Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

Д. СЕРІКБАЕВ АТЫНДАҒЫ ШЫҒЫС ҚАЗАҚСТАН
МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

М.А.Тұрғанбаев, Д.А.Омариева

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

050731 - « Өмір қауіпсіздігі және қоршаған ортаны қорғау», 050711 - «Геодезия және картография», 050707 - «Тау-кен ісі», 050709 - «Металлургия», 050903 - «Жерге орналастыру» мамандықтарында сырттай оқитын I курс студенттеріне бақылау тапсырмаларын орындауға арналған жұмыс бағдарламасы, әдістемелік нұсқаулар

Өскемен
2008

УДК 517

Тұрғанбаев М.А., Жоғары математика.: 050731 - « Өмір қауіпсіздігі және қоршаған ортаны қорғау», 050711 - «Геодезия және картография», 050707 - «Тау-кен ісі», 050709 - «Металлургия», 050903 - «Жерге орналастыру» мамандықтарында сырттай оқитын I курс студенттеріне бақылау тапсырмаларын орындауға арналған жұмыс бағдарламасы, әдістемелік нұсқаулар. / Тұрғанбаев М.А., Омариева Д.А. / ШҚМТУ.- Өскемен, 2008.- 68 бет.

Әдістемелік нұсқауда қысқаша теориялық мағлұматтар, сызықтық алгебра мен аналитикалық геометрия, математикалық анализ курсына кіріспе тараулары бойынша бақылау жұмысын орындауға септігін тигізетін мысалдар мен бақылау жұмысының есептері көрсетілген. Әдістемелік нұсқау 050731 - « Өмір қауіпсіздігі және қоршаған ортаны қорғау», 050711 - «Геодезия және картография», 050707 - «Тау-кен ісі», 050709 - «Металлургия», 050903 - «Жерге орналастыру» мамандықтарында сырттай оқитын студенттердің өз бетімен жұмыс істеуіне арналған.

Тау-кен металлургия факультетінің әдістемелік кеңесінде құпталған.

Әдістемелік комиссия төрағасы

Хаттама № 2008 ж.

МАЗМҰНЫ

Кіріспе.....5
1 Жоғары математика курсы бойынша жұмыстар орындауға сырттай оқитын студентке жалпы нұсқаулар.....6

2 Жоғары математика курсының жұмыс бағдарламасы.....8
2.1 Сызықты алгебра элементтері мен аналитикалық геометрия. Анықтауыштар, олардың қасиеттері.....8
2.2 Комплекс сандар.....8
2.3 Математикалық талдауға кіріспе.....8
2.4 Бір айнымалы функцияны дифференциалдық есептеу.....8
2.5 Туындының көмегімен функцияны зерттеу.....9
2.6 Анықталмаған интеграл.....9
2.7 Анықталған интеграл.....9

3 Жоғары математика курсын оқытудағы әдістемелік нұсқау.....11

4 Бірінші бөлім бойыеша бақылау сұрақтары.....13

5 №1 бақылау жұмысты орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар.....16
5.1 Комплекстік сандар.....22
5.2 Функция туралы ұғым.....24
5.3 Функцияның шегі.....24
5.4 Шегі бар функциялардың қасиеттері.....25
5.5 Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі.....26
5.6 Тамаша шектер.....27

6 №2 бақылау жұмысты орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар.....31
6.1 Функцияның туындысы, оның геометриялық және механикалық мағынасы.....31
6.2 Қарапайым функциялардың туындыларының кестесі.....32
6.3 Параметрлік тәсілмен берілген және айқындалмаған тәсілмен берілген функциялардың туындысы.....32
6.4 Функцияның дифференциалы.....33
6.5 Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар.....34

7 Туындының көмегімен функцияны зерттеу және оның графигін тұрғызу.....37
7.1 Функцияның өсуі және кемуі. Экстремумы.....37
7.2 Экстремумның қажетті шарты.....37
7.3 Экстремумның жеткілікті шарты.....37
7.4 Функцияның дөңестігі және ойыстығы. Иілу нүктелері.....37
7.5 Функцияның асимптоталары.....38

7.6 Функцияның графигін тұрғызудың жалпы жобасы....................................39
7.7 Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері...........................43

8 Бір айнымалы функцияны интегралдық есептеу.. 45
8.1 Негізгі ұғымдар мен формулалар...45
8.2 Алғашқы интеграл және анықталмаған интеграл.......................................45
8.3 Анықталиаған интегралдың негізгі қасиеттері..46
8.4 Анықталмаған интегралдың негізгі кестесі...46
8.5 Интегралдаудың негізгі тәсілдері...47
8.6 Негізгі қарапайым функциялар тобын интегралдау...................................47
8.7 Анықталған интеграл...48
8.8 Анықталған интегралдың қолданыстары..50
8.9 Есепті шығару мысалдары...53

9 №1 бақылау жұмысының тапсырмалары..62

10 №2 бақылау жұмысының тапсырмалары..66

Тапсырмалар кестесі...71

КІРІСПЕ

Ұсынылып отырған әдістемелік нұсқау мен тапсырмалардың негізгі мақсаты сырттай оқитын студенттерге бақылау жұмыстарын көрсетілген тақырыптар бойынша, өз беттерімен орындауға көмек көрсету болып табылады.

Студенттер өз бетімен шығаратын есептерге ұқсас типтік есептерді шығаруға баса көңіл бөлінген. әдетте студенттер бақылау жұмыстарын орындамай тұрып, оларға қажетті теориялық материалдармен таныс болады деп ұйғарсақ та, әрбір бөлімдерден кейінқысқаша теориялық түсініктеме материалдар берілген.

Жоғарғы математиканы оқыту нәтижесінде студенттің логикалық және алгоритмдік ой өрісі дамытылады, математикалық білімін өзінше ұлғайта білуі қалыптастырылады. Инженерлік есептердің матемаикалық зерттеуін жүргізе білуі және өз мамандығындағы есептерге математикалық әдістерді қолдана білуі үйретіледі

Оқытылатын жоғарғы математика курсының көлемі мен мазмұны ГОСО.РК.3.08.118-2004 жоғарғы білім оқу әдістемелік басқармасы бекіткен стандартқа сәйкес негізінде құралған жұмыс бағдарламасымен анықталған.

1 ЖОҒАРҒЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫ БОЙЫНША ЖҰМЫСТАР ОРЫНДАУҒА СЫРТТТАЙ ОҚИТЫН СТУДЕНТКЕ ЖАЛПЫ НҰСҚАУЛАР

Бірінші курста сырттай оқитын студенттер №1,2 екі бақылау жұмысын орындайды(1- бөлім бойынша). №1 бақылау жұмысын орындау үшін, негізгі оқулықтарда көрсетілген 1,2,3,4 тарауларды ынта қойып, оқып алу керек. №2 бақылау жұмысын орындау үшін оқулықтарда көрсетілген 5,6 тараулардызер салып, үлкен ынта қойып, оқып алу керек.

Әрбір бақылау жұмыстарды орындау үшін, жеке дәптер алу керек. Әрбір жұмыс үшін жоғарыда көрсетілген тарауларды және әдістемелік нұсқауда көрсетілген мысалдардың шешімін толық түсініп алу керек. №1,2 бақылау жұмысын орындағанда тексеретін оқытушы үшін 3-4 см орын(поля) қалдыру керек.

Бақылау жұмыстағы көрсетілген қателіктерді тез арада жөндеп қайтадан оқытушыға қайтып беру керек. Әрбір студент жұмысты өз бетімен орындауы міндетті.

Сырттай оқитын студенттің бақылау жұмысының нөмірі, оның сынақ кітапшасында көрсетілген нөмірінің ақырғы цифрына сәйкес алыну керек, егерде бұл шарт орындалмаса, онда бақылау жұмысын оқытушы тексермейді және студент емтиханға жіберілмейді. Егерде студент бақылау жұмысын орындауда түсініксіз жерлері болса, онда оқытушыға сұрақ қойып, түсініксіз жерлерін біліп алуға болады. №1,2 бақылау жұмыстарын орындағанда мына тарауларды толық оқып меңгеріп алғаннан соң ғана кірісуге болады.

Олар мыналар:

1) Сызықты алгебра элементтері мен аналитикалық геометрия. Анықтауыштар, олардың қасиеттері
2) Комплекс сандар.
3) Математикалық талдауға кіріспе.
4) Сандық тізбектер және олардың шектері.
5) бір айнымалы функцияны дифференциалдық есептеу.
6) Туынды арқылы функцияны зерттеу.
7) Анықталған интеграл және анықталған интеграл және оның қолданылуы.

Негізгі оқулықтар

1. С.Б. Әубәкір. Жоғарғы математика I және II бөлімдер. Алматы.2000 ж
2. О. Жаутіков. Математикалық анализ курсы.
3. Қ. Қабдырқайыров. «Жоғарғы математика курсы».
4. Есмұханов М. «Математикалық талдау».
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии – М:Наука, 1980, 1984, 1988.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное ночисления. – М:Наука, 1980, 1984, 1988.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М:

Наука, 1970, 1985, Т.1,2.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах – М: Высш.шк.1985, Т.1,2.
9. Сборник задач по математике для ВТУЗОВ. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под. ред. А.В. Ефимова, В.П. Демидовича – М.Наука 1981, 1986, ч.1, 2, 3.
10. Шипачев В.С. Высшая математика М. Высшая школа 1985

2 ЖОҒАРҒЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫНЫҢ ЖҰМЫС БАҒДАРЛАМАСЫ

2.1 Сызықты алгебра элементтері мен аналитикалық геометрия. Анықтауыштар, олардың қасиеттері

Сызықты теңдеулер жүйесін шешу. Крамер ережесі. Сызықты теңдеулер жүйесін шешудің матрицалық әдісі.

Векторлар. Векторларға сызықты амалдар қолдану. Вектордың координат өсіне проекциясы. Орт Векторлар. Жазықтықтағы түзулер. Кеңістіктегі түзулер және координаталар жүйесі. Базис. Полярлық координаталар жүйесі. Векторлардың скалярлық, векторлық, аралас көбейтінділері. Екінші ретті қисықтар, эллипс, гипербола, парабола. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың теңдеулері. Түзулер мен жазықтықтардың арасындағы байланыстар. Кеңістіктегі екінші ретті беттер.

2.2 Комплекс сандар

Комплекс сандар. Комплекс санның модулі мен аргументі. Комплекс санның алгебралық және тригонометриялық тұлғасы. Комплекс сандардың түбірлері.

2.3 Математикалық талдауға кіріспе

Нақты сандар жиыны. Функция, оның анықталу облысы, берілу тәсілдері. Негізгі элементар функциялар, олардың графиктері. Элементар функцияларды жікке бөлу.

Сандық тізбектің шегі. Функцияның нүктедегі, шексіздіктегі шегі. Тамаша шектер. Шексіз шама, олардың қасиеттері мен салыстырулары. Функцияның нүктедегі және интервалдағы үзіліссіздігі. Негізгі элементар функциялардың үзіліссіздігі, кесіндіде үзіліссіз функциялардың қасиеттері.

2.4 Бір айнымалы функцияны дифференциалдық есептеу

Функцияның туындысы, оның геометриялық және механикалық мағналары. Функцияны дифференциалдаудағы негізгі ережелері. Күрделі функцияның туындысы. Негізгі элементар функциялардың туындылары. Функцияның дифференциалы, оның туындымен байланысы. Функцияның дифференциалын жуықтау есептеуге қолдану. Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалар: теорема ферма, Ролль теоремасы, Коши теоремасы, Лагранж теоремасы, Лопиталь ережесі. Лагранж тұлғасындағы қалдық мүшесі болатын Тейлор формуласы. Finx, cosx, e^x, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, arctgx функцияларын Маклорен формуласымен өрнектеу. Тейлор формуласының қолданыстары.

2.5 Туындының көмегімен функцияны зерттеу

Функцияның өсу және кему шарттары. Функцияның экстремум нүктелері. Экстермум болуының қажетті және жеткілікті шарттары. Функцияның қисығынан тік және көлбеу асимптоталарын табу формулалары .

Кесіндідегі үзіліссіз функцияның ең үлкен ең кіші мәндері. Функцияны экстремумға екінші ретті туындының көмегімен зерттеу. Функцияның ойыстағы мен дөңестігі. Функцияның графигінің иілу нүктелері. Функцияның толық зерттеп графигін тұрғызудың жалпы жобасы.

2.6 Анықталмаған интеграл

Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл оның қасиеттері. Тікелей интегралдау. Интегралды бөлектеп интегралдау және айнымалыны алмасытру тәсілдері. Рационал функцияларды интегралдау, тригонометриялық және ирроционал өрнектерді интегралдау.

2.7 Анықталған интеграл

Анықталған интеграл, оның қасиеттері.

Ньютон-Лейбниц формуласы. Анықталған интегралды есептеудің негізгі тәсілдері. Шексіздік шегі бар және шектелмеген функциялардың дәйексіз интегралдары. Дәйексіз интегралдың жинақтылық белгілері. Анықталған интегралдың қолданулары. e^x, sinx,cosx, ln(1+x) функцияларын Тейлор формуласымен жіктеу, кесіндіде үзіліссіз функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуды, практикалық есептерді шығаруда қолдану.

2.5 Тақырып

Оқулық [6] тарау 8 §§1-9, 11, 12 ,15-17 немесе [10] тарау 6 §§4,6 [7] тарау 5 §§1-7, 9-11.

Функцияның анықталу облысын, функцияның өсу кему аралықтарын анықтауды, экстремумның қажетті және жеткілікті шарттарын, функция графигінің ойыс және дөңес болу анықтамасын, функцияны толық зерттеу жобасын білу қажет. Функцияның графигінің ойыс және дөңес аралықтарын, иілу нүктелерін, асимптоталарын табу; берілген функцияның жүргізілген зерттеулерге байланысты графигін салуды орындай алу керек.

2.6 Тақырып

Оқулық [7] тарау 10 §§1-3, немесе [1] тарау 7 §7.1, 2, 3. §7.2. §7.3, §7.5. Жаттығулар 1-30.

Бұл тарауда, негізінен, дифференциалдық есептеу, яғни белгілі $f^{1}(x)$ туындысы бойынша, f(x) функциясының өзін табу жолдары қарастырылады, демек алғашқы функцияны анықтау. Анықталған интеграл мен оның қасиеттерін, негізгі интегралдар кестесін, бөлектеп интегралдау формуласын; дұрыс рационал бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктеуді меңгеру керек. Интегралдаудың мақсаты; берілген интегралды белгілі тәсілдер брйынша кестелі интегралға келтіру немесе өте жеңіл шешілетін қарапайым функцияларға келтіру. Интегралды шешудегі көп қолданатын әдіс айнымалыларды алмастыру әдісі. Интегралды шешу дегеніміз алғашқы функцияны табу. Иррационал және тригонометриялық өрнектерді интегралдауды орындай алуы өте қажет.

2.7 Тақырып

Оқулық [7] тарау 11 §§1-6, жаттығулар 8, 11, 13, 16, 23, 24 §7- жаттығулар 31,34,35,37,39. Тарау 12 §1. Жаттығулар 1, 3, 5, 7, 9, 11 §2 §жаттығулар 13, 15, 17, 18, §3. жаттығулар 38, 39, 41, 43, 47. §§4,5 жаттығулар 20, 21, 22, 23, 25, 32. §6 жаттығулар 49, 51, 53, 55.

Анықталған интегралдың анықтамасын және қасиеттерін, Ньютон Лейбниц формуласын, бөлектеп және айнымалыларды алмастыру формулаларын, аудандары есептеу, доғаның ұзындықтарын есептеу, көлемді есептеу формулаларын оқып алу керек.

2.4, 2.5, 2.6, 2.7 тақырыптарды толық меңгеріп алғаннан соң, студент №2 бақылауды орындау керек.

3 ЖОҒАРҒЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫН ОҚЫТУДАҒЫ ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУ

Жоғарғы математиканы оқытуда, математика тақырыптарға бөлінген. Квадрат жақшаның ішіндегі номерлер екі тарауда келтірілген оқулықтар тізіміндегі құралдың нөмірі.

2.1 Тақырып.

Оқулық [5] §1-3, 5, 7-11 немесе [10] тарау 1 §§1-3.

2.2 Тақырып.

Оқулық [7] тарау 7 §§1 -3,5 немесе [8] тарау 5 §7.

Комплекс сандардың анықтамасы мен қасиеттері, Эйлер формуласын білу керек. Комплекс сандарды алгебралық, тригонометриялық көрсеткіштік тұлғада жаза білу, комплекс сандарды қосу, көбейту, бөлу, комплекс сандарды қосу, көбейту, бөлу, комплекс сандардың түбір табуды орындай алу керек.

2.3 Тақырып.

Оқулық [7] тарау 1 §§1-9: [10] тарау 1 §§1 -3,5, тарау 4 §§1-12.

Функцияның анықтамасын, негізгі элементар функциялар мен олардың графиктерін монотонды, шектелген, күрделі және кері функциялардың анықтамасы, функциялардың нүктедегі, шексіздіктегі шегінің анықтамасын, шектердің қасиеттерін, шексіз аз шама мен оның қасиеттерін, бірінші және екінші тамаша шектерді, функцияның нүктедегі үзіліссіздігін, нүкте мен кескінді де үзіліссіз болатын функцияның қасиеттерін; үзіліс нүктелерінің бөліну кластарын білу керек.

Функцияның анықталу облысын табу, бірінші және екінші тамаша шектердің және шектердің қасиеттерінің көмегімен қарапайым шектерді табу тәсілдерін толық біліп алу орынды және қажетті.

2.1, 2.2, 2.3 тақырыптарды толық меңгеріп, алғаннан соң, студент №1 бақылауды орындауды керек.

2.4 Тақырып.

Оқулық [6] тарау 4, 8, 9 §§1-11 тарау 6 §§1-3 немесе [10] тарау 5 §§1-11.

