірлікті A_1 пунктінен B_3 пунктіне жібереміз, ал A_1 пунктінде қалған 15 бірлікті A_2 пунктіне бағыттаймыз. Сызба түрінде желідегі бұл үрдіс жоғарғы жағынан 70 және 15 бірлікке сәйкес жабдық көлемін көрсете отырып, A_1 шыңынан B_3 және A_2 шыңдарына бағыттауыштар жүргізу арқылы жүзеге асырылады. Енді A_2 шыңында барлығы 75 бірліктен тұратын өнім ғана қалды, оларды A_2B_1 қабырғасы бойынша B_1 шыңына бағыттаймыз. B_1 шыңына оның сұранысын қанағаттандыру үшін тағы да 25 бірлік жетпейді, бұларды ол A_3 шыңынан ала алады, ал A_3 шыңында бар-жоғы 35 бірліктен тұратын өнім бар. Жүктің 25 бірлігі A_3 шыңынан B_1 шыңына бағытталғаннан кейін B_1 пунктінің сұранысы толығымен қанағаттандырылады, ал A_3 шыңында өнімнің тағы да 10 бірлігі қалды. Өнімнің қалған 10 бірлігін A_3 шыңынан A_3 B_2 қабырғасы бойынша сұранысы 30 бірлікке тең B_2 шыңына бағыттаймызн. B_2 шыңының сұранысына жетіспейтін 20 бірлік A_4 шыңынан жеткізілуі мүмкін. Осылайша, өнімді бастапқы бөлу іске асты (2-сурет).



17-сурет

Алғашқы бөлуге қойылатын негізгі талаптар:

1. Әр қуаттылық бөлінуге тиіс, ал әр сұраныс қанағаттандырылуы керек.

2. Әр шыңға, ең болмағанда, бір бағыттауыш не енуі керек, не одан шығуы керек.

3. Бағыттауыштардың жалпы саны бірліксіз шыңдар көлеміне тең болуы керек.

4. Бағыттауыштар тұйық шығыршық құрмауы керек, яғни қозғалысты бағыттауыш бойымен бір шыңнан бастай отырып, бір шыңнан екінші шыңға бағыттауыш бойымен өте отырып (бағыттауыштың бағытына назар аудармай), сол алғашқы шыңға қайтып келе алатындай болу керек.

Көріп отырғанымыздай, 2-суретте берілген бөлу барысы барлық осы талаптарды қанағаттандырады.

<u>Тиімділік өлшемі.</u> Енді матрица түрінде шешудегі сияқты табылған жоспардың тиімділігін потенциалдар көмегімен тексеру қажет.

Потенциалдарды есептеу алгоритмін жалпы түрде сипаттайық. Алдымен кез келген шыңға еркін түрде таңдалған потенциал тиесілі болып табылады, бұл потенциал осы шыңның жанына квадраттың ішіне жазылады. Содан кейін осы шыңнан бағыттауыштар бойымен орын ауыстыра отырып, өзге шыңдардың потенциалдары келесі ретпен есептеліп шығады. Егер бағыттауыш осы шыңға енсе, онда оның потенциалына C_{ij} көлемі қосылады, ал егер бағыттауыш осы шыңнан шықса, онда оның потенциалынан C_{ij} алынып тасталады.

Потенциалдарды қарастырылып отырған тапсырмаға қатысты есептеп шығарамыз (2-сурет). A_1 шыңына 10-ға тең потенциал береміз. A_1 шыңынан A_2 және B_3 шыңдарына екі бағыттауыш шығады. Алгоритмге сәйкес, A_1 шыңының потенциалына сәйкес C_{ij} мәнін қоса отырып, осы шыңдардың потенциалдарын аламыз. Осылайша, B_3 потенциалы мынаған тең болады: 10+3=13, ал A_2 шыңының потенциалы мынаған тең болады: 10+3=13. Әрі қарай A_2 шыңынан B_1 шыңына бағыттауыш шығады, сондықтан B_1 шыңының потенциалы 13 пен 2 сомалары ретінде анықталады және 15-ке тең болады. B_1 шыңына A_3 шыңынан бағыттауыш шығады. Алгоритмге сәйкес, A_3 шыңының потенциалы мынаған тең болады: 15-4=11. Әрі қарай A_3 шыңынан B_2 шыңына бағыттауыш шығады, осыған орай B_2 шыңының потенциалы былайша анықталады: 11+6=17. A_4 шыңынан бағыттауыш еніп тұрған B_2 шыңының потенциалын біле отырып, A_4 шыңының потенциалын анықтаймыз: 17-7 = 10. Осылайша, барлық шыңдардың потенциалдары анықталды.

Барлық шыңдардың потенциалдарын есептеп шығара отырып, еркін қабырғалардың (бағыттауышсыз қабырғалар) сипаттамасын анықтауға көшеміз. Әр қабырғаға екі потенциал сәйкес келеді. Егер үлкен потенциалдан кіші потенциалды алып тастап, ал алындыдан қабырғаға сәйкес C_{ij} мәнін алар болсақ, онда алынған көлем қабырғаның <u>сипаттамасы</u> немесе оның <u>бағасы</u> деп аталады.

Желі түрінде берілген транспорттық тапсырманың тірек жоспары тиімді болуы үшін барлық бос қабырғалар сипаттамалары теріс болуы қажет және жеткілікті.

Бос қабырғалар саны әрқашан желінің қарапайым контурларының санына тең екенін ескертіп өтейік. Егер жолдар желісімен қиылыспаса, онда контур қарапайым деп аталады. Қарастырылып отырған тапсырмада бос қабырғалардың сипаттамаларын есептеп шығарайық. Бағыттауыштары бар қабырғалардың сипаттамалары 0-ге тең екені көзге көрініп тұр.

Берілген тапсырмада 4 қарапайым контур бар, осыған орай 4 бос қабырға болуы тиіс. Олардың сипаттамаларын анықтайық (2-сурет).

1. B_1A_4 қабырғасы, оның сипаттамасы мынаған тең:

$$15\text{-}10\text{-}3 = 2$$

2. A_2A_3 қабырғасы, оның сипаттамасы мынаған тең:

$$13\text{-}11\text{-}1 = 1$$

3. A_3A_4 қабырғасы, оның сипаттамасы мынаған тең:

$$11\text{-}10\text{-}2 = -1$$

4. B_2B_3 қабырғасы, оның сипаттамасы мынаған тең:

$$17\text{-}13\text{-}5 = -1$$

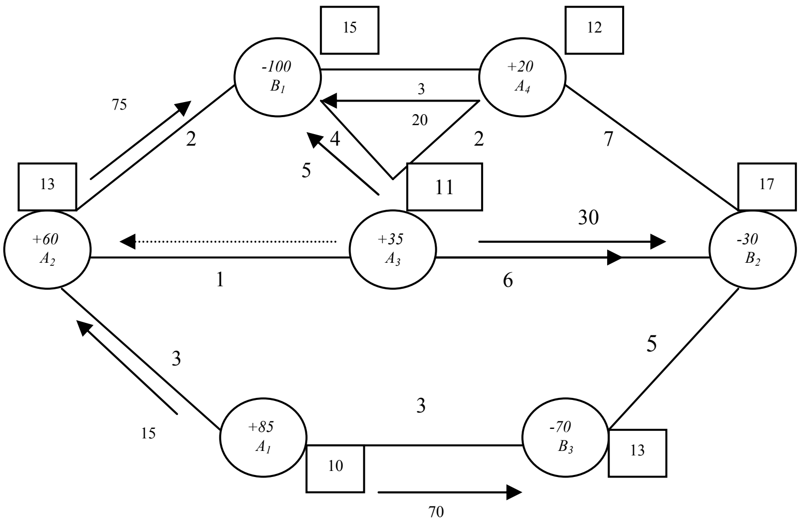
Көріп отырғанымыздай, қарастырылып отырған жоспар тиімді емес, сондықтан оны жақсартуға болады.

<u>Жаңа тірек жоспарын құру.</u> Жоғары мәнге ие сипаттамасы бар еркін қабырғаны таңдаймыз және оның үстіне потенциалы кіші шыңнан потенциалы үлкен шыңға бағытталған бағыттауышты орналастырамыз. Желіден бағыттауыштары бар (бағыттауыштың бағыты назарға алынбайды) қабырғалардан тұратын тұйық контур (немесе шығыршық) іздейміз. Біздің мысалда B_1A_4 қабырғасы жоғары мәнді сипаттамаға ие. Осы қабырғаның үстіне потенциалы кіші шыңнан потенциалы үлкен шыңға, яғни A_4 шыңынан B_1 шыңына бағытталған

бағыттауышты орналастырамыз (2-суретте бағыттауыш пунктирмен енгізілген). Желіден B_1A_4, A_4B_2, B_2A_3, A_3B_1 тұйық контурын іздейміз. Бұл контурда бағыттары B_1A_4 бағыттауышының бағытына қарама-қарсы болып келетін барлық бағыттауыштар қарастырылады. Олардың ішінде ең кіші мәнге ие бағыттауыш таңдалады. Осы мәннің көлемі жаңа бағыттауыш қай бағытта болса, контурдың сол бағыттағы бағыттауыштарындағы барлық мәндерге қосылады және қарама-қарсы бағыттағы бағыттауыштардағы мәндерден алынып тасталады. Контурға енбейтін бағыттауыштардағы мәндер ауыспайды. Нәтижесінде жаңа бағыттауыш пайда болады, ал кіші мәнге ие контур бағыттауышы жоғалып кетеді және осылайша бағыттауыштардың жалпы саны өзгермейді.

Берілген тапсырмада тұйық контурда қарама-қарсы бағыттағы бағыттауыштар A_4B_2 және B_1A_3 қабырғаларының үстінде жатыр және олардағы ең кіші мәні 20-ға тең. Осы көлемді көрсетілген бағыттауыштардағы мәндерден алып тастаймыз және жаңа бағыттауыш қай бағытта болса, контурдың сол бағыттағы бағыттауыштарындағы мәндерге қосамыз.

Жаңа жоспар аламыз (18-сурет)

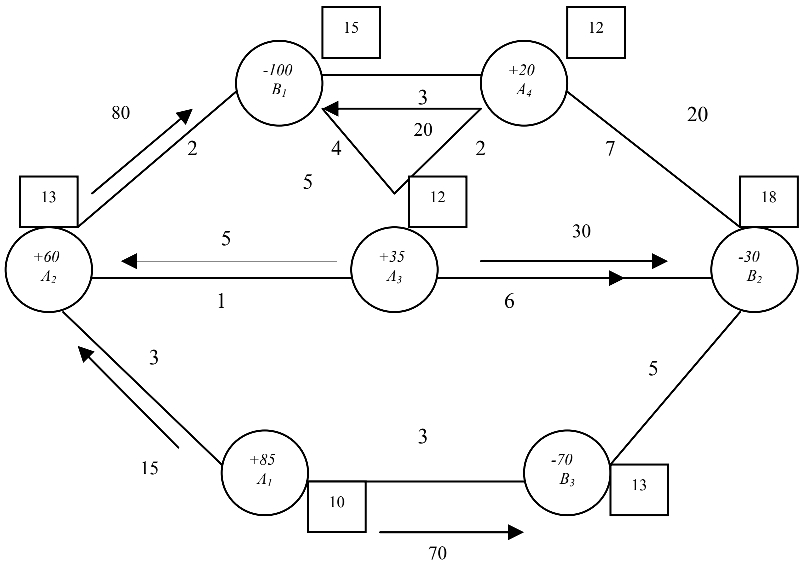


18-сурет

Әрі қарай үрдіс қайталана береді, яғни алынған жоспардың тиімділігі тексеріледі. Желінің барлық шыңдарының потенциалдарын не үшін тағы да анықтаймыз? A_1 шыңының потенциалы 10-ға тең делік, алгоритм бойынша қалған шыңдардың потенциалдарын есептеп шығарамыз (18-сурет).

