МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математики

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Учебно-методическое пособие
по курсам «Информатика» и «Вычислительная математика»

Казань
2017

УДК 621.313: 518.6
ББК 32.81

А95 Численные методы. Примеры и задачи. Учебно-методическое пособие по курсам «Информатика» и «Вычислительная математика». / Сост.: Ф.Г.Ахмадиев, Ф.Г.Габбасов, Л.Б.Ермолаева, И.В.Маланичев. Казань: КГАСУ, 2017. – 107 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

Учебно-методическое пособие предназначено для выполнения практических, самостоятельных и контрольных работ по курсам «Информатика» и «Вычислительная математика» студентами всех специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения. Приводятся численные методы решения нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, аппроксимации функций, численного интегрирования, решения дифференциальных уравнений и задач линейного программирования. Материал по каждой теме содержит краткую теоретическую справку и примеры решения типовых задач тремя способами: непосредственным вычислением, средствами табличного процессора Excel и программированием на языке VBA в Excel.

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор КГАСУ
П.Л.Шабалин

Кандидат физико-математических наук, доцент К(П)ФУ
В.Т.Дубровин

УДК 621.313: 518.6
ББК 32.81

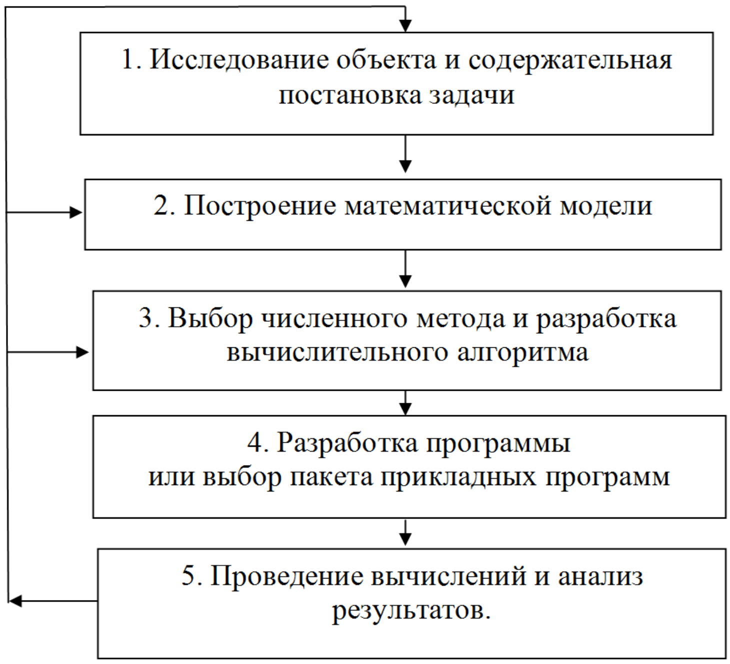
© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2017

© Ахмадиев Ф.Г., Габбасов Ф.Г., Ермолаева Л.Б., Маланичев И.В., 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Процесс решения задачи физики, техники, экономики и, в частности, проектирования конструкций с помощью методов математического моделирования состоит из нескольких основных этапов.

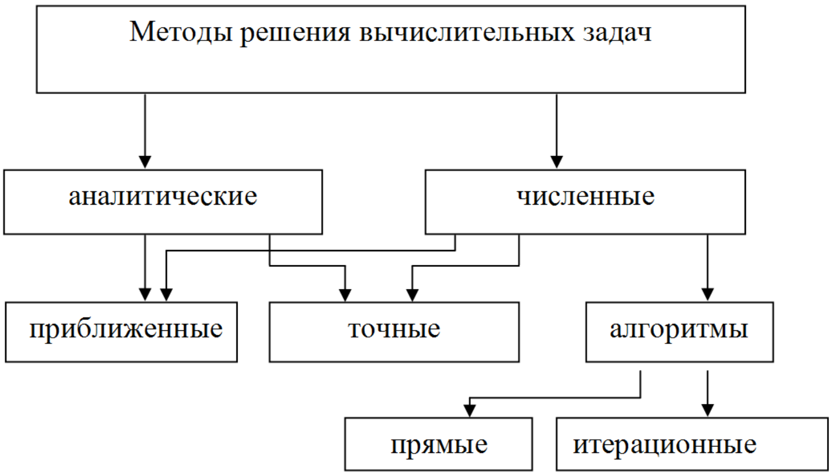


1. На первом этапе проводится *исследование объекта* и формулируется *содержательная* (физическая, техническая, экономическая и др.) *постановка задачи.* Для того чтобы задачу можно было описать количественно, нужно провести качественный и количественный анализ свойств объекта и выделить основные параметры, оказывающие на них наиболее существенное влияние.

2. Следующим этапом является математическая постановка задачи, в процессе которой осуществляется построение математической модели объекта. Под математической моделью понимают систему математических соотношений (уравнений, неравенств, краевых, начальных условий), которым должна удовлетворять система основных параметров задачи или объекта (отображение основных свойств объекта на языке математики). Одно из основных требований, предъявляемых к математической модели, – соответствие исследуемому объекту, т. е. адекватность, что связана с точностью описания. Другое немаловажное требование – чтобы модель была не слишком сложной, доступной для математической обработки. Умение находить оптимальное сочетание адекватности и сложности зависит от квалификации и даже интуиции исследователя и является в определенной степени искусством.

3. На следующем этапе необходимо выбрать или разработать методы (алгоритмы) решения математической задачи. В некоторых, наиболее про-

стых случаях удается построить аналитическое решение задачи. Такие решения являются наиболее привлекательными, поскольку позволяют не только количественно, но и, что не менее важно, качественно проанализировать исследуемые параметры. К сожалению, в подавляющем большинстве случаев это не представляется возможным, и для решения математической задачи применяются численные методы. Как аналитические, так и численные методы решения задач подразделяются на точные и приближенные. К точным относят такие методы, которые позволяют получить решение задачи с любой, заранее заданной точностью. Приближенные методы не предоставляют такой возможности. В этих случаях при построении решения должна быть произведена оценка погрешности, или остаточного члена. В свою очередь, численные методы решения задач разбиваются на 2 группы. К первой относятся так называемые прямые методы – алгоритмы, позволяющие за конечное, заранее определенное число арифметических действий получить решение задачи. Вторую группу составляют методы последовательных приближений, или так называемые итерационные методы. На рис. 1.2 приведена классификация методов решения вычислительных задач



4. Четвертым этапом является разработка программы решения задачи на компьютере, ее тестирование и отладка. Может оказаться так, что рассматриваемая математическая задача исследована, и для ее решения разработаны стандартные программы, которые могут существовать отдельно или входить в пакеты прикладных программ. Тогда остается только выбрать подходящую программу или пакет прикладных программ.

На заключительном этапе выполняют вычислительные эксперименты на компьютере и проводят анализ результатов. Если результаты не удовлетворяют исследователя, требуется совершенствование алгоритма или метода решения задачи, ее математической модели, а в некоторых случаях – корректировка содержательной постановки.

1. Элементы теории погрешностей

Выделим следующие основные источники погрешностей:

а) параметры, входящие в описание задачи, заданы неточно; соответствующую погрешность называют неустранимой (погрешность данных);

б) математическая модель описывает изучаемый объект приближенно с учетом основных, наиболее существенных факторов (погрешность математической модели);

в) численный алгоритм, применяемый для решения математической задачи, зачастую дает лишь приближенное решение (погрешность метода);

г) в процессе вычислений на компьютере промежуточные и конечные результаты округляются (вычислительная погрешность или погрешность округления). Методы, причисляемые к точным, не учитывают наличие вычислительной погрешности.

Часто первые два вида погрешности, объединяя в один, также называют неустранимой погрешностью.

Обозначив через I абсолютную величину погрешности результата, а через $I_н$, $I_м$ и $I_о$ – абсолютные величины неустранимой погрешности, погрешности метода и округления соответственно — нетрудно получить следующее соотношение:

$$I < I_н + I_м + I_о \tag{1.1}$$

Неравенство (1.1) дает оценку для погрешности результата. Из этого неравенства можно сделать важный вывод: полную погрешность результата нельзя сделать меньше, чем наибольшая из составляющих ее погрешностей.

Определение 1.1. *Приближенным значением* некоторой величины a называется число a_p, которое незначительно отличается от точного значения этой величины.

Пусть a – точное значение некоторой величины, а a_p – ее приближенное значение.

Определение 1.2. *Абсолютной погрешностью* Δ приближенного значения называется модуль разности между точным и приближенным значениями этой величины:

$$\Delta = |a - a_p| \tag{1.2}$$

Пример 1.1. Если a= 20,25 и a_p = 20, то абсолютная погрешность $\Delta = 0{,}25$.

Определение 1.3. Относительной погрешностью приближенной величины a_p называется отношение абсолютной погрешности приближенной величины к абсолютной величине ее точного значения:

$$\delta = \frac{|a_p - a|}{|a|} = \frac{\Delta}{|a|} \qquad (1.3)$$

Это равенство можно записать в другой форме:

$$\Delta = |a|\delta \qquad (1.4)$$

Пример 1.2. Пусть a = 20,25 и a_p =20, тогда относительная погрешность δ = 0,25/20 = 0,0125.

На практике, как правило, точное значение величины неизвестно. Поэтому вместо теоретических понятий абсолютной и относительной погрешностей используют практические понятия предельной абсолютной погрешности и предельной относительной погрешности.

Определение 1.4. Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимается всякое число Δ_a не меньшее абсолютной погрешности этого числа:

$$\Delta = |a - a_p| \le \Delta_a \qquad (1.5)$$

Неравенство (1.5) позволяет для точного значения величины получить оценку

$$a_p - \Delta_a \le a \le a_p + \Delta_p \qquad (1.6)$$

Часто неравенства (1.6) записывают в другой форме

$$a = a_p \pm \Delta_a = a_p(1 \pm \delta_a) \qquad (1.7)$$

На практике в качестве предельной абсолютной погрешности выбирают наименьшее из чисел Δ_a, удовлетворяющих неравенству (1.5), однако это не всегда возможно.

Пример 1.3. Оценить предельную абсолютную погрешность приближенного значения a_p = 2,72 числа e, если известно, что e = 2,718281828459045.

Решение.

Очевидно, что $|a_p - e| < 0{,}01$. Следовательно, Δ_a = 0,01. Также справедливо неравенство$|a_p - e|$ = |2,720- 2,71828... | < 0,002. Получаем другое значение предельной абсолютной погрешности Δ_a = 0,002. Ясно, что следует выбрать наименьшее из найденных значений предельной погрешности, так как это позволит сузить диапазон (1.5), в котором находится точное значение изучаемой величины.

Определение 1.5. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа называется любое число, не меньшее относительной погрешности этого числа:

$$\delta \le \delta_a. \qquad (1.8)$$

Так как справедливо неравенство

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \le \frac{\Delta_a}{|a|},$$

то можно считать, что предельные абсолютная и относительная погрешности связаны формулой

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \qquad \text{или} \qquad \Delta_a = |a|\delta_a. \tag{1.9}$$

Пример 1.4. Пусть длина бруска измерена сантиметровой линейкой и получено приближенное значение $a_p = 251$ см. Найти предельную относительную погрешность δ_a

Решение.

Так как сантиметровая линейка не содержит делений меньше сантиметра, то предельная абсолютная погрешность Δ_a = 1 см, а точное значение, a длины бруска находится в диапазоне 250 см < a < 252 см. Хотя точное значение a неизвестно, можно для относительной погрешности записать неравенство

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \prec \frac{1}{250} = 0{,}004$$

т. е. считать, что $\delta_a = 0{,}004$.

Если абсолютная погрешность Δ_a значительно меньше точного значения $|a|$, то относительную погрешность подразделяют приближенно как отношение абсолютной погрешности к приближенному значению:

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{|a_p|}, \quad \Delta_a \approx |a_p|\delta_a. \tag{1.10}$$

Часто в формуле (1.10) вместо знака «≈» используют знак точного равенства « = ». Относительную погрешность иногда задают в процентах.

Пример 1.5. Определить предельную относительную и абсолютную погрешности значения $x = 125 \pm 5\%$.

Решение.

Здесь $\delta_a = 5\% = 0{,}05$ и $\Delta_a = 0{,}05 \cdot 125 = 6{,}25$. В этом примере мы воспользовались формулой (1.10).

Значащие цифры

Определение 1.6. Значащими цифрами в записи приближенного числа называются:

- все ненулевые цифры;
- нули, содержащиеся между ненулевыми цифрами;
- нули, являющиеся представителями сохраненных десятичных разрядов

при округлении.

В следующих примерах значащие цифры подчеркнуты.

Пример 1.6. $\underline{2{,}305}$; $0{,}0\underline{357}$; $0{,}00\underline{1123}$; $0{,}035299879 \approx 0{,}0\underline{35300}$.

При округлении числа 0,035299879 до шести знаков после запятой получается число 0,035300, в котором последние два нуля являются значащими. Если отбросить эти нули, то полученное число 0,0353 не является равнозначным с числом 0,035300 как приближенным значением числа 0,035299879, так как погрешности указанных приближенных чисел отличаются!

Определение 1.7. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются верными в узком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего n-й значащей цифре, считая слева направо.

Наряду с данным определением иногда используется другое.

Определение 1.8. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются верными в широком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего n-й значащей цифре.

Пример 1.7. Определить верные цифры приближенного значения $a_p = 2{,}721$ числа e, если известно, что $e = 2{,}71828...$

Решение.

Очевидно, что $|a_p - e| = |2{,}721 - 2{,}71828...| < 0.003 < 0.005$. Следовательно, верными являются только три первые цифры (в узком и широком смысле), последнюю цифру можно отбросить, $a_p = 2{,}72$.

Пример 1.8. Пусть x=1,10253±0,00009. Верными являются первые четыре значащие цифры, а цифры 5 и 3 не удовлетворяют определению. В широком смысле верными являются первые пять цифр.

Пример 1.9. При записи следующих физических констант указаны три верные значащие цифры:

а)гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$Н · м^2/кг^2;

б)скорость света в вакууме $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с;

в)постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Замечание. Термин «верные значащие цифры» нельзя понимать буквально. Например, современное опытное значение скорости света в вакууме составляет $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ м/с. Очевидно, что ни одна значащая цифра в примере 1.9, не совпадает с соответствующей точной цифрой, но абсолютная погрешность меньше половины разряда, соответствующего последней значащей цифре в записи $3{,}00 \cdot 10^8$:

$$|3{,}00 \cdot 10^8 - 2{,}997925 \cdot 10^8| < 0{,}003 \cdot 10^8 < 0{,}01 \cdot 10^8 / 2 = 0{,}005 \cdot 10^8.$$

Правило округления чисел

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры, стоящие справа от n-й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая отброшенная цифра меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняют без изменения;

2) если первая отброшенная цифра больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

3) если первая отброшенная цифра равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

4) если первая из отброшенных цифр равна 5 и все отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра оставляется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если нет (правило четной цифры).

Это правило гарантирует, что сохраненные значащие цифры числа являются верными в узком смысле, т. е. погрешность округления не превосходит половины разряда, соответствующего последней оставленной значащей цифре. Правило четной цифры должно обеспечить компенсацию знаков ошибок.

Пример 1.10. Приведем примеры округления до четырех значащих цифр;

а) $3{,}1415926 \approx 3{,}142$;

$$\Delta_a = |3{,}142 - 3{,}1415926| < 0{,}00041 < 0{,}0005;$$

б) $1\ 256\ 410 \approx 1\ 256\ 000$;

$$\Delta_a = |1\ 256\ 000 - 1\ 256\ 410| < 500;$$

в) $2{,}997925 \cdot 10^8 \approx 2{,}998 \cdot 10^8$;

$$\Delta_a = |2{,}998 \cdot 10^8 - 2{,}997925 \cdot 10^8| < 0{,}000075 \cdot 10^8 < 0{,}0005 \cdot 10^8$$

Следующая теорема выявляет связь относительной погрешности числа с числом верных десятичных знаков.

Теорема 1.1. Если положительное приближенное число имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность δ не превосходит величины 10^{1-n}, деленной на первую значащую цифру $\alpha_н$

$$\delta \le 10^{1-n} / \alpha_н \qquad (1.11)$$

Формула (1.11) позволяет вычислить предельную относительную погрешность

$$\delta_a = 10^{1-n} / \alpha_н \qquad (1.12)$$

Пример 1.11. Найти относительную и абсолютную погрешности приближенных чисел: а) 3,142, б) $2{,}997925 \cdot 10^8$.

Решение.

а) Здесь $n = 4$, $\alpha_н = 3$. Используем формулу (1.12) для оценки относительной погрешности:

$\delta_a = 10^{1-n} / \alpha_н = 0{,}001/3 \approx 0{,}00033$.

Для определения абсолютной погрешности применим формулу (1.10):

$$\Delta_a \approx |a_p|\delta_a = 3{,}142 \cdot 0{,}00033 \approx 0{,}001.$$

б) Аналогично вычислим: $n = 7$, , $\alpha_н = 2$,

$\delta_a = 10^{1-n} / \alpha_н = 0{,}000001/2 = 0{,}0000005$;

$$\Delta_a \approx |a_p|\delta_a = 2{,}997925 \cdot 10^8 \cdot 0{,}0000005 \approx 150$$

Погрешности арифметических операций

Приведем правила вычисления погрешности результата различных арифметических операций над приближенными числами.

Относительно алгебраической суммы $u = x \pm y$ можно утверждать следующее.

Теорема 1.2. Предельная абсолютная погрешность суммы приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y \qquad (1.13)$$

Из формулы (1.13) следует, что *предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых,* т.е. если в состав суммы входят приближенные слагаемые с разными абсолютными погрешностями, то сохранять лишние значащие цифры в более точных не имеет смысла.

Пример 1.12. Найти сумму приближенных чисел, все цифры которых являются верными в широком смысле, и ее предельную абсолютную и относительную погрешности u = 0,259 + 45,12 + 1,0012.

Решение. Предельные абсолютные погрешности слагаемых здесь равны соответственно 0,001; 0,01; 0,0001.

Суммирование производим, руководствуясь следующим правилом:

1) выделим наименее точные слагаемые (в нашем примере это второе сла-

гаемое) и оставим их без изменения;

2) остальные числа округлим по образцу выделенных, оставляя один или два запасных знака;

3) сложим данные числа, учитывая все сохраненные знаки;

4) полученный результат округлим до точности наименее точных слагаемых. Имеем

$$\Delta_u = 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}0001 = 0{,}0111;$$

$$u = 0{,}259 + 45{,}12 + 1{,}0012 \approx 0{,}26 + 45{,}12 + +1{,}00 = 46{,}38 \pm 0{,}01.$$

Основной вклад в абсолютную погрешность результата здесь вносят предельные погрешности исходных данных, приведенные выше.

Теорема 1.3. Если все слагаемые в сумме имеют один и тот же знак, то предельная относительная погрешность суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых:

$$\delta_u \le \max(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n}). \qquad (1.14)$$

При вычислении разности двух приближенных чисел $u = x - y$ ее абсолютная погрешность, согласно теореме 1.2, равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. $\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y$,а предельная относительная погрешность

$$\delta_u = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|}. \qquad (1.15)$$

Из формулы (1.15) следует, что если приближенные значения x и y близки, то предельная относительная погрешность будет очень большой.

Пример 1.13. Найти разность $u = x - y$ с тремя верными знаками, если x =12,1254 ± 0,0001, y =12,128 ± 0,001.

Решение.

Имеем 12,1254 – 12,128 = – 0,0026.

$$\Delta_u = 0{,}0001 + 0{,}001 = 0{,}0011;$$

$$\delta_u = \frac{0{,}0011}{|-0{,}0026|} = 0{,}42,$$

$$\delta_x = \frac{0{,}0001}{|12{,}1254|} \approx 0{,}000008,$$

$$\delta_y = \frac{0{,}001}{|12{,}128|} \approx 0{,}00008.$$

Согласно этим результатам разность $x - y$ имеет не более одной верной цифры и относительная погрешность очень велика по сравнению с относительными погрешностями операндов.

В некоторых случаях удается избежать вычисления разности близких чисел с помощью преобразования выражения так, чтобы разность была исключена. Рассмотрим один из таких примеров.

Пример 1.14. Найти разность $\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4}$ с тремя верными знаками.

Решение. Умножим и разделим на сопряженное. Получим

$$\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4}=\frac{(\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4})\cdot(\sqrt{4{,}05}+\sqrt{4})}{\sqrt{4{,}05}+\sqrt{4}}=\frac{4{,}05-4}{\sqrt{4{,}05}+\sqrt{4}}\approx$$

$$\approx\frac{0{,}05}{4{,}012461}\approx 0{,}01246\approx 0{,}0125$$

Если представляется сложным заменить вычитание близких приближенных чисел сложением, то следует поступать так: если известно, что при вычитании должно пропасть m первых значащих цифр, а в результате требуется сохранить n верных цифр, тогда в уменьшаемом и вычитаемом следует сохранять $m+n$ верных значащих цифр:

$$\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4}\approx 2{,}012461-2\approx 0{,}0125\ .$$

Теорема 1.4. Предельная относительная погрешность произведения $u=x\cdot y$ приближенных чисел, отличных от нуля, равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей, т. е.

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y. \tag{1.16}$$

В частности, если $u=k\cdot x$, где k – точное число, имеем $\Delta_u=|k|\Delta_x$, $\delta_u=\delta_x$.

Пример 1.15. Определить произведение приближенных чисел $x=12{,}45$ и $y=2{,}13$ и число верных значащих цифр в нем, если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. По условию предельные абсолютные погрешности сомножителей равны $\Delta_x=\Delta_y=0{,}005$; $\delta_x=0{,}005/12{,}45=0{,}0004$; $\delta_y=$ 0,005/2,13 = 0,0023. Тогда по теореме 1.4 имеем $\delta_u=\delta_x+\delta_y$ = 0,0004 + 0,0023 = 0,0027 ≈ 0,003. Вычислим произведение 12,45 · 2,13 = 26,5185. $\Delta_u=26{,}5185\cdot 0{,}003\approx 0{,}079\approx 0{,}08$. Таким образом, результат имеет три верных значащих цифры в широком смысле и может быть записан в виде $u=26{,}5\cdot(1\pm 0{,}003)$.

Теорема 1.5. Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Пример 1.16. Вычислить частное приближенных чисел $x=12{,}45$ и $y=2{,}13$ и число верных значащих цифр в нем, если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. Предельная относительная погрешность частного по теореме 1.5 равна $\delta_u\approx 0{,}003$. Вычислим частное $12{,}45/2{,}13\approx 5{,}84507$.

$\Delta_u = 5{,}84507 \cdot 0{,}003 \approx 0{,}0175 \approx 0{,}02$. Результат имеет две верных значащих цифры в узком смысле и может быть записан в виде $u = 5{,}8 \cdot (1 \pm 0{,}003)$.

Погрешность произвольной функции

Пусть задана произвольная функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – приближенные величины, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n}$ – их известные предельные абсолютные погрешности. Тогда предельная абсолютная погрешность результата – функции u – для малых Δ_{x_i} вычисляется по формуле

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} \quad \text{в точке } (x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1.17}$$

Как видно из формулы (1.17), для ее применения требуется, чтобы функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ была дифференцируемой по всем переменным.

Пример 1.17. Вычислить функцию $u = 2\sin(3x + 4y)$, если

$$x = \frac{\pi}{24} \pm 0{,}002 \qquad \text{и} \qquad y = \frac{\pi}{24} \pm 0{,}005.$$

Найти предельные абсолютную и относительную погрешности результата и определить число верных значащих цифр.

Решение. Применяя формулу (1.17), имеем

$$\begin{aligned} \Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \Delta_y &= |6\cos(3x+4y)| \cdot 0{,}002 + \\ &+ |8\cos(3x+4y)| \cdot 0{,}005 = \\ &= |2\cos(3x+4y)| \cdot (3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0{,}005) = \\ &= \left|2\cos\frac{\pi}{4}\right| \cdot (3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0{,}005) = \\ &= \sqrt{2} \cdot 0{,}026 \approx 0{,}037 \end{aligned}$$

Для функции u находим $u = \sqrt{2} \approx 1{,}414214$. Учитывая предельную абсолютную погрешность $\Delta_u \approx 0{,}04$, получаем результат, который имеет две верных значащих цифры в узком смысле. Ответ можно записать в виде $u = 1{,}4 \pm 0{,}04$.

2. Численное решение нелинейных уравнений

Задана непрерывная функция $F(x)$. Требуется определить корни уравнения $F(x)=0$. Такая задача встречается в различных областях научных исследований, в том числе и при расчетах строительных конструкций, организации и управлении строительным производством.

Нелинейные уравнения можно разделить на два класса – алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими уравнениями называются уравнения, содержащие только алгебраические функции.Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются трансцендентными.

Методы решения уравнений делятся на прямые и итерационные. Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения. Если не удается решить уравнения прямыми методами, то для их решения используются итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений. Алгоритм нахождения корня уравнения с помощью итерационного метода состоит из двух этапов:

а) отыскания приближенного значения корня или содержащего его отрезка;

б) уточнения значения до некоторой степени точности.

Приближенное значение корня (начальное приближение) может быть найдено различными способами из физических соображений, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, с помощью графических методов. Если такие простые оценки исходного приближения произвести не удается, то находят две близко расположенные точки a и b, в которых непрерывная функция $F(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $F(a)F(b)<0$. В этом случае между точками a и bесть, по крайней мере, одна точка, в которой $F(x)=0$. В качестве начального приближения первой итерации x_0 можно принять середину отрезка $[a;b]$.