Туындының анықтамасын, туындының геометриялық және механикалық мағынасын; қосынды, көбейтінді, бөлшектерді дифференциалдау ережелерін, элементар функциялардың туындыларын, күрделі және кері функцияларды дифференциалдау ережелерін, дифференциалдың анықтамасымен геометриялық мағынасын, қисықта жатқан нүктеге жүргізілген жанамамен нормальдің теңдеулерін және Ферма, Ролль, Лагранжа, Коши теоремаларын Тейлор, Маклорен формулаларын тиянақты оқып біліп алу міндет.

Функциялардың жоғарғы ретті туындыларын есептеу, оның ішінде айқындалмаған және параметрлік тәсілмен берілген функциялардың туындыларын есептеу және осы тақырыптарға берілген функциялардың туындыларын дұрыс тауып, бақылау есептеріне мұқият қарау керек. Шектерді есептегенде Лопиталь ережесін қолдану.

4 БІРІНШІ БӨЛІМ БОЙЫНША БАҚЫЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар, олардың негізгі қасиеттері.
2. Минор мен алгебралық толықтауыштар. Жоғарғы ретті анықтауыштарды есептеу.
3. Теңдеулер жүйесін шешудегі Крамер формуласы.
4. Үш белгісізі бар біртекті сызықты теңдеулер жүйесі.
5. Анықтауыштар бойынша теңдеулер жүйесін зерттеу.
6. Матрицалар. Оларға қолданатын амалдар. Кері матрица туралы ұғым.
7. Матрицаның рангісі, оны есептеу тәсілі. Кронекер-Капелли теоремасы.
8. Сызықты теңдеулер жүйесінің матрицалық жазылуы және оның шешімі.
9. Векторлар және оларға амалдар қолдану.
10. Векторлардың перпендикуляр параллель орналасуы.
11. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі базис. Векторды базис бойынша жіктеу. Берілген базистегі вектордың координаталары.
12. жазықтықтағы және кеңістіктегі тік бұрышты декарт координаталары. Екі нүктенің ара қашықтығы.
13. Координаталармен берілген векторпларға сызықты операциялар. Вектордың координаталарын алғашқы және соңғы нүктелердің координаталарымен өрнектеу.
14. Полярлық координаталар, олардың декарт координаталарымен байланысы.
15. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі, оның қасиеттері және көбейткіштердің координаталары арқылы өрнектеу.
16. Векторлардың векторлық көбейтіндісі, оның қасиеттері, көбейткіштердің координаталары арқылы өрнектеу.
17. Векторлардың аралас көбейтіндісі және оның үшінші анықтауыш арқылы жазылуы. Аралас көбейтіндінің геометриялық мағынасы.
18. Векторлардың коллинеарлық, компланарлық шарттары және ұзындығы.
19. Радиус вектордың бағыттауышы косинустары.
20. Кеңістіктегі және жазықтықтағы түзулер және олардың теңдеулері. Бұрыштық коэффициент туралы ұғым.
21. Жазықтықтағы түзудің әртүрлі теңдеулері.
22. Кеңістіктегі түзудің әртүрлі теңдеулері.
23. Жазықтың әртүрлі теңдеулері.
24. Эллипстің канондық теңдеуі және геометриялық қасиеттері.
25. Гиперболаның канондық теңдеуі және геометриялық қасиеттері.
26. Параболаның канондық теңдеуі және геометриялық қасиеттері.
27. Екінші ретті бөлшектердің канондық теңдеулері.
28. Нақты сандар. Нақты сандардың абсолюттік шамасы және оның қасиеттір.
29. Функция. Анықталу облысы. Қарапайым функциялардың кластарға бөлінуі.

30. Сандық тізбектер. Олардың шегі. Жинақты тізбектердің қасиеттері.

31. Функцияның нүктедегі және шексіздіктегі шегі.

32. Шексіз үлкен шамалар. Шектелген функциялар.

33. Шексіз аз шамалар, олардың қасиеттерімен салыстырулары.

34. Шектер туралы негізгі теоремалар.

35. Тамаша шекте, «е» саны, натурал логарифмдер.

36. Функцияның үзіліссіздігі. Нүкте мен кесіндіде үзіліссіз функциялардың қасиеттері.

37. Функцияның нүктедегі біржақты шектері. Функцияның үзіліссіз нүктелері және оларды жікке бөлу.

38. Функцияның туындысы, оның геометриялық және механикалық мағыналары. Туындылау ережелері.

39. Қарапайым функциялардың туындылары.

40. Күрделі функцияның туындысы.

41. Кері функция, оның туындысы. Кері тригонометриялық функциялардың туындысы.

42. Дифференциалданатын функциялардың үзіліссіздігі.

43. Функцияның дифференциалы туралы ұғым, оның геометриялық мағынасы және қасиеттері.

44. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану.

45. Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар, Лейбниц формуласы.

46. Ролль теоремасы.

47. Лагранж теоремасы.

48. Коши теоремасы.

49. Анықталмағандықтарды ашу үшін, Лопиталь ережесін қолдану.

50. Лагранж түріндегі қалдық мүшесі бар Тейлор формуласы.

51. Функцияның аралықтағы өсу және кему шарттары.

52. Функцияның экстремумы. Экстремумның бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары.

53. Функцияны оның графигінің ойыс және дөңес болуына зерттеу.

54. Қисықтардың тік және көлбеу асимптоталары.

55. Функцияны толық зерттеп, оның графигін тұрғызу.

56. Комплекс сандар. Комплекс санының алгебралық, тригонометриялық және көрсеткішті түрлері.

57. Комплекс сандарға жасалатын арифметикалық амалдар.

58. Эйлер формуласы. Комплекс саннан n-дәрежелі түбір табу.

59. Алғашқы функция, анықталмаған интеграл, оның қасиеттері.

60. Негізгі интегралдар кестесі.

61. Анықталмаған интегралды шешудегі негізгі тәсілдер: а) айнымалыны алмастыру; б) анықталмаған интегралды бөлектеп интегралдау.

62. Рационал функцияны интегралдау.

63. Иррационал функцияларды интегралдау.

64. Тригонометриялық өрнектерді интегралдау.

65. Анықталған интеграл, оның қасиеттері.

66. Анықталған интегралды есептеудегі Ньютон-Лейбниц формуласы. Анықталған интегралды бөлектеп және айнымалыны алмастыру әдістерімен шешу.

67. Дәйексіз интеграл, оның жинақты және жинақсыз болу белгілері.

68. Анықталған интегралдың қолданулары.

Келтірілген сұрақтардан, сырттай оқитын курс студенттеріне арналып емтиханның тесттілері дайындалған.

5 №1 БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСТЫ ОРЫНДАУҒА АРНАЛҒАН ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

Вектор туралы ұғым математиканың өзінде және оған сыбайлас пәндерді оқығанда өте жиіқолданылады. Сол себептен, негізгі анықтамаларға, векторға қолданатын амалдарға өте ұқыпты көңіл бөлу керек. Оқулықтарда көрсетілгендей біздерге компланар емес үш вектор берілсін: $\vec{a}$, $\vec{в}, \vec{c}$, онда осы үш векторды $\vec{d} = x\vec{a} + y*\vec{b} + z*\vec{c}$ (1) түрінде жіктеуге болады. Егерде $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ өзара перпендикуляр бірлік векторлар берілсе, онда $\vec{d} = x*\vec{i} + y*\vec{j} + z\vec{k}$ (2). Мұндағы x, y, z, $\vec{d}$ - векторының координаты болып саналады, сонда (1) теңдік, $\vec{d}$ - векторының $\vec{a}$, $\vec{в}, \vec{c}$ векторларының сызықтық комбинациясы болып саналады. Сонымен, x, y, z, $\vec{d}$ - векторының координаты былай жазылады, демек $\vec{d} = \{x; y; z\}$. Егерде екі нүкте берілсе $A(x_1,y_1,z_1)$ және $B(x_2,y_2,z_2)$, онда $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ (3) түрінде жазылады. Бізге екі вектор берілсе, $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, онда $(\vec{a} + \vec{b}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$ (4); $(\vec{a} - \vec{b}) = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$ (5). $\vec{a}\lambda = \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k}$, (6). Мұндағы λ - кез-келген тұрақты сан. Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп, мына теңдікті айтады $((\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\bar{a} \hat{\cdot} \bar{b})$, (7). Координаттық түрде $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ (8). Егерде $\bar{a} = \bar{b}$ болса, онда скалярлық көбейтінді $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2$ (9). Вектордың ұзындығы $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (10) формуласымен анықталады.

Екі вектордың арасындағы бұрыш $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a} \cdot \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$ (11), немесе координаттық түрде , $\cos\varphi = \dfrac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2)}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ (12), мұндағы $\cos\varphi = (\bar{a} \hat{\cdot} \bar{b})$.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі мына формуламен анықталады $|\bar{c}| = \left|[\bar{a} \cdot \bar{b}]\right| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\bar{a} \hat{\cdot} \bar{b})$ (13). Екі вектор өзінің координаттарымен берілсе, онда $[\bar{a} \cdot \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}$ (14).

Бір нүктеден шығатын екі вектордың құрылған үшбұрыштың ауданы мына формуламен анықталады.

$$S = \frac{1}{2}\left|[\overline{a} \cdot \overline{b}]\right| \tag{15}$$

Үш вектордың $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ аралас көбейтіндісі сан, екі вектор векторына көбейтіледі $[\overline{a} \cdot \overline{b}]$, ал үшінші векторға $\overline{c}$ скалярна және ол былай жазылады.

$$\left[\overline{a} \cdot \overline{b}\right] \cdot \overline{c} = (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Осы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ векторларынан құрылған параллелепипедтің V - көлемі мына формуламен анықталады.

$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ (17) формуласымен анықталады. Ал үшбұрышты пирамиданың көлемі тең

$V_{пир} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ (18) формуласымен анықталады.

Өзінің координаттарымен немесе проекцияларымен берілген, екі вектордың коллинеар (параллель) болу шарты: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ (19).

Екі вектордың компланар болуының қажетті және жеткілікті шарты:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

Кеңістіктегі жазықтықтың және түзудің негізгі формулаларын жазамыз.

1. Жазықтықтың жалпы теңдеуі Ax+By+Cz+D=0 (21).
2. Координаттық түрде берілген жазықтықтың нормальдық теңдеуі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{22}$$

3. Жазықтықтың жалпы теңдеуін (21)-ді нормальдық түрге (22)-ге келтіру үшін, оны нормальдық көбейткішке $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (23) көбейту керек екі жағында. Мұндағы көрсетілген ± таңбаны алу (21) теңдеудің бос мүшесінің

D таңбасына қарама-қарсы болу керек.

4. Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{24}$$

Берілген $M_1(x_1,y_1,z_1)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \tag{25}$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_1(x_2,y_2,z_2)$ және $M_1(x_3,y_3,z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі. Бір түзудің бойында жататын нүктелер.

$$\begin{vmatrix} (x-x_1) & (y-y_1) & (z-z_1) \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ (x_3-x_1) & (y_3-y_1) & (z_3-z_1) \end{vmatrix}=0 \tag{26}$$

7. Жазықтықтан $M_1(x_1,y_1,z_1)$ нүктесіне дейінгі қашықтық d мына формуламен анықталады.

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+d}{\sqrt{A^2+B_2+C^2}}\right| \tag{27}$$

8. Екі жазықтықтың $Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0$ арасындағы бұрыш мына формуламен анықталады:

$$cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{28}$$

9. Екі жазықтықтың параллель болу шарты

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{29}$$

10. Екі жазықтықтың перпендикуляр болу шарты

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0 \tag{30}$$

11. Түзудің канондық теңдеуі

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{31}$$

Мұндағы a, b, c – M_0 нүктесінің координатасы түзудің үстінде жатқан, x, y, z түзудің ағым координаты, m, n, p – бағыттаушы вектордың координаты.

12. Түзудің параметрлік теңдеуі

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \quad \text{Мұндағы t - айнымалы параметр} \\ z = pt + c \end{cases} \qquad (32)$$

13. Кеңістіктегі екі нүкте $M_1(x_1, y_1, z_1)$ және $M_2(x_2, y_2, z_2)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (33)$$

14. Екі түзудің $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ және $\frac{x - a_2}{m_2} = \frac{y - b_2}{n_2} = \frac{z - c_2}{p_2}$ арасындағы бұрыш мына формуламен анықталады.

$$\cos\varphi = \frac{(m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2)}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (34)$$

15. Түзумен $\frac{(x - a)}{m} = \frac{(y - в)}{n} = \frac{(z - c)}{p}$ және жазықтықтың AX+BУ+CZ+D=0 бұрыш мына

$$\sin\varphi = \frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (35)$$

Мысал 1. Қандай да бір базисте төрт вектор берілген $\overline{a} = \{2:3:\}, \overline{в} = \{7;14;25\}, \overline{c} = \{13;12;16\}$ және $\overline{d} = \{27;11;3\} \cdot \overline{a}, \overline{в}, \overline{c}$ векторларының базис құратындығын дәлелдеу керек және осы базисте $\overline{d}$ - векторының координаталарын табу керек. Алынған теңдеулер жүйесін мына әдістердің біреуімен шешу керек: а) Крамер ережесімен; б) матрица әдісімен.

Шешуі. $\overline{a}, \overline{в}, \overline{c}$ векторларынан анықтауыш құрамыз

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix} = 448 + 420 + 975 - 910 - 336 - 600 = 1843 - 1846 = -3$$

Δ=-3$\neq$0. Сондықтан $\Delta \neq 0$, онда $\overline{a}, \overline{в}, \overline{c}$ векторы компланар емес, сондықтан векторлар базис құрайды. Сондықтан (1) формула бойынша, жаңа базисте $\overline{d} = -x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{в} + z \cdot \overline{c}$ немесе $\{27:11:3\} = \{2x;3x:5x\} + \{7y;14y;25y\} + \{13z;12z;16z\}$. Векторларды қосып және бір атты координаталарын теңестіріп мына жүйені аламыз.

$$\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 27 \\ 3x + 14y + 12z = 11 \\ 5x + 25y + 16z = 3 \end{cases}$$

Енді Крамер әдісі бойынша шыққан жүйені шешеміз.

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta};\ \mathrm{y}=\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta};\ \mathrm{z}=\frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 7 & 13\\ 3 & 14 & 12\\ 5 & 25 & 16\end{vmatrix}=-3;\ \Delta_{\mathrm{x}}=\begin{vmatrix}27 & 7 & 13\\ 11 & 14 & 12\\ 3 & 25 & 16\end{vmatrix}=6048+252+3575-546-1232-$$

$$-8100=9875-9878=-3$$

$$\Delta_x=-3\ \ \mathrm{x}=\frac{-3}{-3}=1$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 27 & 13\\ 3 & 11 & 12\\ 5 & 3 & 16\end{vmatrix}=252+1620+117-715-1296-72=2089-2083=6$$

$$y=\frac{\Delta_{\mathrm{y}}}{\Delta}=\frac{6}{-3}=-2$$

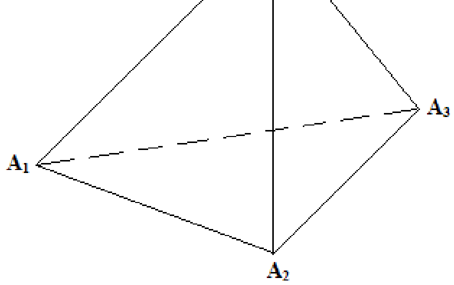
$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & 7 & 27\\ 3 & 14 & 11\\ 5 & 25 & 3\end{vmatrix}=84+385+2025-1890-550-63=2494-2503=-9$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-9}{-3}=3$$

Сонымен, $\overline{d}=\{1;-2;-3\}$ $\overline{d}=\overline{a}\text{-}2\overline{в}+3\overline{c}$.

<u>Мысал 2.</u> Үшбұрышты пирамиданың $A_1A_2A_3A_4$ төбелерінің коородинаталары берілген $A_1(-4;\ 5;\ 1)$, $A_2(2;\ 7;\ -2)$, $A_3(5;\ -6;\ -4)$; $A_4(-4;\ 6;\ 4)$.Табу керек: 1) A_1A_2 қырының ұзындығын; 2) A_1A_2 және A_1A_4 қырларының арасындағы бұрыштың косинусын; 3) $A_1A_2A_3$ жағымен A_1A_4 қырының арасындағы бұрышын; 4) $A_1A_2A_3$ – жағының ауданын; 5) пирамиданың көлемін; 6) A_1A_2 түзуінің теңдеуін; 7) $A_1A_2A_3$ – жазықтығының теңдеуін; 8) A_4 – нүктесінен $A_1A_2A_3$ жа,ына түсірілген биіктіктің теңдеуін. Пирамиданың сызбасын сызу керек.

Шешуі.



1) $\overrightarrow{A_1A_2}$ векторын жіктейміз.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = [2-(-4)]\bar{i} + [7-5]\bar{j} + [-2-1]\bar{k} = 6\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}.$$

A_1A_2 қырының ұзындығы $\overrightarrow{A_1A_2}$ векторының ұзындығына тең болады. (10) формула бойынша $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$.