1. A_2A_3 , 13-11-1 = 1
2. A_3A_4 , 12-11-2 = -1
3. A_4B_2 , 17-12-7 = -2
4. B_2B_3 , 17-13-5 = -1

A_2A_3 қабырғасының сипаттамасы оң, жоспарды жақсартуға болады. Осы қабырғаның үстіне A_3 шыңынан A_2 шыңына бағытталған бағыттауышты орналастырамыз. A_2B_1, B_1A_3, A_2A_3 бағыттауыштары бар қабырғалардан тұратын тұйық контур пайда болады, мұнда мәні 5-ке тең жаңа бағыттауыштың бағытына қарама-қарсы тек бір ғана бағыттауыш бар. Контур бойымен осы санның орнын ауыстырайық. Жаңа жоспар аламыз (19-сурет).



19-сурет

Жоспардың тиімділігін тексерейік:

1. B_1A_3 , 15 – 12 – 4 = -1
2. A_4B_2 , 18 – 12 – 7 = -1
3. B_2B_3 , 18 – 13 – 5 = 0
4. A_3A_4 , 12 – 12 – 2 = -2

Тиімді жоспар алынды. Осы жоспарға сәйкес келетін көлік шығындарын анықтайық:

70*3 + 15*3 + 80*2 + 5*1 + 20*3 + 30*6 = 210 + 45 + 160 + 5 + 60 + 180 = 660

1-ескерту. Мәндерді бастапқы бөлу барысында алынған жоспар туындаушы емес болып шығуы мүмкін, яғни бірліксіз шыңдардың санына қарағанда бағыттауыштар саны аз болуы мүмкін. Бұл жағдайда жоспардың туындаушылығынан арылу үшін мәндері 0-ге тең кез келген бағыттағы бағыттауыштардың жетіспейтін көлемін бос қабырғаларға орналастырады, бірақ бұл жерде бағыттауыштар осының барысында тұйық контур құрмайтындай болуы керек.

2-ескерту. Жоспарды жақсарту барысында оның туындаушылығы жүзеге асуы мүмкін. Бұл үрдіс қарастырылып отырған тұйық контурда жаңа бағыттауышқа қарама-қарсы бағыттағы және өзара тең кіші мәндерге ие бірнеше бағыттауыш болғанда өтуі мүмкін, онда жаңа жоспарда бұл бағыттауыштардың барлығы жоғалып кетеді. Бұған жол бермеу үшін жаңа жоспарда кіші мәнге ие бір бағыттауыш алынып тасталады, ал қалған бағыттауыштар мәні 0-ге тең болып қала береді.

3-ескерту. Желі түрінде берілген транспорттық тапсырмаларда жабдықтаушылар мен тұтынушылар ғана емес берілмейді, сонымен қатар жабдықтаушылар да, тұтынушылар да жоқ аймақтардың (өзектердің) қиылысу пунктілері де белгілі болады. Мұндай шыңдардың болуы тапсырманы шешу тәсілдерінде ештеңені өзгертпейді, тек олардағы қуаттылық (немесе сұраныс) көрсеткіштері 0-ге тең деп болжау жеткілікті. Бұл шыңдар нөлдік деп аталады. Өзге барлық шыңдарға потенциалдар қандай негізде тиесілі болса, бұлар да сол негізде потенциалдарға ие болады.

2.10. Бірнеше кезеңнен тұратын транспорттық модельдер

Өнеркәсіп орындарын орналастыру барысында олардың тұтыну пунктілеріне ғана емес, шикізат көздеріне де тәуелділігін ескеру қажеттігі өте жиі кездеседі. Сонымен қатар көп жағдайда өнім кезекпен бірнеше өнеркәсіп орындарында өңдеуден өтеді немесе дайын өнім тұтынушыға тікелей емес, сақтау қоймалары жүйесі арқылы жетеді. Осы жағдайлардың барлығында да өндірісті дамыту және орналастыруға байланысты бірнеше кезеңнен тұратын міндеттерді шешуге тура келеді. Үш кезеңдік тапсырманың қарапайым түрін қарастырайық. Мұнда бірінші және үшінші кезең барысында екінші кезең өнеркәсіптері орналастырылады, бұл жерде олардың бірінші және үшінші кезең өнеркәсіптерімен байланыстары ескеріледі.

Тапсырманың берілгені. $a_1,a_2, ...,a_p$ көлемінде өнім шығарылатын $A_1,A_2, ...,A_p$, яғни *p* жіберу пунктілері бар делік. Бұл өнімді аралық $D_1,D_2, ...,D_m$ пунктілеріне, содан кейін $B_1,B_2, ...,B_n$ пунктілерінде орналасқан тұтынушыларға жеткізу керек. Аралық пунктілердегі мекемелердің алдын ала қуаттылығы - $d_1,d_2, ...,d_m$, сонымен қатар тұтынушылар сұранысы - $b_1,b_2, ...,b_n$ берілген. Соған қоса өнімнің 1 бірлігін өндіруге және і-інші жіберу пунктінен $(i=\overline{1,p})$ k-інші аралық пунктіне $(k=\overline{1,m})$ жеткізуге кеткен шығын - $C=\|C_{ik}\|$ және өнімнің 1 бірлігін өндіруге және k-інші аралық пунктінен j-інші тұтыну пунктіне $(j=\overline{1,n})$ жеткізуге кеткен шығын - $C'=\|C'_{kj}\|$ белгілі.

Осы үш кезеңнен тұратын тапсырмадағы өнеркәсіптер арасындағы байланыстардың және аралық екінші кезеңдегі өнеркәсіптер қуаттылығының тиімді сызбасын табу шарт. Тапсырманың математикалық моделін құрайық. Былайша белгілейік:

X_{ik} - өнімнің і-інші жабдықтаушыдан k-інші аралық пунктіге тасымалдану мөлшері;

X'_{kj} - өнімнің k-інші арлық пунктіден j-інші тұтыну пунктіне тасымалдану мөлшері;

X_k - аралық екінші кезеңдегі өнеркәсіптердің қуаттылығы.

Сол кезде тапсырманың математикалық моделі түрге ие болады.

$$f(x_{ik}, x'_{kj}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} C_{ik} X_{ik} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C'_{kj} X'_{kj}$$ сызықтық

формасын мынадай шектеулер барысында кішірейту талап етіледі:

$$\sum_{k=1}^{m} X_{ik} = a_i, \qquad i = \overline{1,p}$$

- бірінші кезең пунктілерінде өндірілген өнімді қолдануға байланысты шарттар;

$$\sum_{k=1}^{m} X'_{kj} = b_j, \qquad j = \overline{1,n}$$

- үшінші кезең өнеркәсіптерінің сұранысын қанағаттандыруға байланысты шарттар;

$$\sum_{i=1}^{p} X_{ik} = x_k, \quad \sum_{j=1}^{n} X'_{ki} = x_k, \qquad k = \overline{1,m}$$

- екінші кезеңдегі өнеркәсіптер қуаттылығының бірінші және үшінші кезеңдер өнімдерінің көлемдеріне сәйкес келу шарттары;

$$X_{ik} \geq 0, X'_{kj} = \geq 0, \qquad k = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

- айнымалылардың теріс мәнге ие болмау шарттары.

Көп кезеңнен тұратын тапсырманың берілуі барысында екі жағдайдың болуы мүмкін.

Егер $\sum_{k=1}^{m} d_k = \sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, болса, онда I және II кезеңдердегі өнеркәсіптердің беку үрдісінің сызбасы II және III кезеңдердегі өнеркәсіптер байланыстарының сызбасына тәуелді емес, сондықтан тапсырманы бөлшектей отырып шешуге болады.

Егер $\sum_{k=1}^{m} d_k > \sum_{i=1}^{p} a_i$ и $\sum_{k=1}^{m} d_k > \sum_{j=1}^{n} b_j$. болса, онда іс елеулі түрде өзгереді. Бұл жағдайда тапсырманы бөлшектей отырып шешуге болмайды және үш кезеңдегі өнеркәсіптердің тиімді байланыстарын анықтау үшін тапсырма бір есептеу сызбасы бойынша шешілуі тиіс. Егер ерекше тәсілмен тапсырманың матрицасын құратын болсақ, мұндай бірегей есеп түрін орындауға болады. Бұл тәсілді бір-біріне еш байланыссыз түрде В.Л.Маш пен А.Орден деген екі ғалым ұсынған болатын, осыған орай бұл тәсіл Орден-Маш тәсілі деген атаумен танымал.

Орден-Маш тәсілі арқылы құрылған матрица төрт блоктан тұрады (20-сур.қар.).

	$D_1 \, .. \, .D_m$	$B_1 \, .. \, .B_n$
A_1 $\vdots$ A_p	C_i I	M II
D_1 $\vdots$ D_m	III O M $\ddots$ M O	IV C'_{ik}

20-сурет

Матрицаның бірінші блогында I және II кезеңдердегі өнеркәсіптердің байланыстары бейнеленеді. Олардың арасында өнім бірліктерін шығаруға және тасымалдауға кеткен шығындар $C = \left\| C_{ik} \right\|$ матрицасы арқылы берілген.

Екінші блок I және III кезеңдердегі өнеркәсіптердің байланыстарын көрсетеді, бірақ бұл байланыстар іс жүзінде болмау керек болғандықтан, олар бұл блоктағы шығындардың өте үлкен сандармен, яғни М-мен берілетіндігі арқылы блокталады.

II кезеңдегі өнеркәсіптердің байланысын білдіретін үшінші блокты құру тәсілі ерекше тәсіл болып табылады. Бұл этаптағы түрлі өнеркәсіптер байланыстарының өзара еш мәні болмағандықтан, олардың арасындағы жабдықтауларға жеткілікті түрде өте көп шығындар арқылы (М-ге тең) тыйым салынады. Бірақ басты диагональ бойымен жабдықтауларға (өнеркәсіптердің өзін-өзі жабдықтауы) мұнда рұқсат етіледі, өйткені олардың арасындағы шығындар мәні 0-ге тең.

Шындығында бұл жабдықтаулар жоқ, соған қоса олар II кезеңдегі өнеркәсіптердің пайдаланылмаған қуаттылықтарын білдіреді. Сондықтан бұл жабдықтаулар жалған болып табылады, осыған орай матрицаны құрудың осы әдісін тағы да «жалған диагональ» әдісі деп атайды.

Матрицаның төртінші блогы II және III кезеңдердегі өнеркәсіптердің байланыстарын қамтиды, сонымен қатар олардың арасындағы өнімнің I бірлігін тасымалдауға кеткен шығындар $C' = \left\| C'kj \right\|$ матрицасы арқылы берілген.

Ескерту. Тапсырманы осындай матрицалар бойынша шешу қандай да бір принциптік ерекшеліктерді қамтымайды. Алғашқы тірек жоспарды құру барысында кездесетін кейбір ерекшеліктер бар екенін ескертіп өткен жөн. Блоктардың біреуіндегі жабдықтаулар жалған диагональға тап болатын жабдықтауларды анықтайтындықтан, алдымен бір блоктағы жабдықтауларды бөлу қажет, содан кейін жалған диагональды толтыра отырып, келесі блоктағы бөлуді жүзеге асыру керек. Осының барысында бөлудің қай блоктан басталатындығы маңызды емес.

Нақты мысал қарастырайық.