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении x_0. Каждый такой шаг называется итерацией. В результате итераций находятся последовательности приближенных значений корня x_0, x_1, …, x_k. Если эта последовательность с ростом значения k приближается к истинному значению корня, то итерационный процесс сходится. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока значение функции $F(x)$ после k-й итерации не станет меньшим по модулю некоторого заданного малого числа ε, т.е. $|F(x_k)|<\varepsilon$, и (или) по условию близости двух последних приближений: $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$.

2.1. Метод деления отрезка пополам

Допустим, что мы нашли отрезок $[a; b]$, в котором расположено искомое значение корня $x = x^*$, т.е. $a < x^* < b$.

Пусть для определенности $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ (рис. 2.1). В качестве начального приближения корня x_0 принимается середина этого отрезка, т.е. $x_0 = (a+b)/2$. Далее исследуем значение функции $F(x)$ на концах отрезков $[a; x_0]$ и $[x_0; b]$. Тот из них, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень. Поэтому его принимаем в качестве нового отрезка. Вторую половину отрезка $[a; b]$ отбрасываем. В качестве первой итерации корня принимаем середину нового отрезка и т. д.

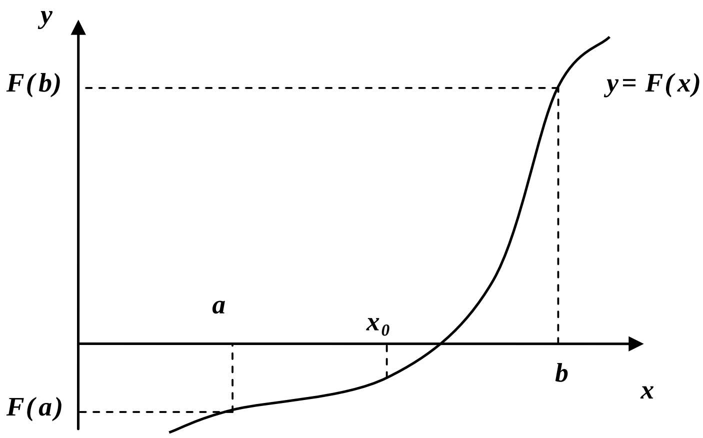


Рис. 2.1 Метод деления отрезка пополам.

Таким образом, после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, т.е. после n итераций он сокращается в 2^n раз. Если длина полученного отрезка становится меньше допустимой погрешности, т.е. $|b-a| < \varepsilon$, счет прекращается.

Пример 2.1. Найти решение уравнения $x^3 + x - 1 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ методом деления отрезка пополам.

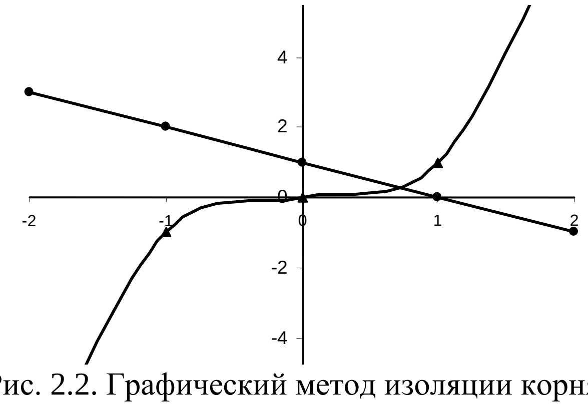


Рис. 2.2. Графический метод изоляции корня уравнения

Решение. Уравнение представим в виде $x^3 = -x + 1$. Корнем данного уравнения является x-координата точки пересечения графиков функций $y = x^3$ и $y = -x + 1$ (рис.2.2). Искомый корень находится между точками $a = 0$ и $b = 1$. Функция $F(x) = x^3 + x - 1$ на концах отрезка [0; 1] принимает значения разных знаков и $F(a)F(b) < 0$.

Начальное приближение: $a=0$, $b=1$, $x_0=(a+b)/2=0{,}5$.

$F(a)=-1$; $F(x_0)=0{,}5^3+0{,}5-1=-0{,}375$; $F(b)=1$.

1-е приближение: $a=0{,}5$, $b=1$, $x_1=(a+b)/2=0{,}75$.

Погрешность $|b-a|=1-0{,}5=0{,}5>0{,}01$.

$F(a)=-0{,}375$; $F(x_1)=0{,}75^3+0{,}75-1=0{,}172$; $F(b)=1$.

Корень находится в интервале [0,5; 0,75].

2-е приближение: $a=0{,}5$, $b=0{,}75$, $x_2=(a+b)/2=0{,}625$.

Погрешность $|b-a|=0{,}75-0{,}5=0{,}25>0{,}01$.

$F(a)=-0{,}375$; $F(x_2)=0{,}625^3+0{,}625-1=-0{,}132$; $F(b)=0{,}172$.

Корень находится в интервале [0,625; 0,75].

…

7-е приближение: $a=0{,}680$, $b=0{,}688$, $x_7=(a+b)/2=0{,}684$.

Погрешность $|b-a|=0{,}688-0{,}680=0{,}008<0{,}01$.

Приближенным решением данного уравнения является $x=0{,}68$.

а)

	A	B
1	x	F(x)
2	-3	-31
3	-2	-11
4	-1	-3
5	0	-1
6	1	1
7	2	9
8	3	29

б)

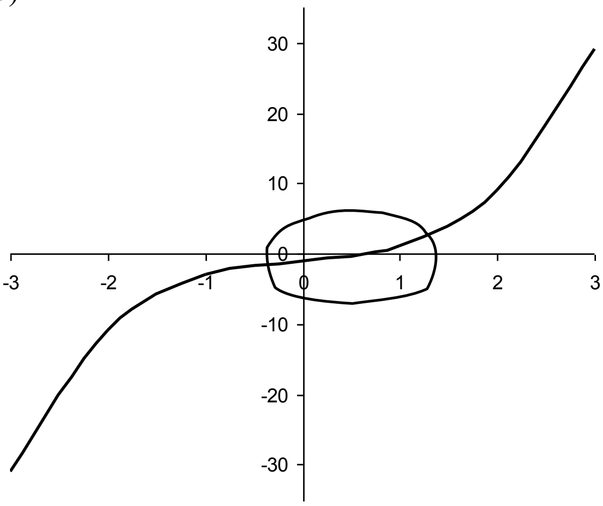


Рис. 2.3. Изоляция корня уравнения в Excel с помощью: а) таблицы; б) графика. Искомый корень находится в интервале [0; 1].

Пример 2.2. Найти решение уравнения $x^3+x-1=0$ с точностью $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}01}$ методом деления отрезка пополам с помощью программы Excel.

Найдем интервал, содержащий единственный корень уравнения. Для этого необходимо построить таблицу или график функции $F(x)$.

1) Введем в ячейки **A2**, **A3**, **A4**, … значения переменной x.
2) Введем в ячейку **B2** формулу **=A2^3+A2–1**.
3) Скопируем формулу и вставим в остальные ячейки столбца **B**.
4) Найдем соседние ячейки, в которых значения функции имеют разные знаки (рис. 2.3 а). Соответствующие значения переменной ***x*** дают границы интервала, содержащего корень.
5) Для построения графика вызываем мастер диаграмм. Выбираем тип

диаграммы «точечная» - точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями.

6) Границы интервала, содержащего корень, соответствуют значениям шкалы, между которыми линия графика пересекает горизонтальную ось (рис. 2.3 б)

Продолжаем решение на новом листе (рис. 2.4).

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	x	b-a	F(a)	F(b)	F(x)
2	0,0000	1,0000	0,5000	1,0000	-1,0000	1,0000	-0,3750
3	0,5000	1,0000	0,7500	0,5000	-0,3750	1,0000	0,1719
4	0,5000	0,7500	0,6250	0,2500	-0,3750	0,1719	-0,1309
5	0,6250	0,7500	0,6875	0,1250	-0,1309	0,1719	0,0125
6	0,6250	0,6875	0,6563	0,0625	-0,1309	0,0125	-0,0611
7	0,6563	0,6875	0,6719	0,0313	-0,0611	0,0125	-0,0248
8	0,6719	0,6875	0,6797	0,0156	-0,0248	0,0125	-0,0063
9	0,6797	0,6875	0,6836	0,0078	-0,0063	0,0125	0,0030

Рис. 2.4. Решение уравнения методом деления отрезка пополам с помощью программы Excel.

1) Ввести в ячейки **A1 – G1** заголовки столбцов.
2) В ячейку **A2** – значение левой границы интервала **0**
3) В ячейку **B2** – значение правой границы интервала **1**
4) В ячейку **C2** – формулу середины отрезка $[a; b]$ **=(A2+B2)/2**
5) В ячейку **D2** – формулу погрешности **=B2–A2**
6) В ячейку **E2** – формулу функции **=A2^3+A2-1**
7) Скопировать формулу из **E2** в ячейки **F2** и **G2**. Строка 2 теперь содержит результаты начального приближения.
8) В ячейку **A3** – формулу **=ЕСЛИ(E2*G2<0;A2;C2)**
9) В ячейку **B3** – формулу **=ЕСЛИ(E2*G2<0;C2;B2)**
10) Выделить ячейки **C2:G2** и скопировать формулы в соседние ячейки **C3:G3** при помощи маркера заполнения (небольшой черный квадрат в правом нижнем углу выделенного блока). Строка 3 теперь содержит результаты первого приближения.
11) Выделить ячейки **A3:G3** и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк **A4:G4**, **A5:G5**, и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения.
12) В столбце **C** найти значение корня, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение данного уравнения $x = 0{,}6836 \approx 0{,}68$ содержится в ячейке **C9** (погрешность $0{,}007 < 0{,}01$ в ячейке **D9**).

	Исходные данные			Результаты	
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	a	b	eps	x	f(x)
2	0	1	0,001	0,682617	0,000694

```
Function F(x)
    F = x ^ 3 + x - 1
End Function

Sub program1()
    a = Cells(2, 1)
    b = Cells(2, 2)
    eps = Cells(2, 3)
    If F(a) * F(b) > 0 Then
       MsgBox "F(a) и F(b) одного знака"
       End
    End If
1   x = (a + b) / 2
    If F(a) * F(x) < 0 Then b = x Else a = x
    If (b - a) >= eps Then GoTo 1
    Cells(2, 4) = x
    Cells(2, 5) = F(x)
End Sub
```

Рис. 2.5. Пример программы нахождения корней уравнения методом деления отрезка пополам на языке Visual Basic for Application.

На рис. 2.5 приведена программа решения данного уравнения методом деления отрезка пополам на языке VBA в Excel. В качестве исходных данных в ячейки таблицы вводятся границы интервала, содержащего корень, и точность вычисления.

2.2. Метод Ньютона (метод касательных)

Суть метода состоит в том, что на k-й итерации в точке $(x_k;\, F(x_k))$ строится касательная к кривой $y = F(x)$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 2.6). Если задан интервал изоляции корня $[a;\, b]$, то за начальное приближение x_0 принимается тот конец отрезка, на котором

$$F(x_0)F''(x_0) > 0. \qquad (2.1)$$

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = F(x)$ в точке M_0 с координатами x_0 и $F(x_0)$, имеет вид:

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \tag{2.2}$$

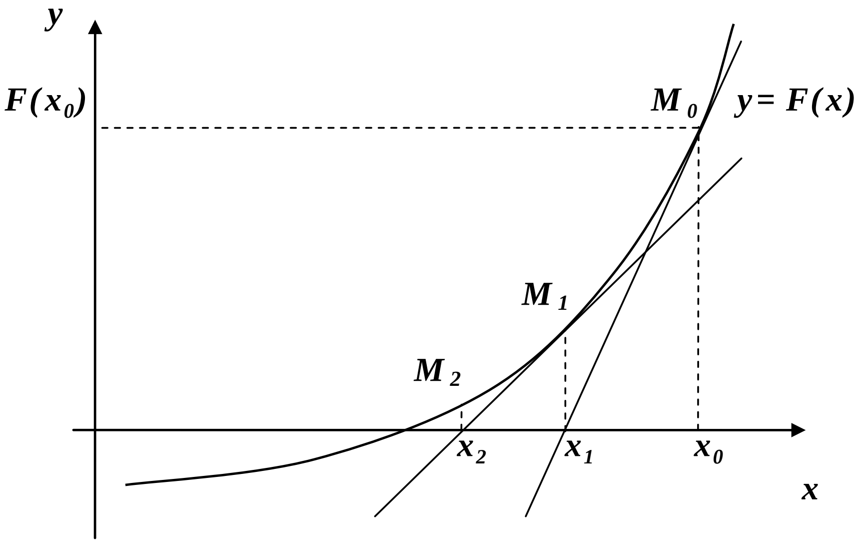


Рис. 2.6. Метод касательных.

За следующее приближение корня x_1 примем абсциссу точки пересечения касательной с осью *OX*. Из (1.2) при $x = x_1$, $y = y_1 = 0$ получим

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \tag{2.3}$$

При этом необходимо, чтобы $F'(x_0) \neq 0$.

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пересечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках M_1, M_2 и т.д. Формула для $k+1$-го приближения имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \tag{2.4}$$

Для завершения итерационного процесса можно использовать условия $|F(x_k)| < \varepsilon$ или $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Объем вычислений в методе Ньютона больше, чем в других методах, поскольку приходится находить значение не только функции $F(x)$, но и ее производной. Однако скорость сходимости здесь значительно выше.

Пример 2.3. Решить уравнение $x^3 + x - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Определим производные заданной функции $F(x) = x^3 + x - 1$: $F'(x) = 3x^2 + 1$; $F''(x) = 6x$. Проверим выполнение условия сходимости на концах заданного интервала: $F(0)F''(0) = 0$ – не выполняется, $F(1)F''(1) = 1 \cdot 6 > 0$ - выполняется. За начальное приближение корня можно принять $x_0 = 1$.

Находим первое приближение:

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 + x_0 - 1}{3x_0^2 + 1} = 1 - \frac{1^3 + 1 - 1}{3 \cdot 1^2 + 1} = 0{,}75.$$

Аналогично находится второе приближение:

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 + x_1 - 1}{3x_1^2 + 1} = 0{,}75 - \frac{0{,}75^3 + 0{,}75 - 1}{3 \cdot 0{,}75^2 + 1} = 0{,}686.$$

Третье приближение:

$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)}{F'(x_2)} = x_2 - \frac{x_2^3 + x_2 - 1}{3x_2^2 + 1} = 0{,}686 - \frac{0{,}686^3 + 0{,}686 - 1}{3 \cdot 0{,}686^2 + 1} = 0{,}682.$$

Так как $|x_3 - x_2| = |0{,}682 - 0{,}686| = 0{,}004 < 0{,}01$, итерационный процесс заканчивается. Таким образом, приближенным решением данного уравнения является $x = 0{,}68$.

На рис. 2.7 приведена программа решения данного уравнения методом Ньютона. В качестве исходных данных вводятся начальное приближение и точность вычисления.

	Исходные данные		Результаты	
	A	**B**	**C**	**D**
1	x0	eps	x	F(x)
2	1	0,001	0,682328	2,84E-10

```
Function F(x)
    F = x ^ 3 + x - 1
End Function
Function F1(x)
    F1 = 3 * x ^ 2 + 1
End Function
Sub program2()
    x = Cells(2, 1)
    eps = Cells(2, 2)
1   xk = x - F(x) / F1(x)
    If Abs(xk - x) >= eps Then x = xk: GoTo 1
    Cells(2, 3) = xk
    Cells(2, 4) = F(xk)
End Sub
```

Рис. 2.7. Программа нахождения корней методом Ньютона на языке VBA.

Пример 2.4. Решить уравнение $x^3 + x - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ с помощью программы Excel.

Порядок решения (рис. 2.8).

1) Ввести в ячейки **A1:D1** заголовки столбцов.
2) В ячейку **A2** – значение начального приближения **1**
3) В ячейку **B3** – формулу функции **=A2^3+A2-1**
4) В ячейку **C3** – формулу производной функции **=3*A2^2+1**
5) В ячейку **A3** – формулу первого приближения **=A2-B3/C3**
6) В ячейку **D3** – погрешность **=ABS(A3-A2)**
7) Выделить ячейки **A3:D3** и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк **A4:D4**, **A5:D5**, и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения.
8) В столбце **A** найти значение корня, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение данного уравнения $x = 0{,}68233 \approx 0{,}682$ содержится в ячейке **A6** (погрешность $0{,}00001 < 0{,}001$ в ячейке **D6**).

	A	B	C	D
1	x	F(x)	F'(x)	погрешность
2	1,00000			
3	0,75000	1,00000	4,00000	0,25000
4	0,68605	0,17188	2,68750	0,06395
5	0,68234	0,00894	2,41198	0,00371
6	0,68233	0,00003	2,39676	0,00001

Рис. 2.8. Решение уравнения методом Ньютона с помощью программы Excel.

2.3. Метод простой итерации

Для использования этого метода исходное нелинейное уравнение $F(x) = 0$ необходимо привести к виду $x = \varphi(x)$.

В качестве $\varphi(x)$ можно принять функцию $\varphi(x) = x - F(x)/M$**,** где M - неизвестная постоянная величина, которая определяется из условия сходимости метода простой итерации $0 < |\varphi'(x)| < 1$. При этом для определения M условие сходимости записывается в следующем виде:

$$|1 - F'(x_0)/M| < 1 \quad \text{или} \quad M = 1{,}01 \cdot F'(x_0)\,. \qquad (2.5)$$

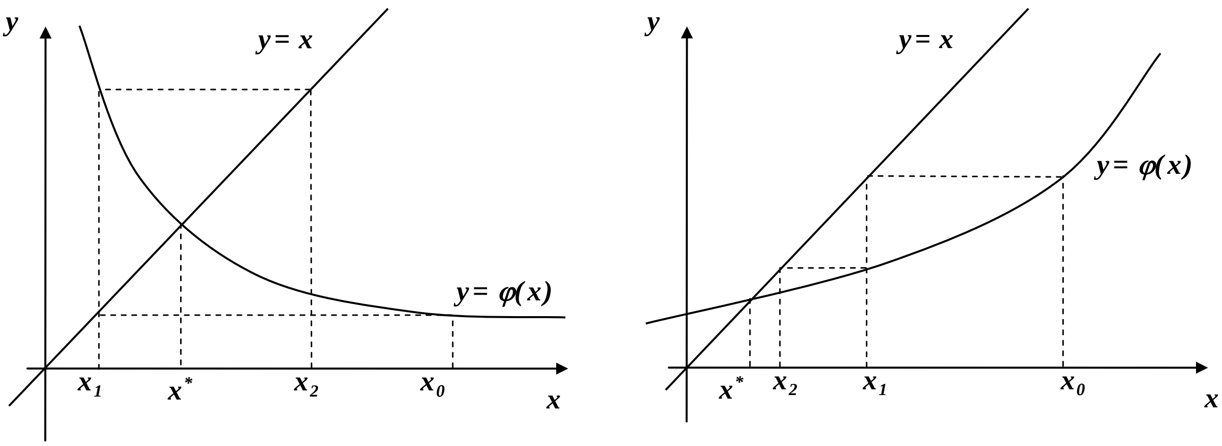
Если известно начальное приближение корня $x = x_0$, подставляя это значение в правую часть уравнения $x = \varphi(x)$, получаем новое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$.

Далее подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение $x = \varphi(x)$, получаем последовательность значений:

$$x_2 = \varphi(x_1),\ x_3 = \varphi(x_2), ...,\ x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 1,2,...,n.$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т.е. $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Геометрическая интерпретация метода простой итерации. Построим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Корнем x^* уравнения $x = \varphi(x)$ является абсцисса пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 2.9). Взяв в качестве начальной точки x_0, строим ломаную линию. Абсциссы вершин этой ломаной представляют собой последовательные приближения корня x^*. Из рисунка видно, что если $-1 < \varphi'(x) < 0$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 2.9а), то последовательные приближения $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ колеблются около корня. Если же производная $0 < \varphi'(x) < 1$ (рис. 2.9б), то последовательные приближения сходятся монотонно.



а) б)

Рис. 2.9. Геометрическая интерпретация метода простой итерации.

Пример 2.5. Решить уравнение $x^3 + x - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Из условия сходимости (2.5) $|1-(3x_0^2+1)/M|<1$, при $x_0 = 1$ определяем $M > 4$. Пусть $M = 5$.

Подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение

$$x_{k+1} = x_k - (x_k^3 + x_k - 1)/5,$$

получаем последовательность значений:

$$x_1 = x_0 - (x_0^3 + x_0 - 1)/5 = 1 - (1^3 + 1 - 1)/5 = 0{,}8$$

$$x_2 = x_1 - (x_1^3 + x_1 - 1)/5 = 0{,}8 - (0{,}8^3 + 0{,}8 - 1)/5 = 0{,}738$$

$$x_3 = x_2 - (x_2^3 + x_2 - 1)/5 = 0{,}738 - (0{,}738^3 + 0{,}738 - 1)/5 = 0{,}710$$

$$x_4 = x_3 - (x_3^3 + x_3 - 1)/5 = 0{,}71 - (0{,}71^3 + 0{,}71 - 1)/5 = 0{,}696$$

$$x_5 = x_4 - (x_4^3 + x_4 - 1)/5 = 0{,}696 - (0{,}696^3 + 0{,}696 - 1)/5 = 0{,}690$$

$|x_5 - x_4| = |0{,}69 - 0{,}696| = 0{,}006 < 0{,}01$, но
$F(x_5) = 0{,}69^3 + 0{,}69 - 1 = 0{,}034 > 0{,}01$, поэтому продолжаем вычисления.

$$x_6 = x_5 - (x_5^3 + x_5 - 1)/5 = 0{,}69 - (0{,}69^3 + 0{,}69 - 1)/5 = 0{,}686$$

$$x_7 = x_6 - (x_6^3 + x_6 - 1)/5 = 0{,}686 - (0{,}686^3 + 0{,}686 - 1)/5 = 0{,}684$$

Теперь $F(x_7) = 0{,}684^3 + 0{,}684 - 1 = 0{,}009 < 0{,}01$ и приближенным решением данного уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ является $x = 0{,}68$.

На рис.2.10 приведена программа решения данного уравнения методом простой итерации. В качестве исходных данных вводятся начальное приближение, точность вычисления и значение постоянной *M*.

	Исходные данные			Результаты	
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	x0	eps	M	x	F(x)
2	1	0,001	5	0,683335	0,002416

```
Function F(x)
    F = x ^ 3 + x - 1
End Function
Sub program3()
    x = Cells(2, 1)
    eps = Cells(2, 2)
    M = Cells(2, 3)
1   xk = x - F(x) / M
    If Abs(xk - x) >= eps Then x = xk: GoTo 1
    Cells(2, 4) = xk
    Cells(2, 5) = F(xk)
End Sub
```

Рис. 2.10. Программа решения уравнения методом простой итерации на языке VBA.

Пример 2.6. Решить уравнение $x^3+x-1=0$ на отрезке $[0;1]$ методом простой итерации с точностью $\varepsilon=0{,}01$ с помощью программы Excel.

Порядок решения (рис. 2.11).

1) Ввести в ячейки **A1:D1** заголовки столбцов.
2) В ячейку **A2** – значение начального приближения **1**
3) В ячейку **B3** – формулу функции **=A2^3+A2-1**
4) В ячейку **C2** – значение ***M*** **5**
5) В ячейку **A3** – формулу первого приближения **=A2-B3/$C$2**
6) В ячейку **D3** – погрешность **=ABS(A3-A2)**
7) Выделить ячейки **A3:D3** и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк **A4:D4**, **A5:D5**, и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения.
8) В столбце **A** найти значение корня, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение данного уравнения $x=0{,}68427\approx 0{,}68$ содержится в ячейке **A9** (погрешность $0{,}00179463<0{,}01$ в ячейке **D9**).

	A	B	C	D
1	x	f(x)	M	погрешность
2	1		5	
3	0,8	1		0,2
4	0,7376	0,312		0,0624
5	0,70982	0,13889		0,02777881
6	0,69633	0,06746		0,01349237
7	0,68954	0,03396		0,00679209
8	0,68606	0,01738		0,0034769
9	0,68427	0,00897		0,00179463

Рис.2.11. Решение уравнения методом простой итерации с помощью программы Excel.

3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Методы решения систем уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

делятся на точные (прямые) и приближенные (итерационные). Прямые методы позволяют в предположении отсутствия ошибок округления получить точное решение задачи за конечное число арифметических действий. Итерационные методы основаны на использовании повторяющегося процесса и позволяют получить решение в результате последовательных приближений.

3.1. Метод Гаусса

Этот метод является одним из наиболее распространенных прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В основе метода Гаусса лежит идея последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}: && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ &\mathrm{II}: && a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ &\mathrm{III}: && a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) приводится к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}: && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ &\mathrm{II}': && a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ &\mathrm{III}'': && a''_{33}x_3 = b''_3 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Достигается это при помощи цепочки элементарных преобразований, при которых из каждой строки вычитаются некоторые кратные величины расположенных выше строк.

Процесс приведения системы (3.2) к системе (3.3) называется прямым ходом, а нахождение неизвестных x_1, x_2, x_3 из системы (3.3) называется обратным ходом.

Прямой ход исключения: Исключаем x_1 из уравнений (II) и (III) системы (3.2). Для этого умножаем уравнение (I) на $d_1 = -a_{21} / a_{11}$ и складываем со вторым, затем умножаем на $d_2 = -a_{31} / a_{11}$ и складываем с третьим.

В результате получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} &\mathrm{II}': \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ &\mathrm{III}': \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из полученной системы (3.4) исключаем x_2. Для этого, умножая новое уравнение на $d_3 = -a'_{32} / a'_{22}$ и складывая со вторым уравнением, получим уравнение:

$$\mathrm{III}'': \quad a''_{33}x_3 = b''_3 \tag{3.5}$$

Взяв из каждой системы (3.2), (3.4) и (3.5) первые уравнения, получим систему уравнений с треугольной матрицей.