2) $\overrightarrow{A_1A_4}$ векторын жіктейміз

$$\overrightarrow{A_1A_4} = [-4+4]\bar{i} + [6-5]\bar{j} + [4-1]\bar{k} = \bar{j} + 3\bar{k}.$$

$\overrightarrow{A_1A_2} = 6\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ және $\overrightarrow{A_1A_4} = \bar{j} + 3\bar{k}$ векторларының арасындағы бұрыш $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \dfrac{6\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-3)\cdot 3}{\sqrt{36+4+9}\cdot\sqrt{1+9}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

3) A_1A_4 қырымен және $A_1A_2A_3$ жағының арасындағы бұрыш (35) формуламен табылады. (A_1A_4)-түзуінің теңдеуі: $\dfrac{x-(-4)}{-4-(-4)} = \dfrac{y-5}{6-5} = \dfrac{z-1}{4-1}$ немесе $\dfrac{(x+4)}{0} = \dfrac{(y-5)}{1} = \dfrac{(z-1)}{3}$

$A_1A_2A_3$ жазықтығы:

$$\begin{vmatrix} (x-(-4)) & (y-5) & (z-1) \\ (2-(-4)) & (7-5) & (-2-1) \\ (5-(-4)) & (-6-5) & (-4-1) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (x+4) & (y-5) & (z-1) \\ 6 & 2 & -3 \\ 9 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ Онда

$43(x+4) + 3(y-5) - 84(z-1) = 0$ немесе $43x - 3y + 84z + 103 = 0$

Онда

$$\sin\varphi = \frac{0\cdot 43 + 1\cdot(-3) + 3\cdot 84}{\sqrt{0^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{43^2+(-3)^2+84^2}} = \frac{249}{\sqrt{89140}};$$

$$\varphi = \arcsin\frac{249}{\sqrt{89140}}$$

4) $A_1A_2A_3$ жағының ауданы (15) формуламен есептелінеді

$\bar{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = 6\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ және $\bar{в} = \overrightarrow{A_1A_2} = 9\bar{i} - 11\bar{j} - 5\bar{k}$

(14) формула бойынша векторлық көбейтіндіні есептейміз.

$$[\bar{a}\cdot\bar{в}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ 9 & -11 & -5 \end{vmatrix} = -43\bar{i} + 3j - 84\bar{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}\cdot\bar{в}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-43)^2+3^2+(84)^2}=\frac{\sqrt{8914}}{2}$$

5) Пирамиданың көлемі (17) формула бойынша есептелінеді, мұндағы $\bar{a}=\overrightarrow{A_1A_2}=6\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}, \bar{в}=\overrightarrow{A_1A_2}=9\bar{i}-11\bar{j}-5\bar{k}$ және $\bar{c}=\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{j}+3\bar{k}$.

$$V_{пир}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}6 & 2 & -3\\ 9 & -11 & -5\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}6 & 2 & -9\\ 9 & -11 & 28\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$ Анықтауышты үшінші жолының элементтері бойынша жіктейміз.

$$V_{пир}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}6 & -9\\ 9 & 28\end{vmatrix}=\frac{(-249)}{6}=-41{,}5(куб.бірлік)$$

6) A1A2 түзуінің теңдеуін құрамыз, ол үшін (3-пункті қараңыз).

$$\frac{(x-(-4))}{2-(-4)}=\frac{(y-5)}{7-5}=\frac{(z-1)}{-2-1}$$ немесе $$\frac{(x+5)}{6}=\frac{(y-5)}{2}=\frac{(z-1)}{-3}\cdot(A_1A_2)$$ теңдеуі

7) A1A2A3 жазықтығының теңдеуін құрамыз, ол үшін (3-пункті қараңыз).

43x-3y+84z+103=0

8) A4 – нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі (31) формула арқылы құрамыз $\frac{(x+4)}{m}=\frac{(y-6)}{n}=\frac{(z-4)}{p}$ осы түзу ($A_1A_2A_3$) жазықтығына перпендикуляр болу үшін, мына шарт орындалу керек. $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$ немесе $\frac{m}{43}=\frac{n}{-3}=\frac{p}{84}=t$ осыдан m=43t, n=-3t, p=84t орнына қойсақ мынаны аламыз.

$$\frac{(x+4)}{43t}=\frac{(y-6)}{-3t}=\frac{(z-4)}{84t}$$ немесе $$\frac{(x+4)}{43}=\frac{(y-6)}{-3}=\frac{(z-4)}{84}$$ биіктіктің теңдеуі A_4 – нүктесіне (A1A2A3) жазықтығы түсірілген.

9) Пирамиданың сызбасы (1- суретте) көрсетілген.

5.1 Комплекстік сандар

z=x+iy сандары комплекстік сандар деп аталады, мұндағы x және y – нақты сандар, $i=\sqrt{-1}$.

Комплекстік сан z, нақты және жорамал бөліктерден тұрады. Атап айтқанда x – нақты бөлігі, ay – жорамал бөлігі, олар былай белгіленеді x=Rez, y=Jmz.

Екі комплекстік сандар өзара тең деп талады, егер де олардың нақты және жорамал бөліктері өзара тең болса, демек $z_1=x_1+iy_1$ және $z_2=x_2+iy_2$.

$z_1=z_2$ болады, егер де $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ болса. Екі комплекстік сандар өзара түйіндес деп аталады, демек z=x+iy және $\bar{z}=x-ij$ сандары түйіндес.

z=x+iy санын тригонометриялық түрде жазуға болады

$$z=-r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad (1)$$

мұндағы $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (2) комплекстік саннын модуль (ұзындығы) деп аталады. φ – дегеніміз комплекстік санның аргументі, ол былай жазылады φ=argz (3).

Комплекстік санды n- дәрежеге шығару үшін Муавр формуласы қолданылады $z^n=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (4).

Комплекстік саннан n – түбір шығару үшін, мына формула пайдаланады.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{(\varphi+2\pi k)}{n}+i\sin\frac{(\varphi+2\pi k)}{n}\right] \qquad (5)$$

(k=0, 1, 2, …, (n-1))

Комплекстік сандарға арифметикалық амалдар қолдану мына формулалармен анықталады.

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2) \qquad (6)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1\cdot x_2)+i(y_1\cdot y_2) \qquad (6)$$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}$ (8) екі комплекстік сандарды бөлу.

Мысал 3. $a=\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$.

Комплекстік a саны берілген. Табу керек: 1) осы a-санын алгебралық және тригонометриялық түрде жазыңыз.

2) z^3+a=0 барлық түбірлерін табу керек.

Шешуі 1) Бөлімінде тұрған санның түйіндісіне көбейтіп бөлеміз,

$$a=\frac{2\cdot(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}=\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i^2\cdot 3}=\frac{2(1+i\sqrt{3})}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Сонымен, $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ бұл алгебралық түрі

Тригонометрлік түрде жазу үшін (a+вi)=r(cosφ+isinφ) формуласын қолданамыз. $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ саны үшін модуль

$$r=|a|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1. \qquad r=|a|=1,\ tg\varphi=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \qquad \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Сонымен, $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ тригонометриялық түрі.

2) Берілген теңдеуді z^3=-a түрінде жазамыз.

$$z^3=-\frac{2}{(1-i\sqrt{3})}=\frac{2}{(i\sqrt{3}-1)}=\frac{2(i\sqrt{3}+1)}{(i\sqrt{3}-1)(i\sqrt{3}+1)}=\frac{2(i\sqrt{3}+1)}{-4}$$

$z^3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ немесе тригонометриялық түрде

$z^3 = \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right]$. Муавр формуласы бойынша,

$z = \cos\frac{\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)}{3} + i\sin\frac{\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)}{3}$ осыдан k=0, 1, 2 болғанда барлық үш түбірлерін табамыз.

$$z_1 = \cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9} - i\sin\frac{2\pi}{9}.$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9},\ z_3 = \cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9} = -\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}.$$

5.2 Функция туралы ұғым

Айталық, X∈x нақты сандары берілсін. Осы сандарға байланысты У∈у нақты сандары табылатын болсын.

Сонымен, егер белгілі бір f заңы (ережесі) бойынша X жиынында жататын x нақты сандарының әрбіреуіне сәйкес, У жиынында жататын бір немесе бірнеше у нақты сандар табылатын болса, онда у, x айнымалысының функциясы, ал x – функцияның аргументі деп аталады және y=f(x) түрінде жазылады. Мұндағы x – тәуелсіз айнымалы, у – тәуелді айнымалы болып табылады.

Ал x айнымалысының қабылдайтын мәндері болатын X жиыны у функциясының анықталу аймағы, оған сәйкес у айнымалысы – мәндері функцияның өзгеру аймағы деп аталады. Егер де x-тің әрбір мәніне у-тің бір мәні сәйкес келсе, функция – бір мәнді, ал у-тің бірнеше мәні сәйкес келсе, функция көп мәнді деп аталады.

5.3 Функцияның шегі

Айталық, x_0 нүктесінің δ – маңында y=f(x) функциясы анықталған болсын және x_0 нүктесі ол маңайға енуі де, енбеуі де мүмкін.

Егер мейлінше ε>0 саны үшін, ε мен x_0 нүктесінен тәуелді $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ саны табылып, $0 < |x - x_0| < \delta$ қатынасын орындағанда $|f(x) - A| < \varepsilon$ қатынасы орындалатын болса, онда A саны y=f(x) функциясының $x \to x_0$ кездегі шегі деп аталады және $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ немесе $x \to x_0$; $f(x) \to A$ түрінде жазылады.Егер аргументтің үлкен мәндерінен құралған $\{x_n\}$ тізбегі үшін, сәйкес функция мәндерінен құралған $\{f(x)\}$ тізбегінің шегі A болса, онда y=f(x) функциясының шексіздіктегі $(x \to \infty \text{ немесе } x \to -\infty \text{ кездегі})$ шегі деп аталады және

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x-\infty} f(x)=A$ түрінде жазылады.

Бұл берілген анықтама тізбек тілінде берілгені. Енді функцияның шексіздіктегі шегін теңсіздік тілінде былай беруге болады Кез келген ε>0 саны үшін δ>0 саны табылып, барлық x>δ(x<-δ) қатынасы орындалғанда $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда A саны берілген f(x) функциясының шексіздіктегі $(x\to\infty$ немесе $x\to-\infty)$-дағы шегі деп аталады; оны былай жазады: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

5.4 Шегі бар функциялардың қасиеттері

1) Егер функцияның x_0 нүктесіндегі шегі бар болса, онда ол жалғыз болады.

2) Егер функцияның x_0 нүктесіндегі шегі бар болса, онда ол x_0 нүктесінің кез келген ойық маңайында шектелген.

3) Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$ болса, онда x_0 нүктесінің ойық ε маңайы табылып, осы маңайдағы функция мәндері оң яғни f(x)>0 болады.

4) Егер x0 нүктесінің ε – ойық маңайында $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=-\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A$ және $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A болады.

5) Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$=B болса, онда:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A+B$.

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$; $B\neq 0$.

Ескерту. Шегі бар функциялардың бұл қасиеттерін x→+∞, яғни шексіздіктегі функциялар үшін де қайталауға болады.

Егер x нүктесі x_0 нүктесіне сол жақтан ұмтылатын болса, онда символикалық түрде $x\to x_0-0$, ал оң жақтан ұмтылатын болса, $x\to x_0+0$ түрінде жазылады. Егер де y=f(x) функциясы A – санына сол жақтан және оң жақтан ұмтылатын болса, онда оны былай жазады:

$$\lim_{x\to x_0-x} f(x)=A \text{ және } \left(\lim_{x\to x_0+x} f(x)=A\right)$$

Бұл алынған сол жақ және оң жақ шектер f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі біржақты шектер деп аталады. Осы айтылған біржақты шектер анықтамасын «ε-δ» тілінде берейік. Кез келген ε>0 саны үшін δ>0 саны табылып, $x_0-\delta<x<x_0$ $(x_0<x<x_0+\delta)$ қатынастарын қанағаттандыратын x-тер үшін

$|f(x)-A|<\varepsilon$ қатынасы орындалатын болса, онда A саны f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі сол жақ (оң жақ) шегі деп аталады.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(x_0-\delta<x<x_0+\delta);\ |\mathrm{f}(\mathrm{x})-A|<\varepsilon\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\left(A=\lim_{x\to x_0+0}f(x)\right)$$

Теорема. Берілген f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі A шегінің болуы үшін, оның біржақты шектерінің бар және өзара тең, яғни $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$ болуы, катетті және жеткілікті.

5.5 Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі

Айталық y=f(x) функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталған болсын.

Анықтама. y=f(x) функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер мына шарттар орындалатын болса:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ болса,

б) $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$

в) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Егер де осы шарттардың біреуі орындалмайтын болса, онда функция y=f(x) функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталып, x_0 нүктесінің өзінде анықталмаған болсын.

Егер f(x) функциясы x_0 нүктесінде анықталмаған немесе үзіліссіз болмаса, онда x_0 нүктесі f(x) функциясының үзіліс нүктесі деп аталады. Енді үзіліс нүктелерінің түрлерін көрсетейік, яғни жікке бөлейік:

а) егер y=f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі сол жақ және оң жақ арқылы шектері бар, бірақ олар өзара тең болмаса, $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, онда x_0 f(x) функциясының *бірінші текті* үзіліс нүктесі деп аталады. Ал $\sigma_{x_0}=[f(x_0-0)-f(x_0+0)]$ шамасы, x_0 нүктесіндегі *функция секірісі* деп аталады.

б) Егер y=f(x) функциясы x_0 нүктесінде үзілісті болып және оның сол нүктедегі біржақты шектерінің ең болмағанда біреуі $+\infty$ (немесе $-\infty$)-ке тең болса, онда x_0 нүктесі y=f(x) функциясының екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

в) Егер y=f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі біржақты шектері бар және өзара тең, ал функцияның сол нүктедегі мәні олардан ерекше: $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ x0 берілген функцияның жаймаланатын үзіліс нүктесі деп аталады.

5.6 Тамаша шектер

Бірінші тамаша шек $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Екінші тамаша шек $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=-e$

Екінші тамаша шектің салдары:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

Мысал 4. Шектерді есепте:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{arctg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)$; $\frac{1}{x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+4}{4x^2+3x+9}$

Шешімі. а) Егер де біз х-тің орнына 1-ді қойсақ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ деген анықталмағандық шығады, сол себептен шекті есептеу үшін алымын және бөлімін қарапайым сызықты көбейткіштерге жіктейміз.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2-3x+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)+(x-1)}{\left(x^2-x\right)-(2x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)+(x-1)}{x(x-1)-2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x-2)}=\frac{3}{-1}=-3.$$

б) егер де х→∞ болса, онда біз (∞-∞) деген анықталмағандықты аламыз, оны ашу үшін, $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$ өрнектің алымын және бөлімін түйіндес өрнекте көбейтеміз, демек

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x-3}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}=5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}\right)+\sqrt{x-3}}=\frac{5}{\infty}=0.$$

в) егер де х→0 ұмтылса, $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ деген анықталмағандық шығады, оны ашу үшін алмастыру жасаймыз. Айталық, arctg2x=y, онда 2x=-tgy, егер де x→0, онда y→0 ұмтылады.

Сондықтан,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{arctg2x}=\lim_{y\to 0}\frac{2tgy}{y}=2\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sin y}{\cos y}}{y}=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}=2\cdot 1\cdot 1=2.$$ Себебі:

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$(бірінші тамаша шек), $\lim\limits_{y\to 0}\cos y=1$

Г) Егер де x→2 ұмтылғанда $\{1^{\infty}\}$ анықталмағандық алынады.

Оны ашу үшін 3x-5=1+y, деген алмастыру жасаймыз, мұндағы x→2, y→2 ұмтылады.

Сондықтан,

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{2+\frac{y}{3}-2}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{3}{y}}=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^3=[e]^3=e^3,$$

мұндағы $\left[\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]=e$.

(бұл жерде екінші тамаша шектің салдары қолданылды, демек $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$).

д) егерде x→∞ ұмтылғанда $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ анықталмағандықтан алынады. Оны ашу үшін алымын және бөлімін айнымалы шама x-тің ең үлкен дәрежесіне бөлеміз.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+4}{4x^2+3x-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(x^2-6x+4)}{x^2}}{\dfrac{4x^2+3x-9}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{9}{x^2}}=\frac{1}{4}.$$ мұндағы

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x^2}=0.$

Ескерту. Анықталмағдықтарды 0^0, 1^{∞}, ∞^0 түрлері $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ функциясын $x\to x_0$ кезде, f(x)→0 (немесе 1, немесе ∞); φ(x)-ті сәйкес φ(x)→0 (немесе ∞) шамаларына ұмтылдыру арқылы алынады. Бұл анықталмағандықтарды, $y=[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$ тепе-теңдігіне келтіру арқылы 0·∞ түріне келтіреміз. Соңынан Лопиталь ережесі қолданылады. Осы ескертуге мысал келтірейік.

Мысал 5. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{e^x+x}}$ шегін табайық.

Шешуі: Біздің жағдайымызда $\{\infty^0\}$ деген анықталмағандықты ашу керек.

f(x)=(1+x), $\varphi(x)=\dfrac{1}{e^x+x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{e^x+x}}=\{\infty^0\}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x+x}\cdot\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{e^x+x}}$. Енді e – дәрежесіне Лопиталь ережесін, қолданамыз.

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{e^x+x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln(1+x)]^1}{(e^x+x)^1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{e^x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+x)(e^x+1)}}=e^0=1.$$

Сонымен, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{e^x+x}}=1.$

Мысал 6. Х-тің әртүрлі мәндерінің өзгеруіне байланысты, әртүрлі аналитикалық өрнекпен функция y=f(x) берілген, демек

$$y=\begin{cases}(x+4), & \text{егер де} \quad x\le -1,\\ (x^2+1), & \text{егер де} \quad -1<x\le 1,\\ (-x+3) & \text{егер де} \quad x>1.\end{cases}$$

Табу керек:

1) функцияның үзіліс нүктелерін, егер де олар болса;

2) Бір жақты шектерін және функцияның үзіліс нүктелеріндегі секірісін;

3) Функцияның графигін сызыңыз.

Шешуі.

1) х=-1 нүктесінде зерттеу жүргіземіз.