A_1 және A_2 пунктілерінде B_1 , B_2, B_3 және B_4 пунктілеріне алдымен D_1, D_2 және D_3 пунктілеріндегі өнеркәсіптерге түсетіндей етіп жеткізу қажет жүк (шикізат) бар. Мыналар белгілі: $a_1 = 400$, $a_2 = 600$, $b_1 = 200$, $b_2 = 300$, $b_3 = 150$, $b_4 = 350$, $d_1 = 550$, $d_2 = 550$, $d_3 = 550$. Сонымен қатар өнімді өндіруге және жіберу пунктілерінен тұтыну пунктілеріне тасымалдауға кеткен шығындардың матрицасы берілген:

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ - A_i пунктілерінен D_k пунктілеріне;

$C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ - D_k пунктілерінен B_j пунктілеріне.

Өнімді өндірудің және тасымалдаудың тиімді жоспарын анықтау шарт. Жоғарыда сипатталған Орден-Маш тәсілі бойынша тапсырманың матрицасын құрамыз.

30-кесте

		D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	B_4	
		50 ~~550~~	500 ~~550~~	0 550	0 ~~200~~	0 ~~300~~	0 ~~150~~	0 ~~350~~	U_i
A_1	0 400	1 ~~400~~	2	3	M	M	M	M	0
A_2	600 0	6	4 ~~50~~	3 ~~550~~	M	M	M	M	0
D_1	0 400 ~~550~~	0 150	M	M	5	3 250	1 150	3	1
D_2	0 ~~50~~ ~~550~~	M	0 500	M	1 50	2	3	4	4
D_3	0 ~~550~~	M	M	0	8 150	7 50	6	5 350	-3
V_j		1	4	3	5	4	2	2	

Матрицаны құрудың сипатталған алгоритміне сәйкес оның бірінші блогында A_i және D_k пункттерінің байланыстары бейнеленеді, сондықтан матрицаның бастауышына $a_1 = 400$ және $a_2 = 600$ қуаттылықтарын орналастырамыз, ал баяндауышына D_k: $D_1 = 550$, $D_2 = 550$, $D_3 = 550$ аралық пункттеріндегі жүкті өңдеуден өткізудің мүмкін болар сыйымдылығы мен көлемдерін орналастырамыз. Өнімді өндіруге және A_i пунктінен D_k пунктіне тасымалдауға кеткен шығындар матрицаның сәйкес тор көзінің оң жақтағы жоғарғы бұрышында көрсетілген.

Ары қарай матирцаның екінші блогын құрамыз, бұл блок I және II пункттердің байланысын көрсетеді, яғни баяндауышында D_k пункттерінің қуаттылықтарын көрсеткеннен кейін B_j тұтыну пункттеріндегі жүктерге деген сұраныс көлемін қоса жазамыз: $b_1 = 200$, $b_2 = 300$, $b_3 = 150$ $b_4 = 350$, матрицаның осы пункттердің байланыстарын бейнелейтін сәйкес торкөздеріне шығындар ретінде тағы да оң жақтағы жоғары бұрышқа M санын орналастырамыз.

Шығындар ретінде М санын орналастыру іс жүзінде I және II кезеңдердегі пунктердің арасындағы байланыстарды блоктайды, өйткені тапсырма шығындар көлемін азайту өлшемі бойынша шешілетіндіктен, осы пунктердің арасындағы жабдықтаулар тиімді жоспарға енбеуі тиіс.

Енді матрицаның үшінші блогын құруға көшеміз, бұл блок II кезеңдегі өнеркәсіптердің өзара байланыстарын белгілейді. Бұл үнемі квадрат түріндегі матрица болып келеді, өйткені оның баяндауышында да, бастауышында да сол бір ғана D_k пунктілері тұруы қажет. Баяндауышында олар әлдеқашан орналасқан болатын, сондықтан бастауышына А пунктілерінен кейін D_k пунктілерін орналастырамыз: $D_1 = 550$, $D_2 = 550$, $D_3 = 550$, ал шығындар ретінде матрицаның диагоналінің бойымен 0 мәнін қоямыз, ал өзге торкөздерге М санын орналастырамыз. Осы арқылы II кезеңдегі түрлі өнеркәсіптердің бірін-бірі өзара жабдықтауларына “тыйым салынады” және әр өнеркәсіптің өзін-өзі жабдықтауын рұқсат етіледі, яғни бұл іс жүзінде қолданылмаған күйінде қалып қойған жалған өнім деп аталады.

Соңында II және III кезеңдердегі пунктердің байланыстарын бейнелейтін төртінші блок әлдеқашан құрылып қойған және осы блоктың әр торкөзінің оң жағындағы жоғары бұрышына C′ матрицасы арқылы берілген сәйкес шығындардың мәнін қойып шығу шарт.

Тапсырманың матрицасын құрып болғаннан кейін (немесе оны кейде бөлуші кесте деп те атайды) тапсырманы шешуге көшеміз. Тапсырма, әдеттегідей, транспорттық тапсырма ретінде шешіледі, мұнда жабдықтаушылар саны p+m-ге тең, ал тұтынушылар саны - m+n. Мыналарды ескертіп өтейік:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 400 + 600 = 1000, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 300 + 150 + 350 = 1000,$$

$$\sum_{k=1}^{3} d_k = 550 + 550 + 550 = 1650;$$

$$\sum_{k=1}^{3} d_k > \sum_{i=1}^{2} a_i; \quad \sum_{k=1}^{3} d_k > \sum_{j=1}^{4} b_j$$

Алғашқы базистік бөлу үрдісін өзімізге белгілі ең кіші элемент әдісімен жүзеге асырамыз. Бөлуді бірінші блоктан бастаймыз. Ең кіші элемент әдісінің алгоритміне сәйкес бұл блоктағы шығындардың ішінен ең кіші мәнді іздейміз, бұл – C_{11} = 1. Осы ең аз шығындарға сәйкес x_{11} мәнін a_1 және d_1 көлемдерінің ең кіші мәніне тең деп қабылдаймыз, яғни x_{11} = min (400, 550) = 400. Бірінші жолды сызып тастаймыз, ал d_1 –ден 400-ді алып тастаймыз, яғни 550 – 400 = 150. Осы үрдістерден кейін қалған шығындардың ішінен тағы да ең кішісін іздейміз: C_{23} = 3, x_{23} = min (600, 550) = 550 мәні және осы блоктың 3-інші бағанын сызып, ал a_2 = 600 мәнінен 550-ді алып тастаймыз, яғни 600 – 550 = 50. Шығындардың қалған элементтерінің ішінде ең кішісі c_{22} = 4 болады, x_{23} = min (50, 550) = 50 мәнін қойып, екінші жолды сызамыз, ал d_2 –ден 50-ді азайтамыз, яғни 550 – 50 = 500.

II кезеңдегі өнеркәсіптердің қолда қалған қуаттылықтарын, яғни d_2' = 150 және d_2' = 500 мәндерін III блоктың жалған қойылған диагоналіне түсіреміз. Бұл “өзін-өзі” жабдықтау мәндерін $d_к$ –ның сәйкес мәндерінен: d_1 мен d_2 –ден алып тастаймыз. Осыдан соң төртінші блокта тағы да ең кіші элемент әдісімен бөлуді жүзеге асырамыз. Бірінші кестеде осы бөлу үрдісі берілген.

Ары қарай тапсырманы потенциалдар әдісі арқылы шешеміз. Ең кіші элемент әдісі арқылы алынған тірек жоспарда II нөлдік мән бар, осыған орай тапсырманың шешімі туындаушы сипат алмайды.Тірек орналасқан кестені қолдана отырып, потенциалдар жүйесін құрамыз.

U_i және V_j потенциалдарының жүйесі тірек жоспардың нөлдік емес компоненттері үшін мынадый шарт орындалатындай етіп құрылатыны белгілі:

$$C_{\beta\gamma} + U_\beta - V_\gamma = 0$$

$$\beta = \overline{1{,}5}, \quad \gamma = \overline{1{,}7}$$

β = жабдықтаушылар саны;

γ = тұтынушылар саны.

U_{11} = 0 делік, Бірінші жолдан жоспардың нөлдік элементін – x_{11} мәнін іздейміз, бұл үшін мынадай шарт орындалуы тиіс:

$C_{11} + U_1 - V_1 = 0$, мұндағы $V_1 = C_{11} + U_1 = 1 + 0 = 1$.

$V_1 = 1$ екенін біле отырып, бірінші баған жоспарының нөлдік емес x_{31} компоненті арқылы U_3 мәнін есептеп шығаруға болады, дәлірек айтсақ:

$C_{31} + U_3 - V_1 = 0$, мұндағы $U_3 = V_1 - C_{31} = 1 - 0 = 1$.

U_3 –ті есептеп шығарып, үшінші тармақ жоспарының нөлдік емес x_{35} және x_{36} компоненттері арқылы V_5 және V_6 мәндерін табамыз:

$V_5 = C_{35} + U_3 = 3 + 1 = 4$

$V_6 = C_{36} + U_3 = 1 + 1 = 2$

V_5 –ті анықтай отырып, бесінші бағанның нөлдік емес x_{55} компоненті арқылы U_5 мәнін табамыз: $U_5 = C_{55} = 4 - 7 = - 3$ және т.б.

Осылайша потенциалдарды табу алгоритмі мынадай болады: $U_\beta = 0$ делік, β жолдан жоспардың нөлдік емес компоненттерін іздей отырып, формула бойынша сәйкес V_γ мәндерін есептеп шығамыз: $V_\gamma = C_{\beta\gamma} + U_\beta$. Ал j бағаны жоспарының нөлдік емес компоненттері арқылы U_β мәнін біле отырып, мынаны анықтаймыз: $U_\beta = V_\gamma = C_{\beta\gamma} + U_\beta$.

U_β және V_γ потенциалдарын құру арқылы алғашқы тірек жоспар арқылы шешудің бағалау матрицасын табамыз: $C' = \left\| C'_{\beta\gamma} \right\| = \left\| C'_{\beta\gamma} + U_\beta - V_\gamma \right\|$

Жоспардың нөлдік емес компоненттері үшін бағалау матрицасының элементтері нөлге тең екені белгілі. Егер жоспардың бағалау матрицасының элементтері мынадай шарттарды қамтамасыз ететін болса, жоспар тиімді болып табылады: β және γ - ның барлық мәндері үшін $C'_{\beta\gamma} = C_{\beta\gamma} + U_\beta - V_\gamma \geq 0$. Егер бұл шарт орындалмаса, онда жоспар тиімді емес және оны жақсартуға болады. Тапсырманы ары қарай шешуді келесі кесте арқылы көрсетеміз (31-кесте):