Обратный ход: Из уравнения (III″) находим $x_3 = b''_3 / a''_{33}$. Из уравнения (II′) находим $x_2 = b'_2 - a'_{23}x_3$. Из уравнения (I) находим $x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$. Коэффициенты a_{11}, a'_{22} называются ведущими элементами 1-го и 2-го шагов исключения неизвестных. Они должны быть отличны от нуля. Если они равны нулю, то, меняя местами строки, необходимо на их место вывести ненулевые элементы.

Аналогичным путем методом Гаусса решаются системы n уравнений с n неизвестными.

Пример 3.1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение: Удалить члены с x_1 из 2-го и 3-го уравнений можно, вычитая из 2-й строки 1-ую, умноженную на 2, а из 3-й - первую, умноженную на 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ -7x_2 - 7x_3 &= -21 \\ -13x_2 - 8x_3 &= -19 \end{aligned}$$

2-я строка делится на -7:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ 13x_2 + 8x_3 &= 19 \end{aligned}$$

2-я строка умножается на 13 и вычитается из 3-й:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ -5x_3 &= -20 \end{aligned}$$

3-я строка делится на -5:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$x_3 = 4$$

Процедура обратного хода дает решение:

$x_3 = 4$;

$x_2 = 3 - x_3 = -1$;

$x_1 = 10 - 4x_2 - 3x_3 = 10 - 4\cdot(-1) - 3\cdot 4 = 10 + 4 - 12 = 2$

Пример 3.2. Решить систему уравнений методом Гаусса с помощью программы на языке VBA в Excel:

$$\begin{cases} 13x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 1 \\ 7x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

Порядок решения.

1) Ввести матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ в рабочий лист Excel (рис. 3.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	13	-2	1	-4		8		1,767019
2	2	0	-3	5		-7		9,807512
3	4	-1	3	9		1		2,702465
4	7	-5	11	-4		-5		-0,48533
5								

Рис. 3.1. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы с помощью программы Excel.

2) Ввести код программы (рис. 3.2) в модуль листа. В качестве значения переменной n указать число уравнений.
3) Выполнить программу. В столбце H содержится решение системы:

$x_1 = 1{,}767019$; $x_2 = 9{,}807512$; $x_3 = 2{,}702465$; $x_4 = -0{,}48533$.

3.2. Метод обратной матрицы

Систему (3.1) можно представить в матричном виде как $AX = B$,

где $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Решение можно выразить, используя умножение на матрицу A^{-1}, обратную к A:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B$$

```
Sub Gauss()
    n = 4
    ReDim a(1 To n, 1 To n + 2)
    For i = 1 To n
        For j = 1 To n
            a(i, j) = Cells(i, j)
        Next j
        a(i, n + 1) = Cells(i, n + 2)
    Next i
    For i = 1 To n - 1
        If Abs(a(i, i)) < 0.00000001 Then
            For k = i + 1 To n
                If Abs(a(k, i)) > 0.00000001 Then
                    For j = 1 To n + 1
                        tmp = a(i, j)
                        a(i, j) = a(k, j)
                        a(k, j) = tmp
                    Next j
                    Exit For
                End If
            Next k
        End If
        If Abs(a(i, i)) > 0.00000001 Then
            For k = i + 1 To n
                f = -a(k, i) / a(i, i)
                For j = i To n + 1
                    a(k, j) = a(k, j) + f * a(i, j)
                Next j
            Next k
        End If
    Next i
    For i = n To 1 Step -1
        tmp = a(i, n + 1)
        For k = i + 1 To n
            tmp = tmp - a(i, k) * a(k, n + 2)
        Next k
        a(i, n + 2) = tmp / a(i, i)
    Next i
    For i = 1 To n
        Cells(i, n + 4) = a(i, n + 2)
    Next i
End Sub
```

Рис.3.2. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса на языке VBA.

Пример 3.3. Решить систему уравнений из примера 3.2 методом обратной матрицы с помощью программы Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	A					B	
2	13	-2	1	-4		8	
3	2	0	-3	5		-7	
4	4	-1	3	9		1	
5	7	-5	11	-4		-5	
6							
7	1/A					X	
8	0,098005	-0,09214	0,071009	-0,0534	X1=	1,767019	
9	0,201878	-0,85446	0,403756	-0,3615	X2=	9,807512	
10	0,019366	-0,31162	0,163732	-0,04049	X3=	2,702465	
11	-0,02758	0,049883	0,069836	-0,00293	X4=	-0,48533	

Рис. 3.3. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы с помощью программы Excel.

Порядок решения.

4) Ввести матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ в рабочий лист Excel (рис. 3.3).
5) Выделить ячейки для хранения обратной матрицы $\mathbf{4 \times 4}$; например, ячейки **A8:D11**.
6) Вызвать мастер функций, в категории «Математические» выбрать функцию вычисления обратной матрицы **МОБР**. В диалоговом окне аргументов функции заполнить поле ввода «Массив» - указать диапазон ячеек матрицы $\boldsymbol{A}$ - в нашем случае **A2:D5**. Нажать кнопку OK. В первой ячейке выделенного под обратную матрицу диапазона (**A8**) появится число.
7) Чтобы получить всю обратную матрицу, нажать клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. В ячейках **A8:D11** появятся значения обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$.
8) Выделить ячейки для хранения вектора-столбца $\boldsymbol{X}$ $\mathbf{4 \times 1}$; например, ячейки **F8:F11**.
9) Вызвать мастер функций, в категории «Математические» выбрать функцию матричного умножения **МУМНОЖ**. В диалоговом окне аргументов функции в поле ввода «Массив1» указать диапазон ячеек матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ - в нашем случае **A8:D11**, в поле ввода «Массив2» указать диапазон ячеек вектора $\boldsymbol{B}$ - в нашем случае **F2:F5**. Нажать кнопку OK. В первой ячейке выделенного под результат диапазона (**F8**) появится число.

10) Чтобы получить весь вектор $\boldsymbol{X}$, нажать клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. В ячейках **F8:F11** появятся значения решения системы уравнений:

$x_1 = 1{,}767019$; $x_2 = 9{,}807512$; $x_3 = 2{,}702465$; $x_4 = -0{,}48533$

3.3. Метод прогонки

Применяется для решения систем уравнений с трехдиагональной (ленточной) матрицей. Такая система уравнений записывается в виде:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \qquad i = 1, 2, 3, ..., n, \tag{3.6}$$
$$a_1 = 0, \quad c_n = 0.$$

Является частным случаем метода Гаусса и состоит из прямого и обратного хода. Прямой ход состоит в исключении элементов матрицы системы (3.6), лежащих ниже главной диагонали. В каждом уравнении останется не более двух неизвестных и формулу обратного хода можно записать в следующем виде:

$$x_i = U_i x_{i+1} + V_i, \qquad i = n, n-1, ..., 1 \tag{3.7}$$

Уменьшим в формуле (3.7) индекс на единицу: $x_{i-1} = U_{i-1} x_i + V_{i-1}$ и подставим в (3.6):

$$a_i (U_{i-1} x_i + V_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

Выразим x_i:

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i U_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i V_{i-1}}{a_i U_{i-1} + b_i} \tag{3.8}$$

Сравнивая (3.7) и (3.8), получим:

$$U_i = -\frac{c_i}{a_i U_{i-1} + b_i} \quad V_i = \frac{d_i - a_i V_{i-1}}{a_i U_{i-1} + b_i} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n \tag{3.9}$$

Поскольку $a_1 = 0$, то

$$U_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \qquad V_1 = \frac{d_1}{b_1} \tag{3.10}$$

Теперь по формулам (3.9) и (3.10) можно вычислить прогоночные коэффициенты U_i и V_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$). Это прямой ход прогонки. Зная прогоночные коэффициенты, по формулам (3.7), можно вычислить все x_i ($i = n, n-1, ..., 1$) (обратный ход прогонки). Поскольку $c_n = 0$, то $U_n = 0$ и $x_n = V_n$. Далее вычисляем x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1.

Пример 3.4. Решить систему уравнений методом прогонки:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = -1 \\ 0{,}1x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ -x_3 + 8x_4 = 40 \end{cases}$$

Решение. Коэффициенты записываем в виде таблицы 3.1.

Таблица 3.1

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0	10	1	5
2	-2	9	1	-1
3	0,1	4	-1	-5
4	-1	8	0	40

Прямой ход прогонки. По формулам (3.9) и (3.10) определяем прогоночные коэффициенты U_i и V_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$U_1 = -c_1 / b_1 = -1/10 = -0{,}1$$

$$V_1 = d_1 / b_1 = 5/10 = 0{,}5$$

$$U_2 = -c_2 /(a_2U_1 + b_2) = -1/(2 \cdot 0{,}1 + 9) = -0{,}1087$$

$$V_2 = (d_2 - a_2V_1)/(a_2U_1 + b_2) = (-1 + 2 \cdot 0{,}5)/(2 \cdot 0{,}1 + 9) = 0$$

$$U_3 = -c_3 /(a_3U_2 + b_3) = 1/(-0{,}1 \cdot 0{,}1087 + 4) = 0{,}2507$$

$$V_3 = (d_3 - a_3V_2)/(a_3U_2 + b_3) = (-5 - 0{,}1 \cdot 0)/(-0{,}1 \cdot 0{,}1087 + 4) = -1{,}2534$$

$$U_4 = -c_4 /(a_4U_3 + b_4) = 0, \qquad \text{т.к. } c_4 = 0$$

$$V_4 = (d_4 - a_4V_3)/(a_4U_3 + b_4) = (40 - 1 \cdot 1{,}2534)/(-1 \cdot 0{,}2507 + 8) = 5$$

Обратный ход прогонки. По формулам (3.7) вычисляем все x_i ($i = 4, 3, 2, 1$). Поскольку $U_4 = 0$, то $x_4 = V_4 = 5$.

Далее вычисляем:

$$x_3 = U_3x_4 + V_3 = 0{,}2507 \cdot 5 - 1{,}2534 = 0{,}0001 \approx 0$$

$$x_2 = U_2x_3 + V_2 = -1{,}1087 \cdot 0{,}0001 + 0 = -0{,}0001 \approx 0$$

$$x_1 = U_1x_2 + V_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}0001 + 0{,}5 = 0{,}5001 \approx 0{,}5$$

Вычисляем невязки $r_i = d_i - a_ix_{i-1} - b_ix_i - c_ix_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$r_1 = d_1 - b_1x_1 - c_1x_2 = 5 - 10 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 0 = 0$$

$$r_2 = d_2 - a_2x_1 - b_2x_2 - c_2x_3 = -1 + 2 \cdot 0{,}5 - 9 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$r_3 = d_3 - a_3x_2 - b_3x_3 - c_3x_4 = -5 - 0{,}1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 0$$
$$r_4 = d_4 - a_4x_3 - b_4x_4 = 40 + 1 \cdot 0 - 8 \cdot 5 = 0$$

На рис. 3.4 приведена программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки на языке VBA.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	d	n	x	r
2	0	10	1	5	4	0,5	0
3	-2	9	1	-1		0	0
4	0,1	4	-1	-5		0	0
5	-1	8	0	40		5	0

```
Sub program4()
n = Cells(2, 5)
ReDim a(n),b(n),c(n),d(n),u(n),v(n),x(n+1),r(n)
For i = 1 To n
  a(i) = Cells(i + 1, 1)
  b(i) = Cells(i + 1, 2)
  c(i) = Cells(i + 1, 3)
  d(i) = Cells(i + 1, 4)
  u(i) = -c(i)/(a(i)*u(i-1)+b(i))
  v(i) = (d(i)-a(i)*v(i-1))/(a(i)*u(i-1)+b(i))
Next i
For i = n To 1 Step -1
    x(i) = u(i)*x(i+1)+v(i)
Next i
For i = 1 To n
    r(i) = d(i)-a(i)*x(i-1)-b(i)*x(i)-c(i)*x(i+1)
    Cells(i + 1, 6) = x(i)
    Cells(i + 1, 7) = r(i)
Next i
End Sub
```

Рис.3.4. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки на языке VBA.

Пример 3.5. Решить систему уравнений из примера (3.4) методом прогонки с помощью программы Excel.

Порядок решения.

1) Ввести в ячейки **A1:G1** заголовки столбцов (рис. 3.5).
2) В ячейки **A3:D6** – коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i. Строки выше и ниже данных оставить пустыми.

3) В ячейку **E3** – формулу U_1 **=-C3/(A3*E2+B3)**
4) В ячейку **F3** – формулу V_1 **=(D3-A3*F2)/(A3*E2+B3)**
5) В ячейку **G3** – формулу x_1 **=G4*E3+F3**
6) Выделить ячейки **E3:G3** и скопировать формулы в соседние ячейки **E4:G4** … **E6:G6** при помощи маркера заполнения.
7) В ячейках **G3:G6** появятся значения решения системы уравнений.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	c	d	u	v	x	
2								
3	0	10	1	5	-0,1	0,5	0,5	
4	-2	9	1	-1	-0,1087	0	0	
5	0,1	4	-1	-5	0,250681	-1,25341	0	
6	-1	8	0	40	0	5	5	
7								

Рис. 3.5. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки с помощью программы Excel.

3.4. Метод простой итерации (метод Якоби)

Суть вычислений итерационными методами состоит в следующем: расчет начинается с некоторого заранее выбранного приближения $x^{(0)}$ (начального приближения). Вычислительный процесс, использующий матрицу A, вектор B системы (3.1) и $x^{(0)}$, приводит к новому вектору $x^{(1)}$:

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(0)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)}), \qquad i = 1, 2, 3, ..., n \tag{3.11}$$

Затем процесс повторяется, только вместо $x^{(0)}$ используется новое значение $x^{(1)}$. На $k+1$-м шаге итерационного процесса получают:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}), \quad i = 1, 2, 3, ..., n \tag{3.12}$$

При выполнении некоторых заранее оговоренных условий процесс сходится при $k \to \infty$. Сходимость метода простой итерации обеспечивается при выполнении условия преобладания диагональных элементов матрицы A:

$$\sum_{i \neq j} | a_{ij} | < | a_{ii} |, \qquad\qquad i = 1, 2, 3, ..., n \tag{3.13}$$

Заданная точность достигается при выполнении условия:

$$\max_i | x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} | < \varepsilon \tag{3.14}$$

Пример 3.6. Преобразовать систему уравнений (3.15) к виду, пригодному для построения итерационного процесса методом Якоби и выполнить три итерации.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Решение. Достаточное условие сходимости (3.13) выполняется, поэтому начальное приближение может быть любым.

$$|a_{12}| + |a_{13}| = 4 + 1 < |a_{11}| = 7$$
$$|a_{21}| + |a_{23}| = 2 + 3 < |a_{22}| = 6$$
$$|a_{31}| + |a_{32}| = 1 + 1 < |a_{33}| = 4$$

В i-ом уравнении все члены, кроме x_i, переносятся в правую часть:

$$\begin{aligned} x_1 &= (7 - 4x_2 + x_3)/7 \\ x_2 &= (-2 - 2x_1 - 3x_3)/6 \\ x_3 &= (4 + x_1 - x_2)/4 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Задается начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)};\ x_2^{(0)};\ x_3^{(0)})$, которое подставляется в правую часть (3.16). Если $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$, то результаты первой итерации:

$$x_1^{(1)} = (7 - 4 \cdot 0 + 0)/7 = 1$$
$$x_2^{(1)} = (-2 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0)/6 = -1/3 = -0{,}333$$
$$x_3^{(1)} = (4 + 0 - 0)/4 = 1$$

Результаты первой итерации $x^{(1)} = (x_1^{(1)};\ x_2^{(1)};\ x_3^{(1)})$ подставляют в правую часть (2.16) и получают результаты второй итерации:

$$x_1^{(2)} = (7 - 4 \cdot (-0{,}333) + 1)/7 = 4/3 = 1{,}333$$
$$x_2^{(2)} = (-2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1)/6 = -7/6 = -1{,}167$$
$$x_3^{(2)} = (4 + 1 - (-0{,}333))/4 = 4/3 = 1{,}333$$

Результаты второй итерации $x^{(2)} = (x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ x_3^{(2)})$ подставляют в правую часть (2.16) и получают результаты третьей итерации:

$$x_1^{(3)} = (7 - 4 \cdot (-1{,}167) + 1{,}333)/7 = 1{,}857$$
$$x_2^{(3)} = (-2 - 2 \cdot 1{,}333 - 3 \cdot 1{,}333)/6 = -1{,}444$$
$$x_3^{(3)} = (4 + 1{,}333 - (-1{,}167))/4 = 1{,}625$$

Определяют достигнутую точность

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |1{,}857 - 1{,}333| = 0{,}524$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |-1{,}444 + 1{,}167| = 0{,}278$$
$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |1{,}625 - 1{,}333| = 0{,}292$$
$$\max_i |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0{,}524$$

	A	B	C
1	x1	x2	x3
2	0,00	0,00	0,00
3	1,00	-0,33	1,00
4	1,33	-1,17	1,33
5	1,86	-1,44	1,63
6	2,06	-1,76	1,83
7	2,27	-1,93	1,96
…	…	…	…
20	2,66	-2,34	2,25
21	2,66	-2,35	2,25
22	2,66	-2,35	2,25

Рис. 3.6. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби с помощью программы Excel

Пример 3.7. Решить систему уравнений методом Якоби с помощью программы Excel с точностью $\varepsilon = 0{,}01$:

$$
\begin{aligned}
7x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\
2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= -2 \\
-x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Порядок решения.

1) Представить систему в виде (3.16);
2) Ввести в ячейки **A1:C1** заголовки столбцов (рис. 3.6);
3) В ячейки **A2:C2** – начальное приближение **0, 0, 0**;
4) В ячейку **A3** – формулу $\boldsymbol{x_1}$ **=(7-4*B2+C2)/7**
5) В ячейку **B3** – формулу $\boldsymbol{x_2}$ **=(-2-2*A2-3*C2)/6**
6) В ячейку **C3** – формулу $\boldsymbol{x_3}$ **=(4+A2-B2)/4**
7) Выделить столбцы **A, B, C**, вызвать контекстное меню **Формат ячеек**, установить формат **числовой** и указать число десятичных знаков, соответствующее необходимой точности, т.е. **2**;
8) Выделить ячейки **A3:C3** и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк **A4:C4, A5:C5** и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения;
9) Продолжать копирование, пока результат не перестанет меняться;
10) Ячейки **A21, B21, C21** содержат решение системы уравнений, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение системы с точностью $\varepsilon = 0{,}01$:

$x_1 = 2{,}66$, $x_2 = -2{,}35$, $x_2 = 2{,}25$

3.5. Метод Зейделя

В методе Зейделя при нахождении $(k+1)$-ой компоненты используются уже найденные компоненты этой же итерации с меньшими номерами, т.е. последовательность итераций задается формулой:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (3.17)$$

Сходимость и точность достигаются условиями (3.13) и (3.14).

Пример 3.8. Задать итерационный процесс Зейделя для нахождения решений системы уравнений (3.15).

Решение. Достаточное условие сходимости (3.13) выполняется, поэтому начальное приближение может быть любым.
Используя (3.16) получим:

$$x_1^{(k+1)} = (7 - 4x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/7$$
$$x_2^{(k+1)} = (-2 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)})/6$$
$$x_3^{(k+1)} = (4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)})/4$$

После задания начального приближения, например, $x^{(0)} = (0;\ 0;\ 0)$ выражение для первой итерации имеет вид:

$$x_1^{(1)} = (7 - 4\cdot 0 + 0)/7 = 1$$
$$x_2^{(1)} = (-2 - 2\cdot 1 - 3\cdot 0)/6 = -0{,}667$$
$$x_3^{(1)} = (4 + 1 + 0{,}667)/4 = 1{,}417$$

Результаты первой итерации подставляют в правую часть и получают результаты второй итерации:

$$x_1^{(2)} = (7 - 4\cdot(-0{,}667) + 1{,}417)/7 = 1{,}583$$
$$x_2^{(2)} = (-2 - 2\cdot 1{,}583 - 3\cdot 1{,}417)/6 = -1{,}569$$
$$x_3^{(2)} = (4 + 1{,}583 - (-1{,}569))/4 = 1{,}788$$

Результаты второй итерации подставляют в правую часть и получают результаты третьей итерации:

$$x_1^{(3)} = (7 - 4\cdot(-1{,}569) + 1{,}788)/7 = 2{,}152$$
$$x_2^{(3)} = (-2 - 2\cdot 2{,}152 - 3\cdot 1{,}788)/6 = -1{,}945$$
$$x_3^{(3)} = (4 + 2{,}152 - (-1{,}945))/4 = 2{,}024$$

Погрешность решения:

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |2{,}152 - 1{,}583| = 0{,}469$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |-1{,}945 + 1{,}569| = 0{,}376$$
$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |2{,}024 - 1{,}788| = 0{,}236$$
$$\max_i |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0{,}469$$

Пример 3.9. Решить систему уравнений из примера 3.4 итерационными методами на VBA и оценить погрешность.

Порядок решения.

1) Ввести код программы (рис. 3.7) в модуль листа. Удалить помеченные строки, не соответствующие выбранному методу решения.

```
Sub Iter()
  n = Cells(1, 2)
  kmax = Cells(1, 4)
  ReDim a(n, n), b(n), x(n), r(n)
  ReDim y(n)                                      'Якоби
  For i = 1 To n
    For j = 1 To n
      a(i, j) = Cells(i + 2, j)
    Next j
    b(i) = Cells(i + 2, n + 2)
    x(i) = Cells(i + 2, n + 4)
  Next i
  For k = 1 To kmax
    For i = 1 To n
      s = 0
      For j = 1 To n
        s = s + a(i, j) * x(j)
      Next j
      x(i) = x(i) + (b(i) - s) / a(i, i)      'Зейдель
      y(i) = x(i) + (b(i) - s) / a(i, i)      'Якоби
    Next
    x = y                                         'Якоби
  Next
  For i = 1 To n
    s = 0
    For j = 1 To n
      s = s + a(i, j) * x(j)
    Next j
    r(i) = b(i) - s
    Cells(i + 2, n + 4) = x(i)
    Cells(i + 2, n + 5) = r(i)
  Next
End Sub
```

Рис. 3.7. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами на языке VBA

2) Ввести число уравнений n, максимальное число итераций $k_{\max}$, матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ в рабочий лист Excel (рис. 3.8).
3) Ввести начальное приближение в столбец H, например $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 1$.
4) Выполнить программу. В столбце H содержится решение системы: $x_1 = 1{,}767019$; $x_2 = 9{,}807512$; $x_3 = 2{,}702465$; $x_4 = -0{,}48533$.
5) В столбце I содержатся невязки. Если они велики, повторить расчет, увеличив $k_{\max}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n=	4	kmax=	10				x	r
2	10	1	0	0		5		1	
3	-2	9	1	0		-1		1	
4	0	0,1	4	-1		-5		1	
5	0	0	-1	8		40		1	

Рис. 3.8. Таблица исходных данных для решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами на языке VBA

4. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

Требуется решить систему нелинейных уравнений вида:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \\ &\ldots \\ &F_n(x_1, x_2,..., x_n) = 0. \end{aligned} \qquad (4.1)$$

4.1. Метод простой итерации (метод Якоби) для систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений (4.1) после преобразований

$$x_i = x_i - F_i(x)/M_i, \qquad i = 1, 2, 3,..., n$$

(здесь M_i определяются из условия сходимости), представим в виде:

$$\begin{aligned} &x_1 = f_1(x_1, x_2,..., x_n) \\ &x_2 = f_2(x_1, x_2,..., x_n) \\ &\ldots \\ &x_n = f_n(x_1, x_2,..., x_n) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Из системы (4.2) легко получить итерационные формулы метода Якоби. Возьмем в качестве начального приближения какую-нибудь совокупность чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}$. Подставляя их в правую часть (4.2) вместо переменных $x_1, x_2,..., x_n$, получим новое приближение к решению исходной системы:

$$\begin{aligned} &x_1^{(1)} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) \\ &x_2^{(1)} = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) \\ &\ldots \\ &x_n^{(1)} = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Эта операция получения первого приближения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},..., x_n^{(1)}$ решения системы уравнения (4.2) называется первым шагом итерации. Подставляя полученное решение в правую часть уравнения (4.2) получим следующее итерационное приближение: $x_1^{(2)}, x_2^{(2)},..., x_n^{(2)}$ и т.д.:

$$x_i^{(k+1)} = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)}), \qquad i = 1, 2, 3,..., n. \tag{4.4}$$

Итерационный процесс можно считать законченным, если все значения переменных $(k+1)$-ой итерации, отличаются от значений соответствующих переменных предыдущей итерации, на величину по модулю меньшую заданной точности $\boldsymbol{\varepsilon}$, т.е. если:

$$\max_i |\, x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \,| < \varepsilon \tag{4.5}$$

4.2. Метод Зейделя для систем нелинейных уравнений

Метод Зейделя отличается от метода Якоби тем, что вычисления ведутся не по формулам (3.4), а по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})\\
&x_2^{(k+1)} = f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})\\
&x_3^{(k+1)} = f_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},..., x_n^{(k)})\\
&\ldots\\
&x_n^{(k+1)} = f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},..., x_n^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

При решении систем нелинейных уравнений необходимо определить приемлемое начальное приближение. Для случая двух уравнений с двумя неизвестными начальное приближение находится графически.