$y(-1)=(x+4)\big|_{x=-1}(-1+4)=3$ □. Енді сол жақ және оң жақ шектерін табамыз. □ EMBED Equation.3 $\lim\limits_{x\to-1-0}y(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(x+4)=3,\ \lim\limits_{x\to-1+0}y(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}(x^2+1)=2.$ Сол жақты және оң жақты шектері тең емес, $\lim\limits_{x\to-1-0}y(x)\ne\lim\limits_{x\to-1+0}y(x)$, сол себептен берілген функция х=-1 функцияның секірісін анықтаймыз. Секірісті h – деп белгілесек, онда □□

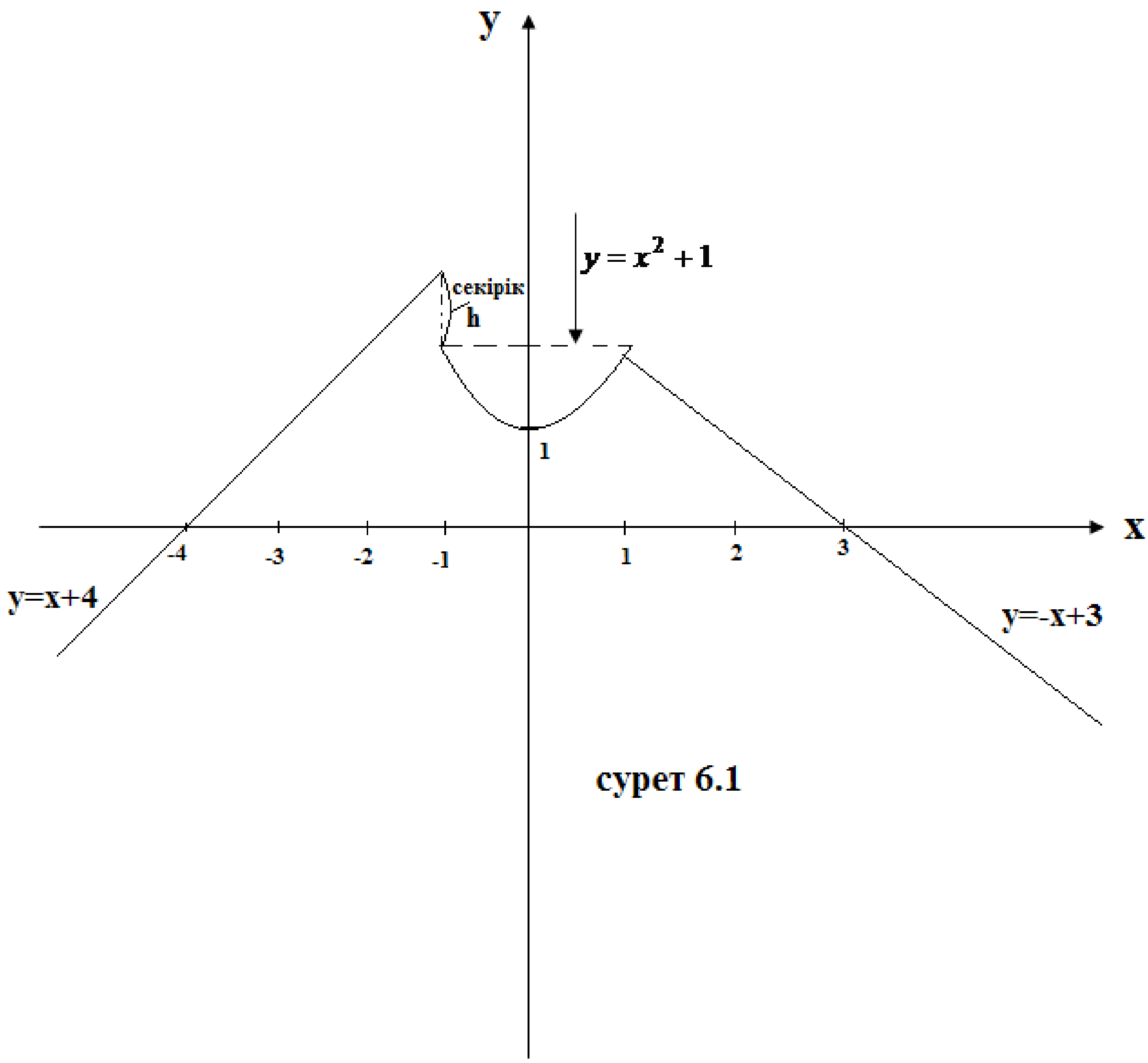
2) Енді х=1 нүктесінде зерттеу жүргіземіз: $y(1)=(x^2+1)\big|_{x=1}=2.$

Енді сол жақты және оң жақты шектерін табамыз:

$$\lim_{x\to1-0}y(x)=\lim_{x\to1-0}(x^2+1)=2$$
$$\lim_{x\to1+0}y(x)=\lim_{x\to1+0}(-x+3)=2$$

Анық көрініп тұр, сол жақты және оң жақты шектері тең, $\lim\limits_{x\to1-0}y(x)=\lim\limits_{x\to1+0}y(x)=2.$ Сол себептен берілген функция х=1 нүктесінде үзіліссіз.

3) функцияның графигін саламыз.



сурет 6.1

6 №2 БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСТЫ ОРЫНДАУҒА АРНАЛҒАН ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

6.1 Функцияның туындысы, оның геометриялық және механикалық мағынасы

Математикалық анализдің негізгі түсініктерінің бірі – функциялардың туындысы болып табылады. Айталық, y=f(x) функциясы белгілі бір X жиынында анықталған болсын. Осы жиыннан бір x_0 нүктесін алып, оған Δx өсімшесін беретін және алынған жаңа нүкте $x_0+\Delta x$ берілген X жиынында жататын болсын. Бұл кезде y=f(x) функциясы өзінің $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ өсімшесін қабылдайды. Сонымен, берілген y=f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп, осы нүктедегі функция өсімшесінің, сәйкес аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылған кездегі ақырғы шегін айтамыз және $y'(x_0)$ не $f'(x_0)$, әйтпесе $\dfrac{dy}{dx}$ не $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ деп белгілейміз:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}$$

Функцияның бұл туындысының болуы функцияның берілген нүктедегі туындысын анықтайды. Функцияның $f'(x_0)$ туындысы геометриялық тұрғыдан, берілген y=f(x) функциясының қисығына жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін анықтайды, демек

$$K=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}.$$

Берілген y=f(x) функциясының $f'(x_0)$ туындысы механикалық, берілген функцияның өзгеру жылдамдығын білдіреді. Айталық y=f(t) – M материалдық нүктенің түзу сызық бойымен қозғалу заңдылығы болсын, яғни f(t) – t өлшем уақыттағы материалдық нүктенің жүріп өткен жолы болсын. Онда M нүктесі t_0 $f(t_0)$, t_1 – $f(t_1)$ жол жүреді.

Ендеше, нүкте қозғалысының орташа жылдамдығы функция өсімшесі мен аргумент өсімшесінің қатынасына тең $V_{орт}=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$. Ал осы қатынастан аргумент өсімшесі $\Delta t\to 0$ кездегі шегін қарастырсақ және ол шек ақырлы болса,

$$V_{л.ж}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{t_1\to t_0}\frac{f(t_1)-f(t_0)}{(t_1-t_0)}=f'(t_0),$$

Материалдық нүкте қозғалысының t_0 уақыт кезіндегі лездік жылдамдығын береді.

Егерде $u=u(x)$, $v=v(x)$ дифференциалданатын функциялар болса, онда мына ережелерді білу қажет болады.

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

3) $(c \cdot u)' = cu'$, мұндағы c=const, демек тұрақты сан.

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \neq 0)$

Егерде $y = f(u)$, $u = \Psi(x)$, онда $y = f[\Psi(x)]$-күрделі функция, бұл жағдайда күрделі функцияның туындысы:

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$ немесе $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Егерде $y = f(x)$ функциясы үшін кері функциясы болса, демек $x = \Psi(y)$ және $\Psi'(y \neq 0)$, онда $f'(x) = \dfrac{1}{\Psi'(y)}$. Мұндағы $f(x)$ және $\Psi(y)$ дифференциалданатын функциялар.

6.2 Қарапайым функциялардың туындыларының кестесі

1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$, мұндағы $\alpha = const$ (тұрақты сан).
2. $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a, (a > 0, a \neq 1)$, дербес жағдайда $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u', (a > 0, a \neq 1)$, дербес жағдайда $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}, u > 0$.
4. $(\sin u)' = u' \cos u$,
5. $(\cos u)' = u' \sin u$,
6. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}, (u \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi)$
7. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}, (u \neq \pi n)$
8. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}, (|u| < 1)$,
9. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}, (|u| < 1)$,
10. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$,
11. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1 + u^2}$,

6.3 Параметрлік тәсілмен берілген және айқындалмаған тәсілмен берілген функциялардың туындысы

Функция $y = f(x), x \in (a, b)$ айқындалмаған тәсілмен берілген дейді, егерде $f(x,y)=0$ өрнегі, х-тің барлық мәндері үшін $F[(x,f(x))]=0\,(1)$ теңдігі орындалған болса.

Айқындалмаған функцияның туындысын табу үшін (1) өрнектің екі жағын, х – бойынша туындылап, шыққан теңдеуді y' - арқылы шешу керек.

Мысал 7. $y^3+e^{xy}+x^3=1$ айқындалмаған функциясы берілген. Табу керек $y'=?$.

Шешімі: Жоғарыда айтылғандай өрнектің екі жағын х-бойынша туындаймыз.

$$\left(y^3+e^{xy}+x^3\right)_x'=(1)_x';\quad (3y^2\cdot y'+e^{xy}\cdot(x\cdot y)_x'+3x^2=0$$

$$3y^2\cdot y'+e^{xy}\cdot(y+xy')+3x^2=0;\ (3y^2\cdot y'+e^{xy}\cdot x)\cdot y'=-(3x^2+e^{xy}\cdot y)$$

$$y'=-\frac{(3x^2+e^{xy}\cdot y)}{(3y^2+e^{xy}\cdot x)}.$$

Егерде $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\varphi(t). \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ (2) параметрлік тәсілмен және $x=\varphi(t)$ функциясының $(\alpha;\beta)$ аралығында кері функциясы болсын $t=\varphi^{-1}(x),$ онда $y(x)=\Psi[\varphi^{-1}(x)]$. (3).

(3) функцияның екі жағы х – бойынша дифференциалдаймыз, бұл жерде күрделі функцияны диффернециалдау ережесін қолданамыз.

$$y_x'=y_t'\cdot t_x'=\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ немесе } y_x'=\frac{y_t'}{x_t'} \quad (4)$$

6.4 Функцияның дифференциалы

Егерде $y=f(x)$ функциясының өсімшесі x_0 нүктесінде $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$ (5) өрнегімен анықталатын болса, онда $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция деп атайды. Мұндағы А·Δх - өсімшесінің негізгі бөлімі деп аталады, ал $\alpha\cdot\Delta x$- шексіз аз шама деп аталады. Функцияның өсімшесінің негізгі бөлімі функцияның дифференциалы деп, оны былай белгілейді dy==А·Δх, мұндағы $A=f'(x_0)$, $df(x_0)=f'(x_0)\cdot dx.$ (6) (dx=Δx). Функцияның дифференциалының анықтамасынан $f'(x_0)\ne 0,$ онда Δх→0 ұмтылғанда мына жуықтап есептеу формуласы шығады $\Delta y\approx dy$ немесе кеңейтілген түрде $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x\Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+f(x_0)$ (7).

Бұл (7) формуланы функцияның мәнін жуықтап есептеу формуласы деп атайды.

Мысалы 8. $\sqrt{0,8}$ - түбірінің жуық мәнін есептейік.

Шешуі:

Ол үшін $y=f(x)=\sqrt{x}$ функциясын пайдаланамыз. Мұндағы x_0=1, Δх=х-x_0=0,8-1=-0,2

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x)=\frac{1}{2}$; Онда $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ формула бойынша $\sqrt{0,8}\approx f(1)+f'(1)\cdot\Delta x=\sqrt{1}-\frac{1}{2}(0.2)=1-\frac{0,2}{2}=1-0,1=0,9$.

6.5 Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар

Берілген y=f(x) функциясының туындысы $y'=f'(x)$ тәуелсіз айнымалы x-тің функциясы болады.

Сондықтан да, осы функцияның туындысы жөнінде сөз қозғауға болады және ол $f'(x)$ - бірінші ретті туындысы деп аталады.

Сонымен, бірінші ретті туындыдан алынған туынды, екінші ретті туынды, сол сияқты (n-1)-ші ретті туындыдан алынған n-ші ретті туынды деп аталады және сәйкес төмендегі түрде жазылады: $y'=f'(x)$, $y''=[f'(x)]'=f''(x),\ldots,y^{(n)}=[f^{(n-1)}(x)]'=f^{(n)}(x)$.

Туындыларды есептеуге есептер келтірейік.

Мысал 9. Функцияның туындысын $\frac{dy}{dx}$ табу керек;

а) $y=\sqrt[4]{x^2+3x}-\sqrt[5]{(6x-1)^2}$; б) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$;

в) $y=\left(5^{\sin 3x}-\sin^2 2x\right)^3$; г) xln(1+y^2)+yln(1+x^2)=0;

д) $\begin{cases} y=t^3+t \\ x=\left(t^2+t+1\right) \end{cases}$

Шешуі. а) Түбірді туындылау ережесін пайдаланамыз:

$$\frac{dy}{dx}=\left[\left(x^2+3x\right)^{\frac{1}{4}}-(6x-1)^{\frac{2}{5}}\right]'=\frac{1}{4}\left(x^2+3x\right)^{\frac{1}{4}-1}\left(x^2+3x\right)^1-\frac{2}{5}(6x-1)^{\frac{2}{5}-1}(6x-1)^1=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^2+3x\right)^{-\frac{3}{4}}(2x+3)-\frac{2}{5}(6x-1)^{-\frac{3}{5}}\cdot 6=\frac{(2x+3)}{4\sqrt[4]{\left(x^{23}+3x\right)^3}}-\frac{2}{5}\frac{6}{\sqrt[5]{(6x-1)^3}};$$

Сонымен, $\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+3)}{4\sqrt[4]{\left(x^2+3x\right)^3}}-\frac{12}{5\sqrt[5]{(6x-1)^3}}$

б) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$

Бөлшекті туындылау ережесін пайдаланамыз:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)^1=\frac{(1+e^x)^1(1-e^x)-(1-e^x)^1(1+e^x)}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x(1-e^x)+e^x(1+e^x)}{(1-e^x)^2}=$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}+e^x+e^{2x}}{(1-e^x)^2}=\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$$

Сонымен, $\frac{dy}{dx}=\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

в) Күрделі функцияны туындылау ережесін және туындылау кестесін қолданамыз.

$$\frac{dy}{dx}=y^1=\left[\left(5^{\sin 3x}-\sin^2 2x\right)^3\right]_x^1=3\left(5^{\sin 3x}-\sin^2 2x\right)\cdot\left(5^{\sin 3x}-\sin^2 2x\right)^1=$$

$$=3\left(5^{\sin 3x}-\sin^2 2x\right)^2\cdot\left(5^{\sin 3x}\cdot 3\cos 3x\cdot\ln 5-2\sin 2x\cdot 2\cos 2x\right)=$$

$$=3\left(5^{\sin 3x}-\sin^2 2x\right)\cdot\left(3\cdot 5^{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot\ln 5-2\sin 4x\right)$$

Сонымен, $\frac{dy}{dx}=3\left(5^{\sin 3x}-\sin^2 2x\right)\cdot\left(3\cdot\ln 5\cdot 5^{\sin 3x}\cdot\cos 3x-2\sin 4x\right)$.

г) $x\ln(1+y^2)+y\ln(1+x^2)=0$. Берілген функция айқындалмаған, сол себепті екі жағынан, x – бойынша, y-ті x-тің функциясы ретінде қарастырып, туынды аламыз.

$$\left[x\ln\left(1+y^2\right)+y\ln\left(1+x^2\right)\right]_x^1=(0)^1$$

$$\left[x\ln\left(1+y^2\right)\right]^1+\left[y\ln\left(1+x^2\right)\right]^1=0$$

$$\ln\left(1+y^2\right)+\frac{x}{1+y^2}\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{y}{1+x^2}\cdot 2x=0$$

$$\left(\frac{2xy}{1+y^2}+\ln\left(1+x^2\right)\right)\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{2xy}{1+x^2}+\ln\left(1+y^2\right)\right)$$

Осы теңдіктен $\frac{dy}{dx}$-ті табамыз:

Сонымен, $\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{2xy}{1+x^2}+\ln\left(1+y^2\right)\right)}{\left(\frac{2xy}{1+y^2}+\ln\left(1+x^2\right)\right)}$.

д) $\begin{cases} x=t^2+t+1, \\ y=t^3+t. \end{cases}$ Бұл жерде y=f(x) функциясы параметрлік тәсілімен берілген, сол себептен $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}$ формуласын пайдаланамыз

$y'_t=3t^2+1, x'_t=2t+1$. Сонымен $\frac{dy}{dt}=\frac{3t^2+1}{2t+1}$.

7 ТУЫНДЫНЫҢ КӨМЕГІМЕН ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ОНЫҢ ГРАФИГІН ТҰРҒЫЗУ

7.1 Функцияның өсуі және кемуі. Экстремумы. Егер $x_1<x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын (а; в) интервалында жататын аргумент мәндері үшін y=f(x) функциясының мәндері $f(x_1)\leq f(x_2)$ $f(x_1)\geq f(x)$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда берілген f(x) функциясы (а; в) интервалында кемімейтін (өспейтін) деп аталады. Ал қатаң $f(x_1)< f(x_2)$ $f(x_1)> f(x_2)$ теңісіздіктері орындалатын болса, функция қатаң өсетін (кемитін) деп аталады. Дифференциалданатын y=f(x) функциясының (а; в) интервалында $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) теңсіздігінің орындалуы, қажетті және жеткілікті. Егер x_0 нүктесінің $u_0(x_0)$ маңайында жататын барлық x-тер үшін $\Delta f(x_0)= f(x) - f(x_0)\leq 0$ ($\Delta f(x_0)= f(x) - f(x_0)\geq 0$) теңісіздігі орындалатын болса y=f(x) функциясының x_0 нүктесінде жергілікті максимумы (минимумы) болады деп айтады. Функцияның максимумы мен минимумы бірігіп, екеуіне ортақ, функция *экстремумы* деп аталады. Мұндағы «жергілікті» деген сөзді ерекше бөліп айтуымыздың себебі, x_0 нүктесінің δ - маңайының сыртында берілген функцияның басқада экстремумдары болуы мүмкін.