31-кесте

<table>
<tr><th>Тірек жосар</th><th>Бағалау матрицасы</th></tr>
<tr><td>$\begin{array}{ccccccc} 400 & . & . & . & . & . & . \\ . & 50^{+} & 550^{-} & . & . & . & . \\ 150 & . & . & . & 250 & 150 & . \\ .^{-} & 500 & . & 50^{+} & . & . & . \\ . & . & . & 150 & 50 & . & 350 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{cccccccc} \underline{0} & -2 & 0 & M & M & M & M & \\ 5 & \underline{0} & \underline{0} & M & M & M & M & -6 \\ \underline{0} & M & M & 1 & \underline{0} & \underline{0} & 2 & \\ M & \underline{0} & M & \underline{0} & 2 & 5 & 6 & -6 \\ M & M & - & \underline{\otimes} & \underline{0} & 1 & \underline{0} & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\lambda = 150$</td><td>+6 +6 +6</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{ccccccc} 400 & . & . & . & . & . & . \\ . & 200^{+} & 400^{-} & . & . & . & . \\ 150 & . & . & . & 205^{+} & 150 & . \\ . & 350^{-} & . & 200^{+} & . & . & . \\ . & . & 150 & . & . & -50 & . \ 350 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{cccccccc} \underline{0} & 4 & 6 & M & M & M & M & -4 \\ 5 & \underline{0} & \underline{0} & M & M & M & M & \\ 0 & M & M & 7 & \underline{0} & \underline{0} & 2 & -4 \\ M & \underline{0} & M & \underline{0} & & -1 & 0 & \\ M & M & \underline{0} & 6 & \underline{\otimes} & 1 & \underline{0} & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\lambda = 50$</td><td>+4 +4 +4</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{ccccccc} 400 & . & . & . & . & . & . \\ . & 250 & 350 & . & . & . & . \\ 50 & . & . & . & 250 & 150 & . \\ . & 300 & . & 200 & 50 & & . \\ . & . & 200 & . & . & . & 350 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{cccccccc} \underline{0} & 0 & 2 & M & M & M & M & +2 \\ 9 & \underline{0} & \underline{0} & M & M & M & M & \\ \underline{0} & M & M & 3 & \underline{\otimes} & \underline{0} & & +2 \\ M & \underline{0} & M & \underline{0} & \underline{0} & 3 & 0 & \\ M & M & \underline{0} & 6 & 4 & 5 & \underline{0} & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\lambda = 250$</td><td>-2 -2</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{ccccccc} 400 & . & . & . & . & . & . \\ . & 500 & 100 & . & . & . & . \\ 150 & . & . & . & . & 150 & 250 \\ . & 50 & . & 200 & 300 & . & . \\ . & . & 450 & . & . & . & 100 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{ccccccc} \underline{0} & 0 & 4 & M & M & M & M \\ 7 & \underline{0} & \underline{0} & M & M & M & M \\ \underline{0} & M & M & 5 & 2 & \underline{0} & \underline{0} \\ M & \underline{0} & M & \underline{0} & \underline{0} & 3 & 0 \\ M & M & \underline{0} & 6 & 4 & 5 & \underline{0} \end{array}$</td></tr>
</table>

Тапсырманы шешу барысын сипаттайық. Бірінші кезеңде ең кіші элемент әдісі арқылы алынған алғашқы тірек жоспар шешімін және соған сәйкес бағалау матрицасын жазамыз. Бағалау матрицасының жоспардың нөлдік емес компоненттеріне сәйкес келетін нөлдерінің асты сызылғандығын еске түсірейік. Көріп отырғанымыздай, бағалау матрицасы тиімділік өлшемін қанағаттандырмайды, осыған орай жоспарды жақсарту қажет.

Жоспарды жақсарту үшін бағалау матрицасының теріс элементтерінің ішінен абсолюттік көлемі бойынша ең үлкенін іздейміз: (-6), ол шеңбермен қоршалған. Матрица-жоспарда оған сәйкес келетін компоненттер үшін тұйық шығыршық құрамыз, бұл жоспардың нөһлдік емес компоненттері арқылы және жолдар мен бағандардан тысқары өзектерден өтеді. Шығыршықтың шыңдарын кезекпен «+» және «-» белгілерімен белгілейміз. Шығыршықтың «-» белгісімен белгіленген шыңдарының ішінен ең кішісін іздейміз және бұл мәнді шығыршықтың «+» белгісімен белгіленген мәндеріне қосамыз да, «-» белгісімен белгіленген мәндерінен алып тастаймыз. Жоспардың құрылған шығыршыққа енбейтін қалған мәндері өзгеріссіз қалады. Осылайша жаңа тірек жоспар шешімін аламыз.

Жаңа тірек жоспар шешімінің тиімділігін бағалау үшін оған бағалау матрицасын құру қажет. Мұны алғашқы шешімнің бағалау матрицасын қайта жасау негізінде құрамыз. Ерекшелігі мынада: алғашқы тірек жоспар шешімінен жаңасына өту барысында алғашқы жоспардың бір нөлдік компоненті нөлдік емес сипат алады, ал нөлдік емес компоненті нөлдік компонентке айналады. Осыған орай, алғашқы шешімнің бағалау матрицасын оның ең кіші теріс элементінің орнына нөл пайда болатындай, ал жаңа шешімде нөлдік компонент сәйкес келетін 0-ден басқа қалған барлық нөлдер сақталатындай етіп қайта жасау керек. Біздің нысанда бағалау матрицасының (-6) элементін нөлге айналдыру үшін ол тұрған 3-бағанға 6-ны қосамыз, бірақ сол арқылы осы бағанның 2-жолында тұрған 0-ді бұзамыз. Оны қалпына келтіру үшін 2-жол элементтерінен 6-ны алып тастаймыз, бірақ бұл кезде осы жолдағы 2-бағандағы нөл бұзылады. Мұны 2-бағанның барлық элементтеріне 6-ны қосу арқылы қалпына келтіреміз, бірақ осының барысында осы бағанның 4-жолындағы 0 бұзылады. Оны қалпына келтіру үшін осы жолдың барлық элементтерінен 6-ны алып тастаймыз, бұл жерде осы жолдың 4-

бағанындағы 0 бұзылады. Ал мұны қалпына келтіру үшін осы бағанның барлық элементтеріне 6-ны қосамыз, осының барысында бұзылған осы бағанның соңғы жолындағы 0-ді (сызылып көрсетілген) қалпына келтірмейміз, өйткені бұл элемент жаңа шешімнің нөлдік компонентіне сәйкес келеді және осыған орай ол нөлге тең болмауы мүмкін. Осылайша, жаңа шешімнің бағалау матрицасын алдық. Бұл матрица табылған шешімнің тағы да тиімді еместігін көрсетеді. Бұл шешімді аналогия арқылы жақсартамыз.

Көріп отырғанымыздай, 4-кезеңде табылған шешім тиімді болып табылады, өйткені оның бағалау матрицасының барлық элементтері теріс емес.

Алынған тиімді шешім II кезеңдегі өнеркәсіптердің қуаттылықтары сәйкесінше 400, 500 және 100-ге тән болуы керектігін және I кезеңдегі I өнеркәсіптің барлық өнімі II кезеңдегі I өнеркәсіпке келіп түсетінін, ал I кезеңдегі II өнеркәсіптің 500 және 100 бірліктері сәйкесінше II кезеңде II және III өнеркәсіптерге жіберілетінін көрсетеді. II және III кезеңдер өнімдерінің тиімді байланыстары мынадай: II кезеңдегі I өнеркәсіптің 150 және 250 бірліктері сәйкесінше III кезеңдегі III және IY тұтынушыларға түседі, II кезеңдегі II өнеркәсіптің 200 және 300 бірліктері III кезеңнің I және II тұтынушыларына жіберіледі және соңында II кезеңдегі 3-өнеркәсіптің 100 бірлігі III кезеңдегі IY тұтынушыға жіберіледі.

Тиімді шешім барысын былайша жазамыз:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 100 \end{pmatrix} \text{-} \qquad \text{және}$$

A_i и D_k $(i = \overline{1,2},\ k = \overline{1,3})$ арасындағы тиімді байланыстар.

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 & 250 \\ 200 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \text{-}$$

D_k и B_j $(k = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$ арасындағы тиімді байланыстар.

Аралық пунктердегі өнеркәсіптердің қуаттылықтары:
$D_k (k = \overline{1,3})$: $x_1 = 400,\ x_2 = 500,\ x_3 = 100$.

3. ДИНАМИКАЛЫҚ ПРОГРАММАЛАУ ӘДІСІ

Бұл әдіс экономика саласындағы көп нұсқалы, комбинаторлы сипат алатын тапсырмаларды шешу барысында, яғни шешімдердің көп мөлшерін зерттеу және бағалау қажеттігі туған кезде қолданылады. Динамикалық бағдарламалау негізінде Беллманның тиімділік принципі жатыр, ол былайша сипатталады:

Егер белгілі бір кезең ішінде алдындағы шешімдер қандай болғанына қарамастан, енді қабылдау керек шешімдер алғашқы шешімдерге қрағанда тиімді саясатты құрса, кез келген саясат тиімді болып табылады.

3.1. Есептеу әдісінің табиғаты. Беллманның рекурентті қатынастары.

Есептеу әдісінің табиғатын қарастырайық.

Мынаны анықтау керек:

$$\max Z = \max_{x_1, x_2, \dots x_n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

Бұл жерде мынадай шектеулер бар:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \qquad где$$

$$a_i > 0, \quad x_i \geq 0,$$

мұндағы в – бүтін сандар

Z* = max Z арқылы белгілейік. $Z = f_n(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)$ делік, онда Z x_n -нің нақты мәні үшін мынадай түрге ие болады:

$$Z = \max_{x_1, x_2, \dots x_{n-1}} \left[f_n(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right] = f_n(x_n) + \max_{x_1, x_2, \dots x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)$$

$\max\limits_{x_1, x_2, \dots x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ соммасы үшін $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i = b - a_n x_n = y_{n-1}$ шарты орындалады.

x_n көлемдеріне барлық мүмкін болар $x_n = 0 \div \left[\frac{b}{a_n}\right]$, *где* $\left[\frac{b}{a_n}\right]$ мәндерін береміз, мұндағы ....осы мәннің толық мағынасын ғана білдіреді.

Осы жағдайда, көріп отырғанымыздай,

$$Z^* = \max_{x_n} \left[f_n(x_n) + \max_{x_1, x_2, \dots x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right].$$ мұндағы

Осының барысында x_n – нің мәніне байланысты көптеген тапсырмалар туындайды, яғни түрлі x_n үшін $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i = y_{n-1}$ шарты арқылы мынадай тапсырманы шешуге тура келеді:

$$\lambda_{n-1}(x_{n-1}) = \max_{x_1, \dots x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)$$

Осылайша, алдыңғы тапсырмаға 1-ге кем айнымалылар саны арқылы ұқсас тапсырманы алдық. Осыған орай,

$$Z^* = \max_{x_n} \left\lfloor f_n(x_n) + \lambda_{n-i}(y_{n-i}) \right\rfloor$$

тапсырмасы орындалады. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$, шарты орындалған кезде, өз кезегінде $\lambda_{n-i}(y_{n-i})$ мәнін былайша елестетуге болады:

$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i = y_{n-1}$, шарты арқылы $\lambda_{n-1}(y_{n-1}) = \max_{x_{n-1}} \left\lfloor f_{n-1}(x_{n-1}) + \lambda_{n-2}(y_{n-2}) \right\rfloor$;

$\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_i = y_{n-2,}$, шарты арқылы $\lambda_{n-2}(y_{n-2}) = \max_{x_{n-2}} \left\lfloor f_{n-2}(x_{n-2}) + \lambda_{n-3}(y_{n-3}) \right\rfloor$;

K K K K K K K K K K K K K K K K K

$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = y_3$ шарты арқылы $\lambda_3(y_3) = \max_{x_3} \left[f_3(x_3) + \lambda_2(y_2) \right]$

$\sum_{i=1}^{2} a_i x_i = y_2$ шарты арқылы $\lambda_2(y_2) = \max_{x_2} \left[f_2(x_2) + \lambda_1(y_1) \right]$;

$\lambda_1(y_1) = f_1(x_1)$ *при условиях* $a_1 x_1 = y_1$ арты арқылы

Ары қарай кері үрдіс жүреді. Бұл қатынастар Беллманның рекурентті қатынастары деп аталады.

Бұл әдістің капитал құюдың орнын ауыстыру жөніндегі есептерді шешуді мысалға ала отырып, нақты экономикалық тапсырмаларды шешу барысында қалай қолданылатынын қарастырайық. Тапсырма мынадай сипат алады: 10 млн. теңге берілген, оларды 4 экономикалық объект арасында бөліске салу керек. Әр объектіге бүтін санды теңге көлеміндегі сомма құйылады, осының барысында алынуы мүмкін табыс көлемі белгілі болады. Капитал құюды объектілер арасында бөліске салуда сомалық табыс ең жоғарғы мәнге ие болу керектігі ескерілуі тиіс. Табыстың әр объектіге капитал құюға байланыстылығы кесте түрінде көрсетілген (32-кесте).