Сходимость метода Зейделя (Якоби тоже) зависит от вида функции в (4.2), вернее она зависит от матрицы, составленной из частных производных:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & \cdots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} & \cdots & f'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & f'_{n3} & \cdots & f'_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где $f'_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Итерационный процесс сходится, если сумма модулей каждой строки F' меньше единицы в некоторой окрестности корня:

$$|f'_{i1}| + |f'_{i2}| + |f'_{i3}| + ... + + |f'_{in}| < 1, \quad i = 1, 2, 3,..., n$$

или

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |\, f'_{ij} \,| < 1$$

Пример 4.1. Найти решение системы методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\begin{aligned} &F(x,y) = 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0 \\ &G(x,y) = 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0 \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Решение: Представим (4.8) в виде (4.5):

$$\begin{aligned} &x = f_1(x,y) = x - (2\sin(x+1) - y - 0{,}5)/M_1 \\ &y = f_2(x,y) = y - (10\cos(y-1) - x + 0{,}4)/M_2 \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Задаем начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$.

Запишем достаточное условие сходимости и определяем M_1, M_2:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} \\ f'_{2x} & f'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos(x+1)/M_1 & 1/M_1 \\ -1/M_2 & 1 + 10\sin(y-1)/M_2 \end{pmatrix}$$

$$|1 - 2\cos(x_0+1)/M_1| + |1/M_1| < 1$$
$$|-1/M_2| + |1 + 10\sin(y_0 - 1)/M_2| < 1$$

$$|1 - 2\cos(1+1)/M_1| + |1/M_1| < 1$$
$$|-1/M_2| + |1 + 10\sin(-0{,}7-1)/M_2| < 1$$

$$|1 - 2/M_1| + |1/M_1| < 1 \quad \text{и} \quad |-1/M_2| + |1 - 9{,}91665\ /M_2| < 1$$

Определяем частные значения $M_1 = 2$, $M_2 = 10$, которые удовлетворяют неравенствам

$$1 - 2/2 + 1/2 < 1 \quad \text{и} \quad 1/10 - 9{,}91665/10 < 1$$

Переходим к реализации итерационного процесса:

$$\begin{aligned} &x_{k+1} = x_k - (2\sin(x_k+1) - y_k - 0{,}5)/2 \\ &y_{k+1} = y_k - (10\cos(y_k - 1) - x_k + 0{,}4)/10 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 - (2\sin(x_0+1) - y_0 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1 - (2\sin(-1+1) + 0{,}7 - 0{,}5)/2 = -1{,}1$$
$$y_1 = y_0 - (10\cos(y_0 - 1) - x_0 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}7 - (10\cos(-0{,}7-1) + 1{,}1 + 0{,}4)/10 = -0{,}72116$$
$$x_2 = x_1 - (2\sin(x_1+1) - y_1 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1{,}1 - (2\sin(-1{,}1+1) + 0{,}72116 - 0{,}5)/2 = -1{,}11075$$
$$y_2 = y_1 - (10\cos(y_1 - 1) - x_1 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}72116 - (10\cos(-0{,}72116-1) + 1{,}11075 + 0{,}4)/10 = -0{,}72244$$

$$x_3 = x_2 - (2\sin(x_2+1) - y_2 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1{,}11075 - (2\sin(-1{,}11075+1) + 0{,}72244 - 0{,}5)/2 = -1{,}11145$$
$$y_3 = y_2 - (10\cos(y_2-1) - x_2 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}72244 - (10\cos(-0{,}72244-1) + 1{,}11145 + 0{,}4)/10 = -0{,}72252$$

Определяем погрешность по формуле $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$:

$$|x_3 - x_2| = |-1{,}11145 + 1{,}11075| = 0{,}0007 < \varepsilon = 0{,}001$$

$$|y_3 - y_2| = |-0{,}72252 + 0{,}72244| = 0{,}00008 < \varepsilon = 0{,}001$$

Таким образом, имеем решение: $x^* = -1{,}1115$, $y^* = -0{,}7225$.

Программа, реализующая решение данной задачи, представлена на рис. 4.1. Исходные данные – начальные приближения x_0, y_0, множители M_1, M_2, точность ε и максимальное число итераций $\boldsymbol{n}$.

	A	B
1	x0	-1
2	y0	-0,7
3	M1	2
4	M2	10
5	e	0,001
6	n	10000
7	x	-1,1112
8	y	-0,72245

```
Sub program5()
  x = Cells(1, 2)
  y = Cells(2, 2)
  m1 = Cells(3, 2)
  m2 = Cells(4, 2)
  eps = Cells(5, 2)
  n = Cells(6, 2)
  For k = 1 To n
   xk = x-(2*Sin(x+1)-y-0.5)/m1
   yk = y-(10*Cos(y-1)-x+0.4)/m2
   If Abs(xk-x)<e And Abs(yk-y)< e Then
     Cells(7, 2) = xk
     Cells(8, 2) = yk
     End
   End If
   x = xk
   y = yk
  Next k
  MsgBox "решение не найдено"
End Sub
```

Рис. 4.1. Программа решения системы нелинейных уравнений методом Зейделя.

4.3. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

Основная идея метода Ньютона состоит в выделении из уравнений системы линейных частей, которые являются главными при малых приращениях аргументов. Это позволяет свести исходную задачу к решению последовательности систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными вида:

$$\begin{aligned} F(x,y)&=0 \\ G(x,y)&=0 \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Пусть известно некоторое приближение x_k, y_k корня x^*, y^*. Тогда поправки $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ можно найти, решая систему:

$$\begin{aligned} F(x_k+\Delta x_k, y_k+\Delta y_k)&=0 \\ G(x_k+\Delta x_k, y_k+\Delta y_k)&=0 \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Для этого разложим функции F, G в ряд Тейлора по Δx_k, Δy_k. Сохранив только линейные по Δx_k, Δy_k части, получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_k,y_k)}{\partial x}\Delta x_k + \frac{\partial F(x_k,y_k)}{\partial y}\Delta y_k &= -F(x_k,y_k) \\ \frac{\partial G(x_k,y_k)}{\partial x}\Delta x_k + \frac{\partial G(x_k,y_k)}{\partial y}\Delta y_k &= -G(x_k,y_k) \end{aligned} \qquad (4.12)$$

относительно неизвестных поправок Δx_k, и Δy_k. Решая эту систему линейных уравнений, определяем значения Δx_k, Δy_k.

Таким образом, решение системы уравнений по методу Ньютона состоит в построении итерационной последовательности:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k \end{aligned} \qquad (4.13)$$

где Δx_k, Δy_k - решения систем линейных уравнений, вида (4.12) на каждом шаге итерации.

В методе Ньютона для обеспечения хорошей сходимости также важен правильный выбор начального приближения.

Пример 4.2. Найти решение системы (4.8) методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0 \\ G(x,y) &= 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0 \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Решение. Начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$. Определим частные производные:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2\cos(x+1); \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -10\sin(y-1)$$

и, используя (4.12), построим систему линейных уравнений относительно поправок

$$\begin{cases} 2\cos(x_k+1)\Delta x_k & -1\cdot\Delta y_k & = & -2\sin(x_k+1)+y_k+0{,}5 \\ -1\cdot\Delta x_k & -10\sin(y_k-1)\Delta y_k & = & -10\cos(y_k-1)-x_k+0{,}4 \end{cases}$$

Подставляя начальные приближения $x_0=-1$, $y_0=-0{,}7$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\Delta x_0 & -\Delta y_0 & = & -0{,}2 \\ -\Delta x_0 & +9{,}9166\Delta y_0 & = & -0{,}116 \end{cases},$$

определяем поправки на первом шаге итерации

$\Delta x_0=-0{,}1112$, $\Delta y_0=-0{,}0225$

Далее начальное приближение уточняем по формулам (4.13)

$$x_1=x_0+\Delta x_0=-1-0{,}1112=-1{,}1112$$
$$y_1=y_0+\Delta y_0=-0{,}7-0{,}0225=-0{,}7225$$

Подставляя результаты первой итерации $x_1=-1{,}1112$, $y_1=-0{,}7225$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1{,}9876\Delta x_1 & -\Delta y_1 & = & -5{,}5806\cdot10^{-4} \\ -\Delta x_1 & +9{,}8852\Delta y_1 & = & 2{,}4576\cdot10^{-5} \end{cases},$$

определяем поправки на втором шаге итерации

$\Delta x_1=-2.945\cdot10^{-4}\approx0{,}0003$, $\Delta y_1=-2.73\cdot10^{-5}\approx0{,}00003$

Далее x_1 и y_1 уточняем по формулам (4.12)

$$x_2=x_1+\Delta x_1=-1{,}1112-0{,}0003\approx-1{,}1115$$
$$y_2=y_1+\Delta y_1=-0{,}7225-0{,}00003\approx-0{,}7225$$

Определяем погрешность по формуле $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|<\varepsilon$:

$$|x_2-x_1|=|\Delta x_1|=0{,}0003<\varepsilon=0{,}001$$
$$|y_2-y_1|=|\Delta y_1|=0{,}00003<\varepsilon=0{,}001$$

Таким образом, имеем решение: $x^*=-1{,}1115$, $y^*=-0{,}7225$.

Программа, реализующая метод Ньютона для указанной задачи, представлена на рис. 4.2. Исходные данные – начальные приближения x_0, y_0, точность ε и максимальное число итераций n.

	A	B
1	x0	-1
2	y0	-0,7
3	e	0,001
4	n	10000
5	x	-1,11149
6	y	-0,72253
7		
8		

```
Sub program6()
 x = Cells(1, 2)
 y = Cells(2, 2)
 e = Cells(3, 2)
 n = Cells(4, 2)
 For k = 1 To n
  F = 2 * Sin(x + 1) - y - 0.5
  G = 10 * Cos(y - 1) - x + 0.4
  Fx = 2 * Cos(x + 1)
  Fy = -1
  Gx = -1
  Gy = -10 * Sin(y - 1)
  D = Fx * Gy - Gx * Fy
  Dx = (G * Fy - F * Gy) / D
  Dy = (F * Gx - G * Fx) / D
  xk = x + Dx
  yk = y + Dy
  If Abs(xk-x)< e And Abs(yk-y)< e Then
    Cells(5, 2) = xk
    Cells(6, 2) = yk
    End
  End If
  x = xk
  y = yk
 Next k
 MsgBox "решение не найдено"
 End
End Sub
```

Рис. 4.2. Программа, реализующая метод Ньютона на языке VBA.

Пример 4.3. Найти решение системы (4.8) с помощью программы Excel.

$$F(x,y) = 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0$$

$$G(x,y) = 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0$$

Порядок решения.

1) Подключить надстройку «Поиск решения» через *Кнопка «Офис»-Параметры Excel-Надстройки-Надстройки Excel-Перейти* (рис. 4.3);
2) Ввести в ячейки **A1, B1, C1, D1** заголовки столбцов (рис. 4.4а);
3) В ячейку **A2** – начальное приближение для $\boldsymbol{x}$: **– 1**
4) В ячейку **B2** – начальное приближение для $\boldsymbol{y}$: **– 0,7**
5) В ячейку **C2** – формулу $\boldsymbol{F(x,y)}$ **=2*SIN(A2+1)-B2-0,5**
6) В ячейку **D2** – формулу $\boldsymbol{G(x,y)}$ **=10*COS(B2-1)-A2+0,4**
7) Вызвать диалоговое окно «Поиск решения»: *Данные-Поиск решения* (рис. 4.5)

8) В качестве целевой ячейки указываем результат вычисления левой части одного из уравнений, например, $F(x,y)$, т.е. ячейку **C2**
9) Для решения уравнения значение $F(x,y)=0$, поэтому выбираем переключатель «значение», а в соответствующее поле вводим **0**
10) Установив курсор в поле «Изменяя ячейки», выделяем ячейки неизвестных x, y, т.е. **A2: B2**
11) Остальные уравнения системы рассматриваются как дополнительные ограничения ($G(x,y)=0$). Нажимаем кнопку «Добавить», отмечаем мышью ячейку **D2** и вводим **=0**
12) Нажимаем кнопку «Выполнить». Если решение найдено, появляется окно сообщения предложением сохранить найденное решение или восстановить исходные значения. Нажимаем кнопку ОК.
13) В ячейках **A2: B2** - решение системы (рис. 4.4б),

т.е $x=-1{,}111,\ y=-0{,}723$

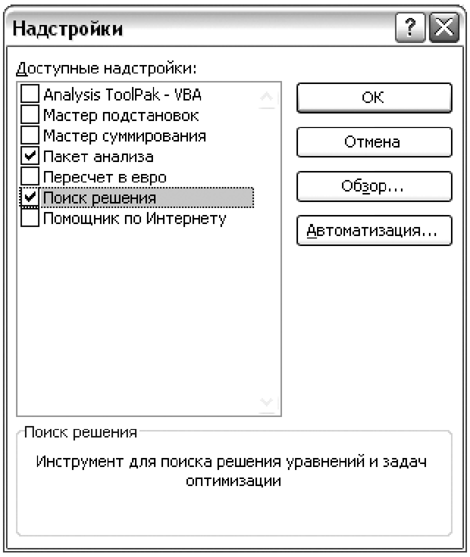


Рис. 4.3. Подключения надстройки «Поиск решения».

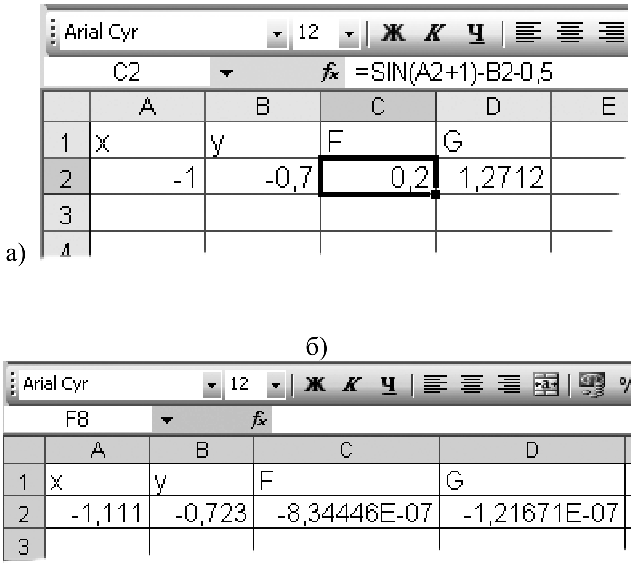


Рис. 4.4. Рабочий лист до и после выполнения поиска решения.

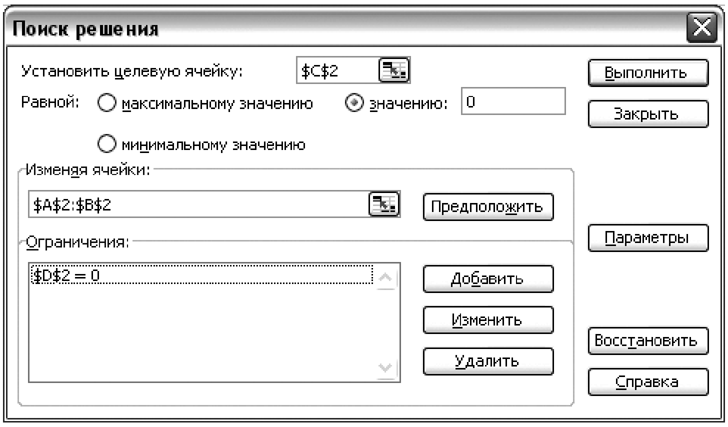


Рис. 4.5. Параметры окна «Поиск решения».

5. Аппроксимация функций

Очень часто в практической работе возникает необходимость найти в явном виде функциональную зависимость (формулу) $y = \tilde{y}(x)$ между величинами x и y, которые заданы отдельными парами значений x_i, y_i (таблицей), например, полученными в результате измерений.

Задача восстановления аналитической функции по отдельным значениям называется аппроксимацией. Для получения единственного решения задачи аппроксимации необходимо

1. Задать общий вид аппроксимирующей функции, включающий неизвестные параметры (коэффициенты). Вид функции задается, исходя из формы распределения аппроксимируемых значений (расположения точек на графике), из предполагаемой функциональной зависимости, или просто в виде полинома некоторой степени;
2. Определить значения параметров на основе заданного критерия близости. Здесь существует два основных подхода – интерполяция и сглаживание.

5.1. Интерполяция

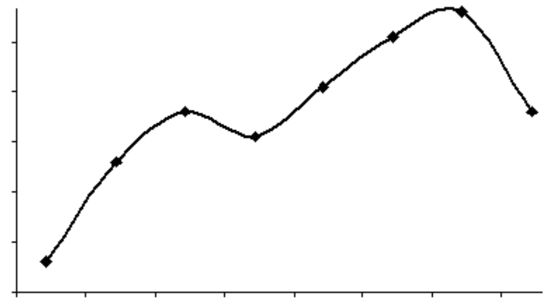


Рис. 5.1. График интерполирующей функции проходит через заданные точки.

Для задачи интерполяции критерий близости аппроксимирующей функции $y = \tilde{y}(x)$ к исходным данным x_i, y_i рассматривается как совпадение значений в заданных точках, называемых узлами интерполяции (рис. 5.1), т.е.

$$\tilde{y}(x_i) = y_i .$$

Если функция задана в виде полинома, то он называется интерполяционным полиномом и может быть записан, например, в форме Лагранжа или Ньютона.

5.1.1. Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Пусть на некотором промежутке $[a; b]$ заданы n различных узлов x_1, x_2, x_3, …, x_n, а также значения некоторой функции y_1, y_2, y_3, …, y_n в этих узлах. Необходимо построить полином $P(x)$, проходящий через заданные точки, т.е.

$$P(x_i) = y_i$$

Интерполяционный полином Лагранжа имеет следующую формулу:

$$P(x) = L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x) \tag{5.1}$$

где $\quad l_i(x)=\dfrac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$ – фундаментальные полиномы Лагранжа. Они удовлетворяют равенствам

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases} \tag{5.2}$$

и зависят лишь от заданных узлов x_i, но не от значений интерполируемой функции y_i.

Пример 5.1. Пусть задана таблица:

Таблица 5.1

x_i	-1	0	$1/2$	1
y_i	0	2	$9/8$	0

Необходимо построить интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через заданные точки

Решение. Полином Лагранжа имеет вид:

$$L_3(x)=y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+y_3l_3(x)+y_4l_4(x)=$$

$$=0\cdot l_1(x)+2l_2(x)+\frac{9}{8}l_3(x)+0\cdot l_4(x)=2l_2(x)+\frac{9}{8}l_3(x)$$

Найдем фундаментальные полиномы Лагранжа:

$$l_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}=\frac{(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(0+1)(0-\frac{1}{2})(0-1)}=-2x^3-x^2-2x+1$$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}=\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)}=-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}x$$

Подставляя $l_i(x)$ в полином Лагранжа, находим:

$$L_3(x)=2l_2(x)+\frac{9}{8}l_3(x)=x^3-2x^2-x+2$$

5.1.2. Интерполяционный полином в форме Ньютона

Интерполяционный полином Ньютона имеет вид:

$$\begin{aligned}N_{n-1}(x)=\Delta^0(x_1)+\Delta^1(x_1,x_2)(x-x_1)+\Delta^2(x_1,x_2,x_3)(x-x_1)(x-x_2)+...\\ ...+\Delta^{n-1}(x_1,x_2,...,x_{n-1})(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})\end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$\Delta^0(x_i)=y_i$

$\Delta^1(x_i,x_k)=\dfrac{\Delta^0(x_i)-\Delta^0(x_k)}{x_i-x_k}$ - разделенная разность первого порядка,

$\Delta^2(x_i,x_j,x_k)=\dfrac{\Delta^1(x_i,x_j)-\Delta^1(x_j,x_k)}{x_i-x_k}$ - разделенная разность второго порядка,

$$\Delta^3(x_i,x_j,x_l,x_k)=\frac{\Delta^2(x_i,x_j,x_l)-\Delta^2(x_j,x_l,x_k)}{x_i-x_k}$$ – разделенная разность третьего порядка и т.д.

Пример 5.2. Построить интерполяционный полином в форме Ньютона, проходящий через точки, заданные таблицей 5.1.

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.2

i	x_i	y_i	Δ^1	Δ^2	Δ^3
1	-1	$\boxed{0}$			
			$\boxed{2}$		
2	0	2		$\boxed{-5/2}$	
			$-7/4$		$\boxed{1}$
3	$1/2$	$9/8$		$-1/2$	
			$-9/4$		
4	1	0			

$$\Delta^1(1,2)=(y_1-y_2)/(x_1-x_2)=(0-2)/(-1-0)=2$$
$$\Delta^1(2,3)=(y_2-y_3)/(x_2-x_3)=(2-9/8)/(0-1/2)=-7/4$$
$$\Delta^1(3,4)=(y_3-y_4)/(x_3-x_4)=(9/8-0)/(1/2-1)=-9/4$$
$$\Delta^2(1,2,3)=(\Delta^1(1,2)-\Delta^1(2,3))/(x_1-x_3)=(2+7/4)/(-1-1/2)=-5/2$$
$$\Delta^2(2,3,4)=(\Delta^1(2,3)-\Delta^1(3,4))/(x_2-x_4)=(-7/4+9/4)/(0-1)=-1/2$$
$$\Delta^3(1,2,3,4)=(\Delta^2(1,2,3)-\Delta^2(2,3,4))/(x_1-x_4)=(-5/2+1/2)/(-1-1)=1$$
$$N_3(x)=\Delta^0(1)+\Delta^1(1,2)(x-x_1)+\Delta^2(1,2,3)(x-x_1)(x-x_2)+$$
$$+\Delta^3(1,2,3,4)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$$
$$=0+2(x+1)-\frac{5}{2}(x+1)x+1\cdot(x+1)x\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^3-2x^2-x+2$$

Пример 5.3. Построить интерполяционный полином, проходящий через точки, заданные таблицей 5.1, используя программу Excel.

Порядок решения.

1) Ввести таблицу в рабочий лист Excel (обыкновенные дроби вводятся как формулы, т.е. **=9/8**). Выделить ячейки таблицы.
2) Вставить диаграмму: **Вставка** – **Диаграммы** – **Точечная** – **точечная с маркерами**. На рабочем листе появится график точек таблицы.
3) Вызвать контекстное меню (правой кнопкой мыши) одной из точек графика. Выбрать пункт «**Добавить линию тренда**».

4) Выбрать **Полиномиальную** аппроксимацию и установить степень полинома на единицу меньше числа точек, т.е. **3**.
5) Отметить «**показывать уравнение на диаграмме**».
6) Закрыть окно настроек. Появляется линия графика интерполирующей функции и соответствующая формула:

$$y(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

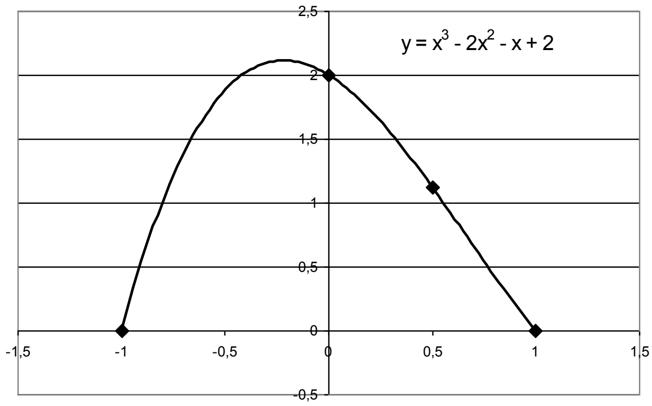


Рис. 5.2. Результаты интерполяции в программе Excel.

Интерполяционный полином определяется единственным образом независимо от метода его построения. Степень интерполирующего полинома на единицу меньше числа точек

Повышение степени интерполирующего полинома может приводить к появлению нежелательных «осцилляций» функции между узлами интерполяции. Поэтому сложные интерполяционные формулы имеет смысл применять для достаточно гладких функций, о которых известно, что характер изменения функций и производных примерно соответствует характеру изменения интерполирующих полиномов.

5.1.3. Сплайн-интерполяция

Сплайн-интерполяция предполагает представление интерполирующей функции в виде комбинации разных функций, соответствующих отрезкам между соседними узлами. На функции-сплайны накладываются условия непрерывности, т.е. совпадения значений для соседних сплайнов в узле. Условие непрерывности может касаться как функции, так и ее производных, в зависимости от сложности сплайна. Из условий непрерывности определяются коэффициенты сплайнов, которые и задают интерполирующую функцию в целом.

Простейший вид сплайн-интерполяции – ступенчатая интерполяция, функции-сплайны постоянны между узлами. Линейный сплайн непрерывен в узлах интерполяции, первая производная имеет разрывы, вторая и высшие производные не существуют. Для достижения более высокой точности интерполирования применяют полиномиальные сплайны более высоких степеней. Наиболее широкое применение получил кубический сплайн. Кубический сплайн на каждом отрезке между соседними узлами представляет собой полином 3-й степени, удовлетворяет условию непрерывности вместе со своей первой и второй производной.

Сплайн-интерполяция функции $y = y(x)$, заданной таблицей значений в узлах $(x_i;\ y_i)$, определяет набор фунций-сплайнов $f_i(x)$, аппроксимирующих $y(x)$ на интервалах $x_{i-1} \le x < x_i$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n$.

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
n	x_n	y_n

$$y(x) = \begin{cases} f_1(x) & x_0 \le x < x_1 \\ f_2(x) & x_1 \le x < x_2 \\ \ldots & \ldots \\ f_n(x) & x_{n-1} \le x < x_n \end{cases}$$

Если применить кубические сплайны, то

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \qquad (5.4)$$

Введем обозначения $h_i = x_i - x_{i-1}$,

тогда в пределах каждого из сплайнов $0 \le x - x_i < h_i$.