7.2 Экстремумның қажетті шарты

Егер y=f(x) функциясының x_0 нүктесінде жергілікті экстремумы бар жєне дифференциалданатын болса, онда $f'(x_0)=0$ немесе $f'(x_0)$ болмайды, демек бұл жағдайда x_0 - нүктесі қатерлі нүкте деп аталады.

7.3 Экстремумның жеткілікті шарты

Айталық, x_0 нүктесі y=f(x) функциясының экстремумы болуы мүмкін, нүкте және берілген функция x_0 нүктесінің белгілі бір маңайында дифференциалданатын болсын. Ал x_0 нүктесінің өзінде функция үзіліссіз болсын.

Егер: $x<x_0$, $f'(x)\geq 0$ $f'(x)\leq 0$)

$x>x_0$, $f'(x)\leq 0$ $f'(x)\geq 0$) теңсіздіктері орындалатын болса, онда берілген y=f(x) функциясы x_0 нүктесінде өзінің жергілікті максимумы (минимумыын) қабылдайды. Егер де $f'(x)$ функциясы $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ $x\neq x_0$ өзінің таңбасын өзгертпейтін болса, онда x_0 нүктесі, экстремумның нүктесі болмайды.

Айталық y=f(x) функциясы x_0 нүктесінде және оның екі рет дифференциалданатын және $f''(x_0<0)$ болса, онда x_0 - нүктесінде функция максимум мән қабылдайды, егер $f''(x_0>0)$ болса, x_0 - нүктесінде функция минимум мән қабылдайды.

7.4 Функцияның дөңестігі және ойыстығы. Иілу нүктелері

Егер x_0 нүктесінде дифференциалданатын y=f(x) функциясы үшін, x_0 нүктесінің маңайында жататынбарлық x-тер үшін, функция графигінің (x_0, $f(x_0)$)

нүктесіне жүргізілген жанама ылғи график үстіне (астына) орнаасса, онда берілген функцияның графигі дөңес (ойыс) деп аталады.

Берілген y=f(x) функциясының иіу нүктесі деп, оныңграфигінің дөңестен ойысқа (немесе, ойыстан дөңеске) ауысатын (x_0, f(x_0) нүктесін айтамыз. Егер f(x) функция x_0 нүктесінде екі рет дифференциалданатын және $f''(x_0>0)$ $f''(x_0<0)$ болса, онда берілген функция x_0 нүктесінде ойыс (дөңес) болады. Егер x_0 нүктесінде f(x) функциясының үзіліссіз екінші ретті туындысы бар және x_0 иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0=0)$. Осы теңдеуден иілу нүктесін анықтаймыз. Егер x_0 нүктесінің δ - маңайында екі рет дифференциалданатын және x_0 нүктесінде үзіліссіз болатын y=f(x) функциясы үшін,

$x<x_0$, $f''(x_0<0)$ $f''(x_0>0)$

$x>x_0$, $f''(x_0>0)$ $f''(x_0<0)$ теңсіздіктері орындалатын болса, онда x_0 нүктесі берілген функцияның нүктесі болады.

7.5 Функцияның асимптоталары

Берілген y=f(x) функциясын x→∞, x→-∞ кездегі және үзіліс нүктелеріндегі тәртібін зерттеу нәтижесінде функция графигін белгілі бір түзуге мейлінше жақындауы байқалатын көздері болады. Міне осындай түзулер функцияның асимптомалары деп аталады. Онда түзулер екі түрлі болады. Соарға жеке-жеке тоқталайық:

а) Тік асимптоталар. Егер y=f(x) функциясының $x \to x_0$, кездегі екі жақ шектерінің ең болмағанда біреуі шексіздікке тең, яғни

$$\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty \qquad (1)$$

Болса, онда $x=x_0$ түзуі функция графигінің тік асимптотасы деп аталады.

Мысал үшін, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ функциясын қарастырайық.

Бұл функция үшін x=1 түзуі тік асимптота болып табылады. Шынында да шектерді қарастырайық.

Сонымен,
$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-0-1}=\frac{1}{-0}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1+0-1}=\frac{1}{0}=+\infty.$$

б) Көлбеу асимптоталар, y=кx+в теңдеуімен анықталатын түзуді берілген функция графигінің көлбеу асимптотасы деп аталады. Мұндағы $к=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\to-\infty}}\dfrac{f}{x}$ (2),

$в=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\to-\infty}}\left[f(x)-кx\right]$ (3), формулаларымен анықталады.

Мысал үшін, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x}$ функциясының асимптоталарын табайық.

Шешуі: Берілген функцияның барлық асимптоталарын іздейміз: а) тік асимптота х=0 нүктесі үзіліс нүктесі. Ендеше (1) бойынша, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{(x^2+2x+3)}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{(x^2+2x+3)}{x}=\infty$. Демек, х=0 түзуі (оу өсуі) тік асимптота болады.

б) көлбеу асимптота. (2), (3) формулаларын пайдаланамыз.

$$к=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1}=1$$

в)

$$в=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-кх\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x+3}{x}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2.$$

Сонымен, у=х+2 түзуі, көлбеу асимптота.

7.6 Функция графигін тұрғызудың жалпы жобасы

Енді берілген у=f(x) функциясының тәртібін жоғарыдан келтірілген пункттерді пайдаланып толық зерттеп, оның графигін тұрғызудың жалпы жолын көрсетейік.

1^0. функцияның анықталу аймағын және үзіліс нүктелерін анықтаймыз.

2^0. Функцияның координата осьтерімен қиылысу нүктелерін табамыз.

3^0. Функцияның тақтығын, жұптығын және периодтылығын анықтаймыз.

4^0. Функция графигінің асимптоталарын табамыз.

5^0. Функцияның монотонды өсетін, кемитін аралықтарын анықтап, экстремумдарын табамыз.

6^0. Функцияның ойыс, дөңес болатын аймақтарын және оның иілу нүктелерін анықтаймыз.

7^0. Жоғарыдан алынған мәліметтер бойынша берілген функцияның тәртібін сипаттайтын кесте құрамыз.

8^0. Алынған мәліметтер бойынша функцияның графигін тұрғызамыз.

Мысал 10. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ функциясын дифференциалдық әдіспен зерттейік.

Шешуі: Берілген функцияны толық зерттеп, графигін тұрғызу үшін жоғарыдағы жоба бойынша біртіндеп талдау жүргіземіз.

1^0. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ анықталу аймағы мен үзіліс нүктелерін анықтаймыз. Берілген функция х=1 нүктесінен басқа, сандар өсінің бойындағы барлық нүктелерде анықталған. Оның үзіліс нүктесі х=1, себебі бұл нүктеде функция шексіздікке айналады. Демек, х=1 - екінші текті үзіліс нүктесі.

2^0. Функцияның координата осьтерімен қиылысу нүктелерін анықтаймыз.

Ол үшін x=0 және y=0 шарттарын қарастырамыз. Сонымен: а) x=0 болғанда y=-1 болады. Функция графигі OY өсін (0; -1) нүктесінде қиып өтеді; б) y=0 болғанда, $x^2+1=0$ теңдеуінің нақты түбірі жоқ. Сондықтан функция графигі OX өсін ешуақытта қиып өте алмайды.

3^0. Функцияның тақтығын, жұптығын және периодтылығын анықтаймыз. Ол үшін егер Д$\in\forall$x үшін: а) f(-x)=f(x) - функция жұпты; б) f(-x)=f(x) функция тақты; в) f(x+T)=f(x) функция периодты болатын заңдылықтарды тексереміз.

Берілген $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ функциясы үшін бұл үш қасиетте орындалмайды, демек ол тақ та, жұп та, периодты да емес.

4^0. Функция асимптоталарын іздестіреміз:

а) Тік асимптота. Функцияның үзіліс нүктесі $x_0=1$ болғандықтан, $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty$ формулаларды пайдаланып, сол нүктенің оң жақ және сол жақ шектерін табамыз:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty;\quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty.$$

Демек, берілген функцияның тік асимптотасы ьар және ол $x_0=1$ түзуі.

б) Көлбеу асимптота, $\kappa=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x};\ в=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\left[f(x)-\kappa x\right]$

Формулалар бойынша:

$$\kappa=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1}{x^2-x}=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=1,\ \kappa=1.$$

$$в=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\left[f(x)-\kappa x\right]=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\frac{x^2+1}{x-1}-x\right]=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{\dfrac{1}{x}+1}{1-\dfrac{1}{x}}=1,\ в=1.$$

Сонымен, y=x+1 түзуі берілген функцияның көлбеу асимптотасы.

5^0. Функцияның монотонды өсетін және кемитін аймақтарын, экстремумдарын табу үшін, оның бірінші туындысын тауып $f'(x)=0$ теңдеуін шешеміз.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)'=\frac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Енді $f'(x)=0$ теңдік бойынша мүмкін болатын экстремум нүктелерін іздейміз,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2},\, x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Функцияның монотонды өсу және кему аралықтарын анықтау үшін функцияның бірінші туындысының таңбасын пайдаланамыз.

Сонымен, $f'(-2) = \frac{(-2)^2 + 4 - 1}{(-2-1)^2} = \frac{4+4-1}{9} = \frac{7}{9} > 0$ - функция өседі;

$f'(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 - 1}{(-1)^2} = -1 < 0$ - функция кемиді;

$f'(3) = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 1}{4} = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$ - функция өседі.

Ендеше, $\left(-\infty;\ \left(1-\sqrt{2}\right)\right) \cup \left(\left(1+\sqrt{2}\right);\infty\right)$ - монотонды өседі;

Ал $\left(\ \left(1-\sqrt{2}\right);\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ - монотонды кемиді.

Берілген функцияның экстремумы болуының жеткілікті шартын:

$$\left.\begin{matrix} x < x_0 & f'(x) \ge 0 & \left(f'(x) \le 0\right) \\ x > x_0, & f'(x) \le 0 & \left(f'(x) \ge 0\right) \end{matrix}\right\}$$

пайдалансақ, бұл шарттар бойынша $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ нүктесінде функцияның жергілікті максимумы, ал $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ нүктесінде жергілікті минимумы болатындығын көреміз. Сонымен,

$$y_{\max} = f\left(1-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + 1}{1 - \sqrt{2} - 1} = \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1}{-\sqrt{2}} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{-\sqrt{2}} = 2 - 2\sqrt{2}.$$

$$y_{\min} = f\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 1}{1 + \sqrt{2} - 1} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1}{-\sqrt{2}} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

6^0. Функцияның ойыс-дөңестігін, сын (күдікті) нүктелерін табамыз. Ол үшін екінші туындысын аламыз, яғни

$$y'' = f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - \left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2\left(x^2 - 2x - 1\right)}{(x-1)^3} = \frac{-2(x-1)^2 - 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3};\ f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Функцияның иілу нүктесі болу үшін, оның $f''(x) = 0$ қажетті шарты орындалу керек. Ал $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \ne 0$ болғандықтан, функцияның иілу нүктесі жоқ.

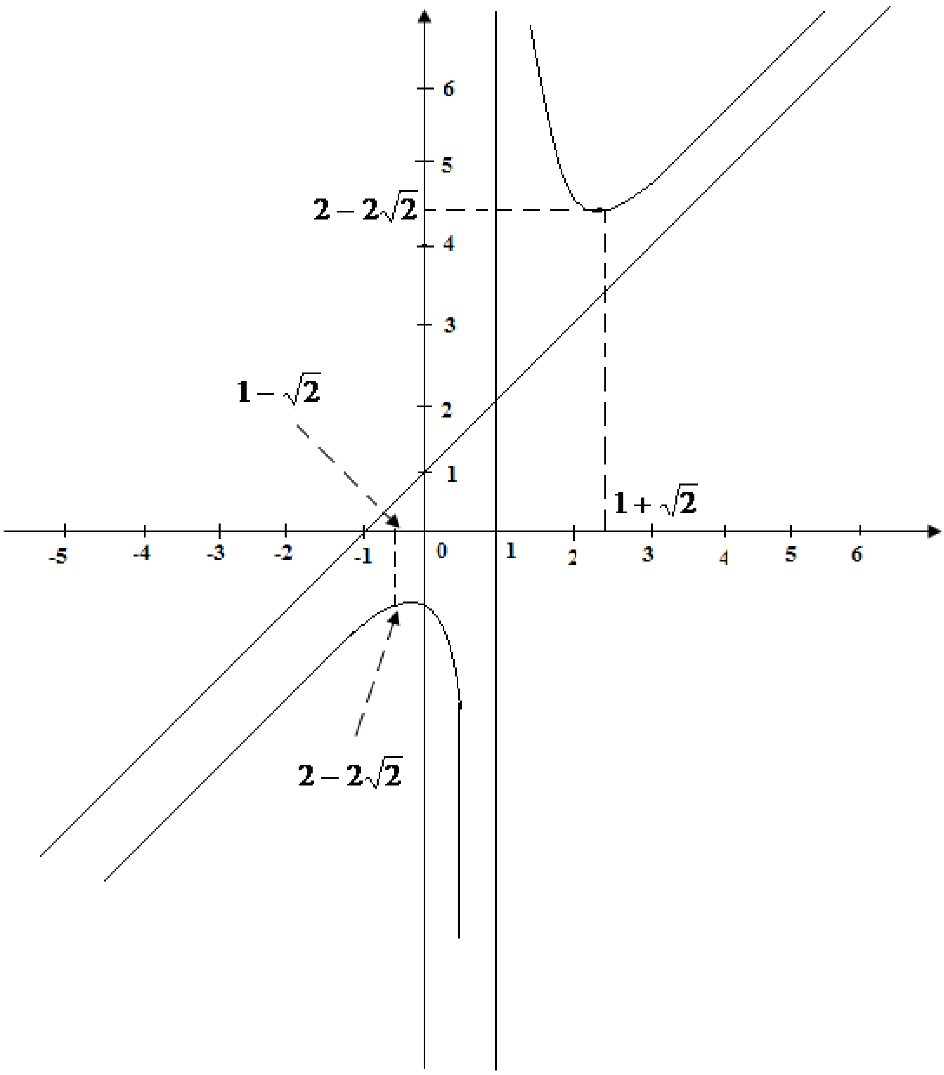
Функцияның ойыс-дөңестігін анықталу үшін екінші туындының таңбасын анықтаймыз. Бұдан (-∞; 1) аралығында $f''(x) < 0$ - функция дөңес, ал

(1; ∞) аралығында $f''(x) > 0$, функцияның графигі ойық болатындығын көреміз.

7^0. Жоғарыдан алынған мәліметтер бойынша функцияны сипаттайтын кестеге көз жүгіртейік.

x	$\left(-\infty;\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$	$\left(1-\sqrt{2}\right)$	$\left(1-\sqrt{2}\right);1$	1	$\left(1;\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$	$\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\left(1+\sqrt{2};\infty\right)$
f′(x)	+	0	-	∞	-	0	+
$f''(x)$	- (дөңес)	- (дөңес)	- (дөңес)	∞	+ (ойыс)	+ (ойыс)	+ (ойыс)
f(x)	өседі	$y_{\max} = 2 - 2\sqrt{2}$	кемиді	+ ∞	өседі	$y_{\min} = 2 - 2\sqrt{2}$	кемиді

8^0. Алынған 1^0-7^0 мәліметтерді пайдаланып, берілген функцияның графигін саламыз (7.8-сурет).



7.8-сурет.

7.7 Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

Айталық, y=f(x) функциясы [a; в] кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болсын. Осы уақытқа дейін біздер берілген кесіндіде жатқан жергілікті (яғни белгілі бір нүктенің δ - маңайындағы) экстремумдарды қарастырдық. Ендігіжерде берілген функцияның жалпы, ақырлы немесе ақырсыз, кесінді бойынша ең үлкенжәне ең кіші мәндерін табу жолдарын қарастырамыз. Вейерштрасс теоремасы бойынша: егер y=f(x) функциясы [a; в] кесіндісінде үзіліссіз болса, онда олосы кесіндіде өзінің дәл жоғарғыжәне дәл төменгі мәндерін қабылдайды.

Егерде f(x) функциясы [a; в] кесіндісінде кемімелі немесе қатаң кемитін болса, онда $\min\limits_{a \le x \le в} f(x) = f(в)$, ал $\max\limits_{a \le x \le в} f(x) = f(a)$ болады.

Егер д y=f(x) функциясы [a; в] кесіндісінде өспелі немесе қатаң өсетін болса, онда оның ең кіші мәні $\min\limits_{a \le x \le в} f(x) = f(a)$, ал ең үлкен мәні $\max\limits_{a \le x \le в} f(x) = f(в)$ болады.

Енді y=f(x) функциясы [a; в] кесіндісінде үзіліссіз және осы кесіндіде жататын бар функция болсын. Онда оның берілген кесіндідегі ең үлкен немесе ең кіші мәндерін табу үшін, функцияның кесіндідегі шеткі (x=a, x=в) нүктелеріндегі мәндерін жеке барық стационар нүктелеріндегі жергілікті экстремумдарын тауып, оларды өзара салыстыру арылы ішіндегі ең үлкен және ең кіші мәндер алынады.

Мысалы 11. $y=x^3-3x^2+1$ функциясының [-1; 4] кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық.

Шешуі.

Жергілікті экстремумның қажетті шарты бойынша $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$ стационар нүктелер. Енді $y=f(x)=x^3-3x^2+1$ функциясының [-1; 4] кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі және стационар нүктелеріндегі мәндерін табамыз.

Сонымен, f(-1)=-3, f(4)=17, f(0)=1; f(2)=-3.

Енді алынған функция мәндерін салыстырамыз.