32-кесте

Капитал құю	Табыс			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	12	11	10	12
2	21	20	22	21
3	32	31	30	32
4	40	41	42	43
5	51	52	53	50
6	61	63	60	62
7	73	72	71	70
8	82	80	81	82
9	90	91	93	92
10	101	100	103	102

Бұл тапсырма өз табиғаты жағынан комбинаторлы және оны шешу үшін 10 санын 4 топқа жіктеуді бүтін сандар ішінен теріп ала отырып бағалау қажет, яғни мына сияқты барлық мүмкін болар нәтижелер үшін сомалық табысты есептеп шығу шарт:

(10,0,0,0); (0,10,0,0); …
(9,1,0,0) ; (9,0,1,0) ;
…………………………
(7,2,1,0) ; (7,1,2,0) ;…
…………………………
(4,3,2,1) ; (4,2,3,1) ; …

Осы тапсырманы динамикалық бағдарламалау әдісі арқылы шешеміз.

Былайша белгілейік:

$f_1(x_1)$ – табыстың 1-объектіге капитал құюға тәуелділігі функциясы;

$f_2(x_2)$ - табыстың 2-объектіге капитал құюға тәуелділігі функциясы;

$f_3(x_3)$ - табыстың 3-объектіге капитал құюға тәуелділігі функциясы;

$f_4(x_4)$ - табыстың 4-объектіге капитал құюға тәуелділігі функциясы.

Бұл тапсырманың математикалық моделі мынадай түрге ие болады: $\sum_{i=1}^{4} x_i = 10$ шарты орындалған кезде

$$\max Z = \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \sum_{i=1}^{4} f_i(x_i)$$

мәнін табу керек.

Көріп отырғанымыздай, бұл – динамикалық бағдарламалау тапсырмасы. Оны Беллманның рекурентті қатынастарын қолдана отырып шешеміз.

Беллманның рекурентті қатынастарына сәйкес, $\lambda_1(y_1) = f_1(x_1)$ *где* $x_1 = y_1$ мұндағы

$x_1 = \overline{0, y_1}$

$y_1 = \overline{0,10}$

Ары қарай $\lambda_2(y_2)$ мәнін анықтайық. Беллманның рекурентті қатынастарының негізінде:

$\lambda_2(y_2) = \max\limits_{x_2} \left[f_2(x_2) + \lambda_1(y_1) \right]$ болады, мұндағы

$x_2 = \overline{0, y_2}$ $y_1 = y_2 - x_2$ мысалы $\lambda_2(1)$ табу үшін мынадай

$y_2 = \overline{0,10}$

сомаларды есептеп шығару қажет:

$f_2(0) + \lambda_1(1) = 0 + 12 = 12$

$f_2(1) + \lambda_1(0) = 11 + 0 = 12,$ *тогда*

$\lambda_2(1) = \max[12,11] = 12,$

онда 2 объектіге бір мезгілде енгізілген 1 млн. теңге көлеміндегі капитал құюдың тиімді саясаты мынадай болады: 1 млн. теңге 1-объектіге құйылады (1,0).

$\lambda_2(2)$ анықтау үшін келесі сомаларды есептеп шығарамыз:

$f_2(0) + \lambda_1(2) = 0 + 21 = 21$

$f_2(1) + \lambda_1(1) = 11 + 12 = 23$

$f_2(2) + \lambda_1(0) = 20 + 0 = 20$ *тогда*

$\lambda_2(2) = \max[21,23,20] = 23$

Капитал құюдың тиімді саясаты осының барысында мынадай болады: 1 млн. теңгені 1-объектіге және 1 млн. теңгені 2-объектіге құю керек (1,1).

Мысалы, $\lambda_2(5)$ қалай есептеліп шығатынын көрсетейік. Ол үшін мынадай сомаларды анықтау қажет:

$f_2(0) + \lambda_1(5) = 0 + 51 = 51$

$f_2(1) + \lambda_1(4) = 11 + 40 = 51$

$f_2(2) + \lambda_1(3) = 20 + 32 = 52$

$f_2(3) + \lambda_1(2) = 31 + 21 = 52$

$f_2(4) + \lambda_1(1) = 41 + 12 = 53$

$f_2(5) + \lambda_1(0) = 52 + 0 = 52$

$\lambda_2(2) = \max[51,51,52,52,53,52] = 53$

Есептеуді осылайша жалғастыра келе, алғашқы 2 объектіге бір мезгілде 0,1,2,..., 10 млн. теңге ақша құю жағдайындағы сомалық табыс пен капитал құюдың тиімді саясатын аламыз. Есептеулер нәтижелерін 33-кестеге орналастырамыз.

33-кесте

Капитал құю	$\lambda_1 = f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$
0	0	0	0
1	12	11	12(1,0)
2	21	20	23(1,1)
3	32	31	32(2,1)
4	40	41	43(3,1)
5	51	52	53(1,4)
6	61	63	64(1,5)
7	73	72	75(1,6)
8	82	80	84(1,7)
9	90	91	95(3,6)
10	101	100	104(3,7)

Кестенің бірінші бағанында капитал құюдың шамалары жазылған, екінші және үшінші бағандарда табыстың сәйкес мәндері берілген, ал төртінші бағанда есептеулердің нәтижелері: капитал құюдан екі объектіге бір мезгілде түскен ең жоғарғы сомалық табыстың мәндері жазылған және жақшаның ішінде тиімді саясат көрсетілген. Есептеудің келесі кезеңінде капитал құю үш объект арасында бөліске түскендегі капитал құюдың тиімді саясатын анықтаймыз. Беллманның рекурентті қатынастарының негізінде мыналар белгілі болады:

$$\lambda_3(y_3) = \max_{x_3}\left[f_3(x_3) + \lambda_2(y_2)\right],$$ мұндағы

$$y_3 = \overline{0,10}$$

$$x_3 = \overline{0, y_3}$$

$$y_2 = y_3 - x_3$$

Есептеулердің нәтижелерін 33-кестеге ұқсас 34-кестеге жазамыз:

34-кесте

Капитал құю	$f_3(x_3)$	λ_2 =(y_2)	λ_3 =(y_3)
0	0	0(0,0)	0(0,0,0)
1	10	12(1,0)	12(1,0,0)
2	22	23(1,1)	23(1,1,0)
3	30	32(2,1)	34(1,0,2)
4	42	43(3,1)	45(1,1,2)
5	53	53(1,4)	54(2,1,2)
6	60	64(1,5)	65(3,1,2)
7	71	75(1,6)	76(1,1,5)
8	81	84(1,7)	86(1,5,2)
9	93	95(3,6)	97(1,6,2)
10	103	104(3,7)	106(1,7,2)

Мысалы, $\lambda_3(4)$ қалай анықталғанын көрсетеміз.

$f_3(0)+\lambda_2(4) = 0 + 43 + = 43$

$f_3(1)+\lambda_2(3) = 10 + 32 = 42$

$f_3(2)+\lambda_2(2) = 22 + 23 = 45$

$f_3(3)+\lambda_2(1) = 30 + 12 = 42$

$f_3(4)+\lambda_2(0) = 0 + 42 = 42$

$\lambda_3(4) = max[43.42.45.42.42] = 45,$

Осының барысында тиімді саясат мынадай болады: 2 млн. теңгені - алғашқы 2 объектіге, 2 млн. теңгені үшінші объектіге құю керек. Алғашқы 2 объектіге 2 млн. теңге құю саясаты тиімді болатынын ескере отырып (1,1), 4 млн. теңгені үш объектіге бір мезгілде құюдың келесідей тиімді саясатын аламыз: 1 илн. теңге – бірінші объектіге, 1 млн. теңге – екінші объектіге және 2 млн. теңге үшінші объектіге құйылады, яғни 34-кестенің 4-графасында көрсетілген (1,1,2) мәнін аламыз.

Есептеулерді жалғастыра отырып, мыналарды анықтауға болады:

$$\lambda_4(y_4) = \max_{x_4}\left[f_4(x_4) + \lambda_3(y_3)\right],$$ мұндағы

$y_4 = \overline{0,10}_1$

$x_4 = \overline{0, y_4}$

$y_3 = y_4 - x_4$

35-кесте

Капитал құю	$f_4(x_4)$	$\lambda_3 = (y_3)$	$\lambda_4 = (y_4)$
0	0	0(0,0,0)	
1	12	12(1,0,0)	
2	21	23(1,1,0)	
3	32	34(1,0,2)	
4	43	45(1,1,2)	
5	50	54(2,1,2)	
6	62	65(3,1,2)	
7	70	76(1,1,5)	
8	82	86(1,5,2)	
9	92	97(1,6,2)	
10	102	106(1,7,2)	109(1,6,2,1)

Осылайша, 10 млн. теңгені 4 объектіге бір мезгілде құюдан ең көп пайда түсіру оларды келесідей бөлгенде жүзеге асады: 1 млн. теңген – бірінші объектіге, 6 млн. теңге – екінші объектіге, 2 млн. теңге – үшінші объектіге және 1 млн. теңге – төртінші объектіге құлуы керек. Осының барысында табыс 109 бірлікті құрайды.

4. ЭКОНОМИКАНЫ ТАЛДАУДЫҢ БАЛАНСТЫҚ ӘДІСІ

Салааралық балanстық модельдер макроэкономикалық талдаудың негізін құрайды. Бұл модельдер елдің экономикалық дамуының ең маңызды деген сапалық және құрылымдық сипаттарын болжамдау үшін қолданыла алады. Олардың негізінде салалардың арасындағы өзара байланыстарды жүйелі түрде талдау жүргізіледі, негізгі экономикалық пропорциялар анықталады, экономикадағы баға туындауының ерекшеліктері мен құрылымдық алға жылжулар қарастырылып, өндірістің экономикалық тиімділігі зерттеледі.

Өзара байланысты n саладан немесе өндірістен тұратын кейбір экономикалық жүйені қарастырайық. Әр сала өнімінің бір бөлігі жүйенің ішінде өндіріс құралдары, шикізат, жартылай фабрикаттар және т.б. ретінде қолданылады (өндірісішілік қолданыс), ал жекелей сыртқы қолданысқа жіберіледі (соңғы өнім). Осылайша, зерттеліп отырған экономикалық жүйенің әрбір саласы немесе өндірісі, бір жағынан, өнімді өндіруші ретінде, екінші жағынан, оны тұтынушы ретінде көрінеді.

Тапсырманың берілуінің екі нұсқасы болуы мүмкін.

1. Жүйенің барлық салалары өндірісінің валдық деңгейлері берілген, әр саланың соңғы өнімінің көлемін анықтау қажет;

2. Жүйенің барлық салаларының соңғы өнімінің жоспар бойынша белгіленген деңгейі берілген, валдық өнімнің соңғы өнім бойынша құрылған тапсырмаларға да, өндірістің технологиялық құрылымына да негізделген сәйкес шамаларын анықтау қажет.

x_i арқылы – і-інші саланың валдық өндірісін, y_i арқылы оның соңғы өнімін белгілейміз (i = 1,n).

Онда x_i - y_i i - інші саланың осы саланы қоса алғанда жүйенің басқа салаларының тұтынуына, яғни өндірісішілік тұтынуға жіберілетін өнімнің бөлігін көрсетеді. $x_{i\,j}$ арқылы i – інші саланың j –інші сала тұтынатын өнімінің көлемін көрсетеді ($ij = \overline{1, n}$). Осы белгілеулерді ескере отырып, тапсырманың барлық берілгендерін кестеге орналастырамыз (36-кесте).