Из условия непрерывности функции $f(x)$ следует $2n$ уравнений:

$$f_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

$$f_i(x_i) = y_i \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Или

$$a_i = y_{i-1} \qquad (5.5)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n. \qquad (5.6)$$

Из условия непрерывности 1-й производной функции $f(x)$ следует $n-1$ уравнений:

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1.$$

Т.к. $f_i' = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$, то

$$b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}) + 3d_i(x_i - x_{i-1})^2 = b_{i+1} \qquad \text{или}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 - b_{i+1} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \qquad (5.7)$$

Из условия непрерывности 2-й производной функции $f(x)$ следует $n-1$ уравнений:

$$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i) \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1.$$

Т.к. $f_i'' = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$, то

$$2c_i + 6d_i(x_i - x_{i-1}) = 2c_{i+1} \text{ или}$$

$$c_i + 3d_i h_i - c_{i+1} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \qquad (5.8)$$

Получаем $2n+(n-1)+(n-1)=4n-2$ уравнения относительно $4n$ неизвестных. Оставшиеся два уравнения задают, фиксируя значения производных на концах кривой, например так:

$$f''(x_0)=0 \qquad f''(x_n)=0,$$

или

$$c_1=0 \tag{5.9}$$

$$c_n+3d_nh_n=0. \tag{5.10}$$

Полученные уравнения представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $4n$ неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i, ($i=0,\ 1,\ \dots,\ n$).

Эту систему можно привести к более удобному виду. Из условия (5.5) сразу можно найти все коэффициенты a_i. Далее из (5.8)-(5.10) получим

$$d_i=\frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i},\quad i=1,2,\dots,n-1,\quad d_n=-\frac{c_n}{3h_n}. \tag{5.11}$$

Подставим эти соотношения, а также значения $a_i=y_{i-1}$ в (5.6) и найдем отсюда коэффициенты

$$\begin{aligned} b_i&=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{3}\left(c_{i+1}+2c_i\right),\qquad i=1,2,\dots,n-1,\\ b_n&=\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}-\frac{2}{3}h_nc_n. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Учитывая выражения (5.11) и (5.12), исключаем из уравнения (5.7) коэффициенты d_i и b_i. Окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_i:

$$c_1=0,\qquad c_{n+1}=0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1}+2\left(h_{i-1}+h_i\right)c_i+h_ic_{i+1}=3\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{y_{i-1}-y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \tag{5.13}$$

$$i=2,3,\dots,n.$$

Матрица этой системы трехдиагональная, т.е. ненулевые элементы находятся лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях, расположенных сверху и снизу. Для ее решения целесообразно использовать метод прогонки. По найденным из системы (5.13) коэффициентам c_i легко вычислить коэффициенты $d_i,\ b_i$.

Пример 5.4. Построить кубический сплайн для функции $f(x)=\sin(\pi x)$ на отрезке [0; 2], используя разбиения отрезка $n=10$ частей. Найти значение в точке $x=0{,}48$.

Решение. В ячейках **A1:N1** запишем обозначения столбцов как в таблице.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	i	x	h	y	d1	a1	b1	c1	u	v	c	a	b	d		
2	0	0,000		0,000												
3	1	0,200	0,200	0,588							0	0,000	3,1387	-4,9954		
4	2	0,400	0,200	0,951	-3,368	0,000	0,800	0,200	-0,250	-4,210	-2,9972	0,588	2,5393	-3,0873		
5	3	0,600	0,200	0,951	-5,449	0,200	0,800	0,200	-0,267	-6,143	-4,8496	0,951	0,9699	-1E-07	0,08	0,9976
6	4	0,800	0,200	0,588	-5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	-5,652	-4,8496	0,951	-0,97	3,0873		
7	5	1,000	0,200	0,000	-3,368	0,200	0,800	0,200	-0,268	-2,997	-2,9972	0,588	-2,539	4,9954		
8	6	1,200	0,200	-0,588	0,000	0,200	0,800	0,200	-0,268	0,803	-3E-07	0,000	-3,139	4,9954		
9	7	1,400	0,200	-0,951	3,368	0,200	0,800	0,200	-0,268	4,297	2,99723	-0,588	-2,539	3,0873		
10	8	1,600	0,200	-0,951	5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	6,149	4,84962	-0,951	-0,97	3E-07		
11	9	1,800	0,200	-0,588	5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	5,653	4,84962	-0,951	0,9699	-3,0873		
12	10	2,000	0,200	0,000	3,368	0,200	0,800	0,000	0,000	2,997	2,99723	-0,588	2,5393	-4,9954		
13											0					

1) Построим таблицу значений функции.

В ячейки **A2:A12** запишем значение индекса i = **0, 1, …, 10**.

В ячейку **B2** запишем **0**, а в **B3** запишем **0,2**. Выделим **B2:B3** и маркером заполнения протянем вниз до **B12**.

В ячейку **C3** запишем формулу **=B3-B2** и маркером заполнения протянем вниз до **C12**.

В ячейку **D2** запишем формулу **=sin (3,1415926*B2)**, выделим **D2** и маркером заполнения протянем вниз до **D12**.

2) Вычислим коээфициенты системы 2.9.

В ячейку **E4** запишем формулу **=3*(D4-D3)/C4-3*(D3-D2)/C3** и маркером заполнения протянем вниз до **E12**.

В ячейку **F4** запишем **0**, в ячейку **F5** запишем **=C4** и маркером заполнения протянем вниз до **F12**.

В ячейку **G4** запишем формулу **=2*(C3+C4)** и маркером заполнения протянем вниз до **G12**.

В ячейку **H4** запишем формулу **=C4** и маркером заполнения протянем вниз до **H12**.

3) Вычислим прогоночные коэффициенты (прямой ход прогонки).

В ячейку **I4** запишем формулу **=H4/(F4*I3+G4)** и маркером заполнения протянем вниз до **I12**.

В ячейку **J4** запишем формулу **=(E4-F4*J3)/(F4*I3+G4)** и маркером заполнения протянем вниз до **J12**.

4) Вычислим коэффициенты сплайна (обратный ход прогонки).

В ячейки **K3** и **K13** запишем **0**. В ячейку **K12** запишем формулу **=I12*K13+J12** и маркером заполнения протянем вверх до **K4**.

В ячейку **L3** запишем формулу **=D2** и маркером заполнения протянем вниз до **L12**.

В ячейку **M3** запишем формулу **=(D3-D2)/C3-(K4+2*K3)*C3/3** и маркером заполнения протянем вниз до **M12**.

В ячейку **N 3** запишем формулу **=(K4-K3)/3/C3** и маркером заполнения протянем вниз до **N12**.

5) Вычислим значение сплайна.

Точка $x = 0{,}48$ попадает в отрезок [0,4; 0,6]. Следовательно, нужно использовать строку $i = 3$. Поэтому запишем в ячейку **O5** формулу **=0,48-0,4**, в ячейку **P5** формулу **=L5+M5*O5+K5*O5^2+N5*O5^3**.

Получим значение **0,9976**. Точное значение sin(0,48π)=0,998026…

Следовательно, погрешность равна 0,0004.

Пример 5.5. Найти значение функции $y(x)$, заданной таблично, в точке $x = 1{,}324$ с помощью кубического сплайна. Использовать подпрограмму-функцию, реализующую интерполяцию кубическими сплайнами на VBA в Excel (рис. 5.3).

x	1	1,1	1,2	1,4
y	1	0,7513	0,5787	0,3644

Порядок решения.

1) Вставить в проект VBA стандартный модуль: в главном меню редактора VBA выбрать Insert→Module.
2) Ввести подпрограмму-функцию spline3 (рис. 5.3) в стандартный модуль проекта VBA. Теперь функция spline3 доступна в табличном процессоре Excel через мастер функций.
3) Ввести данные таблицы в столбцы Excel. Ввести значение, для которого необходима интерполяция в ячейку **A7**.
4) Через мастер функций (или вводом текста) вставить функцию spline3 в ячейку **B7**. У функции spline3 два аргумента: первый – диапазон ячеек, содержащий таблицу данных **$A$2:$B$5**, второй – адрес ячейки, содержащий значение, для которого необходима интерполяция, т.е. **A7.**

	A	B
1	x	y
2	1	1
3	1,1	0,7513
4	1,2	0,5787
5	1,4	0,3644
6		
7	1,324	=spline3($A$2:$B$5;A7)

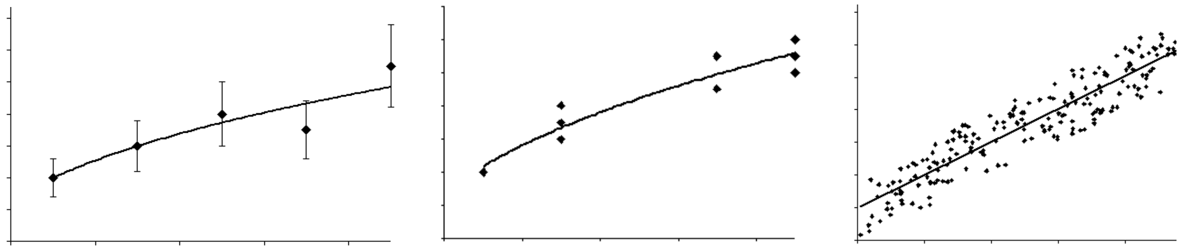
5) В ячейке **B7** получаем результат интерполяции **0,436284991**.

```
Function spline3(xy As Range, t As Double) As Double
  n = xy.Rows.Count
  ReDim a(n), b(n), c(n + 1), d(n)
  ReDim x(n) As Double, y(n) As Double, h(n) As Double
  ReDim a1(n), b1(n), c1(n), d1(n), u(n), v(n)
  For i = 1 To n
    x(i) = xy.Cells(i, 1).Value
    y(i) = xy.Cells(i, 2).Value
  Next
  For i = 1 To n
    h(i) = x(i) - x(i - 1)
  Next
  For i = 2 To n
    a1(i) = h(i - 1)
    b1(i) = 2 * (h(i - 1) + h(i))
    c1(i) = h(i)
    d1(i) = 3*((y(i)-y(i-1))/h(i)-  _
          (y(i-1)-y(i-2))/h(i-1))
  Next
  a1(2) = 0
  c1(n) = 0
  For i = 2 To n
    u(i) = -c1(i) / (a1(i)*u(i-1)+b1(i))
    v(i) = (d1(i)-a1(i)*v(i-1)) / (a1(i)*u(i-1)+b1(i))
  Next
  c(1) = 0
  c(n + 1) = 0
  For i = n To 2 Step -1
    c(i) = u(i) * c(i + 1) + v(i)
  Next
  For i = 1 To n
    a(i) = y(i-1)
    d(i) = (c(i + 1) - c(i)) / (3 * h(i))
    b(i) = (y(i)-y(i-1))/h(i)-h(i)/3*(c(i+1)+2*c(i))
  Next
  For k = 1 To n
    If x(k - 1) <= t And t <= x(k) Then GoTo L2
  Next
  L2: S = a(k) + b(k) * (t - x(k - 1)) + _
          c(k) * (t - x(k - 1)) ^ 2 + _
          d(k) * (t - x(k - 1)) ^ 3
  spline3 = S
End Function
```

Рис. 5.3. Подпрограмма-функция, реализующая интерполяцию кубическими сплайнами на VBA в Excel.

5.2. Сглаживание. Метод наименьших квадратов

Задача аппроксимации функции может ставиться, когда исходные данные содержат погрешности (рис. 5.4а), повторы (рис. 5.4б) или очень большое количество точек (рис. 5.4в). В этих случаях аппроксимация на основе интерполяции не имеет смысла или невозможна.



а) б) в)

Рис. 5.4. Аппроксимация функции сглаживанием.

Для задачи аппроксимации сглаживанием критерий близости аппроксимирующей функции $y = \tilde{y}(x)$ к исходным данным x_i, y_i рассматривается как минимальное отклонение значений в заданных точках. Количественно отклонение может быть оценено различными способами. Наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому необходимо минимизировать сумму квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}(x_i, a) - y_i)^2 \ \rightarrow \ \min \tag{5.14}$$

где x_i, y_i – значения данных $\tilde{y}(x_i, a)$ – значение аппроксимирующей функции в точке x_i; n – число данных, a– незвестные параметры. Задача сводится к нахождению экстремума функции параметров $S(a)$.

Линейная аппроксимация. В случае линейной формулы $\tilde{y}(x) = ax + b$ сумма квадратов (5.14) принимает вид:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \ \rightarrow \ \min \tag{5.15}$$

Функция (5.15) имеет минимум в точках, в которых частные производные от S по параметрам a и b обращаются в нуль, т.е.

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0 \tag{5.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0$$

$$\begin{aligned} &a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Решая систему уравнений (5.17), получим значения a и b уравнения $\tilde{y}(x) = ax + b$.

Пример 5.6. Подобрать аппроксимирующий полином первой степени $\tilde{y}(x) = ax + b$ для данных

Таблица 5.3.

x_i	0	1	2	4
y_i	0,2	0,9	2,1	3,7

Решение. Для удобства вычисленные значения расположим в таблице.

Таблица 5.4.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	0,2	0	0,0
2	1	0,9	1	0,9
3	2	2,1	4	4,2
4	4	3,7	16	14,8
$\sum_{i=1}^{n}$	7	6,9	21	19,9

Система для определения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} 21a + 7b = 19{,}9 \\ 7a + 4b = 6{,}9 \end{cases} \qquad (5.18)$$

Решая систему (5.18), получим следующие значения параметров: $a = 0{,}894$, $b = 0{,}160$. Следовательно, искомый полином имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = 0{,}894x + 0{,}160.$$

Полиномиальная аппроксимация. В случае выбора зависимости в виде полинома, например, 2-й степени $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$ и (5.14) принимает вид:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min \qquad (5.19)$$

Функция (5.19) имеет минимум в точках, в которых частные производные от S по параметрам a, b, c обращаются в нуль, т.е.:

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b}=0, \qquad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c}=0 \tag{5.20}$$

В результате дифференцирования и элементарных преобразований для определения параметров получают систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0$$

Или

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+cn=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{cases} \tag{5.21}$$

Решая систему линейных уравнений (5.21), получим значения параметров a, b и c функции $\tilde{y}(x)=ax^2+bx+c$.

Пример 5.7. Используя МНК, построить зависимость вида $\tilde{y}(x)=ax^2+bx+c$, аппроксимирующую следующие табличные значения:

Таблица 5.5.

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	6	2	-1	-2	-1

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.6.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	-2	6	4	-8	16	-12	24
2	-1	2	1	-1	1	-2	2
3	0	-1	0	0	0	0	0
4	1	-2	1	1	1	-2	-2
5	2	-1	4	8	16	-2	-4
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	0	4	10	0	34	-18	20

Тогда система линейных уравнений (5.21) относительно значений a, b и c примет вид:

$$\begin{cases} 34a + 0b + 10c = 20 \\ 0a + 10b + 0c = -18 \\ 10a + 0b + 5c = 4 \end{cases} \qquad (5.22)$$

Решая систему (5.22), получим следующие значения параметров $a = 0{,}857; b = -1{,}800;\ c = -0{,}914$. Таким образом, искомый полином имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = 0{,}857x^2 - 1{,}8x - 0{,}914$$

Таблица 5.7.

i	x_i	y_i	$\tilde{y}(x_i)$	$(y_i - \tilde{y}(x_i))^2$
1	-2	6	6,114	0,012
2	-1	2	1,743	0,066
3	0	-1	-0,914	0,007
4	1	-2	-1,857	0,020
5	2	-1	-1,086	0,007
			$\sum$	0,112

Пример 5.8. Используя программу Excel, построить функцию вида $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$, аппроксимирующую значения из таблицы 5.5:

Порядок решения.

6) Ввести таблицу в рабочий лист Excel (рис. 5.5). Выделить ячейки таблицы.
7) Вставить диаграмму: **Вставка** – **Диаграммы** – **Точечная** – **точечная с маркерами**. На рабочем листе появится график точек таблицы.

Рис. 5.5. Добавление линии тренда в точечную диаграмму.

8) Вызвать контекстное меню (правой кнопкой мыши) одной из точек графика. Выбрать пункт «**Добавить линию тренда**».
9) Выбрать «**Полиномиальная№** аппроксимация и установить степень полинома, равной **2** (рис. 5.6).
10) Отметить «**показывать уравнение на диаграмме**».

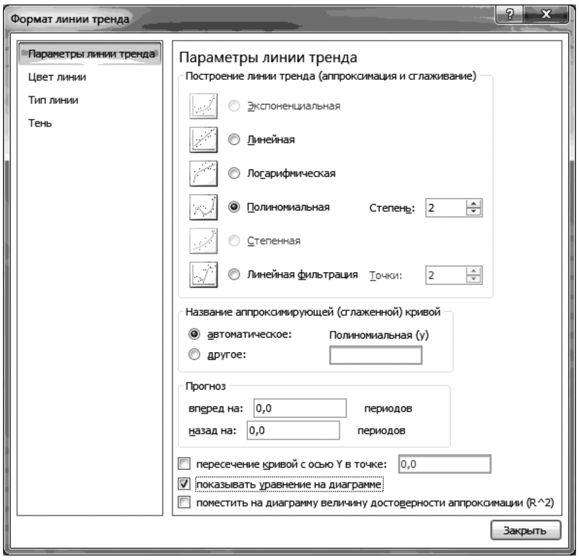


Рис. 5.6. Настройка параметров линии тренда.

11) Закрыть окно настроек. Появляется линия графика аппроксимирующей функции и соответствующая формула (рис. 5.7):

$$y(x) = 0{,}8571x^2 - 1{,}8x - 0{,}9143$$

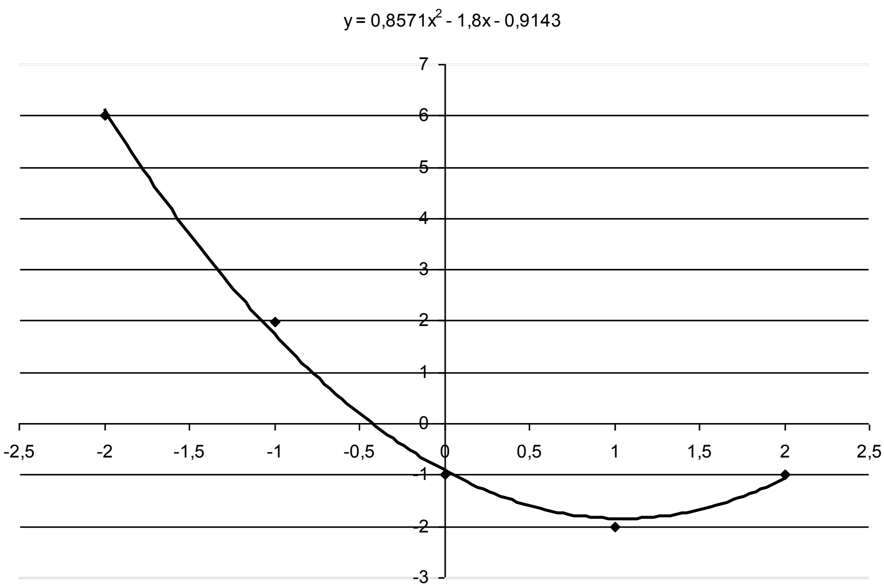


Рис. 5.7. Результаты аппроксимации.

Аппроксимация линеаризацией. Многие нелинейные функции, зависящие от двух параметров, можно линеаризовать путем замены переменных. Для этого необходимо подобрать такое преобразование исходной зависимости $y(x)=\varphi(x,a,b)$, в результате которого она приобретает линейный вид $Y=AX+B$. Далее решается задача линейной аппроксимации для новой зависимости, и вычисленные коэффициенты A и B пересчитываются в a и b.

Таблица 5.8.

Таблица замены переменых для метода линеаризации данных

№	Функция	Линеаризованная форма $Y=AX+B$	Замена переменных и констант			
			X	Y	a	b
1.	$y=\frac{a}{x}+b$	$y=a\frac{1}{x}+b$	$\frac{1}{x}$	y	A	B
2.	$y=\frac{a}{x+b}$	$y=\frac{-1}{b}(xy)+\frac{a}{b}$	xy	y	$-\frac{B}{A}$	$-\frac{1}{A}$
3.	$y=\frac{x}{ax+b}$	$\frac{1}{y}=b\frac{1}{x}+a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	B	A
4.	$y=a\ln x+b$	$y=a\ln x+b$	$\ln x$	y	A	B
5.	$y=be^{ax}$	$\ln y=ax+\ln b$	x	$\ln y$	A	e^B
6.	$y=bx^a$	$\ln y=a\ln x+\ln b$	$\ln x$	$\ln y$	A	e^B

Пример 5.9. Используя МНК, построить функцию вида $\tilde{y}(x)=bx^a$, аппроксимирующую следующие табличные значения:

Таблица 5.9.

x_i	1,5	2,5	3,3	4
y_i	9	31	66	108

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.10.

i	x_i	y_i	$X_i=\ln x_i$	$Y_i=\ln y_i$	X_i^2	X_iY_i	$\tilde{y}(x_i)$
1	1,5	9	0,405	2,197	0,164	0,891	8,81
2	2,5	31	0,916	3,434	0,840	3,147	32,08
3	3,3	66	1,194	4,190	1,425	5,002	64,75
4	4	108	1,386	4,682	1,922	6,491	105,35
$\sum_{i=1}^{n}$			3,902	14,503	4,351	15,530	

Система для определения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} 4{,}351A + 3{,}902B = 15{,}530 \\ 3{,}902A + 4B = 14{,}503 \end{cases} \qquad (5.23)$$

Решая систему (5.23), получим следующие значения параметров: $A = 2{,}538$, $B = 1{,}15$.

Тогда (табл. 5.8) $a = A = 2{,}538$, $b = e^B = e^{1{,}15} = 3{,}158$.

Аппроксимирующая функция имеет вид:

$\tilde{y}(x) = 3{,}158x^{2{,}538}$

Аппроксимация произвольной функцией может быть выполнена в программе Excel с помощью модуля «Поиск решения».

Пример 5.10. Используя программу Excel, построить функцию, аппроксимирующую значения из таблицы:

Таблица 5.11.

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,3	0,7	1,4	1,9	1,3	0,5	0,3

Порядок решения.

1) Аппроксимирующая функция должна иметь экстремум в виде пика. Выберем следующую функцию, зависящую от трех параметров $\boldsymbol{a_i}$:

   $\tilde{y}(x) = a_1 e^{-\frac{(x-a_2)^2}{a_3}}$;

2) Ввести в ячейки **A2, B2, C2** (рис. 5.8) начальные значения параметров a_i, например **1 1 1**
3) В ячейки **A5:A11** – значения $\boldsymbol{x_i}$
4) В ячейки **B5:B11** – значения $\boldsymbol{y_i}$
5) В ячейку **C5** – формулу аппроксимирующей функции (на ячейки с параметрами абсолютные ссылки):

   =$A$2*EXP(-((A5-$B$2)^2)/$C$2)
6) Скопировать формулу в ячейки **C6:C11**
7) В ячейку **D5** – формулу квадрата разности: **=(B5-C5)^2**
8) Скопировать формулу в ячейки **D6:D11**
9) В ячейку **D12** – сумму квадратов: **=СУММ(D5:D11)**
10) Вызвать окно **Поиск решения**. В настройках указать:

    Установить целевую ячейку **$D$12**

    Равной **минимальному значению**

    Изменяя ячейки **$A$2:$C$2**
11) Нажать кнопку **Выполнить**.
12) Подтвердить сохранение найденного решения.

13) Рабочий лист изменился и содержит решение (рис. 5.8):

$a_1 = 1{,}81559 \qquad a_2 = 2{,}450734 \qquad a_3 = 0{,}968182$

Таким образом, аппроксимирующая данные табл. 5.11 функция имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = 1{,}81559 e^{-\frac{(x-2{,}450734)^2}{0{,}968182}}$$

Графически результаты аппроксимации редставлены на рис. 5.9.

	A	B	C	D	E
1	a1	a2	a3		
2	1,815599	2,450734	0,968182		
3					
4	x	y	y~	квадрат разности	
5	1	0,3	0,206516	0,00873931	
6	1,5	0,7	0,713777	0,000189808	
7	2	1,4	1,471935	0,005174633	
8	2,5	1,9	1,811053	0,007911556	
9	3	1,3	1,329506	0,000870603	
10	3,5	0,5	0,582326	0,006777524	
11	4	0,3	0,15218	0,021850689	
12			сумма:	0,051514122	

Рис. 5.8. Аппроксимация данных нелинейной функцией с тремя параметрами с помощью программы Excel.

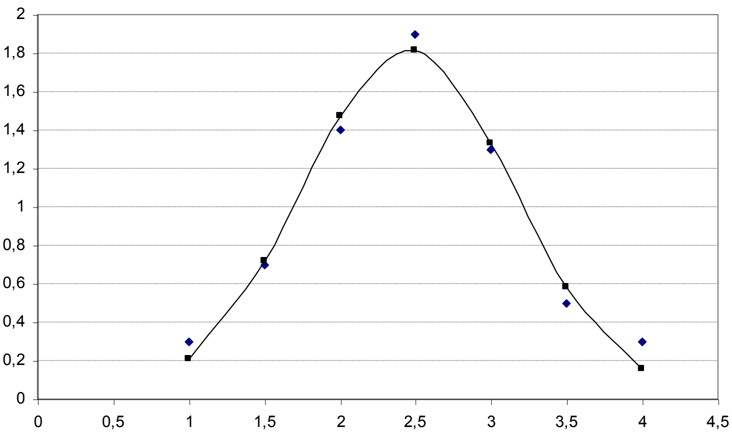


Рис. 5.9. Результаты аппроксимации функцией с тремя параметрами.