Демек, берілген функцияның ең үлкен мәні x=4 нүктесінде қабылданады f(4)=17, ал функцияның ең кіші мәні x=-1, x=2 нүктелерінде қабылданады f(-1)= f(2)=-3.

Мысал 12. y= $f(x)=\sin x^2$ функциясының $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық.

Шешуі. Жергілікті экстремумның қажетті шарты бойынша $y' = f'(x) = 2x \cdot \cos x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ x_3 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ - стационар нүктелер.

Енді y= $f(x)=\sin x^2$ функциясының $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$ кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі және стационар нүктелеріндегі мәндерін табамыз.

Сонымен, $f(-\pi) = -\sin\left(-\sqrt{\pi}\right)^2 = 0;\ f(0) = \sin 0 = 0; f\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) =$

$= \sin\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1$

$f\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right)^2 = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Демек, берілген функцияның ең үлкен мәні $x_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ және $x_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ нүктелерінде, ал ең кіші мәні $x_3 = \sqrt{\frac{5\pi}{2}}$ нүктесінде қабылдайтындығын көреміз.

8 БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУ

Оқулықтар: [6], тарау 5, §5.1, 5.2, 5.6, 5.7;
Тарау 6, §6.1-6.6; тарау 7, §7.1, 7.2, 7.5
[7], тарау 10, §1-5, тарау 11, §1-6, 8;
[8], тарау 10, §1, 3, 4, 5, 6;
[9], тарау 6, §1, 2, 4, 6

8.1 Негізгі ұғымдар және формулалар

8.2 Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

Сонымен, белгілі туындысы бойынша функцияның өзін анықтау, бір айнымалы функцияны интегралдық есептеудің негізгі есебі екендігін көреміз.

Егер F(x) функциясы (а; в) интервалында дифференциалданатын және x-тің (а; в) интервалындағы барлық мәні үшін, демек $x\in$(а; в), $F^{/}(x)=f(x)$ (1) теңдігі орындалатын болса, онда олберілген аралықтағы f(x) функциясының алғашқы функциясы деп аталады.

Мысал ретінде:

(-∞; ∞) аралығында x-тің барлық мәні үшін F(x)=sinx, ал f(x)=cosx. Бұл жерде $F^{/}(x)=f(x)$ теңдігі орындалады.

Қысқаша жазсақ:

$$(-\infty,+\infty)\ni \forall x, F(x)=\sin x \Rightarrow f(x)=\cos x;$$

$$(-\infty,+\infty)\ni \forall x, F(x)=x^3 \Rightarrow f(x)=3x^2;$$

$$(-1,1)\ni \forall x, F(x)=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Егер F(x) функциясы (а; в) интервалындағы f(x) функциясының алғашқы функцияларының бірі болса, онда берілген аралықтағы кез келген алғашқы функция ретінде ф(x)=F(x)+C функциясын алуға болады.

Мұндағы С - ерікті тұрақты.

Егер Ғ(x) функциясы f(x) функциясының белгілі бір аралықтағы алғашқы функциясы болса, онда Ғ(x)+С функциялар жиынтығы берілген f(x) функциясының анықталмаған интегралы деп аталады да, $\int f(x)dx = F(x)+C$ (2) символымен белгіленеді. Мұндағы f(x) функциясы интеграл астындағы функция; f(x)dx - интеграл астындағы өрнек; x - интегралдық айнымалы; С - ерікті тұрақты; $\int$ - анықталмаған интеграл таңбасы;

$\int f(x)dx$ - алғашқы функциялар жиынтығы деп аталады.

Ал белгілі туындысы бойынша f(x) функциясының өзін табу немесе интеграл астындағы функциядан анықталмаған интегралды табу - f(x) функциясын интегралдау деп аталады. Ендеше, интегралдау амалының дұрыс орындалғандығын тексеру үшін, алынған нәтижені (алғашқы функцияны) дифференциалдап, интеграл астындағы функцияны алсақ болғаны.

8.3 Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3) $\int A \cdot f(x)dx = A\int f(x)dx,$ (A=const, const - дегеніміз тұрақты сан)

4) $\int\left[f(x) \pm \varphi(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int\varphi(x)dx$

Егер Ғ(x) функциясы f(x) функциясы үшін алғашқы функция болса, онда $\int f\ (ax+в)\mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{a}}F(ax+в)+C.$

8.4 Анықталмаған интегралдың негізгі кестесі

Төмендегі кестеде келтірілген формулалардың көпшілігі анықталмаған интегралдың анықтамасынан, дифференциалға кері амал ретінде, туындылар кестесінен туындайды. Ал кейбіреулерін жәй туынды алу арқылы тексеруге болады. Сонымен, интегралға қатысты негізгі кестені келтірейік.

$1^0.$ $\int x^2 dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ α≠-1

$2^0.$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, a>0, a≠1

$3^0.$ $\int e^x dx = e^x + C,$

$4^0.$ $\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$ x≠0

$5^0.$ $\int\sin x dx = -\cos x + C$

$6^0.$ $\int\cos x dx = \sin x + C$

$7^0.$ $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in z$

$8^0.$ $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,\ x \neq k\pi, k \in z$

$9^0.$ $\int shxdx = chx + c,$ (shx - гиперболалық синус)

$10^0.$ $\int chxdx = shx + c,$ (chx - гиперболалық косинус)

$11^0.$ $\int\frac{dx}{ch^2x} = thx + c$, (thx - гиперболалық тангенс)

$12^0.$ $\int\frac{dx}{sh^2x} = cthx + c$, (cthx - гиперболалық катангенс)

$13^0.$ $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$ $(-1<x<1)$

$14^0.$ $\int\frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + c \\ -arcctgx + c \end{cases}$

$15^0.\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a}+c \\ -\arccos\frac{x}{a}+c \end{cases} \quad |x|<|a|,\ a\neq 0$

$16^0.\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c \\ -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a}+c \end{cases}$

$17^0.\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c, a\neq 0$

$18^0.\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c, a\neq 0$

$19^0.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c, a\neq 0$

$20^0.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c, a\neq 0$

Егер де алғашқы функцияны табуда, негізгі интегралдар кестесін және тепе-теңдік түрлендіруді қолдансақ, онда тікелей интегралдау деп аталады.

8.5 Интегралдаудың негізгі тәсілдері

1) Айнымалыны ауыстыру тәсілі

Көпшілік жағдайда интеграл астындағы өрнектегі айнымалыны жаңа айнымалымен ауыстыру арқылы кестелік интегралдарға келтіруге болады. Міне осы тәсіл айнымалыларды ауыстыру тәсілі деп аталады.

Егер x=φ(t) функциясы дифференциалданатын және оның кері функциясы болса, онда

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$ (3) теңдігі орындалады. Бұл (3) формула айнымалыны ауыстыру формуласы.

2) Интегралды бөлектеп интегралдау

Айталық, интеграл астындағы өрнек екі функцияның көбейтіндісі арқылы өрнектелген болсын. Егерде u=u(x) және v=v(x) функциялары дифференциалданатын болса, онда мына формула орын алады:

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$ қысқаша жазсақ $\int udv = u\cdot v - \int v\cdot du$ (4). Осы теңдік анықталмаған интегралдағы бөлектеп интегралдау формуласы деп аталады.

8.6 Негізгі қарапайым функциялар тобын интегралдау

Мына түрде жазылған $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ функция, рационалдық бөлшек функция деп аталады.

Мұндағы $P_m(x)$ және $Q_n(x)$ m, n дәрежесіндегі көпмүшелер, демек $P_m(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q_n(x)=в_n x^n + в_{n-1}x^{n-1} + \ldots + в_1 x + в_0$. Сонымен, рационал функциялар рационал бөлшектер деп те аталады.

Егер m<n болса, онда бөлшек дұрыс, ал m>nболса, онда бөлшек бұрыс деп аталады. Рационал бұрыс болған жағдайда, алымындағы көпмүшелікті бөліміндегі көпмүшелікке бөлу арқылы, дұрыс бөлшекке айналдырып $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S_k(x) + \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}$ (5) түріне келтіруге болады. Мұндағы $S_k(x)$ - бөлшектің бүтін бөлігі, $R_l(x)$ - қалдық блігі, әрине l<n болады.

Мысал 13. $R(x)=\frac{5x^3-3x^2+6x-7}{\left(x^2-4\right)}$ рационал бөлшектің алымын бөліміне бөлу арқылы

$$R(x)=\frac{P_3(x)}{Q_2(x)}=\frac{5x^3-3x^2+6x-7}{\left(x^2-4\right)}=(5x-3)+\frac{26x-19}{x^2-4}$$ - түрге келтіріледі.

Мұндағы: S_1=5x-3; R_1=26x-19.

Сонымен рационалдық бөлшектерді интгралдау, бүтін көпмүшені және дұрыс рационалдық бөлшекті интегралдауға келтіріледі. Дұрыс рационалдық бөлшекті интегралдау үшін, оны қарапайым рационалдық бөлшектердің қосындысына жіктеп, содан кейін жәй бөлшектерді интегралдауға келтіріледі (қараңыз [1], 67 бет).

Кейбір иррационалдық функцияларды интегралдау үшін ауыстыру (3) формуланы қолданып, рационалдық функцияға келтіреміз. Содан соң алынған нәтижедегі айнымалыны бастапқы айнымалымы қайта ауыстырамыз.

Мысал 14 келтірейік. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

Шешуі:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = \begin{vmatrix} x+4=t^2 \\ x=t^2-4 \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{t\cdot 2t\cdot dt}{t^2-4} = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2-4} = 2\int \frac{\left(t^2 4+4\right)dt}{\left(t^2-4\right)} =$$

$$= 2\int \frac{\left(t^2-4\right)dt}{\left(t^2-4\right)} + 8\int \frac{dt}{\left(t^2-4\right)} = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} = 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

8.7 Анықталған интеграл

Айталық, анықталған f(x) функциясы [a; в] кесіндісінде берілген болсын. Егер [a; в] кесіндісін кез келген тәсілмен, $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=в$ қатынастары

орындалатындай етіп, n бөлікке бөлсек, онда x_0, x_1, x_2, ..., x_n нүктелер жиыны берілген кесіндінің бөліктенуі деп аталады. Мұндағы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, i=1, 2, 3, ..., n - бөлікше кесінді, ал $\Delta=\max\Delta x_i$ - бөлікше кесінділердің ең үлкен диаметрі деп аталады. Енді әрбір бөлікшеден қалауымызша $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, i=1,2, ..., n бір-бір нүктеден алып $f(z_i)\Delta x_1$ i=1,2, ..., n көбейтінділері арқылы қосынды құрайық.

$$\sigma_n = f(z_i)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \ldots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \quad (5)$$

Алынған (5) қосынды [а; в] кесіндісінің бөлектенуі мен әр бөлікшеден алынған z_i, i=1,2,3...,n нүктесіне сәйкес алынған f(x) функциясының интегралдық қосындысы деп аталады.

Енді ең үлкен бөлікше диаметрі Δ→0 кездегі (5) интегралдық қосындысының шегін табайық:

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma_n = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \quad (6)$$

Егер берілген кесіндіні қалайша бөлімуізден және әр бөлікшеден z_i, i=1,2,3...,n нүктелерін қалайша таңдауымыздан тәуелсіз, (6) теңдіктің шегі бар және шектелуі болса, онда ол шек [а; в] кесіндісі бойынша f(x) функциясының анықталған интегралы деп аталады да,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \quad (7)$$

символлымен беріледі.

$\int_a^b f(x)dx$ интервалы орындалады, егер F(x)функциясы [a, b] кесіндісінде үзіліссіз болса. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
4. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_b^b f(x)dx$ (A=const)
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

бұл теңдік кез келген a, b, c сандары және олардың орналасуына тәуелсіз орындалады.

Анықталған интегралды есептеудегі негізгі формулалар:

1. Ньютон-Лейбнец формуласы:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ мұндағы F(x) – алғашқы функция, f(x) функциясы үшін, демек $F^{/}(x) = f(x)$.

2. Бөлшектеп интегралдау формуласы:

$$\int_a^b u(x) * v^{/}\, dx = U(x) * V(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) * u^{/}\, dx$$

немесе қысқаша

$$\int_a^b u dv = u * v\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

3. Айнымалы ауыстыру формуласы:

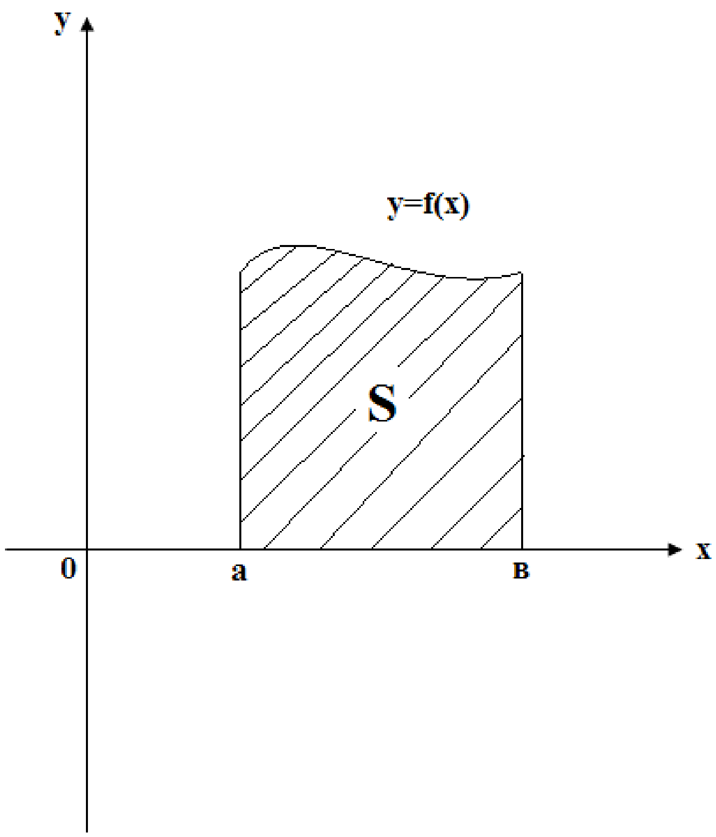
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] * \varphi^{/}(t)dt$$

мұндағы x=φ(t)үзіліссіз функция өзінің туындысымен [α,β] кесіндісінде және a=φ(α), b=φ(β)

8.8 Анықталған интегралдың қолданыстары

1) Айталық OXYжазықтығында жоғарыдан теріс болмайтын және үзіліссіз y=f(x) функциясы графигінен, төменнен OX осінде жатқан [a,b] кесіндісімен, ал екі бүйірінен x=a, x=b, (a<b) түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы

$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (8)$$

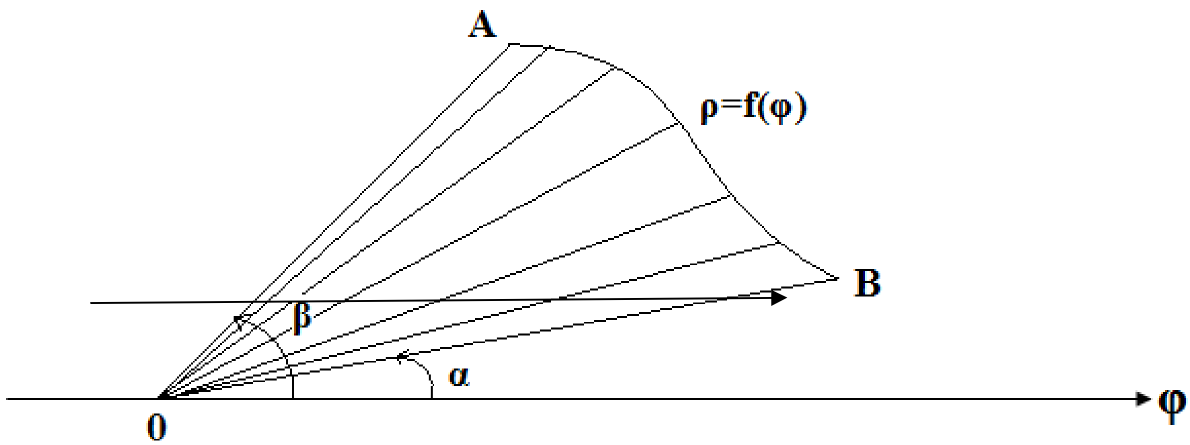


Егерде дене екі қисықпен шектелген болса және $f_2(x) \geq f_1(x)$ онда

$$S=\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx \qquad (9)$$

2) Қисықты сектордың ауданы

Айталық, AB қисығы полярлық координаталар жүйесінде теңдеуі арқылы берілген және ρ(φ) функциясы аралығында үзіліссіз әрі теріс болмайтын болсын. Полярлық осьпен жасайтын бұрыштары α және β болатын, полярлық радиустар және AB қисығымен шектелген фигура қисықсыздықты сектордың ауданы $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi$ (9) формуласы арқылы есептелінеді.



3) Егерде қисықтардың теңдеуі параметрлік тәсілмен берілсе, демек x=φ(t), y=ψ(t) онда осы қисықтармен шектелген дененің ауданы мына формуламен есептелінеді:

$$S=\int_{t1}^{t2} \Psi(t) * \varphi^{/}(t)dt \qquad (11)$$

мұндағы t_1 және t_2, a=φ(t_1), b=φ(t_2) теңдеулерімен анықталады. (ψ(t)≥0 [t_1,t_2] аралығында)

4) Доғаның ұзындығын есептеу:

Егер f(x) функциясы өзінің $f^{/}$(x) туындысымен бірге [α,β] кесіндісінде үзіліссіз болса, онда осы функция арқылы берілген AB доғасының ұзындығы L:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f^{/}(x)\right]^2}dx \qquad (12)$$

формуласымен анықталады.