36-кесте

	Саланың №	Тұтыну						Өндірісі-шілік тұтыну	Соңғы өнім	Вал-дық өнім
		1	2	…	j	…	n			
Өндіріс	1	x_{11}	x_{12}	K	x_{1j}	K	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	K	x_{2j}	K	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_2	x_2
	M	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	K	K
	i	x_{i1}	x_{i2}	Λ	x_{ij}	Λ	x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	y_i	x_i
		Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	K	K
	M									
	n	x_{n1}	x_{n2}	Λ	x_{nj}	Λ	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n	x_n

Көріп отырғанымыздай кестенің жолдарында орналасқан шамалар келесі баланстық теңдіктермен байланысты:

$$\begin{cases} x_1-(x_{11}+x_{12}+\mathrm{K}+x_{1j}+\mathrm{K}+x_{1n})=y_1 \\ x_2-(x_{21}+x_{22}+\mathrm{K}+x_{2j}+\mathrm{K}+x_{2n})=y_2 \\ \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\ x_i-(x_{i1}+x_{i2}+\mathrm{K}+x_{ij}+\mathrm{K}+x_{in})=y_i \\ \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\ x_n-(x_{n1}+x_{n2}+\mathrm{K}+x_{nj}+\mathrm{K}+x_{nn})=y_n \end{cases} \tag{1}$$

Осы кестені, сонымен қатар баланстық қатынастарды (1) өткен кезеңнің экономикалық жүйесі үшін құруға болады. (Ары қарай жүйенің барлық өлшемдері ақшалай көрініс табу арқылы қарастырылады деген болжам жасауға болады). Баланстық әдістердің тапсырмасы болып болашақтағы (жоспарланған) кезеңге арналған жүйенің негізгі өлшемдерін анықтау табылады. Алайда жүйе (1) берілген мәндер бойынша, мысалы, соңғы өнімді $y_i(i=1,n)$, x_i $(i=1,n)$ салаларының валдық өнімдерінің көлемін анықтауға мүмкіндік бермейді, өйткені x_i белгісіздері-нен басқа жүйе n^2 x_{ij} белгісіздерін қамтиды, бұлар өз кезегінде x_i мәніне тәуелді.

Сондықтан жүйені (1) келесі түрде құрамыз. a_{ij} шамаларын енгіземіз, олар мына формула бойынша анықталады:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}; \qquad i, j = \overline{1, n} \qquad (2)$$

Бұл шамалар <u>тікелей шығындардың коэффициенті</u> деп аталады. Олар i-інші сала өнімдерінің j-інші сала өнімдерінің бірліктерін өндіруге кеткен шығындарды анықтайды және ең бастысы j-інші саланың өндіріс технологиясына байланысты. Сондықтан бұл коэффициенттер <u>технологиялық</u> деп те аталады. Бұл коэффициенттер өткен уақытты да, болашақты да қамтитын уақыт кезеңінің ішінде еш өзгермейді деп санауға болады, яғни ол былайша көрініс табады:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} = const \qquad (3)$$

Осыдан мынадай теңдік аламыз: $x_{ij} = a_{ij}\, x_j$ (4)

(4) негізінде жүйе (1) мынадай түрге ие болады:

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + K + a_{1j}x_j + \Lambda + a_{1n}x_n) = y_1 \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + K + a_{2j}x_j + \Lambda + a_{2n}x_n) = y_2 \\ \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\ x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + K + a_{ij}x_j + \Lambda + a_{in}x_n) = y_i \\ \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + K + a_{nj}x_j + \Lambda + a_{nn}x_n) = y_n \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1 - a_{12})x_1 - a_{12}x_2 - K - a_{1j}x_j - a_{1n}x_n = y_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - K - a_{2j}x_j - \Lambda - a_{2n}x_n = y_2 \\ \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - K + (1 - a_{ij})x_j - \Lambda - a_{in}x_n = y_i \\ \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad M \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - K - a_{nj}x_j - \Lambda + (1 - a_{nn})x_n = y_n \end{cases} \qquad (5)$$

Жүйені (5) жинақталған матрица түрінде жазамыз:

$$(E-A)x=y, \qquad где \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathrm{M} \\ x_n \end{pmatrix}; \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mathrm{M} \\ y_n \end{pmatrix}$$

А матрицасын тікелей шығындар матрицасы, құрылымдық немесе технологиялық матрица деп атайды.

(6) жүйені шеше отырып, мына теңдікті аламыз:

$$X = (E - A)^{-1}y \qquad (7)$$

$\left(E-A\right)^{-1}=B=\left\|b_{ij}\right\|_{nxn}$ деп белгілей отырып, (7) жүйені жазамыз:

$$X = By \qquad (8)$$

Осылайша, (6) және (8) желілік теңдіктер жүйесі зерттеліп отырған экономикалық жүйенің балансттық модельдерін білдіреді. Олар болашақ (жоспарланған) кезең үшін соңғы өнім векторын тудыра отырып, жүйе салаларының валдық өнімдерінің қажетті көлемдерін анықтауға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар В матрицасының элементтері үлкен экономикалық мазмұнға ие. Шындығында, осы экономикалық жүйеде 1-саланың соңғы өнімінің бір бірлігі өндіріледі делік, яғни: $y=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{M} \\ 0 \end{pmatrix}$, онда y мәнін (8) жүйесіне қоя отырып, жүйе салаларының валдық өнімінің соңғы өнімнің осы бірліктерінің өндірілуін қамтамасыз ететін шамаларын аламыз:

$$x = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \Lambda & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \Lambda & b_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b_{n1} & b_{n2} & \Lambda & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \Lambda \\ \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \Lambda \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Lambda \\ x_n \end{pmatrix}$$

Осы жерден мынадай теңдіктер шығады: $x_1 = b_{11}$, $x_2 = b_{21}$,..., $x_n = b_{n1}$, яғни 1-саланың соңғы өнімінің бір бірлігін өндіру үшін 1-сала өнімінің b_{11} бірлігін, 2-сала өнімінің b_{21} бірлігін және n саласы өнімінің b_{n1} бірлігін шығындау қажет.

Осы берілген экономикалық жүйеде 2-саланың соңғы өнімінің бір бірлігі, яғни $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{M} \\ 0 \end{pmatrix}$ өндіріледі делік. y-тің осы мәнін (8) жүйесіне қоя отырып, мына теңдікті аламыз:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathrm{M} \\ x_n \end{pmatrix} = B \cdot y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \Lambda & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \Lambda & b_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b_{n1} & b_{n2} & \Lambda & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{M} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \mathrm{M} \\ b_{n2} \end{pmatrix}$$

Бұдан шығатыны: $x_1 = b_{12}$, $x_2 = b_{22}$,..., $x_n = b_{n2}$, яғни 2-саланың соңғы өнімінің бір бірлігін дайындау үшін 1-сала өнімінің b_{12} бірлігін, 2-сала өнімінің b_{22} бірлігін және n-сала өнімінің b_{n2} бірлігін шығындаймыз, және соңында осыған ұқсас жолмен қарастыра отырып, бұл экономикалық жүйеде n-інші саланың соңғы өнімінің бір бірлігі өндіріледі деуімізге болады, яғни $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{M} \\ 1 \end{pmatrix}$. y-тің осы мәнін (8) жүйесіне қоя отырып, жүйеде

n-інші саланың соңғы өнімінің бір бірлігін өндіру үшін 1-саланың b_{1n} бірлігін, 2-саланың b_{2n} бірлігін және n-інші саланың b_{nn} бірлігін шығындау қажет екендігін анықтаймыз.

Осылайша, $B = (E - A)^{-1}$ матрицасының элементтері қарастырылып отырған экономикалық жүйе салаларының осы жүйенің соңғы өнім бірліктерін өндіруге кеткен шығындарын көрсетеді және толық шығындар коэффициенті деп аталады. Олар тікелей шығындарды да, жанама шығындарды да қамтиды. Егер $S = \left\| S_{ij} \right\|_{nxn}$ арқылы жанама шығындар матрицасын белгілесек, онда $S = \left\| S_{ij} \right\|_{nxn} = \left\| b_{ij} - a_{ij} \right\|_{nxn}$ екендігі анықталады.

Жоғарыда айтылғандарды 2 өндірістік саладан тұратын келесі тапсырманы шешу барысында талқылаймыз:

37-кесте

		Тұтыну		Соңғы өнім	Валдық өнім
		1	2		
Өндіріс	1	100	160	240	500
	2	275	40	85	400

Осы берілгендер бойынша тікелей шығындар коэффициенттерін есептеп шығарамыз:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{100}{500} = 0{,}2, \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{160}{400} = 0{,}4$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{275}{500} = 0{,}55, \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{40}{400} = 0{,}1$$

Тікелей шығындар матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Онда желілік баланстық модель мынадай болады:

(E – A)x = y мынадай түрге ие болады:

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}55 & 0{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}4\\ -0{,}55 & 0{,}9\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{E}-\mathrm{A})\mathrm{x}=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}4\\ -0{,}55 & 0{,}9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\mathrm{x}_1 & -0{,}4\mathrm{x}_2\\ -0{,}55\mathrm{x}_1 & -0{,}9\mathrm{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{y}_1\\ \mathrm{y}_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-0{,}8\mathrm{x}_1 & -0{,}4\mathrm{x}_2=y_1\\ -0{,}55\mathrm{x}_1 & +0{,}9\mathrm{x}_2=y_2\end{cases}$$

Бұл 2 белгісізі бар 2 теңдік жүйесі соңғы өнім құрылымындағы кез келген өзгерстің валдық өнімге әсерін зерттеу үшін соңғы өнімнің y_1 , y_2 берілген мәндері бойынша зерттеліп отырған x_1 және x_2 экономикалық жүйелері салаларының валдық өнімдерін анықтау үшін қолданыла алады.

Енді толық өндірісішілік шығындарды және 2-баланстық модельді анықтаймыз:

$$x=(E-A)^{-1}y. \qquad (E-A)^{-1}=\frac{1}{|E-A|}(\overline{E-A}),$$

мұндағы $|E-A|$- (E-A) матрицасының анықтағышы. біріккен матрица алгебралық қосымшалар

$(\overline{E-A})-$ *присоединенная матрица*

$$(\overline{E-A})=\begin{pmatrix}(E-A)_{11} & (E-A)_{21}\\ (E-A)_{12} & (E-A)_{22}\end{pmatrix} \qquad (E-A)_{ij}-\textit{алгебраичекие дополнени}$$

$$(E-A)_{ij}=(-1)_{ij}M_{ij}$$

$$(E-A)_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=0{,}9$$

$$(E-A)_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-(-0{,}5)=0{,}55$$

$$(E-A)_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}=-(-0{,}4)=0{,}4$$

$$(E-A)_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}=0{,}8$$

$$|E-A|=0{,}72-0{,}22=0{,}5$$

$$(\overline{E-A})=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}55 & 0{,}8\end{pmatrix}$$

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}5}\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}55 & 0{,}8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}55 & 0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}8 & 0{,}8\\ 1{,}1 & 1{,}6\end{pmatrix}$$

Онда теңдік мынадай түрге ие болады:

$$(E-A)^{-1}y = x \Rightarrow \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8\,y_1 & +1{,}8\,y_2 \\ 1{,}1\,y_1 & +1{,}6\,y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1{,}8\,y_1 + 0{,}8\,y_2 = x_1 \\ 1{,}1\,y_1 + 1{,}6\,y_2 = x_2 \end{cases}$$

Бұл модельді валдық өнімнің зерттеліп отырған жүйенің соңғы өнімінің құрылымына әсерін талдау үшін қолдануға болады.