Точность аппроксимации можно оценить среднеквадратической ошибкой

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}(x_i) - y_i)^2}{n}},$$

которая не должна превышать погрешность исходных данных (рис. 5.4а).

6. Численное интегрирование

Требуется вычислить определенный интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{6.1}$$

Выберем на отрезке интегрирования $[a, b]$ n различных узлов

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$

и интерполируем функцию $f(x)$ по ее значениям в этих узлах некоторым полиномом $P_m(x)$. Тогда определенный интеграл (6.1) приближенно можно вычислять по формуле

$$I = \int_a^b P_m(x)dx, \tag{6.2}$$

которая называется квадратурной формулой интерполяционного типа.

6.1. Метод прямоугольников

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ функция $f(x)$ заменяется полиномом нулевой степени $P_0(x) = f(x_i)$.

Поэтому приближенно I вычисляется по формуле (см. рис. 6.1):

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{6.3}$$

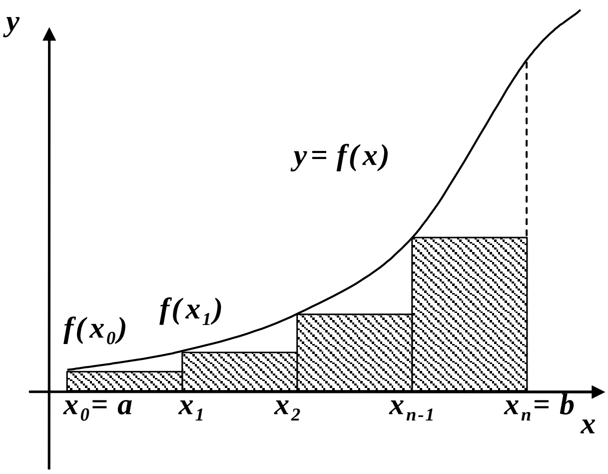


Рис. 6.1. Метод прямоугольников.

Для равноотстоящих узлов формула (6.3) имеет следующий вид:

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad h = x_{i+1} - x_i \tag{6.4}$$

Или

$$I = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{6.5}$$

Формулу (6.4) называют формулой левых прямоугольников, а (6.5) - правых прямоугольников.

Программа вычисления интеграла методом прямоугольников представлена на рис. 6.2. Исходные данные: пределы интегрирования и число разбиений

	A	B
1	a	0
2	b	1
3	n	8
4		
5	I	1,227024
6		

```
Function f(x)
    f = Sqr(2 * x ^ 2 + 1)
End Function
Sub Integral()
    a = Cells(1, 2)
    b = Cells(2, 2)
    n = Cells(3, 2)
    h = (b - a) / n
    x = a
    S = 0
1   s = s + f(x) * h
    x = x + h
    If x < b Then GoTo 1
    Cells(5, 2) = s
End Sub
```

Рис. 6.2. Программа вычисления интеграла методом прямоугольников.

6.2. Метод трапеций

В этом методе на каждом отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ функция $f(x)$ заменяется полиномом 1-й степени $P_1(x)$.

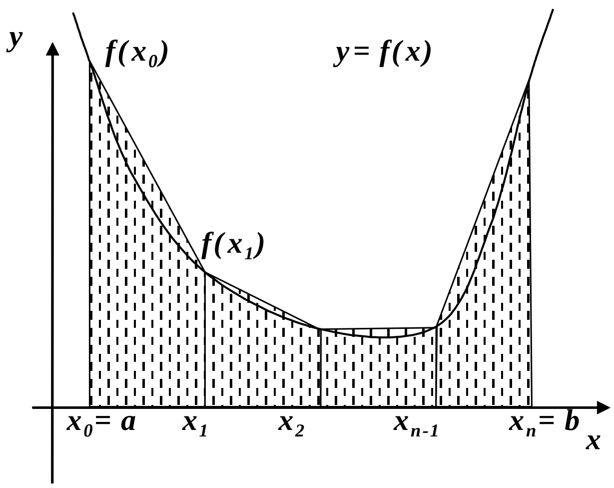


Рис. 6.3. Метод трапеций.

По формуле Лагранжа:

$$P_1(x) = f(x_i)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{6.6}$$

Интегрируя $P_1(x)$ на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$, получим:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx = \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) \tag{6.7}$$

Суммируя по всем i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, получим формулу трапеций (см. рис. 6.3):

$$I = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) \tag{6.8}$$

Для равноотстоящих узлов x_0, $x_1 = x_0 + h$, …, $x_n = x_0 + nh$ формула (6.8) принимает следующий вид:

$$I = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \tag{6.9}$$

или

$$I = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \tag{6.10}$$

Программа вычисления интеграла методом трапеций:
в программе, представленной на рис. 6.2, заменить отмеченные строки на следующие:

```
1   s = s + 0.5 * (f(x) + f(x + h)) * h
    x = x + h
```

6.3. Метод парабол (Симпсона)

Интервал $[a, b]$ разделим на $2n$ отрезков. Группируя узлы тройками x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, на каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$ $\ i = 1, 3, \ldots, 2n-1$ интерполируем функцию $f(x)$ полиномом 2-й степени $P_2(x)$

По формуле Лагранжа:

$$P_2(x) = f(x_{i-1})\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f(x_i)\frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} +$$

$$+ f(x_{i+1})\frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

Интегрируя $P_2(x)$ на отрезке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$, получим:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})] \tag{6.11}$$

Суммируя формулу (6.11) по всем n отрезкам, получаем формулу для приближенного интегрирования (см. рис.6.4):

$$I = \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] \tag{6.12}$$

или

$$I = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(b)) \tag{6.13}$$

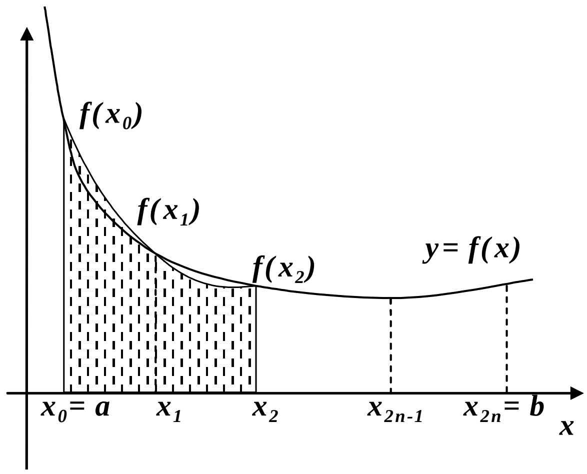


Рис. 6.4. Метод парабол.

Программа вычисления интеграла методом парабол (Симпсона): в программе, представленной на рис. 6.2, заменить отмеченные строки на следующие:

```
1    s = s + (f(x) + 4*f(x + h) + f(x + 2*h))*h/3
     x = x + 2*h
```

Оценка точности вычисления определенного интеграла.

Погрешность вычисления значения интеграла I_{2n} при числе шагов h, равном $2n$, определяется по формуле Рунге:

$$\Delta_{2n} = \frac{|I_{2n} - I_n|}{2^p - 1}$$

где I_n - значения интеграла при числе шагов, равном n,

p - порядок точности, равный 1 для формулы левых (правых) прямоугольников, 2 для формулы трапеций и 4 для формулы Симпсона.

Таким образом, интеграл вычисляется по выбранной формуле (прямоугольников, трапеций, парабол Симпсона) для последовательных значений числа шагов $N = n,\ 2n,\ 4n$, и т.д. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения N будет выполнено условие $\Delta_{2n} < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Пример 6.1. Вычислить определенный интеграл методами прямоугольников, трапеций и парабол:

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x^2+1}\,dx$$

Решение. Выберем на отрезке интегрирования $[0;1]$ $n=8$ различных узлов

$$x_0 = a, \quad x_{i+1} = x_i + h$$

Шаг разбиения для равноотстоящих узлов определяем по формуле

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$$

Сравнивая формулы 6.4, 6.5, 6.10 и 6.13, обратим внимание, что определенный интеграл приближенно можно вычислять по формуле

$$I = h\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \tag{6.14}$$

где c_i - числовые коэффициенты, на которые умножаются значения функции в узлах $f(x_i)$:

$c_i = 1, 1, 1, ..., 1, 0$ - для метода левых прямоугольников;

$c_i = 0, 1, 1, ..., 1, 1$ - для метода правых прямоугольников;

$c_i = 0{,}5; 1; 1; ...; 1; 0{,}5$ - для метода трапеций;

$c_i = \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; ..., \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}$ - для метода парабол

Вычислим значения функции в узлах (табл. 6.3).

Таблица 6.3

x_i	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$f(x_i)$	1,000	1,016	1,061	1,132	1,225	1,335	1,458	1,591	1,732

Вычислим интеграл:

По формуле левых прямоугольников

$$I = 0{,}125(1{,}0 + 1{,}016 + 1{,}061 + 1{,}132 + 1{,}225 + 1{,}335 + 1{,}458 + 1{,}591) = 1{,}227$$

По формуле правых прямоугольников

$$I = 0{,}125(1{,}016 + 1{,}061 + 1{,}132 + 1{,}225 + 1{,}335 + 1{,}458 + 1{,}591 + 1{,}732) = 1{,}319$$

По формуле трапеций

$$I = 0{,}125(0{,}5 \cdot 1{,}0 + 1{,}016 + 1{,}061 + 1{,}132 + 1{,}225 + \\ + 1{,}335 + 1{,}458 + 1{,}591 + 0{,}5 \cdot 1{,}732) = 1{,}273$$

По формуле парабол

$$I = \frac{0{,}125}{3}(1\cdot1{,}0 + 4\cdot1{,}016 + 2\cdot1{,}061 + 4\cdot1{,}132 + 2\cdot1{,}225 +$$
$$+ 4\cdot1{,}335 + 2\cdot1{,}458 + 4\cdot1{,}591 + 1\cdot1{,}732) = 1{,}271$$

Пример 6.2. Вычислить с помощью программы Excel определенный интеграл методом трапеций

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x^2 + 1}\,dx.$$

Порядок решения.

1) Ввести в ячейки **A1:F1** заголовки столбцов (рис. 6.5).
2) В ячейку **A2** – нижний предел интеграла $\boldsymbol{a}$ **0**
3) В ячейку **E2** – шаг разбиения $\boldsymbol{h = (b - a)/\,8}$ для $\boldsymbol{n = 8}$ **=(1-0)/8**
4) В ячейку **A3** – значение $\boldsymbol{x_1 = a + h}$ **0,125**
5) Выделить ячейки **A2:A3** и при помощи маркера заполнения ввести значения $\boldsymbol{x_i = a + ih}$ до $\boldsymbol{x = b = 1}$ в столбце **A**.
6) В ячейку **B2** – формулу $\boldsymbol{f(x)}$ **=КОРЕНЬ(2*A2^2+1)**
7) Выделить ячейку **B2** и при помощи маркера заполнения ввести значения $\boldsymbol{f(x_i)}$ в столбце **B**.
8) В ячейки **C2, C3, …** – коэффициенты $\boldsymbol{c_i = 0{,}5;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 0{,}5}$
9) В ячейку **D2** – формулу $\boldsymbol{c_0 f(x_0)}$ **=B2*C2**
10) Выделить ячейку **D2** и при помощи маркера заполнения ввести значения $\boldsymbol{c_i f(x_i)}$ в столбце **D**.
11) В ячейке **D11** найти сумму чисел столбца **D**, используя кнопку **Автосумма** $\boxed{\Sigma}$.
12) В ячейке **F11** найти значение интеграла **=D11*E2**

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	f(x)	c	cf	h	I	
2	0	1	0,5	0,5	0,125		
3	0,125	1,015505	1	1,015505			
4	0,25	1,06066	1	1,06066			
5	0,375	1,131923	1	1,131923			
6	0,5	1,224745	1	1,224745			
7	0,625	1,334635	1	1,334635			
8	0,75	1,457738	1	1,457738			
9	0,875	1,59099	1	1,59099			
10	1	1,732051	0,5	0,866025			
11				10,18222		1,272778	

Рис. 6.5. Вычисление определенного интеграла методом трапеций с помощью программы Excel.

7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальными называются уравнения, в которых неизвестными являются функции, которые входят в уравнения вместе со своими производными.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Если в уравнение входит неизвестная функция только одной переменной, уравнение называется *обыкновенным*. Если нескольких – уравнением в *частных производных*.

Порядком дифференциального уравнения называют наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию $y = y(x)$, подстановка которой в уравнение обращала бы его в тождество.

Чтобы из уравнения n-го порядка получить функцию, необходимо выполнить ***n*** интегрирований, что дает n произвольных постоянных. Решение, выражающее функцию в явном виде, называется *общим решением*.

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ...C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется общее решение, для которого указаны конкретные значения произвольных постоянных. Для определения произвольных постоянных необходимо задать столько условий, сколько постоянных, т.е. каков порядок уравнения. Эти условия обычно включают задание значений функции и ее производных в определенной точке, их называют *начальными условиями*,

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0 \qquad ... \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0$$

или значений функции в нескольких точках, т.е. *краевых условий*.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях называется *задачей Коши*.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения при заданных краевых условиях называется *краевой задачей*.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является *метод конечных разностей*. Метод включает следующие этапы

1) Замена области непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек, называемых узлами сетки;
2) Аппроксимация производных в узлах конечно-разностными аналогами;
3) Аппроксимация дифференциального уравнения системой линейных или нелинейных разностных уравнений;

4) Решение полученной системы разностных уравнений.

Разностные методы позволяют находить только частное решение. Результат численного решения дифференциального уравнения представляется в виде таблицы x_i, y_i. Аналитический вид решения $y = \varphi(x)$ может быть получен аппроксимацией.

7.1. Решение задачи Коши

7.1.1. Метод Эйлера

Одним из простейших разностных методов решения обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера.

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{7.1}$$

на отрезке $[a,\ b]$.

На данном отрезке выбираем некоторую совокупность точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ с равностоящими узлами, т.е. $x_{i+1} - x_i = h$.

Конечно-разностная аппроксимация прозводной

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Так как $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, получаем формулу Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1, \tag{7.2}$$

с помощью которой значение сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} вычисляется по ее значению y_i в предыдущем узле x_i. На каждом шаге погрешность имеет порядок $O(h^2)$. В конце интервала погрешность $O(h^2)n \sim$ $O(h^2)(b-a)/h \sim O(h)$, т.е. метод Эйлера имеет первый порядок точности. На рис. 7.1 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера.

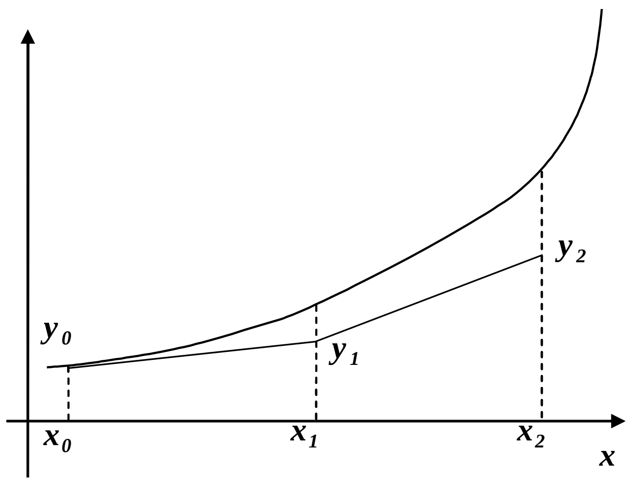


Рис. 7.1. Метод Эйлера.

Программа решения задачи Коши методом Эйлера дана на рис. 7.2.

	A	B	C	D	E
1	k	x	y	h	b
2	0	0	1	0,1	1,2
3	1	0,1	1,1		
4	2	0,2	1,211		
5	3	0,3	1,3361		
6	4	0,4	1,4787		
7	5	0,5	1,6426		
8	6	0,6	1,8318		
9	7	0,7	2,051		
10	8	0,8	2,3051		
11	9	0,9	2,5996		
12	10	1	2,9406		
13	11	1,1	3,3347		
14	12	1,2	3,7891		

```
Function f(x, y)
    f = x ^ 2 + y
End Function
Sub ODE()
    k = Cells(2, 1)
    x = Cells(2, 2)
    y = Cells(2, 3)
    h = Cells(2, 4)
    b = Cells(2, 5)
1   y = y + h * f(x, y)
    x = x + h
    k = k + 1
    Cells(2 + k, 1) = k
    Cells(2 + k, 2) = x
    Cells(2 + k, 3) = y
    If x < b Then GoTo 1
End Sub
```

Рис. 7.2. Программа решения задачи Коши методом Эйлера.

Пример 7.1. Решить задачу Коши методом Эйлера для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке $[0;\ 0{,}3]$ с шагом **0,1**

Решение. По формуле (6.2) вычислим значение y_1

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(0^2 + 1) = 1{,}1$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}1) = 1{,}211$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}211 + 0{,}1(0{,}2^2 + 1{,}211) = 1{,}3361$$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,1	1,211	1,3361

7.1.2. Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера позволяет уменьшить погрешность на каждом шаге до величины $O(h^3)$ вместо $O(h^2)$ в обычном методе (7.2). Запишем разложение функции в ряд Тейлора в виде:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{1}{2} y_i'' h^2 + O(h^3) \tag{7.3}$$

Аппроксимируем вторую производную с помощью отношения конечных разностей:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1}' - y_i'}{h}$$

Подставляя это соотношение в (6.3) и пренебрегая членами порядка $O(h^3)$, получаем:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \qquad (7.4)$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение $\boldsymbol{y_{i+1}}$ входит в обе части соотношения (7.4), но можно построить приближенное решение с использованием двух итераций.

Сначала по формуле Эйлера (7.2) вычисляют первое приближение $\boldsymbol{y_{i+1}}$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (7.5)$$

Затем находится уточненное окончательное значение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \qquad (7.6)$$

Такая схема решения называется модифицированным методом Эйлера и имеет второй порядок точности.

Пример 7.2. Решить задачу Коши модифицированным методом Эйлера для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке $[0;\ 0{,}3]$ с шагом $0{,}1$

Решение. По формуле (6.5) вычислим первое приближение

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(0^2 + 1) = 1{,}1$$

Используя формулу (6.6), находим окончательное значение в точке $x_1 = 0{,}1$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)] = 1 + \frac{0{,}1}{2}(0^2 + 1 + 0{,}1^2 + 1{,}1) = 1{,}1055$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$$\tilde{y}_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1055 + 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}1055) = 1{,}21705$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)] =$$

$$= 1{,}1055 + \frac{0{,}1}{2}(0{,}1^2 + 1{,}1055 + 0{,}2^2 + 1{,}21705) = 1{,}224128$$

$$\tilde{y}_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}224128 + 0{,}1(0{,}2^2 + 1{,}224128) = 1{,}350541$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}[f(x_2, y_2) + f(x_3, \tilde{y}_3)] =$$

$$= 1{,}224128 + \frac{0{,}1}{2}(0{,}2^2 + 1{,}224128 + 0{,}3^2 + 1{,}350541) = 1{,}359361$$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,1055	1,224128	1,359361

Программа решения задачи Коши модифицированным методом Эйлера отличается от приведенной на рис. 7.2 заменой отмеченных строк на следующие:

```
1    y1 = y + h*f(x,y)
      y = y + h*(f(x,y)+f(x+h,y1))/2
```

Пример 7.3. Решить задачу Коши модифицированным методом Эйлера с помощью программы Excel для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке [0; 1] с шагом $0{,}1$.

	A	B	C	D	
1	x	y~	y	h	
2	0	1	1	0,1	
3	0,1	1,1	1,1055		
4	0,2	1,21705	1,2241275		
5	0,3	1,35054	1,3593609		
6	0,4	1,504297	1,5150438		
7	0,5	1,682548	1,6954234		
8	0,6	1,889966	1,9051928		
9	0,7	2,131712	2,1495381		
10	0,8	2,413492	2,4341896		
11	0,9	2,741609	2,7654795		
12	1	3,123027	3,1504048		

Рис. 7.3. Решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера с помощью программы Excel.

Порядок решения.

1) Ввести в ячейки **A1:D1** заголовки столбцов (рис. 7.3).
2) В ячейку **A2** – $\boldsymbol{x_0}$ **0**
3) В ячейки **B2** и **C2** – $\boldsymbol{y_0}$ **1**
4) В ячейку **D2** – шаг интегрирования $\boldsymbol{h}$ **0,1**
5) В ячейку **A3** – значение $x_1 = x_0 + h$ **=A2+$D$2**
6) В ячейку **B3** – формулу $\tilde{y}_1 = y_0 + h(x_0^2 + y_0)$
=C2+$D$2*(A2^2+C2)

7) В ячейку **C3** – формулу $y_1 = y_0 + h((x_0^2 + y_0) + (x_1^2 + \tilde{y}_1))/2$
=C2+$D$2*(A2^2+C2+A3^2+B3)/2
8) Выделить ячейки **A3:C3** и при помощи маркера заполнения ввести формулы в ячейки **A4:C4 … A13:C12**.
9) Столбцы **A** и **C** содержат решение.

7.1.3. Метод Рунге-Кутта

Формулы (6.5-6.6) можно представить в виде

$$y_{i+1} = y_i + (k_0 + k_1)/2$$

где

$$k_0 = hf(x_i, y_i),$$

$$k_1 = hf(x_i + h, y_i + k_0)$$

Такая формулировка модифицированного метода Эйлера представляет собой метод Рунге-Кутта второго порядка. На основе метода Рунге-Кутта могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Наиболее употребительной является следующая схема четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 \tag{7.7}$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_i, y_i) \\ k_1 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_0/2) \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_i + h, y_i + k_2) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Таким образом, метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения. Однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с относительно большим шагом.

Программа решения задачи Коши методом Рунге-Кутта отличается от приведенной на рис. 7.2 заменой отмеченных строк на следующие:

```
1    k0 = h*f(x, y)
     k1 = h*f(x + h/2, y + k0/2)
     k2 = h*f(x + h/2, y + k1/2)
     k3 = h*f(x + h, y + k2)
      y = y + (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)/6
```

Пример 7.4. Решить задачу Коши методом Рунге-Кутта для дифференциального уравнения $y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке [0; 0,3] с шагом $0{,}1$.

Решение. По формулам (6.8) вычислим значения k_0, k_1, k_2, k_3:

$$k_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(0^2 + 1) = 0{,}1$$

$$k_1 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0{,}1}{2}\right) = 0{,}10525$$

$$k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0{,}10525}{2}\right) = 0{,}105513$$

$$k_3 = hf(x_0 + h, y_0 + k_2) = 0{,}1\left((0 + 0{,}1)^2 + 1 + 0{,}105513\right) = 0{,}111551$$

Используя формулу (7.7), находим значение y_1 в точке $x_1 = 0{,}1$:

$$y_1 = y_0 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$= 1 + (0{,}1 + 2 \cdot 0{,}10525 + 2 \cdot 0{,}105513 + 0{,}111551)/6 = 1{,}105513$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$$k_0 = hf(x_1, y_1) = 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}105513) = 0{,}111551$$

$$k_1 = hf(x_1 + h/2, y_1 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}05513 + \frac{0{,}111551}{2}\right) = 0{,}118379$$

$$k_2 = hf(x_1 + h/2, y_1 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}05513 + \frac{0{,}118379}{2}\right) = 0{,}11872$$

$$k_3 = hf(x_1 + h, y_1 + k_2) = 0{,}1\left((0{,}1 + 0{,}1)^2 + 1{,}05513 + 0{,}11872\right) = 0{,}126423$$

$$y_2 = y_1 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$= 1{,}105513 + (0{,}11151 + 2 \cdot 0{,}118379 + 2 \cdot 0{,}11872 + 0{,}126423)/6 = 1{,}224208$$

$$k_0 = hf(x_2, y_2) = 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}224208) = 0{,}126421$$

$$k_1 = hf(x_2 + h/2, y_2 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}2 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}224208 + \frac{0{,}126421}{2}\right) = 0{,}134992$$

$$k_2 = hf(x_2 + h/2, y_2 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}2 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}224208 + \frac{0{,}134992}{2}\right) = 0{,}13542$$

$$k_3 = hf(x_2 + h, y_2 + k_2) = 0{,}1\left((0{,}2 + 0{,}1)^2 + 1{,}224208 + 0{,}13542\right) = 0{,}144963$$

$$y_3 = y_2 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$= 1{,}224208 + (0{,}126421 + 2 \cdot 0{,}134992 + 2 \cdot 0{,}13542 + 0{,}144963)/6 = 1{,}359576$$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,105513	1,224208	1,359576

Оценка точности решения дифференциального уравнения

Для практической оценки погрешности решения дифференциального уравнения проводят вычисления с шагами h и $h/2$. За оценку погрешности решения, полученного с шагом $h/2$, принимают величину, равную

$$\Delta_{h/2} = \max_i \frac{\left| y_i^h - y_{2i}^{h/2} \right|}{2^p - 1}$$

где y_i^h - значение сеточной функции в i-й точке, вычисленное с шагом h;

p - порядок точности, равный 1 для метода Эйлера, 2 для модифицированного метода Эйлера и 4 для метода Рунге-Кутта 4-го порядка.