5) Егер AB доғасының теңдеуі демеуші арқылы берілсе,

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \qquad \alpha \leq t \leq \beta, \text{ мұндағы}$$

φ(t), ψ(t) функциялары [α,β] кесіндісінде үзіліссіз дифференциялданатын ффункциялар. Онда AB доғасының ұзындығы L:

$$L=\int_{\beta}^{\alpha}\sqrt{\left[\varphi^{/}(t)\right]^{2}+\left[\Psi^{/}(t)\right]^{2}}dt \qquad (13)$$

формуласымен анықталады.

6) Егер AB доғасы полярлық координаталар жүйесінде берілсе ρ=ρ(φ), $(\alpha\leq\varphi\leq\beta)$. Онда AB доғасының ұзындығы L:

$$L=\int_{\beta}^{\alpha}\sqrt{(\rho)^{2}+(\rho^{/})^{2}}d\varphi \qquad (14)$$

формуласымен анықталады.

7) Дененің көлемін есептеу.

Егерде дененің көлденең қимасының ауданы S(x) $(\alpha\leq\varphi\leq\beta)$ белгілі болса, онда берілген дененің көлемі V:

$$V=\int_{a}^{b}S(x)dx \qquad (15)$$

формуласымен есептелінеді.

8. Айналудан шыққан дененің көлемі:

а) Егерде y=f(x) қисығымен және y=0, x=a, x=b түзулерімен шектелгдене OX осімен айналғанда шыққан дененің көлемі V_x

$$V_x=\pi\int_{a}^{b}y^{2}dx \qquad (16)$$

формуласымен есептелінеді.

б) Осы дене OY осімен айналғанда шыққан дененің көлемі V_y

$$V_y=2\pi\int_{a}^{b}x*ydx \qquad (17)$$

формуласымен есептелінеді.

в) x = g(y) қисығымен және y = c, y = d түзулерімен шектелген дене OY осімен айналғанда шыққан дененің көлемі V_y :

$$V_y=\pi\int_{c}^{d}x^{2}dy \qquad (18)$$

формуласымен есептелінеді.

с) Жалпы жағдайда $y_1=f_1(x)$ және $y_2=f_2(x)$ $(f_1(x)\leq f_2(x))$ қисықтарымен, x=a, x=b түзулерімен шектелген дене OX және OY остері бойынша айналғандағы шыққан дененің көлемі мына формулалар арқылы есептелінеді.

$$V_x=\pi\int_{a}^{b}(y_2^{2}-y_1^{2})dx \qquad (19)$$

$$V_y=\pi\int_{c}^{d}x(y_2-y_1)dx \qquad (20)$$

8.9 Есепті шығару мысалдары

Мысалдар. 15. Мына берілген анықталмаған интегралды есептеңіз.

а) $\int \frac{(4+2x^2)dx}{x^2(x+4)}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-5x)^2}}$; в) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+3*x+3}}$;

г) $\int \frac{(\arcsin x)^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Шешуі: Әрбір интегралды тікелей интегралдаймыз.

а)
$$\int \frac{(4+2*x^2)dx}{x^2(x^2+4)} = \int \frac{[(4+x^2)+x^2]dx}{x^2(x^2+4)} = \int \frac{(4+x^2)dx}{x^2(x^2+4)} + \int \frac{x^2 dx}{x^2(x^2+4)} =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2+4} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + c$$

Тексеру.

Тексеру үшін екі жағынан туынды аламыз және анықталмаған интегралдың бірінші қасиетін қолданамыз.

$$\left[\int \frac{(4+2x^2)dx}{x^2(x^2+4)}\right]'_x = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + C\right]'_x$$

$$\frac{(4+2x^2)}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\left(4+x^2\right)};$$

$$\frac{(4+2x^2)}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x^2+4)} = \frac{x^2+4+x^2}{x^2(x^2+4)} = \frac{\left(4+2x^2\right)}{x^2\left(x^2+4\right)}$$

Сонымен, $\frac{(4+2x^2)}{x^2(x^2+4)} = \frac{\left(4+2x^2\right)}{x^2\left(x^2+4\right)}$ не дәлелдеу керек еді, сол шықты.

б)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-5x)^2}} = \int (8-5x)^{-\frac{2}{3}} dx = \left| d(8-5x) = -5dx \right| = -\frac{1}{5} \int (8-5x)^{-\frac{2}{3}} (-5)dx =$$

$$= \int (8-5x)^{-\frac{2}{3}} d(8-5x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(8-5x)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(8-5x)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(8-5x)} + C.$$

Тексеру

$$\left[\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-5x)^2}}\right]'_x = \left[-\frac{3}{5}\sqrt[3]{(8-5x)}+C\right]'_x$$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{(8-5x)^2}} = -\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{(-5)}{3\sqrt[3]{(8-5x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(8-5x)^2}}$ Бұл дегеніміз берілген интеграл дұрыс шешілді.

в)

$$\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} = \left| \begin{matrix} \textit{интегралдыңастында} \\ \textit{тепе}-\textit{тендікқұртүрлендіру} \\ \textit{жасаймыз} \end{matrix} \right| = \int \frac{\left[\frac{3}{2}\cdot(2x+3)+2-\frac{9}{2}\right]dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} -$$

$$-\frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} = \frac{3}{2}\int (x^2+3x+3)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+3x+3) -$$

$$-\frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3)}} = \frac{3}{2}\frac{(x^2+3x+3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} =$$

(екінші интегралға 18^0 кесте формуласын қолданамыз)

$$= 3\sqrt{(x^2+3x+3)} - \frac{5}{2}\ln\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right| + C.$$

Сонымен,

$$\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} = 3\sqrt{(x^2+3x+3)} - \frac{5}{2}\ln\left|(x+\frac{3}{2})+\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right| + C.$$

г)

$$\int \frac{(\arcsin x)^2\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)\right| = \int (\arcsin x)^2\cdot d(\arcsin x) = \frac{(\arcsin x)^3}{3} + C$$

Сонымен, $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{(\arcsin x)^3}{3} + C.$

Мысал 16. Анықталмаған интегралды табыңыздар:

а) $\int xe^{2x}\cdot dx$; б) $\int x^3\cdot \ln x\cdot dx$; в) $\int (x+3)e^{-x}\cdot dx$ г) $\int x\cdot arctgx\cdot dx.$

Шешуі: Берілген интегралдарды бөлектеп, интегралдау формуласымен шығарамыз, демек

$\int ud\vartheta = u\cdot\vartheta - \int \vartheta\cdot du$ формуласын қолданамыз.

а) $\int xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ d\vartheta = e^{2x}dx; & \vartheta = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$

б)

$$\int x^3 \cdot \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{dx}{x} \\ d\vartheta = x^3 dx; & \vartheta = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \cdot \ln|x| - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \cdot \ln|x| - \frac{x^4}{16} + C.$$

в) $\int (x+3)e^{-x}dx = \left| \begin{matrix} u = x+3; & du = dx \\ d\vartheta = e^{-x}dx; & \vartheta = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$

$= -(x+3) \cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+3) \cdot e^{-x} - e^{-x} + C.$

$\int x \cdot arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx; & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ d\vartheta = xdx; & \vartheta = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$

г) $\frac{x^2}{2} \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1-1)}{x^2+1} \cdot dx =$

$= \frac{x^2}{2} \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)}{\left(x^2+1\right)} \cdot dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot arctgx - \frac{x}{2} + \frac{arctgx}{2} + C.$

Мысал 17. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+2x+5}$; в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot dx}{\sqrt{x}}$;

г) $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$; d) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; e) $\int tg^3 xdx$.

Шешуі: Берілген анықталмаған интегралдарды ауыстыру тәсілімен шығарамыз, демек

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$ формуласын қолданамыз.

а)

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \sqrt{x} = t; \quad x = t^2, dx = 2tdt \right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t^2 dt}{1+t} = 2\int \frac{(t^2-1+1)dt}{t+1} = 2\int \frac{(t^2-1)}{(t+1)} \cdot dt +$$

$$+ 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\int \frac{(t+1)(t-1)}{(t+1)} \cdot dt + 2\int \frac{dt}{(t+1)} = 2\int (t-1)dt + 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\int tdt - 2\int dt + 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + C = x + 2\ln\left|\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x} + C\right|.$$

б) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+5)} = \left| \begin{array}{l} \text{Бµліміндегі квадраттыќ ‰шм‰шенің} \\ \text{толыќ квадратын ажыратамыз :} \end{array} \right| =$

$(x^2+2x+5) = (x^2+2x+1)+4 = (x+1)^2+4$, ауыстыру жасаймыз: $x+1 = t$; $dx = dt$

$$= \int \frac{[(2x+2)+1]dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{2(x+1)dx}{(x+1)^2+4} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{2t \cdot t}{t^2+4} + \int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{d(t^2+4)}{(t^2+4)} +$$

$$+ \int \frac{dt}{t^2+4} = \ln(t^2+4) + \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \ln\left|(x+1)^2+4\right| + \frac{1}{2} arctg \frac{(x+1)}{2} + C.$$

в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t; x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{e^t}{t} \cdot 2t \cdot dt = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

г) $\int \frac{xdx}{3-2x^2} = \left| \begin{array}{l} 3-2x^2 = t \\ -4xdx = dt \\ xdx = -\frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{t} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4}\ln|t| + c = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2 + c\right|$

д) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \text{тригонометриялық ауыстыру} \\ \text{жасаймыз, айталық } x=a\sin t, = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos tdt = \\ dx=a\cos tdt,\ \sin t=\frac{x}{a},\ \ t=\arcsin\frac{x}{a} \end{array} \right|$

$$= a^2 \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos tdt = a^2 \int \cos t \cdot \cos tdt = a^2 \int \cos^2 tdt = a^2 \int \frac{(1+\cos 2t)}{2} \cdot dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2tdt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\int \cos 2tdt \cdot d(2t) = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + c =$$

(енді бастапқы айнымалы x-ке көшеміз)

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin 2(\arcsin\frac{x}{a}) + c =$$

кішкене түрлендіру жасаймыз:

$\sin 2(\arcsin\frac{x}{a}) = 2\sin(\arcsin\frac{x}{a}) \cdot \cos(\arcsin\frac{x}{a}) =$

$$=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}=\frac{2x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}=$$

$$=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+c$$

Сонымен, $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c$

е) $\int tg^3xdx = \left| \begin{array}{l} \text{Айталық, tgx=z,} \\ \text{x=arctgz, dx=}\frac{dz}{1+z^2} \end{array} \right| = \int\frac{z^3dz}{1+z^2}=$

Рационал бөлшек бұрыс, сол себептен алымын бөліміне бөлеміз.

$$\begin{array}{r|l} Z^3 & 1+z^2 \\ \hline \underline{z^3+z} & z \\ -z & \end{array}$$

(қалдық) Сонымен, $\frac{z^3}{z^2+1}=$

$=z-\frac{z}{z^2+1}$

$$=\int(z-\frac{z}{z^2+1})dz=\int zdz-\int\frac{zdz}{(z^2+1)}=\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{2zdz}{z^2+1}=$$

(Енді бастапқы айнымалы x–ке көшеміз)

$$=\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right|+c=\frac{tg^2x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|tg^2x+1\right|+c$$

Сонымен, $\int tg^3xdx=\frac{tg^2x}{2}-\frac{1}{2}\ln(tg^2x+1)+c$

Мысал 18. Анықталмаған интегралды есептеңіз:

$$\int \frac{(x^5+x^4-8)}{\left(x^3-4x\right)}\cdot dx$$

Шешуі: Интегралдың астындағы рационал бөлшек бұрыс, сол себептен алымын бөліміне бөлеміз.

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-8 & x^3+4x \\ \underline{x^5+4x^3} & x^2+x+4 \end{array} \qquad \text{(бүтін бөлімі)}$$

$$\begin{array}{l} x^4+4x^3-8 \\ \underline{x^4+4x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x^3+4x^2-8 \\ \underline{4x^3+16x} \end{array}$$

$$4x^2+16x-8 \qquad \text{(қалдық бөлімі)}$$

Сонымен, $\dfrac{(x^5+x^4-8)}{\left(x^3-4x\right)}$=(x^2)+x+4)+ $\dfrac{(4x^2+16x-8)}{\left(x^3-4x\right)}$ $\displaystyle\int \frac{(x^5+x^4-8)}{\left(x^3-4x\right)}\cdot dx=$

$$=\int\left[\left(x^2+x+4\right)+\frac{\left(4x^2+16x-8\right)}{\left(x^3-4x\right)}\right]dx=\int\left(x^2+x+4\right)dx+\int\frac{\left(4x^2+16x-8\right)}{\left(x^3-4x\right)}dx$$

Бөліміндегі көпмүшенің түбірлері нақты және әртүрлі $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=2$.

Енді $\dfrac{\left(4x^2+16x-8\right)}{x^3-4x}=\dfrac{\left(4x^2+16x-8\right)}{x(x+2)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{(x-2)}+\dfrac{C}{(x+2)}$

Оң жағындағы бөлшектерді ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{\left(4x^2+16x-8\right)}{\left(x^3-4x\right)}=\frac{A\left(x^2-4\right)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

Бөлімдері бірдей болғандықтан олардың алымдарын теңестіреміз:

$$4x^2+16x-8=A(x^2-4)+B\cdot x(x+2)+C\cdot x(x-2)$$

немесе, $\qquad 4x^2+16x-8=(A+B+C)x^2+2(BC)x-4A$

Енді үш белгісізден тұратын жүйе құрамыз және оны шешеміз.

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B+C=4 \\ x^1 & 2(B-C)=16 \\ x^0 & -4A=-8 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=2;\ \mathrm{B}=5;\mathrm{C}=\text{-}3 \\ \\ \end{cases}$$

Сонымен, $\dfrac{\left(x^5+x^4-8\right)}{\left(x^3-4x\right)}=x^2+x+4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{(x-2)}-\dfrac{3}{(x+2)}$

Бастапқы интегралдың астындағы функцияның орнына апарып қоямыз, сонда

$$\int \frac{\left(x^5+x^4-8\right)}{\left(x^3-4x\right)} вч = \int \left(x^2+x+4\right)dx + \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{5dx}{x-2} - \int \frac{3dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2 \cdot (x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C.$$

Мысал 19. Ньютон-Лейбниц формуласын пайдаланып, анықталған интегралды есептеңіз:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+3)\cos x dx$; б) $\int_0^1 x\left(2-x^2\right)^5 dx$

Шешуі. а) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+3)\cos x dx = \left| \begin{matrix} Бұлшектеп & интегралдаймыз \\ \mathrm{u} = 2\mathrm{x}+3; & du = 2dx \\ dv = \cos x dx; & v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= (2x+3)\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = (\pi+3) + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi+3-2) = \pi+1.$$

Сонымен, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+3)\cos x dx = \pi+1$

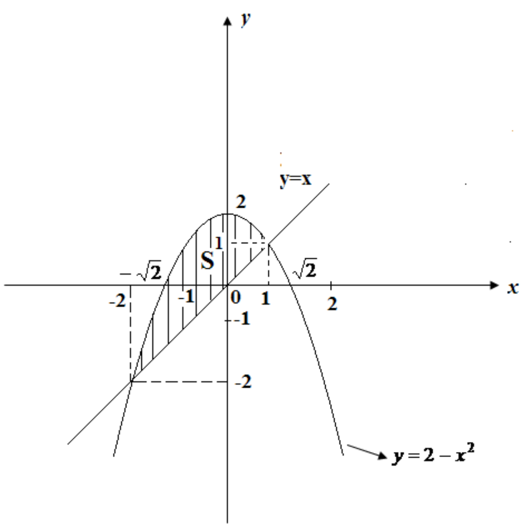
б) $$\int_0^1 x\left(2-x^2\right)^5 dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(2-x^2\right)^5 (-2x)dx = \left|(2x)dx = d\left(2-x^2\right)\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(2-x^2\right)^5 \cdot d\left(2-x^2\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(2-x^2\right)^6}{6}\Big|_0^1 = -\frac{1}{12} + \frac{64}{12} = \frac{-1+64}{12} = \frac{63}{12}$$

Сонымен, $\int_0^1 x\left(2-x^2\right)^5 dx = \frac{63}{12}$.

Мысал 20. Мына y=x түзуімен және $y=2-x^2$ параболасымен шектелген дененің ауданын есептейік.

Шешуі: Алдымен берілген y=x және $y=2-x^2$ графиктерін сызайық. Сонымен, берілген дене сызылды. Параболаны салу үшін оның тедеуін былай жазамыз: $y=-(x^2-2)$.



Қажетті ауданды есептеу үшін берілген сызықтардың қиылысу нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \{x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1$$

Сонымен, a=x_1=-2, в=x_2=1. Енді (9) формуланы қолдану арқылы берілген дененің ауданын табамыз:

$$S = \int_a^в [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\left(\mu лш^2\right)$$

Мысал 21. $y^2=x^3$ қисығының x=0 нүктесінен x=1 нүктесіне дейінгі доғаның ұзындығын есептейік.

Шешуі: Берілген $y = \sqrt{x^3}$ функциясынан туынды алайық. Мұндағы (y≥0) ұйғарайық, сонда $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Сонымен (12) формула бойынша доғаның ұзындығы тең

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}-1}\right] = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\sqrt{13} - 1\right).$$

Сонымен, $L = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\sqrt{3} - 1\right)$ (өлш.)

Мысал 22. $y=e^{-x}$ қисығымен және y=0, x=0, x=1 теңдеулерімен шектелген дененің ox өсі бойынша айналудан пайда болған дененің көлемін табайық.

Шешуі: (16) формула бойынша көлемді есептейміз

$$V_x = \pi\int_a^в \left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 e^{-2x} dx = -\pi\left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 1{,}36(\mu лш).$$

9 №1 БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ

1. Есептерде 1-10 дейінгі берілген төрт вектор $\overline{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$, $\overline{в}=\{в_1;в_2;в_3\}$, $\overline{c}=\{c_1;c_2;c_3\}$ және $\overline{d}=\{d_1;d_2;d_3\}$ бір базисте. Табу керек, осы төрт вектордың базис құратындығын және осы базистегі $\overline{d}$ - векторының координатаны табу керек. Алынған жүйені; а) Крмаер ережесімен; немесе б) Гаусс әдісімен.