Толық шектеу әдісі арқылы қолданылатын қайта жасау үрдістерінің жиынтығы осы жүйе мен $(E-A)^{-1}$, мәніне көбейтіндісіне тең, яғни

$$(E-A)^{-1}(E-A)x = (E-A)^{-1}y \Rightarrow E_y = (E-A)^{-1}y \Rightarrow x = (E-A)^{-1}y$$

Кеңейтілген матрица түрін құрайық:

$$(E-A|E|y)$$

Енді толық шектеу әдісін осы матрицаға қолдансақ, мынадайтеңдік аламыз:

$$(E-A)^{-1}\cdot(E-A|E|y) = \left((E-A)^{-1}(E-A)\middle|(E-A)^{-1}E\middle|(E-A)^{-1}y\right) = \left(E\middle|(E-A)^{-1}\middle|x\right)$$

Осылайша, қайта жасаудың нәтижесінде (Е-А) матрицасының орнына –бірліктік матрица, ал бірліктік матрицаның орнына – $(E\text{-}A)^{-1}$ кері матрицасы, ал *y* векторының орнына *x* векторы келеді. Осы есептеулерді Гаусс кестесінде көрсету ыңғайлы. Алғашқы кестеде кеңейтілген матрицаны жазамыз.

Есептеулерді алдындағы мысал негізінде орналастырамыз.

38-кесте

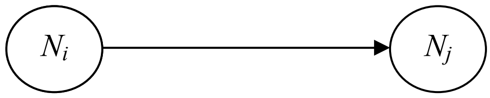
Итерация №	Е-А		Е		y
1	0,8 -0,55	-0,4 0,9	1 0	0 1	240 85
2	1 0	-0,5 0,625	1,25 0,6875	0 1	300 250
3	1 0	0 1	1,8 1,1	0,8 1,6	500 400
	Е		$(E\text{-}A)^{-1}$		x

5. КҮНТІЗБЕЛІК ЖОСПАРЛАУДЫҢ ЖЕЛІЛІК ӘДІСІ

Желілік әдістер өзара байланысты көптеген жекелеген операциялардан тұратын өндірістік үрдістерді зерттеу барысында қолданыс табады. Бүкіл осы үрдістер кешені бір немесе бірнеше мақсатқа жетуге негізделген. Өндірістік үрдіс технологиясы кешенінің барлық жұмыстары өзара былай байланысты: олардың әрқайсысына өзінің алдындағы жұмыстар, яғни өзі солардың нәтижесіне сүйенетін және осыған орай осы жұмыстың орындалуының басталуына дейін орындалуы тиіс жұмыстар тиесілі. Өз кезегінде, бұл жұмыс үрдістің осы жұмыс аяқталғаннан кейін ғана бастала алатын өзге жұмыстарының алдында келеді. Жеке операциялардың немесе жұмыстардың байланымтарын және олардың бүкіл жұмыс кешенін орындау барысындағы бірізділігін бейнелейтін график осылайша қалыптасады. Бұл график үрдістің желілік моделі деп аталады.

Желілік модельдің негізін желілік график – жұмыстар кешенінің бейнелік көрінісі құрайды. Желілік графиктің негізгі элементтері болып ЖАҒДАЙ және ЖҰМЫС табылады.

Жұмыс – бұл кешеннің жекелеген операцияларын орындауға қажетті ұзақ уақытқа созылған үрдіс. Жағдай – бұл жұмыстың басталу немесе аяқталу сәті, ол ұзақ уақытты қажет етпейді. Желілік графикте жағдай – шеңбермен, ал жұмыс бағыттауышпен белгіленеді:



21-суірет

N_i - бастапқы жағдайдың нөмірі;

N_j - соңғы жағдайдың нөмірі.

Уақытша желілік графикті қарастырайық, онда t_{ij} жұмыстың орындалу ұзақтығын білдіреді, ал жұмыстың өзі былайша жазылады: N_i - N_j.

Желілік әдіс арқылы шешілуі мүмкін тапсырмалардың біреуін келтірейік:

Жұмыстар кешенінің ретсіз тізімі берілген. Желілік графикті құру және оның негізгі өлшемдерін анықтау шарт.

Келесі анықтамаларды енгіземіз.

Бірде бір жұмыс енбейтін жағдай кешені бастапқы жағдайы (бастау көзі) деп аталады.

Бірде бір жұмыс қарамағынан шықпайтын жағдай кешенін соңғы жағдайы (шегі) деп аталады.

а) барлық жұмыс үздіксіз;

б) әр жұмыс оның алдындағы барлық жұмыс орындалып болғаннан кейін ғана бастала алады делік

Әдетте жұмыстар кешені ретсіз тәртіппен беріледі, яғни кешен жұмыстары бірізділікті сақтамайды және ретсіз орналасқан. Сондықтан берілген тапсырманы шешудің 1-кезеңінде жұмыс тізімін ретке келтіру жүзеге асырылады. Жұмыстардың реттелген тізіміне қандай талаптар қойылады?

Алдымен, 2 анықтама енгізелік:

- берілген жұмыстың алдындағы жұмыс АТА ЖҰМЫС деп аталады;
- осы жұмыстың орындалуынан кейін орындалатын жұмыс ҰРПАҚ деп аталады.

Реттелген тізімге 2 талап қойылады:

- ешбір ұрпақ атасынан бұрын тұрмауы керек;
- ешбір ата ұрпағынан кейін тұрмауы керек.

Осыған орай жұмыстардың реттелген тізімі құрылады. Реттеу алгоритмі 2 қадамнан тұрады.

1-қадам. Ретсіз тізімнің 1-жұмысында бастапқы жағдай белгіленеді. Бұл жағдай ретсіз тізімнің қалған жұмыстарының соңғы жағдайларының ішінен іздестіріледі. Егер мұндай жұмыс табылса, онда үрдіс қайталанады, яғни бұл жұмыстың бастапқы жағдайы соңғы жағдайларының ішінен іздестіріледі және т.б. Егер мұндай жұмыс табылмаса, онда 2-қадамға көшеміз.

2-қадам. Жұмыстардың реттелген тізіміне соңғы жағдайлардың ішінен табылмаған бастапқы жағдаймен басталатын барлық жұмыстар енеді. Бұл жұмыстар бір мезгіл ішінде ретсіз тізімнен алынып тасталады. Содан соң тағы да 1-қадамға көшеміз.

Бұл 2 қадамнан тұратын үрдіс жұмыстың ретсіз тізімі түгелдей алынып тасталғанша жалғаса береді. Жұмыстар тізімі реттелгеннен кейін ьапсырманы шешудің 2-кезеңіне көшеміз.

II кезең. Желілік графикті құру. Желілік графикті құру үшін жобаның бастапқы жағдайы белгіленген реттелген тізімді қолданамыз. Графикте бастапқы жағдайды жағдайдың нөмірін көрсету арқылы шеңбер түрінде енгіземіз. Содан кейін осы жағдаймен басталатын жұмыстарды бағыттауышпен белгілейміз. Бұл жұмыстардың соңғы жағдайларын графикке тағы да жағдайдың нөмірін көрсету арқылы шеңберлер түрінде енгіземіз. Олар, өз кезегінде, желілік графикке енетін өзінен кейінгі жұмыстардың бастапқы жағдайлары болып табылады. Құру үрдісін жобаның соңғы жағдайы енгізілгенше осылайша жалғастыра береміз.

Тапсырманы шешудің келесі кезеңінің мәні желілік графиктің негізгі өлшемдерін анықтауда.

III кезең. Желілік графиктің негізгі өлшемдерін есептеу.

1) Алдыңғы өлшемдер. Тапсырманы қоюда әр жұмысты орындаудың ұзақтығы беріледі. Кешендегі барлық жұмыстардың әр жұмыс мүмкіндігінше ерте орындалады деген шарт арқылы орындалу мерзімін анықтауды мақсат етіп қоямыз, яғни жұмыстың бастапқы басталуы (ББ) мен бастапқы аяқталуын (БА) анықтаймыз.

Кешеннің бастапқы жағдайымен жұмыстың басталу уақыты нөлге тең делік. Онда жұмыстың БА жұмыстың ББ мен ұзақтығының сомасы ретінде анықталады. Барлық келесі жұмыстардың ББ алдыңғы жұмыстардың БА-ның ең жоғарғы мәніне тең болады.

Желілік графиктің бастапқы өлшемдерін есептеу барлық жұмыстарды орындау уақытының ең кіші мәнін анықтайды, ол жобаның соңғы жағдайымен аяқталатын жұмыстардың БА-ның ең жоғарғы мәніне тең болады. Мұны Т шамасы деп белгілейік.

2) Желілік графиктің кейінгі өлшемдері. Жобадағы барлық жұмыстардың барлық жұмыстарды Т ең аз уақыт аралығында орындау шеңберінен шықпай, неғұрлым кейін орындалу мүмкіндігін қарастырайық. Жобаның соңғы жағдайымен аяқталатын жұмыстардың кейін бітуі Т мәніне тең делік. Жұмыстардың кеінгі басталуы (КБ) жұмыстардың кейінгі аяқталуынан (КА) олардың ұзақтығын алып тастау арқылы анықталады. Ал алдындағы жұмыстардың кейінгі аяқталуы (КА) кейінгі жұмыстардың кейінгі басталуының (КБ) ең кіші мәндері ретінде көрініс

табады. Бастапқы және кейінгі өлшемдерді анықтай отырып, әр жұмыс үшін арнайы уақыт шегін анықтауға болады, бұл осы жұмыстардың басталу және аяқталу мерзімдерін қалыптастыруға мүмкіндік береді, осының барысында бүкіл жұмыс кешенін орындау мерзімінің ең кіші мәнінен аттамау шарт.

3) Жұмыстың толық уақыттық шегі (ТУШ) – бұл сәйкесінше кейінгі және бастапқы өлшемдер арасындағы айырмашылық.

Толық уақыттық шегі 0-ге тең жұмыстар дағдарыстық деп аталады, ал жобаның бастапқы жағдайын кейінгісімен байланыстыратын дағдарыстық жұмыстардың жиынтығын дағдарыстық жол деп атаймыз.

Желілік графиктің бастапқы және кейінгі өлшемдерін, барлық жұмыстың толық уақыттық шегін есептеп алып, IY кезеңге көшеміз.

IY кезең. Дағдарыстық жолды анықтау.

Желілік графикте барлық дағдарыстық жұмыстарды белгілейміз және осылайша ондағы дағдарыстық жолды анықтаймыз.

Жоғарыда сипатталған желілік әдісті келесі тапсырманы шешу арқылы қарастырайық.

Жұмыстардың ретсіз тізімі берілген:

38-кесте

N_i - N_j	t_{ij}
2-1	3
8-3	1
5-7	2
6-9	5
4-8	2
3-10	3
6-2	3
1-5	1
6-4	5
7-10	2
1-3	4
2-5	2
4-1	5
9-1	5
8-1	4
9-4	3
2-9	1
7-3	5

Желілік графикті құрып, оның негізгі параметрлерін анықтау және дағдарыстық жолды құру керек.

Тапсырманы жоғарыда сипатталған алгоритмге сәйкес кезең-кезең бойынша шешеміз.

1-кезең. Бұл кезеңнің мәні жұмыстар тізімін реттеуде.

1-қадам. Ретсіз тізімнің 1-жұмысын қарастырайық (1-кесте) (2-1). Осы жұмыстың бастапқы жағдайын (2) тізімнің өзге жұмыстарының кейінгі жағдайларының ішінен іздестіреміз (6-2). Үрдіс қайталанады, яғни бұл жұмыстың бастапқы жағдайы (6) тізімнің қалған жұмыстарының кейінгі жағдайларының ішінен іздестіріледі. Кейінгі жағдайы 6 жұмыстар тізімде жоқ болып шықты. 2-ші қадамға көшейік.

2-қадам. Ретсіз тізімнің 6 жағдайымен басталатын барлық жұмыстарды жұмыстардың реттелген реттелген тізіміне енгіземіз: (6-2), (6-4) және (6-9) жұмыстары, бір мезгілде осы жұмыстардың барлығын ретсіз тізімнен сызып тастаймыз және 1-қадамға қайта көшеміз.