Для достижения заданной точности вычисления повторяют, последовательно уменьшая шаг. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения $h/2$ будет выполнено условие $\Delta_{h/2} < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

7.2. Разностные методы решения краевой задачи

Линейная краевая задача имеет вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{7.9}$$

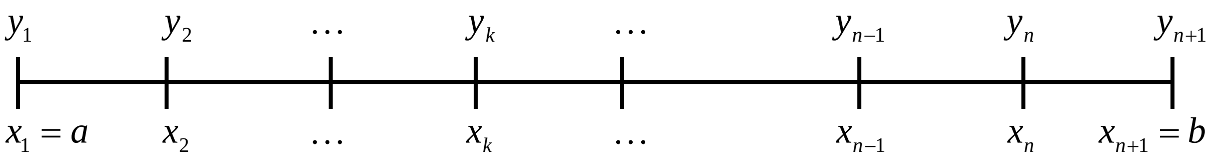
$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3 \end{aligned} \tag{7.10}$$

при $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0 \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0 \quad x \in [a; b]$.

Решение задачи (7.9)-(7.10) проводится в следующей последовательности:

1. ***Определение сетки.***

Отрезок $[a; b]$ делится на n частей:



$x_1 = a$, $\quad x_{k+1} = x_k + h$, $\quad h = \dfrac{b-a}{n}$, $\quad k = 1, 2, \ldots n+1$

2. ***Определение сеточной функции*** $y_k = y(x_k)$:

$x_1 = a$	x_2	x_3	…	$x_{n+1} = b$
y_1	y_2	y_3	…	y_{n+1}

3. ***Аппроксимация уравнения*:**

Для каждой узловой точки x_k заменяем функции и производные в уравнениях 7.9-7.10 конечноразностными аналогами:

$y(x_k) = y_k$

$$k = 1 \qquad y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \qquad \text{т.е.} \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \frac{y_2 - y_1}{h} = \alpha_3$$

$$k = 2,\dots,n \qquad y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \qquad y''_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \tag{7.11}$$

$$k = n+1 \qquad y'_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} \qquad \text{т.е.} \quad \beta_1 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta_3$$

Получаем ситему $n+1$ линейных алгебраических уравнений для определения $n+1$ неизвестных величин y_k.

4. ***Решение СЛАУ.*** Система $n+1$ уравнений решается методом прогонки.

Пример 7.4. Решить краевую задачу методом конечных разностей с шагом $h = 0{,}1$:

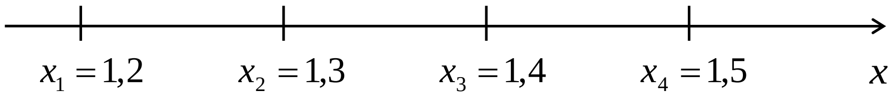
$$y'' - xy' + 2xy = 0{,}8$$

$$y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1$$

$$y'(1{,}5) = 2$$

Решение. Решение проводим в следующей последовательности:

1. Определение сетки:



x_1, x_4 - краевые точки, x_2, x_3 - внутренние точки.

2. Определение сеточной функции $y_k = y(x_k)$:

x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	y_2	y_3	y_4

3. Аппроксимация уравнения:

при $x_1 = 1{,}2$ $\qquad y_1 - 0{,}5\dfrac{y_2 - y_1}{0{,}1} = 1$

при $x_2 = 1{,}3$ $\qquad \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}1^2} - 1{,}3\dfrac{y_3 - y_1}{2 \cdot 0{,}1} + 2 \cdot 1{,}3y_2 = 0{,}8$

при $x_3 = 1{,}4$ $\qquad \dfrac{y_4 - 2y_3 + y_2}{0{,}1^2} - 1{,}4\dfrac{y_4 - y_2}{2 \cdot 0{,}1} + 2 \cdot 1{,}4y_3 = 0{,}8$

при $x_4 = 1{,}5$ $\qquad \dfrac{y_4 - y_3}{0{,}1} = 2$

Получим систему четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными y_1, y_2, y_3 и y_4:

$$y_1 - 5(y_2 - y_1) = 1$$
$$100(y_3 - 2y_2 + y_1) - 6{,}5(y_3 - y_1) + 2{,}6y_2 = 0{,}8$$
$$100(y_4 - 2y_3 + y_2) - 7(y_4 - y_2) + 2{,}8y_3 = 0{,}8$$
$$10(y_4 - y_3) = 2$$

или

$$\begin{cases} 6y_1 & -5y_2 & & & = & 1 \\ 106{,}5y_1 & -197{,}4y_2 & +93{,}5y_3 & & = & 0{,}8 \\ & 107y_2 & -197{,}2y_3 & +93y_4 & = & 0{,}8 \\ & & -10y_3 & +10y_4 & = & 2 \end{cases}$$

4. Решение системы методом прогонки.

Значения a_k, b_k, c_k, d_k записываем в виде таблицы.

Таблица 7.1

k	a_k	b_k	c_k	d_k
1	0	6	-5	1
2	106,5	-197,4	93,5	0,8
3	107	-197,2	93	0,8
4	-10	10	0	2

Прямой ход прогонки. Определяем прогоночные коэффициенты U_k и V_k $(k = 1, 2, 3, 4)$.

$U_1 = -c_1 / b_1 = 5/6 = 0{,}833333$

$V_1 = d_1 / b_1 = 1/6 = 0{,}166667$

$U_2 = -c_2 /(a_2U_1 + b_2) = -93{,}5/(106{,}5 \cdot 0{,}833333 - 197{,}4) = 0{,}860561$

$V_2 = (d_2 - a_2V_1)/(a_2U_1 + b_2) =$

$$= (0{,}8 - 106{,}5 \cdot 0{,}166667)/(106{,}5 \cdot 0{,}833333 - 197{,}4) = 0{,}156006$$

$U_3 = -c_3 /(a_3U_2 + b_3) = -93/(107 \cdot 0{,}860561 - 197{,}2) = 0{,}884703$

$V_3 = (d_3 - a_3V_2)/(a_3U_2 + b_3) =$

$$= (0{,}8 - 107 \cdot 0{,}156006)/(107 \cdot 0{,}860561 - 197{,}2) = 0{,}151186$$

$U_4 = -c_4 /(a_4U_3 + b_4) = 0$, т.к. $c_4 = 0$

$V_4 = (d_4 - a_4V_3)/(a_4U_3 + b_4) =$

$$= (2 + 10 \cdot 0{,}151186)/(10 - 10 \cdot 0{,}884703) = 3{,}045925$$

Обратный ход прогонки. Вычисляем y_k $(k = 4, 3, 2, 1)$.

Поскольку $U_4 = 0$, то $y_4 = V_4 = 3{,}045925$.

$y_3 = U_3 y_4 + V_3 = 0{,}884703 \cdot 3{,}045925 + 0{,}151186 = 2{,}845925$
$y_2 = U_2 y_3 + V_2 = 0{,}860561 \cdot 2{,}845925 + 0{,}156006 = 2{,}605098$
$y_1 = U_1 y_2 + V_1 = 0{,}833333 \cdot 2{,}605098 + 0{,}166667 = 2{,}337581$

Сеточную функцию $y_k = y(x_k)$ записываем в виде таблицы

x_k	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	2,337581	2,605098	2,845925	3,045925

8. Задачи линейного программирования

Общая постановка задачи линейного программирования (ЛП) включает целевую функцию

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max (\min) \qquad (8.1)$$

ограничения типа равенств

$$g_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + b_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., k \qquad (8.2)$$

и ограничения типа неравенств

$$g_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + b_i \le 0 \qquad i = k+1, k+2, ..., n \qquad (8.3)$$

В задачах ЛП в число ограничений очень часто входит условие положительности переменных:

$$x_i \ge 0, \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad (8.4)$$

Обычно оно связано с тем, что x_i в этих задачах означает количество объектов i-того типа (производимых, перевозимых, потребляемых и т.п.).

Графический метод решения задач линейного программирования

В случае двух переменных задачи ЛП могут быть решены графически. Пусть дана задача:

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le a_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le a_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le a_m \qquad (8.5)$$

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат и сопоставим каждой паре чисел (x_1, x_2) точку плоскости с координатами x_1 и x_2. Выясним, прежде всего, что будет представлять собой множество точек, соответствующих допустимым решениям данной задачи.

Рассмотрим сначала одно линейное неравенство с двумя переменными:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_1$

Оно, как известно, определяет на плоскости одну из двух частей (полуплоскостей), на которые прямая $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$, разбивает плоскость. При этом соответствующая полуплоскость включает и граничную прямую $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$ (замкнутая полуплоскость). Чтобы определить, какую именно из двух замкнутых полуплоскостей определяет данное неравенство, достаточно подставить в него координаты одной какой-нибудь точки, не лежащей на граничной прямой. Если неравенство удовлетворяется, то искомая полуплоскость та, в которой лежит взятая точка, а если не удовлетворяется - то противоположная ей.

Пусть допустимая область задачи линейного программирования (8.5) оказалась непустой (многоугольник MNPO на рис. 8.1).

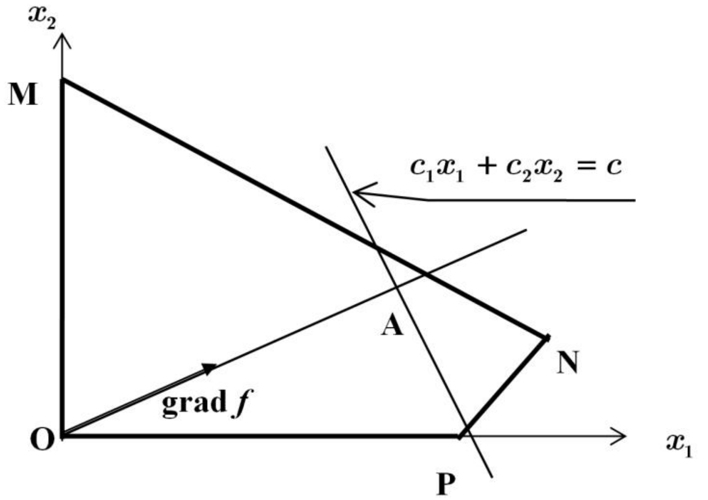


Рис. 8.1. Графический метод решение задачи линейного программирования.

Как геометрически найти оптимальные точки? Оптимальными являются те точки допустимой области, координаты которых доставляют целевой функции наибольшее значение.

Определяем градиент функции $\text{grad } f$:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$$

Линия $f(x, y) = c$ $(c = const)$ при любом значении постоянной c представляет собою прямую, перпендикулярную вектору $\text{grad } f$. Считая c параметром, получаем семейство параллельных прямых (называемых линиями постоянного значения, или линиями уровня функции). Нас интересуют, в соответствии с нашей задачей, те точки допустимой облаcи, которые принадлежать линии уровня с наибольшим значением $\boldsymbol{c}$ по сравнению с его значениями для всех других линей уровня, пересекающихся с допустимой областью. Увеличение $\boldsymbol{c}$ соответствует перемещению линии уровня вдоль $\operatorname{grad} f$. Следовательно, чтобы найти оптимальные точки допустимого множества задачи на максимум, нужно перемещать линии уровня в направлении вектора $\operatorname{grad} f$, начиная с какого-нибудь фиксированного положения, при котором она пересекается с допустимой областью (точка А на рис. 8.1) до тех пор, пока она не перестанет пересекаться с ней. В точке области допустимых значений, в которой функция f достигает максимума, линия уровня покидает D. Поэтому, если мы найдем проекцию D на направление $\operatorname{grad} f$, то точка максимума будет проектироваться на конец полученного отрезка. Пересечение допустимой области с линией уровня в том ее положении, когда дальнейшее перемещение дает пустое пересечение, и будет множеством оптимальных точек задачи линейного программирования (на рис. 8.1 это единственная точка N).

Аналогично, при уменьшении c соответствующая линия уровня покинет D в точке минимума f, и эта точка проектируется на начало отрезка-проекции D на направление $\operatorname{grad} f$.

В качестве примера рассмотрим задачу о распределении ресурсов.

Пример 8.1. Имеется 300 кг металла, 100 м^2 стекла и 160 человеко-часов рабочего времени; из них изготавливают изделия двух наименований А и Б; стоимость одного изделия А равна 10 $, для его изготовления нужно 4 кг металла, 2 м^2 стекла и 2 человеко-часа рабочего времени; стоимость одного изделия Б равна 12 $, для его изготовления нужно 5 кг металла, 1 м^2 стекла и 3 человеко-часа рабочего времени; требуется спланировать производство так, чтоб произвести изделия с максимальной стоимостью.

Решение. Допустим, что предприятие выпускает $\boldsymbol{x_1}$ единиц продукции вида А и x_2 единиц продукции вида Б. Для этого потребуется $4x_1 + 5x_2$ кг металла. Так как в наличии имеется всего 300 кг металла, то должно выполняться неравенство

$4x_1 + 5x_2 \le 300$ кг

Аналогичные рассуждения, проведенные для остальных видов сырья и рабочего времени, позволяют записать следующие неравенства

$2x_1 + x_2 \le 100$ м^2

$2x_1 + 3x_2 \le 160$ чел.-час.

При этих условиях доход Z, получаемый предприятием, составит

$$Z = f(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2 \to \max \tag{8.6}$$

Таким образом, математически задачу можно сформулировать так:

Найти $\max Z = 10x_1 + 12x_2$ при ограничениях

$$\begin{aligned} &4x_1 + 5x_2 \le 300 \\ &2x_1 + x_2 \le 100 \\ &2x_1 + 3x_2 \le 160 \\ &x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (8.7)$$

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат x_1Ox_2. Известно, что геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют системе линейных неравенств, образуют выпуклый многоугольник.

Этот многоугольник называется многоугольником решений данной системы неравенств. Стороны этого многоугольника располагаются на прямых, уравнения которых получаются, если в неравенствах системы знаки неравенств заменить на знаки равенств. А сам этот многоугольник есть общая часть полуплоскостей, на которые делит плоскость каждая из указанных прямых.

Вычертим эти прямые (рис 8.2).

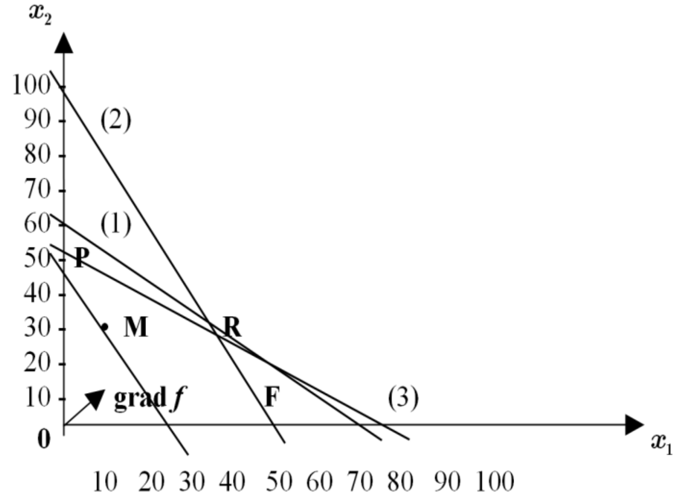


Рис. 8.2. Графическое решение задачи линейного программирования

Полуплоскости в пересечении дают многоугольник решений OPRF. При этом, любая точка из внутренности многоугольника удовлетворяет всем неравенствам (8.7).

Рассмотрим линейную функцию (8.6)

$f(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2$.

Выберем внутреннюю точку многоугольника решений $M_0(x_1,\ x_2)$, например $x_1 = 10,\ x_2 = 30$, и вычислим значение целевой функции

$$Z_0 = f(10,\ 30) = 10 \cdot 10 + 12 \cdot 30 = 460\ .$$

Уравнение $10x_1 + 12x_2 = Z_0$ определяет на плоскости геометрическое место точек, в которых прямая $f(x_1, x_2)$ принимает постоянное значение

Z_0. Меняя значение Z_0, получаем различные прямые, однако все они параллельны между собой, т.е. образуют семейство параллельных прямых. Эти прямые перпендикулярны вектору $\text{grad}\, f = 10\,\vec{e}_1 + 12\,\vec{e}_2$ ($\vec{e}_i$ - координатный вектор i-ой оси). Вектор $\text{grad}\, f$ указывает направление, двигаясь в котором, мы переходим от меньших значений функции f к большим. Теперь должно быть ясным, что оптимальное решение определяется точкой R(35, 30) (рис.8.2), и наибольшее значение функции f равно

$$f_{\max} = 10 \cdot 35 + 12 \cdot 30 = 710 .$$

Итак, оптимальное решение задачи найдено: $x_1 = 35$, $x_2 = 30$.

Следует выпускать 35 единиц продукции вида А и 30 единиц продукции вида Б. Максимально возможный доход составит 710 $.

Пример 8.2. Решить задачу примера 8.1 с помощью программы Excel.

Задачи ЛП в Excel решаются с помощью надстройки «Поиск решения».

Порядок решения.

1) Ввести данные задачи в рабочий лист (рис. 8.3);
2) Ввести в ячейки **B2, C2** начальный план, например **0 0**
3) В ячейку **D4** – формулу расчета затрат первого вида ресурсов (на ячейки плана абсолютные ссылки): **=B4*$B$2+C4*$C$2**
4) Скопировать формулу в ячейки **D5:D6**
5) В ячейку **E8** – формулу расчета дохода: **=B8*$B$2+C8*$C$2**

	A	B	C	D	E
1		А	Б		
2	план	0	0		
3				использовано	всего
4	металл	4	5	0	300
5	стекло	2	1	0	100
6	чел.-час.	2	3	0	160
7					
8	стоимость	10	12		0

Рис. 8.3. Решение задачи ЛП с помощью программы Excel. Ввод данных.

6) Вызвать окно **Поиск решения**. В настройках указать (рис. 8.4):

Установить целевую ячейку **$E$8**

Равной **максимальному значению**

Изменяя ячейки **$B$2:$C$2**

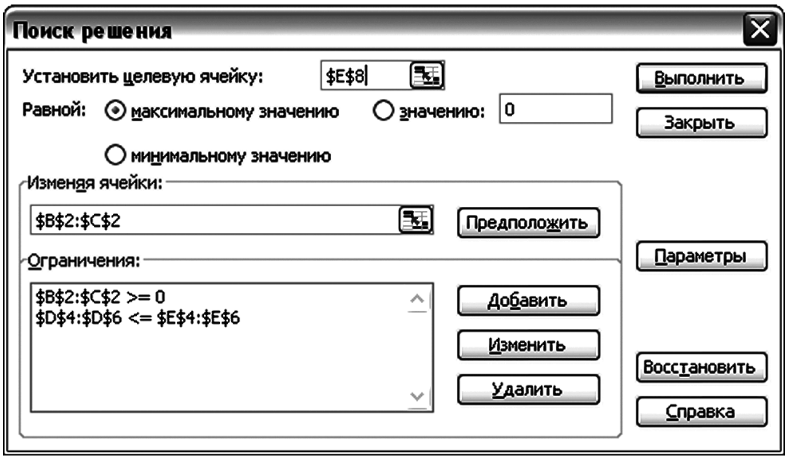


Рис. 8.4. Настройки окна «Поиск решения» для задачи ЛП.

7) Нажать кнопку **Добавить.** Добавить ограничения на ресурсы (рис. 8.5) **$D$4:$D$6<=$E4$E6**
8) Нажать кнопку **Добавить.** Добавить условие неотрицательности переменных плана **$B$2:$C$2>=0**
9) Нажать кнопку **OK.**

Рис. 8.5. Добавление ограничения к задаче ЛП.

10) Нажать кнопку **Выполнить**.
11) Подтвердить сохранение найденного решения.
12) Рабочий лист изменился и содержит решение (рис. 8.6):

	A	B	C	D	E
1		A	Б		
2	план	35	30		
3				использовано	всего
4	металл	4	5	290	300
5	стекло	2	1	100	100
6	чел.-час.	2	3	160	160
7					
8	стоимость	10	12		710

Рис. 8.6. Решение задачи ЛП с помощью программы Excel. Результаты поиска решения.

Следует выпускать 35 единиц продукции вида А и 30 единиц продукции вида Б. Максимально возможный доход составит 710 $.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калиткин Н.П. Численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
2. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. – М.: ИНТУИТ, 2013. – 528 с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – СПб: Лань, 2009. – 672 с.
4. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008. – 480 с.
5. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов: Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 304 с.
6. Васильев А.Н. Научные вычисления в Microsoft Excel. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 512 с.
7. Ларсен У.Р. Инженерные расчеты в Excel. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 544 с.
8. Уокенбах Д. Excel 2010: профессиональное программирование на VBA. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2012. – 944 с.

Приложение

ЗАДАЧИ
Варианты заданий
для практических, самостоятельных и контрольных работ

№1. Оценка погрешностей

Вычислить значение функции u и ее предельные абсолютную и относительную погрешности, если известны погрешности ее аргументов. Найти количество верных значащих цифр функции u (в широком и узком смысле). Параметры m и k заданы точно. Данные брать из таблицы.

№	u	x	y	m	k
1	$m\sin(x+ky)$	3,15 ± 0,02	1,15±5%	2	1,5
2	$m\sin x+\cos(1+ky)$	1,25 ±0,002	1,26 ±10%	3	1,6
3	x^m+y^k	1,23 ± 0,02	1,58 ±5%	4	1,7
4	$\sin(x-m)+\cos ky$	1,12 ± 0,01	1,28 ±2%	5	1,8
5	$\left(x^m+y^k\right)^{-1}$	1,32 ± 0,01	1,97 ±2%	6	1,9
6	$\ln(mx+ky)$	3,56 ± 0,04	2,56 ±2%	7	2,1
7	mx^2+ky^2	1,84 ± 0,04	6,21 ±2%	8	2,2
8	$\log_2(mx+ky)$	5,12 ± 0,02	1,01 ±2%	9	2,3
9	$x^{2-m}+ky^{-2}$	3,44 ± 0,02	1,21 ±3%	8	2,4
10	$\cos(mx+ky)$	4,11 ± 0,02	1,06 ±4%	7	2,5
11	me^x+ke^{-y}	1,32 ± 0,02	1,12 ±5%	6	2,7
12	e^{mx+ky}	2,12 ± 0,02	1,52 ±6%	-5	-2,9
13	$\cos(mx-ky)$	2,11 ± 0,02	1,1 ±10%	4	2,5
14	$3m^x+2ky$	1,54 ± 0,002	1,5 ±8%	-3	-2,6
15	$m(x^2+ky^2)$	1,12 ± 0,02	1,6 ±2%	2	2,7
16	$3mx+2ky$	1,22 ± 0,02	1,9 ±2%	9	-2,8
17	$\mathrm{tg}(mx-ky)$	0,42 ± 0,02	0,14 ±2%	2	0,2
18	$\lg(mx-ky)$	1,45 ± 0,002	1,5 ±2%	2	0,1
19	m^x+ke^{-y}	1,22 ±0,02	0,1 ±1%	6	3,5
20	me^x+k^{-y}	0,52 ±0,004	2 ± 5%	5	3,4

№2. Численные методы решения нелинейных уравнений

Определить корни уравнения графически и уточнить один из них итерационными методами (методом деления отрезка пополам, методом Ньютона, методом простой итерации) с точностью 0,01:

1. $x^3+2x+2=0$
2. $x^3-2x+2=0$
3. $x^3+3x-1=0$
4. $x^3+x-3=0$
5. $x^3+2x+4=0$
6. $(x+1)^2=\dfrac{1}{x}$
7. $x=(x+1)^3$
8. $x^3+4x-4=0$
9. $x^3+6x-1=0$
10. $x^3+12x-12=0$
11. $x^3+0{,}4x-1{,}2=0$
12. $x^3+0{,}5x-1=0$
13. $x^3+2x-4=0$
14. $x^3+0{,}4x+2=0$
15. $x^3+9x-11=0$
16. $x^3+6x+3=0$
17. $x^3+5x-1=0$
18. $x^3+9x-3=0$
19. $x^3+10x-5=0$
20. $x^3+13x-13=0$
21. $x^3+7x-7=0$
22. $x^3+4x-2=0$
23. $x^3+5x-4=0$
24. $x^3+8x-6=0$
25. $x^3+2{,}5x-4=0$
26. $x^3+2{,}5x-5=0$
27. $x^3+5{,}5x-2=0$
28. $x^3+7x-3=0$
29. $x^3+8x-5=0$
30. $x^3+15x-10=0$
31. $\ln x-\dfrac{1}{x}=0$
32. $\cos x+2x-1{,}5=0$
33. $\ln x-\sin x=0$
34. $\ln x-\cos x=0$
35. $\cos x-x=0$
36. $\sin x+x-1=0$
37. $\ln x-\dfrac{x}{2}-\dfrac{m}{2}=0$
38. $x^3-5x^2+2x+8=0$
39. $\sin x-\sqrt{1-x^2}=0,\ \ 0\le x\le 1$
40. $x^3-2x^2-5x+6=0$

№3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

а) Решить систему уравнений методом Гаусса или обратной матрицы:

1. $\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3+2x_4=2 \\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=2 \\ 2x_1-x_2+5x_3+3x_4=-1 \\ 4x_1+5x_2+4x_3-4x_4=8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_3+x_4=4 \\ x_1+x_2+3x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+5x_3-2x_4=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=3 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4=3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+2x_4=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+4x_4=7 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+3x_4=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=3 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=3 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+3x_3+3x_4=1 \\ 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4=4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 4x_1+7x_2+6x_3+2x_4=2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=-1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4=1 \\ 4x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 6x_1+5x_2+x_3+x_4=5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3+3x_4=5 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4=5 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=4 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ x_1+4x_2+2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+6x_2+x_3+3x_4=5 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+5x_3-x_4=1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+2x_4=7 \\ 3x_1+5x_2+x_3+4x_4=8 \end{cases}$

15. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

29. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

б) Решить СЛАУ итерационными методами с точностью 0,01 при заданном начальном приближении (0,7m; 1; 2; 0,5):

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3m \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = m - 6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 15 - m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = m + 2 \end{cases}$$

m – вариант

в) Решить систему уравнений методом прогонки (или итерационным методом с точностью 0,01):

1. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}5x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 25 \\ 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2{,}5x_3 = 2 \\ 1{,}5x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 3{,}2 \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}4x_3 = -1 \\ 2{,}5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ -x_2 + 5x_3 + x_4 = 12 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2{,}5x_1 + 1{,}5x_2 = 8{,}4 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 6x_3 - x_4 = 5{,}6 \\ 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 1{,}25x_1 - 0{,}2x_2 = 2{,}3 \\ -1{,}7x_1 + 2{,}87x_2 - x_3 = 4 \\ 1{,}4x_2 + 4{,}7x_3 - 2x_4 = 3{,}5 \\ -x_3 + 5x_4 = 1{,}4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2{,}3x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3{,}2 \\ 2{,}2x_2 + 4x_3 - x_4 = 6 \\ 5x_3 + 7x_4 = 5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 0{,}2x_3 = 5{,}5 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 0{,}3x_3 = 4{,}3 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 = 2 \\ -3x_1 + 6{,}2x_2 + x_3 = 4{,}2 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 2{,}3 \\ x_3 + 2x_4 - 0{,}3x_5 = 2 \\ x_4 + 2x_5 = 3{,}4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 5 \\ 1{,}5x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -3x_1 + 1{,}2x_2 = -1{,}7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 1{,}1x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 11 \\ -2x_4 + 6{,}5x_5 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -18 \\ -2x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 38x_1 + 2x_2 = 6{,}2 \\ -x_1 + 8x_2 + 2{,}3x_3 = 5{,}1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 1{,}3x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5 = 3 \\ -0{,}8x_4 + 2{,}1x_5 = 3{,}2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2{,}5x_1 + 0{,}8x_2 = 3{,}3 \\ 1{,}2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 1{,}1x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2{,}1 \\ 2x_3 + 5{,}2x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 = -5 \\ x_1 - 12x_2 - 4x_3 = -8 \\ -x_2 + 6x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$

21. $$\begin{cases} 3x_1 + 2{,}2x_2 = 4{,}8 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - 7x_3 + 2{,}5x_4 = 0{,}5 \\ -1{,}2x_3 + 6x_4 + x_5 = 6{,}1 \\ 2x_4 + 3{,}5x_5 = 3 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \\ x_2 - 5x_3 - x_4 = -12 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 0{,}5x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 4 \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ -2x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2{,}5x_3 = 2 \\ 1{,}5x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} 1{,}25x_1 - 0{,}2x_2 = 2{,}3 \\ -1{,}7x_1 + 2{,}87x_2 - x_3 = 4 \\ 1{,}4x_2 + 4{,}7x_3 - 2x_4 = 3{,}5 \\ -x_3 + 5x_4 = 1{,}4 \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 3{,}2 \\ x_1 - 2x_2 + 0{,}4x_3 = 1 \\ -2{,}5x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} -10x_1 + 4x_2 = -8 \\ x_1 + 2x_2 - 0{,}2x_3 = 5{,}5 \\ -x_2 + 7x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 25 \\ 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}3x_3 = -4{,}3 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_3 - 4x_4 = -8 \end{cases}$$

31. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = m - 1 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 4m - n - 1 \\ x_3 + 2x_4 = m + 2n \end{cases}$$

32. $$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = m + 5 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = n + 9m - 1 \\ 0{,}1x_2 + 4x_3 - x_4 = 4n + 0{,}1m - 5 \\ -x_3 + 8x_4 = -n + 40 \end{cases}$$

m – вариант

n – номер группы

№4. Численное решение систем нелинейных уравнений

Решить систему нелинейных уравнений одним из итерационных методов (методом Ньютона, простых итераций, Зейделя) с точностью 0,01:

1. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5 \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0{,}72 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8 \\ \sin x - 2y = 1{,}6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0{,}4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0{,}4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5 \\ x + \cos(y-2) = -0{,}5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 + y \\ x + \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \cos(x+1) - y = 0{,}5 \\ x + \cos y = 3 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sin(x+1) + y = 1{,}2 \\ 2x - \cos y = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x - \cos(y+1) = 0 \\ y + 2\sin x = -0{,}4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \sin x - 2y = 2 \\ \cos(y+1) + x = 0{,}72 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \cos(y-0{,}5) + x = 2 \\ \sin x + 2y = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} \cos x + 2y = 1{,}5 \\ x - \sin(y-0{,}5) = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \sin(x+1) - 2y = 3 \\ x + \cos y = 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) + y = 1{,}5 \\ \cos(y-2) - x = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8 \\ x + 4\cos y = 2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{4y^2}{m^2} = 1 \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{m} x^2 \end{cases}$

Начальное приближение

$(m/2;\ \ m/4)$

№5.1. Интерполяция

Построить интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона по заданным точкам:

1.

x	1	3	4
y	1	2	1

2.

x	0	2	3
y	2	0	4

3.

x	-2	0	1
y	4	1	3

4.

x	0	2	3
y	4	1	5

5.

x	-1	4	5
y	2	1	3

6.

x	-2	1	4
y	1	4	1

7.

x	0	2	3
y	1	2	1

8.

x	2	3	5
y	1	0	1

9.

x	-1	2	5
y	4	3	4

10.

x	0	1	3
y	1	4	2

11.

x	-2	1	2
y	3	0	2

12.

x	2	3	4
y	1	0	2

13.

x	1	2	3
y	1	0	1

14.

x	1	2	3
y	3	2	4

15.

x	2	3	4
y	0	3	1

16.

x	-1	1	2
y	3	1	2

17.

x	1	3	4
y	4	1	5

18.

x	0	1	3
y	4	2	3

19.

x	-1	0	1
y	2	1	2

20.

x	-2	1	2
y	-3	0	-2

21.

x	1	3	5
y	-1	-2	-1

22.

x	1	2	3
y	-1	0	-1

23.

x	-2	0	1
y	-4	-1	-3

24.

x	2	3	4
y	0	-3	-1

25.

x	-1	4	5
y	-2	-1	-3

26.

x	1	3	4
y	-4	-1	-5

27.

x	0	2	3
y	-1	-2	-1

28.

x	0	2	3
y	-2	0	-4

27.

x	0	2	3
y	1	2	1

28.

x	0	2	3
y	2	0	4

29.

x	-1	0	1	m
y	$-1-m$	$-m$	$1-m$	$8-m$

m – вариант

№5.2. Интерполяция кубическими сплайнами

Найти значение функций заданных таблично при $x = 1{,}1$ с помощью кубического сплайна.

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1,0	1,0	1,1	0,9	0,9	0,8	1,1	1,0	1,2	1,2	1,1
1,2	2,1	2,2	2,0	1,9	2,0	2,2	2,1	1,8	2,0	1,9
1,4	2,9	3,2	3,0	3,2	2,9	3,2	3,1	3,2	3,0	3,2
1,6	3,8	4,2	3,8	3,8	4,2	4,2	3,8	4,1	3,8	3,8
1,8	5,2	5,2	5,1	5,1	5,2	5,1	5,2	5,2	5,0	4,9
2,0	5,9	6,0	5,8	6,1	5,8	5,9	6,2	6,1	6,1	5,8

x_i	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1,0	0,8	0,8	0,8	1,1	0,8	1,0	0,9	1,2	1,2	1,2
1,2	2,0	2,2	1,8	2,2	1,9	1,8	2,0	2,2	2,2	2,0
1,4	2,8	2,9	2,9	3,0	3,2	2,8	2,8	3,0	3,2	3,2
1,6	4,0	4,0	4,0	4,1	4,1	3,8	3,8	4,0	3,8	4,2
1,8	5,2	5,2	4,9	4,9	5,0	4,8	4,9	4,8	4,8	4,8
2,0	6,0	5,8	6,1	5,9	6,0	5,8	6,2	5,8	6,0	6,1

x_i	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1,0	2,8	3,8	4,8	1,5	6,0	10,0	5,9	0,2	12	0,12
1,2	2,0	3,2	3,8	2,7	4,9	11,8	7,0	2,2	22	0,25
1,4	1,8	2,9	2,9	3,2	4,2	12,8	8,8	2,6	32	0,55
1,6	1,6	3,0	2,0	4,0	4,5	13,5	8,8	2,9	38	0,42
1,8	2,2	4,2	1,9	4,5	5,0	14,3	7,9	3,1	48	0,48
2,0	3,0	4,8	1,1	4,9	6,0	15,0	6,2	3,2	60	0,6

№5.3. Обработка результатов эксперимента

Методом наименьших квадратов найти зависимость между *x* и *y*:

1.

x	-1	0	1	2	4
y	-3	-1	1	3	7

2.

x	-2	2	3	4	5
y	-3	5	7	9	11

3.

x	1	2	3	5
y	4	5	6	8

4.

x	-2	-1	2	3	4
y	5	4	1	0	-1

5.

x	0	2	4	6
y	-2	4	10	16

6.

x	-1	0	1	2
y	-6	-1	4	9

7.

x	-1	0	1	2
y	-6	-1	4	9

8.

x	-2	1	2	3
y	-13	5	11	17

9.

x	-1	0	1	2	3
y	-4	-1	2	5	8

10.

x	-1	0	1	2	4
y	3	1	-1	-3	-7

11.

x	-1	2	3	4
y	1	7	9	11

12.

x	1	2	3	5
y	-4	-5	-6	-8

13.

x	-1	1	2	4
y	-4	0	2	6

14.

x	0	2	4	6
y	2	-4	-10	-16

15.

x	-1	0	1	3	4
y	1	3	5	9	11

16.

x	-2	2	3	4	5
y	3	-5	-7	-9	-11

17.

x	-1	1	2	3
y	5	-1	-4	-7

18.

x	-2	-1	2	3	4
y	-5	-4	-1	0	1

19.

x	-2	-1	1	3	4
y	-4	-1	5	11	14

20.

x	-1	0	1	2
y	6	1	-4	-9

21.

x	-2	-1	1	2	3
y	5	-2	4	7	10

22.

x	0	1	2	3
y	-2	-6	-10	-14

23.

x	-2	-1	2	3
y	-7	-2	13	18

24.

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	-2	-5	-8

25.

x	-1	1	2	3
y	5	3	7	11

26.

x	-1	2	3	4
y	-1	-7	-9	-11

27.

x	-1	0	2	3
y	1	4	10	13

28.

x	-1	1	2	4
y	4	0	-2	-6

29.

x	-1	1	2	3
y	-7	-3	-1	1

30.

x	-1	0	1	2
y	-4	-3	0	4

31.

x	-2	1	2	3
y	2	8	10	12

32.

x	-1	0	1	3
y	-1	-1	1	11

33.

x	-2	-1	0	1
y	4	-1	-2	0

34.

x	0	1	2	3
y	-3	-2	1	5

35.

x	-2	-1	0	2
y	-1	-1	1	10

36.

x	1	2	3	4
y	-2	0	-2	-7

37.

x	-2	0	1	2
y	15	1	0	2

38.

x	-2	-1	0	1
y	5	2	1	1

39.

x	-3	-2	-1	0
y	-5	-6	-5	-3

40.

x	-2	-1	1	2
y	7	3	-1	3

41.

x	-2	-1	1	2	3
y	$4+\frac{3}{2}m$	$m+1$	$\frac{m}{2}$	1	$3-\frac{m}{2}$

№6. Численное интегрирование

Вычислить интеграл, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона), при заданном числе интервалов n:

1. $\int_{-2}^{4}(2x^2-\sqrt{x+2})dx$ $\quad n=6$

2. $\int_{-3}^{0}(5x^2+x+1)dx$ $\quad n=6$

3. $\int_{0}^{3}(3x^2-\sqrt{x})dx$ $\quad n=6$

4. $\int_{1}^{4}(x^3-\sqrt{x})dx$ $\quad n=6$

5. $\int_{1}^{4}(7+x-2x^2)dx$ $\quad n=6$

6. $\int_{0}^{3}(7x^2-3\sqrt{x})dx$ $\quad n=6$

7. $\int_{2}^{5}(2x^2-2-\sqrt{x})dx$ $n=6$

8. $\int_{0}^{3}(5x^2+\sqrt{x})dx$ $n=6$

9. $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$ $n=8$

10. $\int_{0}^{4}(2x^2+1-\sqrt{x})dx$ $n=8$

11. $\int_{-2}^{2}(x^2+\sqrt{x+2}-1)dx$ $n=8$

12. $\int_{0}^{2}(x^2+2+\sqrt{x})dx$ $n=8$

13. $\int_{1}^{3}(3x^2-x-1)dx$ $n=8$

14. $\int_{-1}^{3}(x^3+2)dx$ $n=8$

15. $\int_{-2}^{2}(2x^2+1-\sqrt{x+4})dx$ $n=8$

16. $\int_{1}^{4}(2x^2-1{,}5\sqrt{x})dx$ $n=6$

17. $\int_{1}^{4}(7\sqrt{x}+2x^2)dx$ $n=6$

18. $\int_{0}^{3}(7x^2+3\sqrt{x})dx$ $n=6$

19. $\int_{2}^{5}(2x^2-2+\sqrt{x})dx$ $n=6$

20. $\int_{0}^{3}(5x^2-1+\sqrt{x})dx$ $n=6$

21. $\int_{3}^{6}(x^2+4+\sqrt{x})dx$ $n=6$

22. $\int_{2}^{6}(x^3+3)dx$ $n=8$

23. $\int_{0}^{3}(2x^2-1+\sqrt{x})dx$ $n=6$

24. $\int_{-2}^{2}(3x^2+2\sqrt{x+2})dx$ $n=8$

25. $\int_{-2}^{2}(x^2+2\sqrt{x+2})dx$ $n=8$

26. $\int_{-3}^{1}(x^2+2x-1{,}5)dx$ $n=6$

27. $\int_{-3}^{0}(3x^2+1+\sqrt{x+3})dx$ $n=6$

28. $\int_{0}^{3}(3x^2+5+\sqrt{x})dx$ $n=6$

29. $\int_{1}^{4}(7x+x^2-\sqrt{x})dx$ $n=6$

30. $\int_{0}^{3}(x^2-3\sqrt{x})dx$ $n=6$

31. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1+0{,}1m} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ $n=10$

32. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $n=10$

33. $\int_{0}^{m}\sqrt{m^2-x^2}dx$ $n=10$

34. $\int_{0}^{m}\sqrt{x^2+1}\,dx$ $n=10$

35. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ $n=10$

36. $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x^2+m}}{1+\sqrt{x+m}}dx$ $n=10$

37. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{x+1}}dx$ $n=10$

38. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{x}+1}dx$ $n=10$

39. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ $n=10$

40. $\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$ $n=10$

№ 7.1. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка методом конечных разностей

Решить задачу Коши методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта на заданном отрезке:

1.	$y'=3+2x-y$	$y(0)=2$,	$x\in[0;\ 1]$,	$h=0{,}2$
2.	$y'=y-3x$	$y(1)=0$	$x\in[1;\ 2{,}2]$	$h=0{,}3$
3.	$y'=1-x+y$	$y(1{,}1)=0$	$x\in[1{,}1;\ 1{,}6]$	$h=0{,}1$
4.	$y'=y-7x$	$y(3)=3$	$x\in[3;\ 5]$	$h=0{,}5$
5.	$y'=5-y+x$	$y(1)=1$	$x\in[1;\ 5]$	$h=1$
6.	$y'=y-2x+3$	$y(0)=4$	$x\in[0;\ 1]$	$h=0{,}2$
7.	$y'=4-x+2y$	$y(0)=1$	$x\in[0;\ 1{,}2]$	$h=0{,}3$
8.	$y'=-8+2x-y$	$y(1)=3$	$x\in[1;\ 3]$	$h=0{,}4$
9.	$y'=2y-3x$	$y(4)=0$	$x\in[4;\ 6]$	$h=0{,}5$
10.	$y'=x-2y$	$y(-1)=1$	$x\in[-1;\ 2]$	$h=0{,}6$
11.	$y'=7-xy$	$y(-2)=0$	$x\in[-2;\ 0]$	$h=0{,}5$
12.	$y'=2x+y$	$y(2)=2$	$x\in[2;\ 3{,}5]$	$h=0{,}5$
13.	$y'=5+x-y$	$y(2)=1$	$x\in[2;\ 4]$	$h=0{,}5$
14.	$y'=y+5x-1$	$y(0)=2$	$x\in[0;\ 3{,}2]$	$h=0{,}8$

15.	$y' = y - 5x + 1$	$y(0) = 2$	$x \in [0;\ 3{,}2]$	$h = 0{,}8$
16.	$y' = 1 - x + y$	$y(0) = 1$	$x \in [0;\ 2{,}5]$	$h = 0{,}5$
17.	$y' = y - 5x$	$y(-1) = 1$	$x \in [-1;\ 1]$	$h = 0{,}4$
18.	$y' = x + 2y$	$y(0) = -1$	$x \in [0;\ 2]$	$h = 0{,}4$
19.	$y' = x + y + 2$	$y(1) = 1$	$x \in [1;\ 3]$	$h = 0{,}5$
20.	$y' = 3x + 4y$	$y(2) = 1$	$x \in [2;\ 5]$	$h = 0{,}5$
21.	$y' = 3 + 2x + y$	$y(0) = 2$	$x \in [0;\ 1]$	$h = 0{,}2$
22.	$y' = 2y - x$	$y(1) = 0$	$x \in [1;\ 2{,}2]$	$h = 0{,}3$
23.	$y' = -x + y$	$y(1{,}1) = 0$	$x \in [1{,}1;\ 1{,}6]$	$h = 0{,}1$
24.	$y' = y - 7x + 2$	$y(3) = 3$	$x \in [3;\ 5]$	$h = 0{,}5$
25.	$y' = 5 - y + x$	$y(1) = 1$	$x \in [1;\ 5]$	$h = 1$
26.	$y' = y - 2x + 3$	$y(0) = 4$	$x \in [0;\ 1]$	$h = 0{,}2$
27.	$y' = 4 - x + 2y$	$y(0) = 1$	$x \in [0;\ 1{,}2]$	$h = 0{,}3$
28.	$y' = -8 + 2x - y$	$y(1) = 3$	$x \in [1;\ 3]$	$h = 0{,}4$
29.	$y' = 2y - 3x$	$y(4) = 0$	$x \in [4;\ 6]$	$h = 0{,}5$
30.	$y' = x^2 - 2y$	$y(-1) = 1$	$x \in [-1;\ 2]$	$h = 0{,}5$
31.	$y' = 5 - x - 2y$	$y(1) = 2$	$x \in [2;\ 4]$	$h = 0{,}5$
32.	$y' = y + 3x - 2$	$y(1) = 2$	$x \in [1;\ 2]$	$h = 0{,}2$
33.	$y' = y - 2x$	$y(1) = 2$	$x \in [1;\ 2{,}2]$	$h = 0{,}3$
34.	$y' = 1 - x + y$	$y(1{,}1) = 1$	$x \in [1{,}1;\ 1{,}6]$	$h = 0{,}1$
35.	$y' = y - 7x$	$y(3) = 1$	$x \in [3;\ 5]$	$h = 0{,}5$

№ 7.2. Решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом конечных разностей

Используя метод конечных разностей, найти решение краевой задачи с шагом h=0,1:

1. $y'' + \dfrac{y'}{x} + 2y = x$
   $y'(0,7) = 0,5$
   $y'(1) = 1,2$

2. $y'' + 2y' - xy = x^2$
   $y'(0,6) = 0,7$
   $y'(0,9) = 1$

3. $y'' - xy' + 2y = x + 1$
   $y'(0,9) = 2$
   $y'(1,2) = 1$

4. $y'' - 3y' + \dfrac{y}{x} = 1$
   $y'(0,4) = 2$
   $y'(0,7) = 0,7$

5. $y'' + xy' + y = x + 1$
   $y'(0,5) = 1$
   $y'(0,8) = 1,2$

6. $y'' - 3y' - \dfrac{y}{x} = x + 1$
   $y'(1,2) = 1$
   $y'(1,5) = 0,5$

7. $y'' + 2y' - \dfrac{y}{x} = 3$
   $y'(0,2) = 2$
   $y'(0,5) = 1$

8. $y'' - \dfrac{y'}{2} + 3y = 2x^2$
   $y'(1) = 0,6$
   $y'(1,3) = 1$

9. $y'' + 1,5y' - xy = 0,5$
   $y'(1,3) = 1$
   $y'(1,6) = 3$

10. $y'' + 4y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x}$
    $y'(0,9) = 1$
    $y'(1,2) = 0,8$

11. $y'' + 2xy' - y = 0,4$
    $y'(0,3) = 1$
    $y'(0,6) = 2$

12. $y'' - \dfrac{y'}{2} + \dfrac{4}{x}y = \dfrac{x}{2}$
    $y'(1,3) = 0,3$
    $y'(1,6) = 0,6$

13. $y'' - 0,5xy' + y = 2$
    $y'(0,4) = 1,2$
    $y'(0,7) = 1,4$

14. $y'' - \dfrac{y'}{x} - 0,4y = 2x$
    $y'(0,9) = 1,7$
    $y'(0,6) = 0,6$

15. $y'' + \frac{2}{x} y' - 3y = 2$

$y'(0{,}8) = 1{,}5$

$y'(1{,}1) = 3$

16. $y'' - 2xy' - 2y = 0{,}6$

$y'(2) = 1$

$y'(2{,}3) = 1{,}5$

17. $y'' + 2xy' + y = 1$

$y'(0{,}5) = 1$

$y'(0{,}8) = 3$

18. $y'' - \frac{1}{2x} y' + 0{,}8y = 2$

$y'(2) = 1$

$y'(1{,}7) = 2$

19. $y'' - 3xy' + 2y = 1{,}5$

$y'(0{,}7) = 1{,}3$

$y'(1) = 2$

20. $y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2$

$y'(1) = 1$

$y'(0{,}7) = 1{,}6$

21. $y'' - \frac{2}{x} y' - 0{,}4y = 4x$

$y'(0{,}9) = 1{,}5$

$y'(0{,}6) = 0{,}6$

22. $y'' + 2y' - \frac{1}{x} y = \frac{2}{x}$

$y'(1{,}1) = 0{,}8$

$y'(0{,}8) = 1$

23. $y'' - xy' - 4y = 0{,}6$

$y'(2) = 1$

$y'(2{,}3) = 3$

24. $y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2}{x} y = \frac{x}{2}$

$y'(1{,}3) = 0{,}6$

$y'(1{,}6) = 0{,}3$

25. $y'' - \frac{2}{x} y' + 0{,}8y = x$

$y'(2) = 1$

$y'(1{,}7) = 2$

26. $y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$

$y'(0{,}7) = 0{,}5$

$y'(1) = 1{,}2$

27. $y'' - \frac{y'}{2} + xy = 4$

$y'(1) = 1{,}5$

$y'(0{,}7) = 2$

28. $y'' - xy' + 2y = x + 1$

$y'(0{,}9) = 2$

$y'(1{,}2) = 1$

29. $y'' + xy' + y = x + 1$

$y'(0{,}5) = 1$

$y'(0{,}8) = 1{,}2$

30. $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$

$y'(0{,}2) = 2$

$y'(0{,}5) = 1$

№8. Решение задач линейного программирования

Найти решение задач линейного программирования графическим методом:

1. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. $f = -2x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. $f = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7. $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. $f = -7x_1 - 5x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 5x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0{,}5 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9. $f = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

10. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

11. $f=-x_1-x_2\to\min$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 2\\ 2x_1+x_2\le 2\\ -2x_1+2x_2\le 1\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

12. $f=2x_1+3x_2\to\max$

$$\begin{cases} x_1-5x_2\le 5\\ -x_1+x_2\le 4\\ x_1+x_2\le 8\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

13. $f=x_1+x_2\to\max$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 4\\ x_1-2x_2\le 2\\ -2x_1+x_2\le 1\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

14. $f=x_1+2x_2\to\max$

$$\begin{cases} -2x_1+5x_2\le 10\\ 5x_1+3x_2\le 15\\ x_1+2x_2\le 5\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

15. $f=2x_1+x_2\to\max$

$$\begin{cases} -x_1+x_2\le 2\\ x_1+2x_2\le 7\\ 4x_1-3x_2\le 6\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

16. $f=3x_1+2x_2\to\max$

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\le 15\\ 2x_1+5x_2\le 10\\ -x_1+3x_2\le 3\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

17. $f=-x_1-x_2\to\min$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 8\\ -3x_1+x_2\le 3\\ 2x_1-3x_2\le 6\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

18. $f=-6x_1-x_2\to\min$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 7\\ -x_1+2x_2\le 1\\ 2x_1-x_2\le 5\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

19. $f=8x_1+2x_2\to\max$

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2\le 12\\ -2x_1+x_2\le 1\\ 2x_1+x_2\le 5\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

20. $f=x_1+2x_2\to\max$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 14\\ -5x_1+3x_2\le 15\\ 4x_1+6x_2\le 24\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

21. $f=2x_1+x_2\to\max$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2\le 2\\ -x_1+x_2\le 2\\ x_1+x_2\le 3\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

22. $f=-2x_1-x_2\to\min$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2\le 12\\ -x_1+2x_2\le 8\\ 3x_1+2x_2\le 6\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{cases}$$

23. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

24. $f = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

25. $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 12x_1 - 5x_2 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

26. $f = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

27. $f = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 8 \\ -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

28. $f = -7x_1 - 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 - 5x_2 \le 5 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

29. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

30. $f = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

31. $f = mx_1 + nx_2 - 1 \to \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + \dfrac{m}{2}x_2 - m \le 0 \\ \dfrac{m}{2}x_2 + 2x_1 - \dfrac{7}{2}m \le 0 \\ 3x_1 - \dfrac{m}{4}x_2 - \dfrac{9}{4}m \le 0 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

m – вариант

n – номер группы