1) $\overline{a}=\{1;2;3\}$, $\overline{в}=\{-1;3;2\}$, $\overline{c}=\{7;-3;5\}$, $\overline{d}=\{6;10;17\}$.

2) $\overline{a}=\{4;7;8\}$, $\overline{в}=\{9;1;3\}$, $\overline{c}=\{2;-4;1\}$, $\overline{d}=\{7;4;11\}$.

3) $\overline{a}=\{8;2;3\}$, $\overline{в}=\{4;6;10\}$, $\overline{c}=\{3;-2;1\}$, $\overline{d}=\{7;4;11\}$.

4) $\overline{a}=\{10;3;1\}$, $\overline{в}=\{1;4;2\}$, $\overline{c}=\{3;9;2\}$, $\overline{d}=\{19;30;7\}$.

5) $\overline{a}=\{2;4;1\}$, $\overline{в}=\{1;3;6\}$, $\overline{c}=\{5;3;1\}$, $\overline{d}=\{24;20;6\}$.

6) $\overline{a}=\{1;7;3\}$, $\overline{в}=\{3;4;2\}$, $\overline{c}=\{4;8;5\}$, $\overline{d}=\{7;32;14\}$.

7) $\overline{a}=\{1;-2;3\}$, $\overline{в}=\{4;7;2\}$, $\overline{c}=\{6;4;2\}$, $\overline{d}=\{14;18;6\}$.

8) $\overline{a}=\{1;4;3\},\overline{в}\{6;8;5\},\overline{c}=\{3;1;4\};\overline{\mathrm{d}}\{21;18;33\}$.

9) $\overline{a}=\{2;7;3\},\overline{в}\{3;1;8\},\overline{c}=\{2;-7;4\};\overline{\mathrm{d}}\{16;14;27\}$

10) $\overline{a}=\{7;2;1\},\overline{в}\{4;3;5\},\overline{c}=\{3;4;-2\};\overline{\mathrm{d}}\{2;\text{-}5;\text{-}13\}$.

2. Есептерде 11-20 дейінгі берілген есептерде үш бұрышты пирамиданың $A_1A_2A_3A_4$ төбелерінің координаталары берілген A_1 (x_1, y_1, z_1), A_2(x_2 y_2 z_2), A_3(x_3 y_3 z_3), A_4 (x_4, y_4, z_4). Табу керек: 1) A_1A_2 қырының ұзындығын; 2) A_1A_2 және A_1A_4 қырларының арасындағы бұрыштың косинусын; 3) $A_1A_2A_3$ жағымен A_1A_4 қырыныңарасындағы бұрышын; 4) $A_1A_2A_3$ – жағының ауданын; 5) пирамиданың көлемін; 6) A_1A_2 – түзуінің теңдеуін; 7) $A_1A_2A_3$ – жазықтығының теңдеуін; 8) A_4 – нүктесінен $A_1A_2A_3$ жағына түсірілген биіктіктің теңдеуін. Пирамиданың сызбасын сызу керек.

11) $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.

12) $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4; 10; 2)$, $A_3(2; 8;4)$, $A_4(9;6; 4)$.

13) $A_1(4;6; 5)$, $A_2(6; 9; 4)$, $A_3(2; 10; 10)$, $A_4(7; 5; 9)$.

14) $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.

15) $A_1(10; 6; 6)$, $A_2(-2; 8; 2)$, $A_3(6; 8; 9)$, $A_4(7; 10; 3)$.

16) $A_1(1; 8; 2)$, $A_2(5; 2; 6)$, $A_3(5; 7; 4)$, $A_4(4; 10; 9)$.

17) $A_1(6; 6; 5)$, $A_2(4; 9; 5)$, $A_3(4; 6; 11)$, $A_4(6; 9; 3)$.

18) $A_1(7; 2; 2)$, $A_2(5; 7; 7)$, $A_3(5; 3; 1)$, $A_4(2; 3; 7)$.

19) $A_1(8; 6; 4)$, $A_2(10; 5; 5)$, $A_3(5; 6; 8)$, $A_4(8; 10; 7)$.

20) $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

2. Есептерде 21-30 дейінгі берілген комплекстік а саны. Табу керек: 1) Осы а – санын алгебралық және тригонометриялық түрде жазыңыз: 2) $z^3+a=0$ теңдеуінің барлық түбірлерін табыңыз. Бұл есептерді шығару үшін (мысал 3) қараңыз.

21) $a = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(1+i)}$

22) $a = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(1-i)}$

23) $a = \frac{4}{(1+i\sqrt{3})}$

24) $a = -\frac{4}{(1-i\sqrt{3})}$

25) $a = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(1+i)}$

26) $a = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(1-i)}$

27) $a = \frac{4}{(1-i\sqrt{3})}$

28) $a = -\frac{4}{(\sqrt{3}-i)}$

29) $a = \frac{1}{(\sqrt{3}+i)}$

30) $a = \frac{1}{(\sqrt{3}-i)}$

4. Есептерде 31-40 дейінгі берілген есептерде Лопиталь ережесін қолданбай шектерді шешіңіз.

31) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$;

32) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{(\sqrt{2+x}-3)}{(x-7)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$;

33) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{x})}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{4[}\right)^{2x}$;

34) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

35) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\cos x-\cos^3 x\right)}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$;

36) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3+x+5x^4\right)}{\left(x^4-12x+1\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}\right)}{\left(x+x^2\right)}$;;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot ctg2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\cdot[\ln(x+3)-\ln x]$

37) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x-2x^2+5x^4\right)}{\left(2+3x^2+x^4\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+3x^2}-1\right)}{\left(x^2+x^3\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 6x)}{(1-\cos 2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\cdot[\ln(x-3)-\ln x]$.

38) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(5x^2-3x+1\right)}{\left(3x^2+x-5\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}\right)}{(x-3)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{(3x-3)}}$;

39) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(7x^4-2x^3+2\right)}{\left(x^4+3\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}\right)}{\left(x^2-5x\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 4x)}{2xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x2\to}(3x-5)^{\frac{2x}{\left(x^2-4\right)}}$.

40 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(8x^5-3x^2+9\right)}{\left(2x^5+2x^2+5\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)}{\left(\sqrt{2}-2\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\cdot ctgx$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(3x-8)^{\frac{2}{(x-3)}}$

5. Есептерде 41-50 дейінгі берілген х-тің мәндерінің өзгеруіне байланысты, әртүрлі аналитикалық өрнекпен функция y=f(x) берілген. Табу керек:

1) Функцияның үзіліс нүктелерін, егер де олар болса;

2) Біржақты шектерін және функцияның үзіліс нүктеләріндегі секірісін:

3) Функцияның графигін сызыңыз

41) $f(x)=\begin{cases}(x+4), & \text{егер де} \quad x<-1;\\ \left(x^2+2\right), & \text{егер де} \quad -1\le x<1;\\ 2x, & \text{егер де} \quad x\ge 1.\end{cases}$

42) $f(x)=\begin{cases} (x+2), & \text{егер де} \quad x \le 1; \\ (x^2+1), & \text{егер де} \quad -1 < x \le 1; \\ (-x+3), & \text{егер де} \quad x > 1. \end{cases}$

43) $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{егер де} \quad x \le 0; \\ (x-1)^2, & \text{егер де} \quad 0 < x < 2; \\ (x-3), & \text{егер де} \quad x \ge 2. \end{cases}$

44) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{егер де} \quad x \le 0; \\ (x^2+1), & \text{егер де} \quad 0 < x < 1; \\ x, & \text{егер де} \quad x \ge 1. \end{cases}$

45) $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{егер де} \quad x \le 0; \\ x^2, & \text{егер де} \quad 0 < x \le 2; \\ (x+1), & \text{егер де} \quad x > 2. \end{cases}$

46) $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{егер де} \quad x \le 0; \\ \sin x, & \text{егер де} \quad 0 < x \le \pi; \\ (x-2), & \text{егер де} \quad x > \pi. \end{cases}$

47) $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & \text{егер де} \quad x \le -1; \\ (x+1)^2, & \text{егер де} \quad -1 < x \le 0; \\ x, & \text{егер де} \quad x > 0. \end{cases}$

48) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{егер де} \quad x \le 0; \\ tgx, & \text{егер де} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 2, & \text{егер де} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

49) $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{егер де} \quad x \le 0; \\ (x^2+1), & \text{егер де} \quad 0 < x \le 1; \\ 2, & \text{егер де} \quad x > 1. \end{cases}$

50) $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{егер де} \quad x \le 0; \\ \sqrt{x}, & \text{егер де} \quad 0 < x < 4; \\ 1, & \text{егер де} \quad x \ge 4. \end{cases}$

10 №2. БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ

Туынды және оның қолданулары

1. Есептерде 51-60 дейінгі берілген функциялардың туындыларын y_x^1 табыңыз.

51) а) $y = \dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+3x-2}}$; б) $y = e^{\arcsin\sqrt{2x-1}}$

в) $y = e^y + 5x$; г) $\begin{cases} x = 4(\sin t - t\cos t) \\ y = 4(\cos t - t\sin t) \end{cases}$

52) а) $y = \dfrac{6x+7}{\sqrt{x^2-6x-3}}$; б) $y = \ln\sin\left(e^{2\sqrt{x}}\right)$;

в) $y^2 = \sin y - x^2$; г) $\begin{cases} x = 4\left(2t^2+5\right) \\ y = \left(4t^2-3\right) \end{cases}$

53) а) $y = \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; б) $y = \left(e^{\sin^2 x} - tg3x\right)^3$

в) $tgy = xy^3 + 7$; г) $\begin{cases} y = e^t \cdot \cos t \\ x = e^t \cdot \sin t \end{cases}$

54) а) $y = \dfrac{\left(x^2-7\right)}{\sqrt{x^3-9x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

в) $e^y = 4x - 3y$; г) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(t - \cos t) \end{cases}$

55) а) $y = \dfrac{1+x^2}{\sqrt{x^3+7}}$; б) $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{x+4}}{2}$

в) $x\sin y - y\cos y = 0$; г) $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$

56) а) $y = \dfrac{x^3+3}{\sqrt{x^4+x}}$; б) $y = \arcsin e^{x^2}$;

в) $2x^2+xy-y^3=0$; г) $\begin{cases} x = 6t \cdot \cos t \\ y = 6t\sin t \end{cases}$

57) а) $y = \dfrac{x\ \ +}{\sqrt{x^2+3x+}}$; б) $y = tg^2\left(x^3+1\right)$

в) $y^2 + 2xy + x^3 = 0$; г) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}t^3 - 1 \\ x = t^2 + 1 \end{cases}$

58) а) $y=\dfrac{3x+5}{\sqrt{x^3+6x-7}}$; б) $y=x\cdot\sqrt{1+x^2}$

в) $\ln y=arctg\dfrac{x}{y}$; г) $\begin{cases} x=\cos 5t \\ y=\sin 5t \end{cases}$

59) а) $y=\dfrac{5x^2}{\sqrt{x^3+5x^2+3}}$; б) $y=e^{arctg\sqrt{x}}$

в) $x-y+e^y\cdot arctgx=0$; г) $\begin{cases} x=3\cos^2 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

60) а) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^3+3x^2-7}}$; б) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$

в) $2x^2+xy-y^3=0$; г) $\begin{cases} x=e^{2t}+t \\ y=-\cos t \end{cases}$

2. Есептерде 61-70 дейінгі берілген функциялардың dy дифференциалының көмегімен көрсетілген нүктедегі мәнін жуық шамамен есептеу керек.

61) y=arctgx, x=1,02

62) $y=\sqrt[3]{x}$, x=26,19

63) $y=\sqrt[4]{x}$, x=16,64

64) $y=\sqrt{x}$, x=8,76

65) $y=\sqrt[3]{x}$, x=26

66) $y=x^3+x^2$, x=2,01

67) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$, x=2,9

68) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, x=1,58

69) $y=\sqrt[5]{x}$, x=31,19

70) y=sinx, $x=29^0$.

3. Есептерде 71-80 дейінгі берілген функциялардың y=f(x) ең кіші және ең үлкен мәндерін берілген [a; в] кесіндісінде табыңыздар.

71) f(x)=x3-12x+7; [0; 3]

72) $f(x)=x^5-\dfrac{5}{3}x^3+2$; [0; 2]

73) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x$; $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

74) $f(x)=3x^4-16x^3+2$; [-3 1]

75) $f(x)=x^3-3x+1$; $\left[\frac{1}{2};2\right]$

76) f(x)=x4+4x; [-2; 2]

77) f(x)=$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x$; [0; $\frac{\pi}{2}$]

78) $f(x)=81x-x^4$; [-1; 4]

79) $f(x)=3-2x^2$; [-1; 3]

80) f(x)=x-sinx; [-π;].

4. Есептерде 81-90 дейінгі берілген функцияларды дифференциалдық әдіспен зерттеңіз және графигін тұрғызыңыз.

81) $y=\frac{2x^2}{(2x-1)}$;

82) $y=\frac{x^2-2x}{(x+1)}$;

83) $y=\frac{x}{(x^2-4)}$;

84) $y=\frac{x^2+1}{(x^2-1)}$;

85) $y=\frac{x^2+2x}{(x-1)}$;

86) $y=\frac{x^2}{2(x-1)}$;

87) $y=\frac{x^2-5}{(x+3)}$;

88) $y=\frac{x}{(x^2+1)}$;

89) $y=\frac{x^2-6}{(x-2)}$;

90) $y=\frac{x^2+1}{(x-3)}$

5. Есептерде 91-100 дейінгі берілген анықталмаған және анықталған интегралдарды есептеп, а) б) пунктерінде нәтижелерін дифференциалдаумен тексеру керек.

91) а) $\int\frac{\cos\ xds}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; б) $\int x^2e^{3x}dx$; в) $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; г) $\int\frac{dx}{(4x^3-x)}$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

92) а) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int x^2 \sin 2x \cdot dx$; в) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; г) $\int \frac{(x-1)dx}{(x^3+1)}$;

d) $\int_0^{\pi} \sin 3x \cdot \cos 7x dx$.

93) а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int \sqrt{x} \ln x dx$; в) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+8x+4}}$; г) $\int \frac{\cos x dx}{(\sin^2 x+4)}$;

d) $\int_0^4 \frac{x dx}{(x^4+1)}$.

94) а) $\int e^{-x^4} x^3 dx$; б) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$; в) $\int x \ln 3x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)} dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x dx$.

95) а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \cdot \arcsin \frac{1}{x} dx$; в) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$; г) $\int \frac{(4 arctgx - x)dx}{(1+x^2)}$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}$.

96) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(x^3+x^2+2x+2)}$; в) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - e^{-x}}}$; г) $\int x \cdot 3^{\frac{x}{2}} dx$;

d) $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x^2+4x+5)}$.

97) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; б) $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x \sin 2x dx$; г) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^4+4x^2}}$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos dx$.

98) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-5x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; в) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; г) $\int \frac{(x+3)dx}{(x^3+x^2-2x)}$; d) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

99) $\int \frac{(x + arctgx)dx}{(1+x^2)}$; б) $\int x \sin 2x dx$; в) $\int \frac{(8x+3)dx}{(x^2+2x+5)}$; г) $\int \frac{dx}{(x^4+2+x^2+1)}$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{(1+\sin^2 x)}$.

100) $\int \frac{(x+\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int x^2 \cdot \ln x dx$; в) $\int \frac{(x-7)dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)}$;

d) $\int_1^4 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

6. Есептерде 101-110 дейінгі анықталған интегралды қолданып, есептер шығару.

101) Координат өстерімен, демек x=0, y=0, x=3 түзуімен және $y=x^2+1$ параболамен шектелген дененің ауданын табыңыз.

102) y=lnx қисығымен анықталған $x_1=\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{8}$ нүктелеріне сәйкес келетін доғаның ұзындығын табыңыз.

103) y=sinx қисығының бір жарты толқынының ох өсімен айналғанда шыққан дененің x=0, x=π нүктелеріне сәйкес келетін, көлемін табыңыз.

104) $y=3x^2+1$ қисығымен және y=3x+7 түзуімен шектелген дененің ауданын табыңыз.

105) $y=2x-x^2$ қисығымен және y=-x түзуіәмен шектелген дененің ауданын табыңыз.

106) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$ қисығының 1≤x≤2 аралығындағы доғаның ұзындығын табамыз.

107) Циклойданың бір аркасымен және ох өсімен шектелген дененің ауданын табыңыз, егер де x=a(t-sint); y=a(1-cost).

108) $y=\frac{x^2}{2}$ қисығының x=0 және x=1 нүктелерінің аралығындағы доғаның ұзындығын табыңыз.

109) y=1, y=2 түзулерімен x·y=4 гиперболасымен шектелген қисық сызықты трапецияның $o\overline{y}$ өсімен айналғандағы шыққан дененің көлемін табыңыз.

110) $y=4x-x^2$ қисығымен және y=0 түзуімен шектелген денеің ауданын табыңыз.

Тапсырмалар кестесі

Вариант	Бақылау тапсырма есептердің нөмірлері	
	№1 тапсырма	№2 тапсырма
1	1, 11, 21, 31, 41	51, 61, 71, 81, 91, 101
2	2, 12, 22, 32, 42	52, 62, 72, 82, 92, 102
3	3, 13, 23, 33, 43	53, 63, 73, 83, 93, 103
4	4, 14, 24, 34, 44	54, 64, 74, 84, 94, 104
5	5, 15, 25, 35, 45	55, 65, 75, 85, 95, 105
6	6, 16, 26, 36, 46	56, 66, 76, 86, 96, 106
7	7, 17, 27, 37, 47	57, 67, 77, 87, 97, 107
8	8, 18, 28, 38, 48	58, 68, 78, 88, 98, 108
9	9, 19, 29, 39, 49	59, 69, 79, 89, 99, 109
10	10, 20, 30, 40, 50	60, 70, 80, 90, 100, 110