1-қадам. Ретсіз тізімнің бірінші сызылмаған жұмысын (2-1) таңдаймыз және осы жұмыстың бастапқы жағдайын қалған жұмыстардың кейінгі жағдайларының ішінен іздестіреміз. Осының барысында сызылған жұмыстар қарастырылмайтынын ескерейік. Кейінгі 2 жағдайы бар жұмыстар тізімде жоқ болып шықты. 2-қадамға көшейік.

2-қадам. Жұмыстардың реттелген тізіміне 2 жағдайымен басталатын барлық жұмыстарды енгіземіз: бұлар – (2-1), (2-5) және (2-9) жұмыстары. Бұл жұмыстарды ретсіз тізімнен сызып тастаймыз да 1-қадамға көшеміз және т.б. 1-2 қадамдарды бүкіл ретсіз тізім сызылып біткенше қайталай береміз. Осылайша, келесі түрдегі жұмыстардың реттелген тізімін аламыз (39-кесте, 1-графа):

39 - кесте

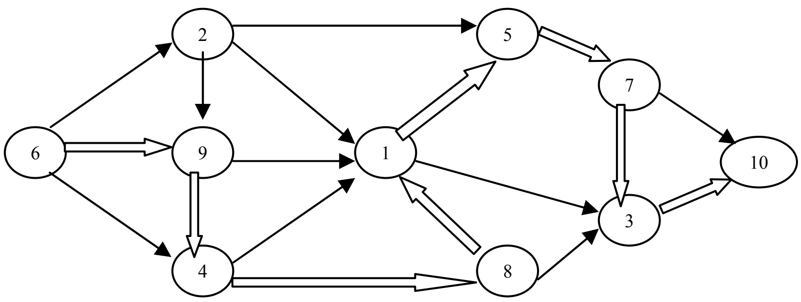
N_i -N_j	t_{ij}	РН	РО	ПН	ПО	ПРВ
6-2	3	0	3	1	4	1
6-4	5	0	5	3	8	3
6-9	5	0	5	0	5	0
2-1	3	3	6	11	14	8
2-5	2	3	5	13	15	10
2-9	1	3	4	4	5	1
9-1	5	5	10	9	14	4
9-4	3	5	8	5	8	0
4-8	2	8	10	8	10	0
4-1	5	8	13	9	14	1
8-3	1	10	11	21	22	11

8-1	4	10	14	10	14	0
1-5	1	14	15	14	15	0
1-3	4	14	18	18	22	4
5-7	2	15	17	15	17	0
7-3	5	17	22	17	22	0
7-10	2	17	19	23	25	6
3-10	3	22	25	22	25	0

II кезеңге көшейік.

II кезең. Желілік графикті құру. Жұмыстардың реттелген тізімін алдық, енді желілік графикті құруды бастаймыз. Реттелген тізімнен қарастырылып отырған жұмыстар кешенінің бастапқы жағдайы 6-жағдай екенін, ал соңғысы 10-жағдай екенін көреміз. Графикті құруды 6-жағдайдан бастаймыз. Бұл жағдай арқылы 3 жұмыс басталады, олар 2, 4 және 9 жағдайларымен аяқталады. Осы жұмыстарды бағыттауыштар түрінде енгіземіз. Өз кезегінде, 2-жағдаймен 3 жұмыс басталады: (2-1), (2-5) және (2-9), яғни 2 және 9-жағдайлар бір жұмыс арқылы біріккен (оларды бағыттауышпен байланыстырамыз), 1 және 5-жағдайлармен аяқталатын тағы да 2 жұмысты графикалық түрде белгілейміз. 9-жағдаймен 2 жұмыс басталады: (9-1) және (9-4). 4 және 1-жағдайлар графикке әлдеқашан енгізілген, сондықтан оларды бағыттауышпен байланыстыра отырып, тек бір ғана – 5-жағдайды белгілейміз.

4-жағдаймен де 2 жұмыс басталады (4-1) және (4-8). 1-жағдай графикте бейнеленген, 8-жағдайды енгіземіз және 4-жағдайды 1-інші және 8-інші жағдайлармен бағыттауыштар арқылы байланыстырамыз. Енді 8, 1 және 5-жағдайлармен басталатын барлық жұмыстарды соңғы 10-жағдайға жеткенше құрамыз (22-сур. қар.).



22-сурет

Желілік график құрылды, енді оны талдауға көшейік, ол үшін негізгі өлшемдерін есептеу қажет.

III кезең. Желілік графиктің негізгі өлшемдерін есептеу.

1) Бастапқы өлшемдер. Бастапқы 6-жағдаймен басталатын жұмыстың басталу уақыты 0-ге тең делік, яғни (6-2), (6-4) және (6-9) жұмыстарының ББ 0-ге тең, онда осы жұмыстардың БА олардың ұзақтығының және ББ-ның сомасы ретінде есептеледі. Осылайша, осы жұмыстардың БА сәйкесінше мыналарға тең: 3, 5 және 5. Келесі 3 жұмыс 2-жағдаймен басталады, осыған орай бұл жұмыстар осы жағдаймен аяқталатын барлық жұмыстар аяқталып біткенше бастала алмайды. Тізімде БА мәні 3-ке тең соңғы 2-жағдаймен басталатын бір жұмыс бар болып шықты. Демек, 2-жағдаймен басталатын жұмыстардың ББ 3-ке тең. Осы жұмыстардың БА мәнін олардың ұзақтығының және бастапқы басталуының сомасы ретінде аламыз, яғни (2-1) жұмысының БА мәні 3+3=6, (2-5) жұмысының БА мәні 2+3=5, (2-9) жұмысының БА мәні 1 және 3 сомалары ретінде алынады және 4-ке тең болады.

Келесі 2 жұмыс 9-жағдаймен басталады: (9-1) және (9-4), бұл жұмыстар 9-жағдаймен аяқталатын жұмыстар аяқталып біткенше бастала алмайды. Мұндай жұмыстар 2-еу болып шықты: (6-9) және (2-9), сонымен қатар 1-жұмыстың БА мәні 5-ке тең, ал 2-жұмыстың БА мәні 4-ке тең. Осыған орай бұл мәндердің ең үлкенін 9-жағдаймен басталатын жұмыстардың ББ мәні ретінде алу керек, яғни (9-1) және (9-4) жұмыстарының ББ мәні 5-ке тең. Сол кезде олардың БА мәні олардың ұзақтығы мен ББ сомаларына тең болады, яғни 10 және 8 және т.б. Есептеулерді барлық жұмыстар тізімінің аяғына жеткенше жалғастыра береміз. Есептелген бастапқы өлшемдер 39-кестеге енгізілген (3 және 4 графалар).

Осылайша, бастапқы өлшемдерді есептеу мынаны көрсетеді: егер барлық жұмысты мүмкіндігінше ерте орындаса, онда 25 уақыт бірлігі қажет болады, яғни кешеннің кейінгі жағдаймен басталатын жұмыстардың БА-ның ең жоғарғы мәні бүкіл жұмыстың орындалу ұзақтығының ең кіші мәнін анықтайды, Т=25.

2) Кейінгі өлшемдер. Бастапқы өлшемдерді есептеу жұмыстар кешенінің бастапқы жағдайымен басталды және бір жағдайдан 2-жағдайға көше отырып, соңғы жағдайға дейін

бірізділікпен жүріп отырды. Кейінгі өлшемдерді есептеу барысында кері үрдіс орындалады, яғни есептеу соңғы жағдайдан басталады.

Соңғы 10-жағдаймен аяқталатын жұмыстардың КА мәні барлық жұмыстың орындалу мерзімінің ең кіші мәніне – 25-ке тең делік, яғни (7-10) және (3-10) жұмыстарының КА мәнін 25-ке тең деп қабылдаймыз. Одан осы жұмыстардың ұзақтығын алып тастау арқылы жұмыстардың КБ мәнін аламыз: сәйкесінше 23 және 22.

Алдыңғы жұмыстардың КА мәнін кейінгі жұмыстардың КБ-ның ең кіші мәндері ретінде анықталады. Жұмыстардың КБ мәні олардың КА мәні мен ұзақтығының айырмасы ретінде есептеледі. Осылайша, тізімдегі келесі жұмыс (есептеулер барысы тізімнің соңынан басына дейін жүреді) – (7-3) жұмысы. Ол КБ мәні 22-ге тең, осыған орай (7-3) жұмысының КА мәнін анықтайтын (3-10) жұмысының алдында орналасқан. Бұл жағдайда оның КБ мәні мынаған тең: 22-5=17. Ары қарай (5-7) жұмысын қарастырамыз. Ол 2 жұмыстың алдында орналасқан: (7-3) және (7-10), олардың КБ мәні сәйкесінше 17 мен 23-ке тең. Осы мәндердің ең кішісін (7-3) жұмысының КА мәні ретінде қабылдаймыз және одан жұмыстың ұзақтығын азайту арқылы оның КБ мәнін аламыз: 17-2=15 және т.б. Есептелген кейінгі өлшемдер 39-кестеге енгізілген (5 және 6 графалар).

<u>3) Жұмыстың толық уақыттық шегін</u> сәйкесінше кейінгі және бастапқы өлшемдер айырмасы ретінде анықтаймыз. Осылайша, (6-2) жұмысының ТУШ мәні мынаған тең: 1-0=1, болмаса 4-3=1.

<u>IY кезең.</u> Бұл кезеңде желілік графиктегі дағдарыстық жолды анықтаймыз. Бұл үшін графиктегі ТУШ мәні 0-ге тең барлық жұмысты екі сызықпен белгілейміз. Бұл жұмыстар: (6-9)–(9-4)–(4-8)–(8-1)–(1-5)–(5-7)–(7-3)–(3-10). Дағдарыстық жол дегеніміз осы. Осының барысында дағдарыстық жолдың ұзындығы Т мәніне – бүкіл жобаны орындау мерзімінің ең кіші мәніне тең болуы тиіс. Шындығында, дағдарыстық жұмыстардың ұзақтығын сома түрінде есептесек, мынадай теңдік аламыз: 5+3+2+4+1+2+5+3=25=Т.

ӘДЕБИЕТТЕР:

1. Калихман И.Л. Линейная алгебра и линейное программирование. – М.: «Высшая школа», 1967.
2. Бирман И. Оптимальное программирование. – М.: Экономика, 1968.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М. «Высшая школа», 1986.
4. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: «Наука», 1981.
5. Таха Х. Введение в исследовании операций. – М.: «Мир», 1985, ч. I, II.
6. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. – М.: «Мир», 1984.
7. Математические методы в планировании отраслей и предприятий /Под.ред.Попова Н.Ч. – М.: «Экономика», 1975.
8. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: «Наука», 1979.
9. Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике. – М.: «Дело и Сервис», 1999.
10. Исследование операций в экономике /Под ред. Кремера Н.Ш. – М.: «ЮНИТИ», 1997
11. Экономико-математические методы и прикладные модели. Под ред. Федосеева В.В. – М.: ЮНИТИ, 1999.
12. Сабитова Х.К. Математическое программирование. Ч. 1, 2: Методическая разработка. – Алматы: Изд-во КазГУ им. аль-Фараби, 1999.

МАЗМҰНЫ

Нуржан Шарипқызы Альжанова
Хажия Қаратайқызы Сәбит

Экономикалық-математикалық әдістер

Оқу құралы

ЖШС «Нұр-пресс» бас директоры
Жансеитов Н. Н.

Беттеуші: Сляднева А. А.
Дизайн: Савельев А. О.
Оператор: Г. О. Умурова

Басуға 16.07.2007 қол қойылды. Офсеттік басылыс.
Пішімі $70 \times 108/_{32}$. Қағазы офсеттік. Қаріп түрі «Таймс».
Есептік баспа табағы 9.
Тираж 500. Тапсырыс № 3.

«Нұр-пресс» баспасы
050057 Алматы қ.,
М. Озтүрік к-сі, 12 үй.
Тел/факс: (3272) 2747-833, 2742-650.
E-mail: law-literature2006@rambler.ru